UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO

Roberta Elaine Domingos de Araújo

A Técnica de Simulação de Monte Carlo Aplicada ao Cálculo de Áreas no Ensino Médio

Recife

Janeiro de 2025

Roberta Elaine Domingos de Araújo

A Técnica de Simulação de Monte Carlo Aplicada ao Cálculo de Áreas no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Departamento de Matemática

Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Orientador: Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros

Recife

Janeiro de 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

A658t Araújo, Roberta Elaine Domingos de.
A técnica de simulação de Monte Carlo aplicada ao cálculo de áreas no ensino médio / Roberta Elaine Domingos de Araújo. – Recife, 2025.
37 f.; il.

Orientador(a): Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros.
Co-orientador(a): Moacyr Cunha Filho.
Co-orientador(a): Wagner Rodrigues Costa.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Monte Carlo. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Geometria. 4. Probabilidade 5. Estatística. I. Barros, Kleber Napoleão Nunes de Oliveira, orient. II. Cunha Filho, Moacyr, coorient. III. Costa, Wagner Rodrigues, coorient. IV. Título

CDD 510

Roberta Elaine Domingos de Araújo

A Técnica de Simulação de Monte Carlo Aplicada ao Cálculo de Áreas no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 31/01/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros (Orientador e Presidente)
Departamento de Estatística e Informática - UFRPE

Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho
Departamento de Estatística e Informática - UFRPE

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Costa
Departamento de Educação - UFRPE

Agradecimentos

Minha gratidão, em primeiro lugar, a Deus, por me conceder força e as oportunidades que me trouxeram até aqui.

Agradeço à minha família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo incentivo constante.

Sou imensamente grata ao professor Kleber Barros por sua orientação, paciência e compreensão ao longo desta jornada.

Meu reconhecimento também vai a todos os meus professores, pelo incentivo constante durante o curso.

Por fim, agradeço aos amigos que conquistei na graduação e em especial na Residência Estudantil, pelo apoio incondicional e por transformarem os dias mais difíceis em momentos mais leves e repletos de esperança.

“A Matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.”

(Malba Tahan)

Resumo

Este trabalho apresenta a aplicação da técnica de integração de Monte Carlo para o cálculo de áreas de figuras planas, com o objetivo de fortalecer o ensino de Matemática no Ensino Médio. A metodologia inclui uma abordagem prática e experimental, envolvendo simulações computacionais no software R e atividades lúdicas em sala de aula, como o uso de materiais concretos para estimar áreas de figuras geométricas. A fundamentação teórica abrange conceitos de geometria, probabilidade e estatística, fornecendo um suporte consistente para a aplicação do método. Os resultados indicaram que o uso da técnica de Monte Carlo promoveu uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e despertou maior interesse dos alunos pela disciplina. Além disso, verificou-se que o aumento no número de amostras aleatórias melhora a precisão das estimativas, validando a eficácia do método. Conclui-se que a integração de práticas interativas e ferramentas computacionais ao ensino possibilita uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, sendo uma estratégia valiosa para diferentes níveis de ensino.

Palavras-chave: Monte Carlo; Ensino de Matemática; Geometria; Probabilidade; Estatística.

Abstract

This study presents the application of the Monte Carlo integration technique for calculating areas of plane figures, aiming to enhance Mathematics education in high school. The methodology includes a practical and experimental approach, involving computational simulations using R software and engaging classroom activities, such as the use of tangible materials to estimate areas of geometric shapes. The theoretical framework encompasses concepts from geometry, probability, and statistics, providing a solid foundation for the method's application. The results indicated that the use of the Monte Carlo technique improved students' understanding of mathematical concepts and increased their interest in the subject. Additionally, it was observed that increasing the number of random samples enhances the precision of the estimates, validating the method's effectiveness. It is concluded that integrating interactive practices and computational tools into teaching enables more meaningful and contextualised learning, making it a valuable strategy for various educational levels.

Keywords: Monte Carlo; Educational Mathematics; Geometry; Probability; Statistics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquerda: Plimpton 322 — Uma tabela contendo os triplos pitagóricos . Meio: YBC 11120 — Notas gravadas sobre o cálculo da área de um círculo . Direita: YBC 7290 — Notas gravadas sobre o cálculo da área de um trapézio. Fonte: Shrouded Science – Medium[1] 15
Figura 2 – Representação de um retângulo com destaque para suas medidas. 16
Figura 3 – Figura de um quadrado destacando as medidas do seu lado. 17
Figura 4 – Triângulo com suas medidas e elementos geométricos destacados. 17
Figura 5 – Ilustração de um losango evidenciando suas dimensões. 18
Figura 6 – Figura de um trapézio destacando suas propriedades métricas. . . . 18
Figura 7 – Representação de um círculo e a medida do seu raio. 19
Figura 8 – Área da região S abaixo de uma função contínua. 19
Figura 9 – Representação gráfica do teorema da probabilidade total 22
Figura 10 – Área do círculo unitário por Integração de Riemann (esquerda) e Integração por Monte Carlo (direita). 24
Figura 11 – Gráfico da aproximação de $\pi/4$ pelo método de Monte Carlo. 28
Figura 12 – Alunos do Ensino Médio. 29
Figura 13 – Contagem dos grãos dentro da figura. 29
Figura 14 – Resposta da atividade do grupo 1. 31
Figura 15 – Resposta da atividade do grupo 2. 31
Figura 16 – Moldes das figuras planas. 35

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estimativas de $\pi/4$ para diferentes tamanhos de amostra n. 28

Lista de Quadros

A.1 Estimativa de área usando Monte Carlo no R 34

Sumário

Lista de ilustrações 7

1 INTRODUÇÃO 12
1.1 Apresentação do tema 12
1.2 Objetivos 13
1.3 Estrutura do Trabalho 13

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 14
2.1 Conceitos Matemáticos 14
2.1.1 Área do Retângulo 16
2.1.2 Área do quadrado 16
2.1.3 Área do triângulo 17
2.1.4 Área do Losango 17
2.1.5 Área do Trapézio 18
2.1.6 Área do Círculo 18
2.1.7 Conceito geral de Área - Integral de Riemann 19
2.2 Revisão de Probabilidade 20
2.3 A Técnica de Monte Carlo 23
2.3.1 Método de Monte Carlo Simples 24
2.4 Tecnologia e Ensino 25

3 METODOLOGIA 27

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO 28
4.1 Resultados das Simulações Computacionais 28
4.1.1 Aplicação: Estimação de π via técnica de Monte Carlo 28
4.2 Aplicação em Sala de Aula 29
4.3 Coleta de Dados 30
4.4 Análise da Aplicação em sala de Aula 30
4.5 Reflexões sobre a Abordagem 31

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 33

A ESTIMATIVA DA ÁREA DO CÍRCULO VIA MONTE CARLO . . . 34

B MOLDES UTILIZADOS NA PRÁTICA 35

REFERÊNCIAS 36

1 Introdução

1.1 Apresentação do tema

Os registros mais antigos de textos matemáticos, especialmente sobre o cálculo de áreas, provêm do Egito e, principalmente, da Babilônia. Essas civilizações desenvolveram, de forma empírica e por meio do raciocínio indutivo, métodos para resolver problemas práticos do cotidiano, como medição de terras, construções e atividades administrativas. Entre os tópicos abordados, destacam-se o Teorema de Pitágoras e o cálculo de áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos. Embora o conhecimento fosse aplicado de forma prática, "tanto os egípcios quanto os babilônios tinham procedimentos sistemáticos para resolver problemas que hoje chamaríamos de geométricos, envolvendo medidas" Pitombeira e Roque (2011).

O cálculo de áreas é amplamente utilizado por topógrafos, geólogos e arquitetos na elaboração de mapeamentos e plantas, uma prática que remonta aos antigos egípcios na demarcação de terras Dante (2005). Desde o ensino básico até o superior, o estudo de áreas de figuras planas, regulares e irregulares, pode envolver aproximações com retângulos ou o uso de fórmulas específicas.

O conceito de medida de área é introduzido ao longo da Educação Básica, especialmente no Ensino Fundamental II, quando os alunos começam a explorar as noções de medidas e grandezas. Nesse estágio, aprende-se a calcular a área de regiões planas, regulares e irregulares, utilizando a ideia de quadrados unitários. Muitos livros didáticos definem a unidade de medida de área como uma região quadrada de lado unitário e área igual a um, conforme Dante (2007): "Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada de região quadrada unitária". De forma complementar, Bonjorno e Olivares (2006) definem área como "a medida da superfície de uma figura geométrica plana limitada, expressa por um número seguido de uma unidade".

No contexto deste trabalho, a técnica de Monte Carlo é aplicada ao cálculo de áreas destacando a importância do raciocínio lógico-matemático e proporcionando uma compreensão mais aprofundada dos conceitos probabilísticos. São discutidas as vantagens e limitações da técnica de Monte Carlo, ressaltando sua capacidade de promover práticas pedagógicas interativas e baseadas na experimentação. As simulações computacionais utilizando o software `R`, permite a coleta e a análise de dados, bem como a interpretação dos resultados obtidos, facilitando a aplicação prática dos conceitos em sala de aula e promovendo uma aprendizagem ativa e contextualizada.

1.2 Objetivos

Demonstrar como a técnica de Monte Carlo pode ser utilizada para calcular áreas de figuras geométricas e como essa aplicação pode ser integrada ao ensino médio.

Os objetivos específicos foram traçados a fim de atingir o objetivo geral, são eles:

- Apresentar a teoria da técnica de Monte Carlo.
- Validar a técnica por meio de simulações computacionais.
- Relatar os resultados de uma aplicação prática em sala de aula.

1.3 Estrutura do Trabalho

Quanto à estrutura, o texto possui 5 capítulos.

No capítulo inicial, apresenta-se a introdução e os objetivos do trabalho. No segundo capítulo, tem-se um resumo dos conceitos matemáticos sobre definição de áreas geométricas, seguido de uma revisão de probabilidade e estatística abrangendo definições, teoremas e exemplos. Enfatiza-se também neste capítulo a Técnica de Monte carlo com uma breve história e suas aplicações, os fundamentos matemáticos e estatísticos dessa técnica e as vantagens e limitações de seu uso. Serão abordadas também as tecnologias no ensino e a importância das ferramentas computacionais no ensino da matemática.

No terceiro capítulo é retratado a descrição do processo de pesquisa deste trabalho. No quarto capítulo são apresentados os resultados através das simulações computacionais com demonstração gráfica e númerica da eficácia da técnica de Monte Carlo e a análise da aplicação em sala de aula. No último capítulo são mostradas as conclusões obtidas e as possibilidades de ampliações para trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Conceitos Matemáticos

Desde os tempos dos egípcios, que buscavam medir e delimitar suas terras — origem do termo “Geometria”, que significa “medida da terra”, o cálculo de áreas tem sido uma questão relevante na história da Matemática. Atualmente, profissionais como topógrafos, geólogos e arquitetos utilizam esse conhecimento para realizar mapeamentos e elaborar plantas. Na geografia e na cartografia, a área é definida como a projeção de uma porção da superfície terrestre em um plano horizontal. Dessa forma, mesmo que a superfície de uma montanha seja inclinada, sua área será calculada com base em sua projeção no plano horizontal.

Uma das civilizações que mais contribuíram para o avanço da matemática foram os mesopotâmicos, que registravam seus conhecimentos em tábuas de argila utilizando a escrita cuneiforme. Esses registros fornecem indícios de como a matemática era aplicada em sua sociedade, revelando sua importância para a organização administrativa, comercial e astronômica da época.

As civilizações antigas utilizavam a geometria de forma ampla, principalmente na construção e no planejamento urbano, demonstrando um conhecimento matemático mais avançado do que se imaginava. A Figura 1 estabelece uma conexão entre os métodos antigos e os conceitos modernos de cálculo de áreas, evidenciando a influência dessas civilizações, como os babilônios, na compreensão geométrica.

As tábuas de argila representadas na Figura 1, eram utilizadas por estudantes escribas para a realização de exercícios práticos, aplicando técnicas para calcular áreas de diferentes figuras geométricas. Entre os exemplos registrados, destaca-se a estimativa da área de um círculo, utilizando a aproximação de $\pi = 3$, Swetz (2014), e o cálculo da área de um trapézio, demonstrando a relevância desses conhecimentos para a evolução da matemática ao longo dos séculos.

Datadas de aproximadamente 1800 a.C., as tábuas de argila evidenciam os avanços matemáticos da civilização mesopotâmica, que já realizava cálculos de áreas de figuras geométricas e utilizava princípios semelhantes ao teorema de Pitágoras, representado na parte inferior esquerda da imagem Friberg (2007).

Embora provavelmente atribuamos o Teorema de Pitágoras ao seu homônimo Pitágoras, isso é incorreto e vemos fortes evidências do conhecimento do teorema na Antiga Mesopotâmia. Na tabuinha de argila Plimpton 322 escrita por volta de 1800 a.C., vemos uma tabela para o cálculo das triplas pitagóricas. Estes são números inteiros

que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$ e, o mais impressionante, isso foi visto mais de 1000 anos antes mesmo de Pitágoras nascer.

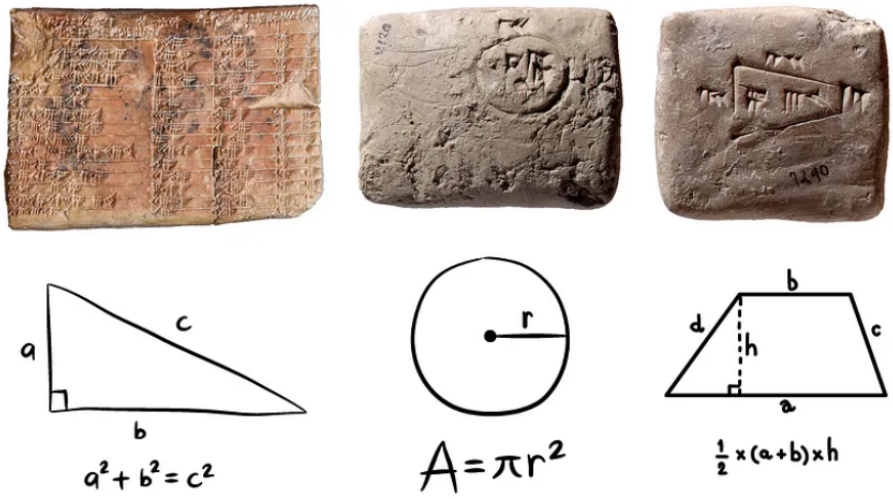

Figura 1 – Esquerda: Plimpton 322 — Uma tabela contendo os triplos pitagóricos . Meio: YBC 11120 — Notas gravadas sobre o cálculo da área de um círculo . Direita: YBC 7290 — Notas gravadas sobre o cálculo da área de um trapézio.
Fonte: Shrouded Science – Medium[1]

A abordagem geométrica antiga, exemplificada pelas representações do círculo, do triângulo retângulo e do trapézio, reflete a necessidade prática de mensurar áreas para a construção de templos, canais de irrigação e planejamento agrícola Robson (2008).

Área é um conceito matemático que pode ser definida como quantidade de espaço bidimensional, ou seja, de superfície. Existem várias unidades de medida de área, sendo a mais utilizada o metro quadrado m^2 e os seus múltiplos e sub-múltiplos. São também muito usadas as medidas agrárias: are, que equivale a $100\ m^2$; e seu múltiplo hectare, que equivale a $1000\ m^2$.

O cálculo de áreas provavelmente teve origem com os sacerdotes, que arrecadavam impostos calculando intuitivamente a extensão dos campos apenas pela observação visual. Com o tempo, perceberam que trabalhadores revestiam partes retangulares do chão com pedras quadradas. Notaram que, para determinar a quantidade de pedras necessárias, bastava contar o número de quadrados de uma fileira e multiplicar pelo total de fileiras.

Assim, surgiu a fórmula para calcular a área de um retângulo, que é obtida pelo produto da base pela altura. Posteriormente, foi desenvolvida uma fórmula para calcular a área de um triângulo. Esse avanço baseou-se em um raciocínio geométrico:

[1] Disponível em: <https://shroudedscience.medium.com/ancient-mathematical-origins-c59096bd2920>. Acessado em: 12/01/2025.

ao dividir um quadrado ou retângulo ao meio por uma diagonal, obtinha-se a área de um triângulo. Dessa forma, a área do triângulo passou a ser calculada como a metade da área de um quadrado ou retângulo correspondente.

A área de uma figura plana representa a medida de sua superfície. O cálculo da área varia conforme o formato da figura, utilizando fórmulas específicas para cada caso. Entre as principais figuras planas destacam-se o triângulo, o círculo, o quadrado, o retângulo, o losango e o trapézio, cada um com uma fórmula própria para determinar sua área. É importante mencionar que o conceito de área é abordado na geometria plana, que trata de objetos bidimensionais.

2.1.1 Área do Retângulo

Definição 1. Retângulo é o quadrilátero formado por quatro lados, dois deles na vertical e dois na horizontal. Da mesma forma que o quadrado, ele apresenta quatro ângulos internos de $90°$ (retos). Considere uma região retangular R (Figura 2) de comprimento b e largura h (ou base b e altura h), em que b e h são números reais. A área dessa região R é dada por:

$$\mathbf{A = b \times h}$$

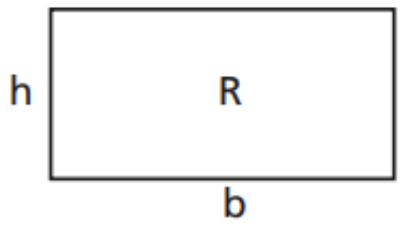

Figura 2 – Representação de um retângulo com destaque para suas medidas.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

2.1.2 Área do quadrado

Definição 2. Quadrado é um quadrilátero regular congruente, ou seja, ele possui quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos internos de $90°$, os quais são chamados de ângulos retos. Conforme ilustrado na (Figura 3), a área de uma região quadrada cujo lado mede a é dada por:

$$\mathbf{A = a \times a}$$

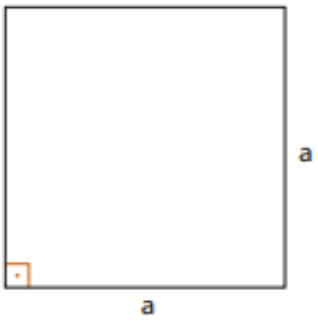

Figura 3 – Figura de um quadrado destacando as medidas do seu lado.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

2.1.3 Área do triângulo

Definição 3. Triângulo é o polígono formado por três lados. São classificados de acordo com as medidas dos lados, bem como seus ângulos. Podemos escrever a área de uma região triangular (Figura 4) como a metade do produto da medida da base b pela medida da altura h correspondente.

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{h}}{2}$$

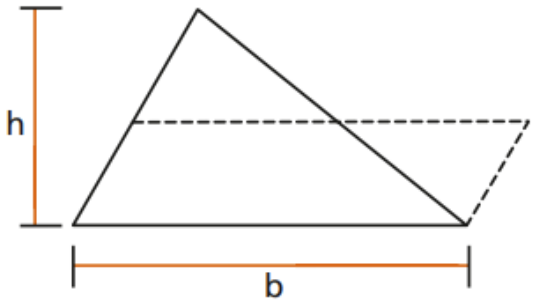

Figura 4 – Triângulo com suas medidas e elementos geométricos destacados.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

2.1.4 Área do Losango

Definição 4. Losango é um quadrilátero equilátero formado por quatro lados iguais. Apresenta dois lados e ângulos opostos congruentes e paralelos, com duas diagonais que se cruzam perpendicularmente. Ele possui dois ângulos agudos (menores que 90º) e dois ângulos obtusos (maiores que $90°$). Toda região limitada por um losango (Figura 5) tem a mesma área de uma região retangulaR. Assim, a área da região limitada por um losango de diagonais $d1$ e $d2$, é dada pela metade do produto destas.

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{d}1 \times \mathbf{d}2}{2}$$

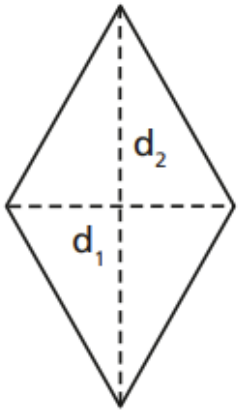

Figura 5 – Ilustração de um losango evidenciando suas dimensões.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

2.1.5 Área do Trapézio

Definição 5. Quadrilátero notável com dois lados e bases paralelas, onde uma é maior e outra menor. A soma de seus ângulos internos totaliza $360°$. A região limitada por um trapézio (Figura 6) é formada por uma de base $b1$ e a altura h e outra de base $b2$. A área da região trapezoidal é dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{b}1 + \mathbf{b}2) \times \mathbf{h}}{2}$$

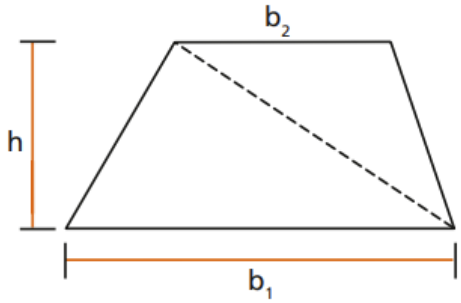

Figura 6 – Figura de um trapézio destacando suas propriedades métricas.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

2.1.6 Área do Círculo

Definição 6. Círculo é uma figura plana também chamada de disco. Apresenta uma forma circular. O raio do círculo representa a medida entre o ponto central da figura e uma das extremidades. Já o diâmetro equivale duas vezes o raio, posto que representa o segmento de reta que passa pelo centro do círculo, dividindo-o em duas metades

iguais. Conforme ilustrado na (Figura 7) a área de um círculo é dada por:

$$\mathbf{A} = \pi \times R^2$$

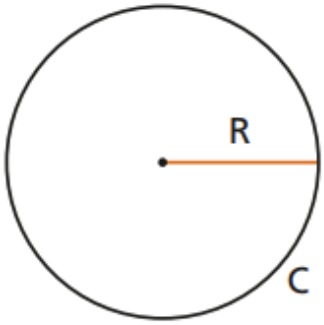

Figura 7 – Representação de um círculo e a medida do seu raio.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

2.1.7 Conceito geral de Área - Integral de Riemann

Definição 7. A área A de uma região S (Figura 8), localizada abaixo do gráfico de uma função contínua f, pode ser descrita como o limite que resulta da soma das áreas de retângulos utilizados para aproximar essa região.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

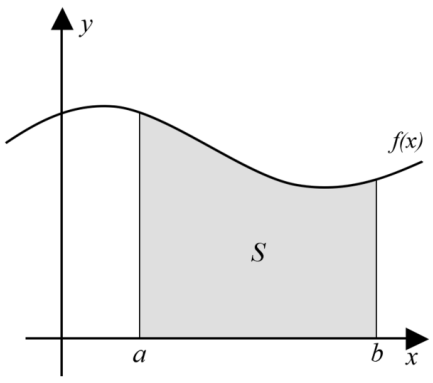

Figura 8 – Área da região S abaixo de uma função contínua.

Fonte: Stewart (2023)

Definição 8. Seja f uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais Δx = $(b - a)/n$. Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ os extremos desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ pontos

amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* pertença ao i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.Então, a integral definida de f de a a b é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

que ocorre na Definição 8 é chamada soma de Riemann. Assim, a Definição 8 diz que a integral definida de uma uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann. Comparando a Definição 8 com a Definição 7, vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 7).

2.2 Revisão de Probabilidade

Definição 9. Todo modelo probabilístico é baseado em um processo imprevisível, denominado experimento aleatório ε, que gera um único resultado de um conjunto de possíveis ocorrências. O conjunto completo de resultados possíveis desse experimento é chamado de **espaço amostral**, representado por Ω.

Definição 10. Um **evento** é um subconjunto do espaço amostral, ou seja, um conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório.

Definição 11. Suponha um experimento com um número finito de resultados igualmente prováveis. Nesse caso, a **definição clássica de probabilidade** de um evento A, representada por $\mathbf{P}(A)$, é definida por:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

em que | | representa a cardinalidade do conjunto A.

Suponha que o espaço amostral tem um número finito, n, de elementos, $\Omega = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, Se para todo i, $1 \leq i \leq n$,

$$p_i = \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

isto é, todos os elementos do espaço amostral tem mesma probabilidade, chamamos o espaço de equiprovável.

Definição 12. (Axiomática de Kolmogorov) Uma função de probabilidade, representada por **P**, é uma função que associa a cada evento A um valor, denominado $\mathbf{P}(A)$, que representa a probabilidade de A. Essa função deve atender aos seguintes critérios:

1. **P** não é negativo, isto é, $\mathbf{P}(A) \geq 0$, para todo evento A.
2. A probabilidade de todo o espaço amostral Ω é igual a 1, ou seja, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3. Se $A_1, A_2, ...$ é uma sequência infinita de eventos mutuamente exclusivos em Ω ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Definição 13. (Probabilidade Condicional) Sejam A e $B \subset \Omega$, definimos a probabilidade condicional de A, dado que B ocorreu, denotado por $\mathbf{P}(A|B)$

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\text{número de elementos de } A \cap B}{\text{número de elementos de } B}.$$

De forma generalizada,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B) > 0. \tag{2.1}$$

A Probabilidade Condicional oferece uma forma de analisar o resultado de um experimento com base em informações limitadas. Alguns exemplos de situações em que essa abordagem é aplicada incluem:

a) Em um estudo sobre a satisfação de clientes, você é informado que um cliente fez uma reclamação sobre um produto. Qual é a probabilidade de que esse cliente tenha retornado o produto, considerando que ele já fez uma reclamação?

b) Em uma pesquisa eleitoral, você sabe que um eleitor votou no candidato A. Qual é a probabilidade de que esse eleitor tenha mais de 40 anos?

c) Durante um jogo de futebol, é informado que a equipe A marcou um gol nos primeiros 10 minutos de jogo. Qual é a probabilidade de que a equipe A vença a partida, dado que já fez um gol logo no início?

Proposição 1. ***(Regra do Produto)*** *Assumindo que todos os eventos condicionantes têm probabilidade positiva, temos que*

$$\boldsymbol{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2|A_1)\boldsymbol{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...\boldsymbol{P}(A_n|\cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Definição 14. (Independência de dois eventos) Dois eventos A e B são considerados independentes se a ocorrência de B não altera probabilidade de ocorrência de A, ou seja,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{2.2}$$

Alternativamente, podemos aplicar a igualdade acima na fórmula da probabilidade condicional (2.1), para obter:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A). \tag{2.3}$$

Definição 15. (Independência de vários eventos) Se $\{A_i, i = 1, 2, ..., n\}$ é uma sequência de eventos independentes, então

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbf{P}(A_i),$$

em que S é uma coleção discreta de índices, com i pertencente a S.

Teorema 1. (Teorema da Probabilidade Total) Sejam A_1, ..., A_n eventos disjuntos que formam uma partição[2] do espaço amostral (cada resultado possível está incluído em um e apenas um dos eventos $A_1, ..., A_n$) e considere que $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall$ *i = 1, ..., n.* Então, para qualquer evento B, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(B|A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \cdot \mathbf{P}(B|A_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

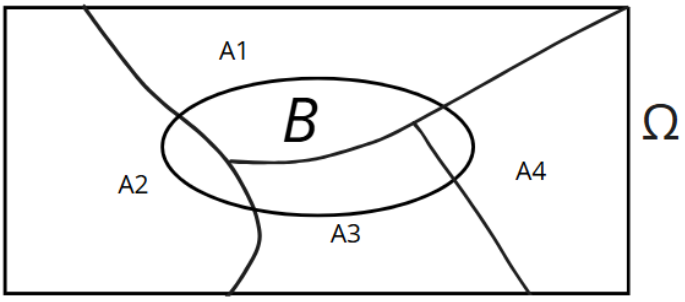

Figura 9 – Representação gráfica do teorema da probabilidade total

Fonte: Autoria Própria

Teorema 2. (Teorema de Bayes) Sejam $A_1, ..., A_n$ eventos disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, e suponha que $\mathbf{P}(A_i) > 0$, para todo i. Então, para qualquer evento B tal que $\mathbf{P}(B) > 0$ conforme Figura 2.5, temos:

[2] Uma partição consiste na divisão do espaço amostral em eventos cuja interseção é vazia, isto é, eventos mutuamente exclusivos e em que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbf{P}(A_i)\ \mathbf{P}(B|A_i)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A_i)\ \mathbf{P}(B|A_i)}{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1) + ... + \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B|A_n)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3 A Técnica de Monte Carlo

A técnica de Monte Carlo possui registros de sua aplicação já na segunda metade do século XIX, mas foi durante a Segunda Guerra Mundial, que o método foi formalmente nomeado e sistematicamente desenvolvido, por Stanislaw Ulam e John von Neumann para resolver problemas de física nuclear no Projeto Manhattan Metropolis e Ulam (1949). O método recebeu o nome “Monte Carlo” em referência ao famoso cassino, destacando seu vínculo com a aleatoriedade e jogos de azar Hammersley e Handscomb (1964).

Desde então, a técnica se destacou pela simplicidade dos algoritmos e eficiência em resolver problemas complexos, sendo amplamente aplicada em economia, biologia e engenharia. Com vastas aplicações, como a análise de riscos financeiros, modelagem em sistemas biológicos e simulações em mecânica dos fluidos. No ensino, sua abordagem facilita a compreensão de conceitos abstratos, como integração numérica e estatística inferencial Robert e Casella (2010).

O método baseia-se em amostragem aleatória para resolver problemas determinísticos ou estocásticos. O princípio central é a Lei dos Grandes Números, que garante que a média dos resultados de um grande número de amostras converge para o valor esperado Fishman (1996). Sua implementação envolve: modelagem do problema em termos probabilísticos, geração de variáveis aleatórias com distribuições específicas, simulação repetida e cálculo de estatísticas descritivas.

A simulação de Monte Carlo consiste em avaliar iterativamente um modelo determinístico utilizando números aleatórios como entradas. É especialmente aplicada a modelos complexos, não lineares ou com múltiplos parâmetros incertos. A análise pode exigir mais de 10.000 avaliações do modelo, tarefa que, no passado, era viável apenas com supercomputadores.

O desenvolvimento conceitual do modelo ou problema a ser estudado é dividido em quatro etapas: elaboração de fórmulas e equações adequadas, coleta de dados, definição das distribuições de probabilidades das variáveis de entrada e estabelecimento de um método para registrar os dados. A verificação assegura que o modelo esteja livre de erros lógicos e funcione conforme o esperado, enquanto a validação ava-

lia se ele representa de forma confiável o sistema ou problema em análise. Essa etapa inclui a formulação de questões específicas para guiar o decisor na busca de soluções. Por fim, com base no planejamento experimental, realizam-se as simulações para gerar as informações necessárias, que são apresentadas aos tomadores de decisão em relatórios.

Um exemplo muito simples pode ser dado considerando-se a Figura 10. Consideramos um círculo inscrito em um quadrado e distribuímos aleatória e homogeneamente um conjunto arbitrário de feijões na Figura 10, a seguir. Verifica-se a proporção de feijões que caem dentro do círculo em relação aos que caem dentro do quadrado. Dividindo uma quantidade pela outra, o resultado é aproximadamente $\pi/4$.

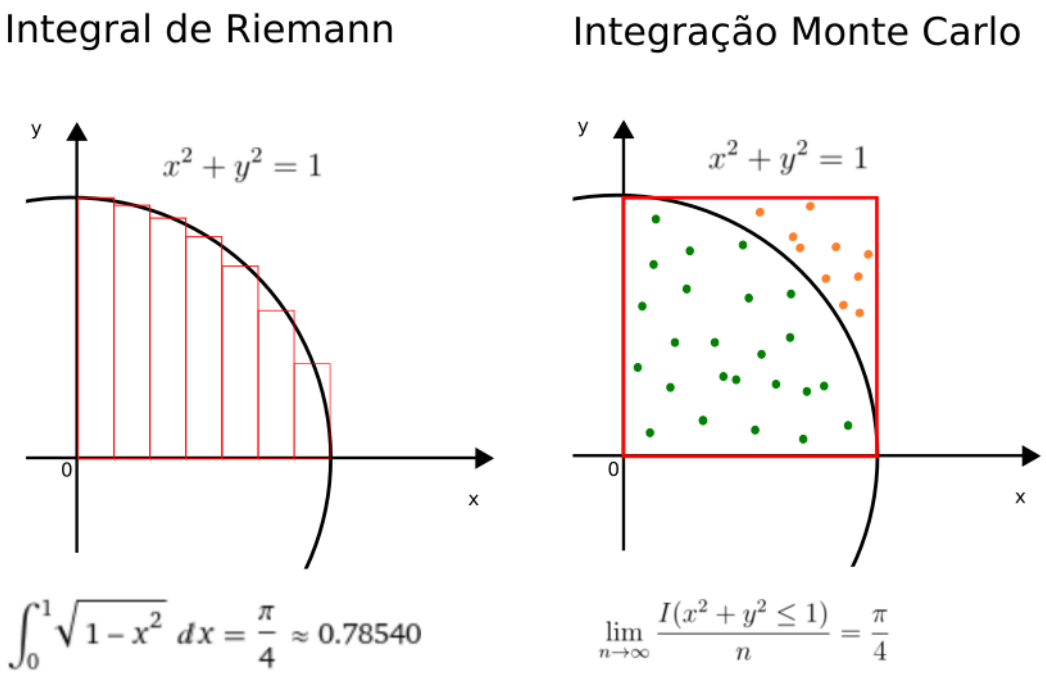

Figura 10 – Área do círculo unitário por Integração de Riemann (esquerda) e Integração por Monte Carlo (direita).

Para ver os detalhes da estimativa do cálculo de área usando Monte Carlo no software `R`, consulte o apêndice A.

2.3.1 Método de Monte Carlo Simples

A ideia do metodo e justamente escrever a integral que se deseja calcular como um valor esperado. Considere que queremos avaliar a integral:

$$\int_a^b h(x)\, dx.$$

Esta integral pode ser reescrita como:

$$\int_a^b h(x)\,dx = (b-a)\int_a^b h(x)\frac{1}{b-a}\,dx = (b-a)E[H(x)],$$

em que $E[H(x)]$ é a esperança da função densidade

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

com $a \leqslant x \leqslant b$ da distribuição $U(a,b)$.

Para aproximar a integral I basta aplicar o seguinte algoritmo:

1. Gere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valores da distribuição $U(a,b)$.
2. Calcule $h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n)$.
3. Calcule a média da amostra $\bar{h}$.

$$\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h(x_i)}{n}$$

4. Calcule $\hat{I} = (b-a)\bar{h}$.

O erro padrão da estatística $\hat{I}$ é:

$$ep(\hat{I}) = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-\bar{h}\right)^2}{n}}}{\sqrt{n}}$$

em que σ^2 é a variância da função $h(x)$. Esse erro pode ser utilizado para avaliar a precisão da estimativa. Pela lei dos grandes números (LGN), segue que:

$$Pr(|\bar{h} - I| \leq \epsilon) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

2.4 Tecnologia e Ensino

A integração de ferramentas computacionais no ensino de matemática e a adoção de práticas pedagógicas interativas e experimentais têm se mostrado estratégias eficazes para aprimorar a aprendizagem dos alunos. As tecnologias estão cada dia mais avançadas, e também mais presentes no cotidiano de todos. E nas escolas não

é diferente, nos últimos anos muitas pesquisas estão sendo feitas, na busca de métodos que contribuem para uma boa aprendizagem por meio dela.

No entanto, essas metodologias nem sempre são efetivamente aplicadas nas escolas. Nesse contexto, Maia, Vasconcelos e Menezes (2024) destacam que as tecnologias educacionais atuam como ferramentas de apoio ao ensino, facilitando a construção do conhecimento e permitindo uma aprendizagem mais personalizada. Essa questão nos convida a pensar em estratégias que permitam aos alunos compreender e interpretar o mundo de forma mais ampla.

No ensino da Matemática, a tecnologia tem se mostrado uma aliada poderosa. Sousa, Silveira e Trocado (2019) exploram o uso do GeoGebra, um software interativo, para modelagem em uma abordagem STEAM, destacando sua eficácia na visualização e compreensão de conceitos matemáticos. O ensino de ciências deve ter como objetivo, tornar o aluno crítico e reflexivo diante de sua percepção de mundo, e também dos problemas do mesmo.

3 Metodologia

A metodologia deste trabalho foi desenvolvida com o objetivo de aplicar a técnica de Monte Carlo no cálculo de áreas, promovendo uma aprendizagem significativa no Ensino Médio. O processo metodológico foi organizado em três etapas principais: planejamento, execução prática e coleta de dados. No início, o planejamento abrangeu a definição dos conceitos matemáticos e probabilísticos essenciais para a compreensão da técnica de Monte Carlo. Essa fase envolveu uma revisão bibliográfica sobre a técnica de Monte Carlo, probabilidade, geometria e integração numérica, além da criação de materiais didáticos, como slides, exemplos e atividades práticas, que conectassem os conceitos teóricos às suas aplicações em sala de aula. Também foi elaborado um plano de aula com abordagem experimental, visando facilitar o processo de aprendizagem.

A implementação foi composta por duas atividades principais. Primeiramente, foram realizadas simulações computacionais utilizando o software R para aplicar a técnica de Monte Carlo. Esse processo envolveu a elaboração de códigos simples para gerar números aleatórios e calcular áreas de figuras geométricas planas, como um quarto de círculo, além da demonstração das etapas de geração de amostras, cálculo de proporções e estimativas de áreas. Em seguida, foram desenvolvidas atividades práticas em sala de aula, nas quais os alunos participaram de experimentos com materiais concretos, como caixas de sapato e grãos de feijão. Esses experimentos consistiram em posicionar figuras geométricas no fundo das caixas, distribuir aleatoriamente os grãos e contar a proporção de grãos dentro das figuras para estimar suas áreas.

A coleta de dados foi realizada de maneira qualitativa e quantitativa. Durante as atividades práticas, os valores estimados pelos alunos foram registrados, levando em consideração diferentes quantidades de grãos e o número de repetições, a fim de aumentar a precisão dos resultados. Além disso, foi acompanhada a participação e o engajamento dos alunos ao longo das atividades, com anotações sobre as dificuldades enfrentadas e as soluções propostas. Para assegurar a validade da metodologia utilizada, foram comparados os resultados obtidos nas simulações computacionais e nas atividades práticas. O progresso dos alunos foi avaliado por meio de discussões em grupo e dos relatórios finais das atividades.

Essa metodologia foi projetada para explorar a técnica de Monte Carlo de maneira acessível e interativa, proporcionando uma compreensão mais contextualizada e aplicável dos conceitos matemáticos.

4 Resultados e Discussão

4.1 Resultados das Simulações Computacionais

4.1.1 Aplicação: Estimação de π via técnica de Monte Carlo

Pi, representado pela letra grega π, é uma constante matemática com grande significado em várias disciplinas matemáticas. Representa a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro, e seu valor é aproximadamente 3,14159. A importância do pi está em sua onipresença em fórmulas e cálculos matemáticos. Na geometria, aparece nas fórmulas para calcular a área e a circunferência de um círculo. Surge também em diversos campos matemáticos, incluindo cálculo, teoria da probabilidade e teoria dos números. As aplicações práticas de pi vão além da matemática.

Para verificar a aproximação da integral acima pelo método de Monte Carlo, foi construída a Tabela 1, a seguir, variando-se a quantidade de números aleatórios n gerados pela distribuição Uniforme$(0, 1)$. Observe que as estimativas estão próximas ao valor verdadeiro $\pi/4$. Os erros padrões e os vieses diminuem estatisticamente quando se aumenta n.

n	100	500	1000	5000	10 000
$\hat{I}$	0.7936	0.7864	0.7863	0.7847	0.7845
(ep)	(0.0179)	(0.0072)	(0.0070)	(0.0030)	(0.0023)
Viés	1.0491	0.1308	0.1213	-0.0864	-0.1139

Tabela 1 – Estimativas de $\pi/4$ para diferentes tamanhos de amostra n.

Na Figura 11, a seguir, é exibido o comportamento das aproximações de Monte Carlo conforme se aumenta o número de simulações (em preto), os intervalos de confiança (em vermelho) e o valor verdadeiro de $\pi/4$ (em azul). Conforme esperado pela LGN, quando n cresce, $\hat{I}$ converge em probabilidade para I, isto é, a estimativa se aproxima estatisticamente do valor verdadeiro.

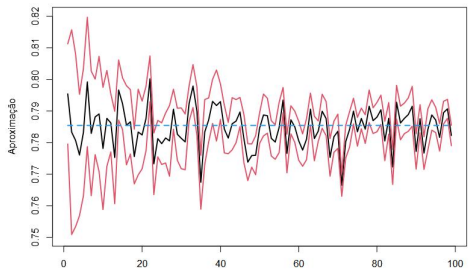

Figura 11 – Gráfico da aproximação de $\pi/4$ pelo método de Monte Carlo.

4.2 Aplicação em Sala de Aula

A abordagem metodológica adotada neste estudo foi prática e experimental, visando proporcionar uma compreensão mais acessível do cálculo de áreas aos alunos e estimular o seu interesse pela Matemática. Inicialmente, os alunos foram apresentados aos conceitos básicos de geometria e probabilidade, essenciais para a compreensão da metodologia de Monte Carlo. Em seguida, foi realizada uma atividade prática em sala de aula, na qual os alunos utilizaram materiais concretos, como grãos de feijão e caixas de sapato, para simular a distribuição de pontos e calcular a área de diferentes figuras planas. A atividade foi estruturada em duas etapas principais: a primeira focou na retomada de conceitos teóricos e a segunda na aplicação prática da técnica de Monte Carlo. Os alunos foram incentivados a comparar os resultados obtidos com os valores reais das áreas, promovendo uma análise crítica e reflexiva sobre a precisão e a eficácia do método aplicado.

Foi realizada uma análise inicial do conhecimento dos alunos sobre conceitos de área e cálculo de áreas de figuras planas. Durante esse processo, realizamos demonstrações de cálculos aplicados a situações cotidianas. Também exploramos figuras geométricas, incentivando os alunos a estabelecerem relações entre construções e objetos em geral, além de revisarmos conceitos fundamentais da Geometria, como o cálculo de áreas e as propriedades das figuras geométricas. Com base nesse levantamento, foi possível avaliar o nível de conhecimento matemático da turma em relação aos tópicos abordados. Inicialmente, estava previsto o trabalho com as figuras do trapézio e do círculo; no entanto, a falta de tempo impossibilitou a aplicação de ambas. Dessa forma, foi possível utilizar apenas uma das figuras planas. Na realização da atividade prática os materiais utilizados foram: caixa de sapato, a figura de um trapézio sem as suas medidas, cola, feijões e tesoura. Para ver os moldes das figuras, consulte o apêndice B.

Os estudantes (Figura 12) foram orientados a colar o trapézio no fundo da caixa de sapato e escolher uma quantidade entre 100 e 300 feijões. Depois, eles deveriam mexer a caixa para garantir que os feijões fossem distribuídos de forma mais aleatória, evitando que ficassem amontoados em um único lugar, conforme Figura 13.

Figura 12 – Alunos do Ensino Médio.

Figura 13 – Contagem dos grãos dentro da figura.

Em seguida, deveriam contar quantos grãos de feijões ficaram dentro da região do trapézio colado no fundo da caixa, repetindo esse passo por, no mínimo, oito vezes e calcular a média da quantidade de grãos de feijões que ficaram dentro do trapézio. Nesse momento, torna-se necessário informar aos alunos que quanto maior a quantidade de grãos de feijões utilizados a estimativa será mais exata. Enquanto com menos grãos, mais repetições de contagem serão necessárias para que a média de grãos dentro do trapézio forneça uma boa estimativa da área. Em seguida, com os dados em mãos, calcular a área do trapézio com a fórmula abaixo.

$$\frac{\text{Quantidade média de grãos dentro da figura plana}}{\text{Quantidade total de grãos dentro da caixa}} \approx \frac{\text{Área da figura plana}}{\text{Área do fundo da caixa}}$$

4.3 Coleta de Dados

Embora a atividade não tenha enfatizado a precisão nas respostas das questões propostas, as expectativas foram amplamente atendidas no aspecto qualitativo. Notou-se uma participação engajada dos alunos, tanto nas interações entre eles quanto com o professor, além de um desenvolvimento significativo no entendimento do conteúdo abordado, que tratava do cálculo de áreas de figuras planas.

As mudanças implementadas na abordagem avaliativa mostraram-se eficazes, incentivando maior participação dos alunos e reforçando a confiança no processo de aprendizagem. Essa confiança, por sua vez, possibilitou novas oportunidades de evolução, gerando impactos positivos que foram além das boas notas, destacando a importância da prática como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento integral.

Toda a atividade foi registrada em relatórios conforme Figuras 14 e 15.

Após a coleta das atividades, percebeu-se que os grupos apresentaram respostas distintas, o que era esperado em função da aleatoriedade do método utilizado. Um dos grupos conseguiu obter um resultado bem próximo do valor correto, indicando que estavam seguindo a abordagem correta. Durante a realização da atividade, os alunos notaram que, ao aumentar a quantidade de feijões lançados, os resultados se tornavam mais precisos. A atividade lúdica revelou-se eficaz, pois proporcionou aos alunos uma experiência prática e envolvente, quebrando a rotina da aula expositiva e facilitando a assimilação dos conceitos matemáticos.

4.4 Análise da Aplicação em sala de Aula

Este trabalho permitiu que os alunos compreendessem de forma mais profunda os conceitos relacionados à área de figuras planas, levando em conta as dificuldades identificadas durante o processo de ensino-aprendizagem desses tópicos de Geome-

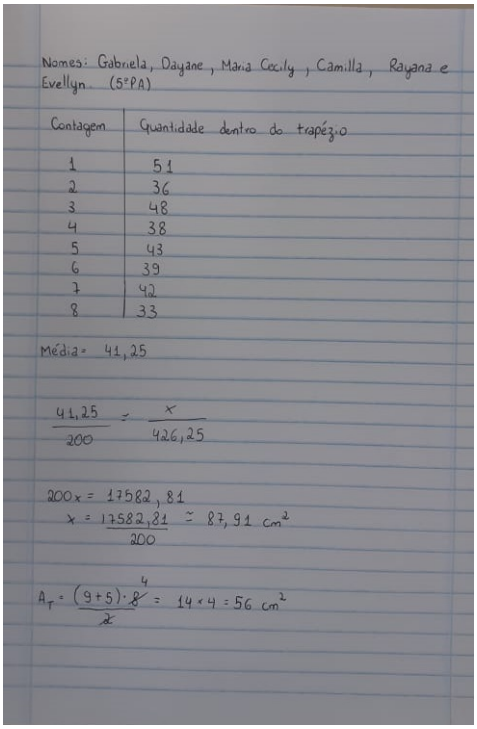

Figura 14 – Resposta da atividade do grupo 1.

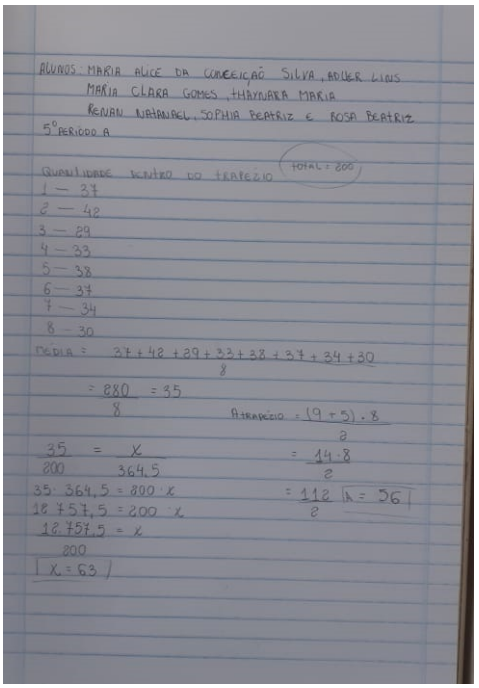

Figura 15 – Resposta da atividade do grupo 2.

tria. Constatou-se que a utilização das sequências didáticas tem um papel crucial na consolidação do aprendizado dos alunos, contribuindo, assim, para sua formação.

Ao utilizar uma atividade mais prática, foi possível organizar o trabalho em duplas ou grupos, como aconteceu na atividade proposta. Esse formato se mostrou muito eficaz, pois a maioria dos alunos demonstrou receptividade e engajamento: auxiliaram nas leituras, sugeriram formas de resolver as atividades e até se dirigiram à lousa para explicar suas soluções aos colegas.

Mesmo os alunos que não alcançaram o resultado final compartilharam o que haviam feito e, com o auxílio dos colegas, conseguiram concluir seus raciocínios. Esse processo de planejamento possibilitou que os estudantes identificassem suas dificuldades e as superassem, percebendo que todos enfrentam desafios, embora de maneiras distintas. Como resultado, passaram a interagir mais, deixando de lado o receio de questionar e, principalmente, a fixar o conteúdo trabalhado em sala de aula.

4.5 Reflexões sobre a Abordagem

Com base nos resultados obtidos nesta pesquisa, foi possível concluir que o uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino de figuras planas pode contribuir de maneira significativa para a aprendizagem dos conceitos fundamentais de área de figuras planas. Esse recurso facilita a compreensão do conteúdo, permitindo que o aluno se aproprie do conhecimento de forma mais eficaz, tornando-se um estudante

que aprende de maneira mais relevante e envolvente.

Ao oferecer aos alunos uma aprendizagem criativa e aprofundada, eles são motivados não apenas a memorizar fórmulas, mas a cultivar habilidades criativas na solução de problemas matemáticos. Em síntese, espera-se que este trabalho contribua para a implementação, em outros contextos educacionais, de diversas atividades que utilizem materiais lúdicos, com o propósito de estimular o raciocínio do aluno, resultando em um ensino mais significativo e agradável.

5 Considerações Finais

Este estudo demonstrou que a técnica de Monte Carlo pode ser aplicada com sucesso no ensino fundamental e médio para o ensino do cálculo de áreas. A atividade prática e lúdica facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos e quebrou a rotina da aula expositiva, tornando o aprendizado mais envolvente e significativo. Concluímos que o método de Monte Carlo é uma técnica de integração válida e adaptável para diferentes níveis de ensino, proporcionando uma experiência de aprendizagem enriquecedora e prática.

As dificuldades enfrentadas durante o desenvolvimento deste trabalho estavam em diversos aspectos, como a carência de materiais e recursos tecnológicos, além da ausência de um espaço adequado, como uma sala de informática, onde os alunos pudessem explorar o software utilizado. Adicionalmente, muitos alunos ainda não dominavam conceitos básicos de estatística e probabilidade, o que dificultou a compreensão inicial da técnica. O tempo limitado em sala de aula também se revelou um obstáculo para a aplicação com outras figuras planas e para a introdução e exploração aprofundada do método. Por fim, a implementação de simulações frequentemente exige conhecimentos em programação ou o uso de ferramentas específicas, que geralmente não estão contemplados no currículo padrão.

Para trabalhos futuros, recomenda-se substituir softwares avançados por ferramentas mais acessíveis, como planilhas eletrônicas (Excel ou Google Sheets), visando facilitar a compreensão e aplicação da técnica. Além disso, é essencial contextualizar o aprendizado por meio de problemas do cotidiano, como o cálculo de áreas de formações irregulares em terrenos, para evidenciar a relevância do método.

Outra proposta importante é oferecer formações específicas para professores interessados em implementar métodos de simulação, auxiliando-os no domínio das ferramentas e estratégias pedagógicas. Complementarmente, o desenvolvimento de atividades lúdicas ou jogos que simulem o método de Monte Carlo pode tornar o aprendizado mais dinâmico e acessível, especialmente em ambientes educacionais diversificados.

Por fim, recomenda-se aproveitar softwares didáticos, como GeoGebra e Desmos, para criar simulações visuais e interativas, além de relacionar o método de Monte Carlo à construção de gráficos, distribuição de frequências e amostras aleatórias, promovendo uma compreensão mais ampla e prática da técnica.

A Estimativa da Área do Círculo via Monte Carlo

Este apêndice apresenta um exemplo prático do cálculo da área de um quarto de círculo unitário utilizando o método de Monte Carlo. O código em R a seguir demonstra os passos necessários para realizar a estimativa:

```r
# Definir o número de simulações
n <- 10000

# Gerar coordenadas aleatórias no intervalo [0,1]
x <- runif(n)
y <- runif(n)

# Verificar se os pontos estão dentro do círculo (x^2 + y^2 <= 1)
inside_circle <- x^2 + y^2 <= 1

# Proporção de pontos dentro do círculo
proportion <- sum(inside_circle) / n

# Estimativa da área do círculo (multiplicado por 4 para o círculo completo)
estimated_area <- proportion * 4

# Exibir o resultado
cat("A área estimada do círculo é:", estimated_area, "\n")
```

Quadro A.1 – Estimativa de área usando Monte Carlo no R

O exemplo acima ilustra o uso de coordenadas aleatórias para verificar a proporção de pontos que caem dentro de um quarto de círculo unitário. Multiplicando essa proporção por 4, obtemos a estimativa da área do círculo completo.

Este método é útil em situações onde métodos analíticos podem ser difíceis de aplicar ou quando se deseja uma solução aproximada para problemas geométricos.

B Moldes utilizados na prática

Este apêndice apresenta os moldes que foram utilizados para a realização da atividade prática na escola:

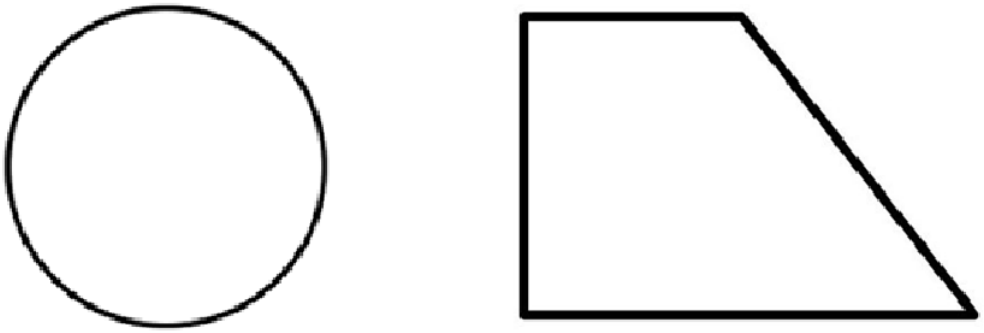

Figura 16 – Moldes das figuras planas.

Referências

BONJORNO, J. R.; OLIVARES, A. *Matemática: fazendo a diferença - 8ª série*. [S.l.]: São Paulo: FTD, 2006. Citado na página 12.

DANTE, L. R. *Matemática Dante, volume único*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005. Citado na página 12.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto aplicado, volume único*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2007. Citado na página 12.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar – Geometria Plana*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 18 e 19.

FISHMAN, G. S. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. [S.l.]: Springer, 1996. Citado na página 23.

FRIBERG, J. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 14.

HAMMERSLEY, J. M.; HANDSCOMB, D. C. *Monte Carlo Methods*. [S.l.]: Methuen, 1964. Citado na página 23.

MAIA, L. E. d. O.; VASCONCELOS, F. H. L.; MENEZES, D. B. Impacto das tecnologias educacionais no processo de ensino e aprendizagem: desafios e oportunidades. *Cuadernos De Educación Y Desarrollo*, v. 16, n. 3, p. e3539, 2024. Citado na página 26.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949. Citado na página 23.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. *Tópicos de História da Matemática*. [S.l.]: Coleção Profmat - Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. Citado na página 12.

ROBERT, C. P.; CASELLA, G. *Introducing Monte Carlo Methods with R*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado na página 23.

ROBSON, E. *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*. [S.l.]: Princeton University Press, 2008. Citado na página 15.

SOUSA, J. M. D. S.; SILVEIRA, A. P.; TROCADO, A. E. S. Geogebra e situações que envolvem modelação numa abordagem steam. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2019. Citado na página 26.

STEWART, J. *Cálculo - Volume 1: Tradução da 7ª edição norte-americana, Versão Métrica Internacional*. [S.l.]: Cengage Learning, 2023. Figura adaptada do livro, página X. Citado na página 19.

SWETZ, F. J. Mathematical treasure: Old babylonian area calculation. *Convergence*, The Pennsylvania State University, March 2014. Citado na página 14.