UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Geometria na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 2 à luz da BNCC

Luiz Guilherme Machado e Silva

Orientador Profº. Drº. Eudes Mendes Barboza

RECIFE

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Luiz Guilherme Machado e Silva

Geometria na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 2 à luz da BNCC

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de graduado.

Orientador: Profº. Drº. Eudes Mendes Barboza

RECIFE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586g Silva, Luiz Guilherme Machado e.
Geometria na OBMEP : uma análise de questões da primeira fase do nível 2 à luz da BNCC / Luiz Guilherme Machado e Silva. – Recife, 2023.
59 f.; il.

Orientador(a): Eudes Mendes Barboza.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Olimpíadas. 3. Geometria . 4. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 5. Base Nacional Comum Curricular. I. Barboza, Eudes Mendes, orient. II. Título

CDD 510

UFRPE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO DE TCC

LUIZ GUILHERME MACHADO E SILVA

GEOMETRIA NA OBMEP: UMA ANÁLISE DE QUESTÕES DA PRIMEIRA FASE NÍVEL 2 À LUZ DA BNCC

Trabalho de conclusão de curso aprovado com nota 9,5 como requisito para conclusão da disciplina de monografia (Cód. 06108), pela seguinte banca examinadora:

Orientador:____

Prof. Dr./Ms. Eudes Mendes Barboza
Departamento de Matemática – UFRPE

Membro: ____

Profª. Drª./Msª. Tarciana Maria Santos Da Silva
Departamento de Matemática – UFRPE

Membro: ____

Prof. Dr./Ms. Edgar Correa De Amorim Filho
Departamento de Matemática – UFRPE

Recife, 20 de Setembro de 2023.

Dedico este trabalho aos meus pais e avós, que sempre me apoiaram incondicionalmente, em especial ao meu avô, Edmilson, que infelizmente faleceu antes de minha formação e minha avó, Maria do Socorro, por ser minha primeira referência de professora.

Agradecimentos

Aos meus pais Givanice Maria Machado e Luiz Adriano Magalhães e Silva, aos meus irmãos Gabriel Luiz Machado e Silva e João Luiz Machado e Silva pela confiança na minha capacidade e no apoio em todas as etapas da minha vida. Aos meus primos, tias e todos os familiares e amigos que sempre me apoiaram e acreditaram no meu potencial e tornaram a caminhada mais agradável, pois sabemos que durante a formação as circunstâncias estão sempre contra nós.

A todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial ao meu orientador Eudes Mendes Barboza por todos os ensinamentos, disponibilidade e principalmente a paciência que teve comigo.

Resumo

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é aplicada nacionalmente e atinge uma boa parte dos estudantes brasileiros. Pensando nisso, este trabalho tem como finalidade realizar um levantamento de dados, de modo a esclarecer quais são as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da unidade temática de Geometria que possuem mais recorrência na OBMEP. Para isso, foi analisado as questões que tratam de Geometria da OBMEP, nível 2, 1ª fase, entre os anos de 2017 e 2022. Vale destacar que nos anos de 2020 e 2021 não ocorreram aplicações das provas devido a pandemia do *Covid*-19. Com isso, este trabalho é um material facilitador para os docentes que buscam trabalhar Geometria em sala de aula utilizando questões olímpicas e também para alunos que pretendem participar de Olimpíadas de Matemática.

Palavras-chave: Olimpíadas; Geometria; OBMEP; BNCC.

Abstract

The Brazilian Mathematical Olympiad for Public Schools (OBMEP) is applied nationally and reaches a large proportion of Brazilian students. Thinking about it, this work aims to carry out a data survey, in order to clarify which are the skills of the National Common Curricular Base (BNCC) of the thematic unit of Geometry that have more recurrence in OBMEP. For this, the questions dealing with Geometry at OBMEP, level 2, 1st phase, between the years 2017 and 2022 were analyzed.It is worth noting that in the years 2020 and 2021 there were no applications of the tests due to the *Covid*-19 pandemic. Thereby, this work is a facilitator material for teachers who seek to work Geometry in the classroom using Olympic questions and also for students who intend to participate in Mathematics Olympics.

Keywords: Olympics; Geometry; OBMEP; BNCC.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

As Olimpíadas de Matemática, tem como principal intuito estimular e desenvolver o estudo da Matemática entre os alunos, encontrar possíveis alunos excepcionais na área e contribuir para a melhoria do ensino. Além disso, tendo em vista o desenvolvimento necessário das habilidades da BNCC em sala de aula, os professores podem utilizar questões olímpicas para a realização de atividades em sala de aula, como exemplo, a resolução de problemas.

A OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) é uma das olimpíadas mais importantes do país, ela engloba boa parte dos estudantes brasileiros, pois tanto os de escolas públicas quanto os de escolas privadas podem participar dessa competição. A deficiência em se obter as habilidades relativas à Geometria nas olimpíadas de matemática do ensino fundamental, assim como a criação de um material de apoio, que estabelece uma relação entre questões olímpicas e as habilidades da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) referentes a Geometria, foram motivadores do trabalho. Nesse contexto, o nosso foco será trabalhar com as questões que tenham como unidade temática a Geometria, 1ª fase nível 2 da OBMEP, dos anos de 2017 a 2022 e que são referentes às turmas do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.

A partir disso nos perguntamos: As questões de Geometria da OBMEP contemplam habilidades da BNCC? Para ajudar a responder esta pergunta foram analisadas as provas da OBMEP e escolhidas as questões que tinham como unidade temática a Geometria, após isso, foi necessário destacar as habilidades da BNCC que melhor adequavam-se às questões e quais assuntos de Geometria eram mais recorrentes, para assim, conseguirmos analisá-las e comentá-las quando se fez necessário.

Assim, traçamos como objetivo geral verificar quais as habilidades da BNCC da Unidade Temática de Geometria tem aparecido na OBMEP nos últimos anos. Para isso, foi necessário compreender as habilidades, relacioná-las com as questões, analisando-as, juntamente, com as soluções fornecidas pela OBMEP e pontuando os resultados das análises. Desse modo, o trabalho foi dividido em três capítulos, descritos abaixo.

No primeiro capítulo, foi apresentado um pouco da história das Olimpíadas de Matemática no Brasil, destacando a OBM e a OBMEP, assim como um pouco sobre a BNCC. Já no segundo capítulo, falamos sobre os assuntos mais recorrentes de Geometria nas provas analisadas. Por fim, no terceiro capítulo, apresentamos as questões, destacamos as habilidades da BNCC presente nelas, além de mostrar as soluções e realizar comentários e sugestões.

1 Olimpíadas de Matemática e o Ensino de Geometria a luz da BNCC

De acordo com (CALDAS; VIANA, 2013), (OBMEP, 2023) e (OBM,2023), apresentaremos, neste capítulo, um pouco da história das Olimpíadas de Matemática, de modo que destacaremos a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a organização da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e um breve embasamento sobre os conteúdos matemáticos de Geometria que aparecem nas questões da primeira fase do nível 2 da OBMEP que ocorreram entre os anos de 2017 e 2022.

1.1 Olimpíadas de Matemática

Em 1894 na Hungria, ocorreu a primeira competição de Matemática de nível nacional em homenagem ao professor de Matemática Jósef Kürschák, membro da Academia de Ciência Húngara e do Instituto politécnico da Universidade de Budapeste, este evento teve grande êxito e a ideia se propagou pela Europa.

Na Romênia, em 1959, surgiu a 1ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) que é realizada todos os anos em um país sede diferente. A IMO é a competição mais importante na área, o Brasil participa dessa competição desde 1979.

No Brasil desde 1979, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organiza a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) que tem como intuito incentivar o desenvolvimento dos alunos, aperfeiçoamento dos professores no ensino da Matemática e a descoberta de novos talentos. No entanto, ao longo dos anos, ela passou por modificações, em 1991, ela passou a ter dois níveis, já em 2001 foi criado o nível universitário e em 2017 ela foi integrada à OBMEP.

1.1.1 OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) surgiu em 2005, com uma proposta inédita de ser uma competição nacional voltada totalmente às escolas públicas do país, no entanto a partir de 2017 as escolas privadas também passaram a integrar a competição, pois ocorreu a integração entre a OBM e OBMEP, visando a eficiência da divulgação e estímulo da Matemática no Brasil e também pela racionalização dos recursos financeiros. A OBMEP é realizada pela SBM e pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), e também é promovida pelos Ministérios da Ciência e Tecnologia (MCT) e do Ministério da Educação (MEC).

A OBMEP busca descobrir novos talentos e incentivar o estudo da Matemática, seus objetivos principais são:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A OBMEP é dividida em duas fases e em três níveis, de modo que a primeira fase é uma prova de múltipla escolha, contendo entre 20 e 25 questões, já a segunda fase é composta por uma prova aberta, na qual possui 5 questões. O nível 1 é direcionado para alunos do 6º ao 7º ano o Ensino Fundamental, enquanto o nível 2, para alunos do 7º ao 8º ano do Ensino Fundamental e o nível 3 é voltado para os alunos do Ensino Médio.

1.2 BNCC

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), eram os documentos que conduziam a educação no Brasil, antes da implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esses documentos embora orientassem a educação não norteavam de maneira precisa os conteúdos e habilidades que deveriam ser vistos em cada fase da educação básica. O que abria brecha para os sistemas estaduais e municipais terem maior liberdade para compor seus currículos, gerando a falta de uniformidade no ensino nacional. Com isso, a BNCC foi pensada para resolver esses tipos de problemas.

Ao longo de vários anos a BNCC foi desenvolvida, durante vários debates com especialistas da área e consultas públicas, com o objetivo de oferecer diretrizes claras para educação no Brasil. De acordo com (Histórico da BNCC, 2023), em dezembro de 2017, foi homologada, pelo ministro da educação, Mendonça Filho, a parte referente à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental. E em 2018, foi homologada a parte referente ao Ensino Médio.

A partir disso, a BNCC serve como referência para a construção dos currículos escolares, contendo as diretrizes da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Garantindo assim, uma formação mais coerente e igualitária em todo o país.

Assim, a BNCC é definida como

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2017).

As competências definidas na BNCC são importantes, pois promovem uma educação ampla, para que os estudantes desenvolvam-se profissionalmente, assim como no exercício da cidadania e nos desafios da vida diária.

> Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2017).

Na BNCC, a área de matemática é dividida nas unidades temáticas de Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística, para o qual cada uma dessas unidade temáticas são subdivididas em objetivos de conhecimentos, parte essa que tem como intuito especificar que parte da unidade deve ser tratada, e que também possui subdivisões em habilidades. As habilidades contidas na BNCC são a parte da unidade que ditam como deve ser abordado e como deve ser trabalhado os assuntos em sala de aula.

Focando na unidade temática de Geometria, ela tem seus objetivos voltados para a obtenção de um conhecimento amplo, com vários procedimentos e conceitos usados na resolução de problemas físicos de variadas áreas do conhecimento. A Geometria tem como seu foco principal o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, isto é, trabalhar situações problemas que envolvam estudos de posição relativa, deslocamentos no espaço, áreas, projeções e entre outras coisas relações entre figuras planas e transformações geométricas, como por exemplo o estudo de simetrias. Suas principais ideias associadas da matemática com a geometria tem como seu foco a construção de figuras, sejam elas planas ou não, a representação de ideias e teoremas para o mundo físico e saber associar a propriedades que regem diversos tipos de figuras.

As habilidades referentes a unidade temática de Geometria presentes na BNCC no Ensino Fundamental Anos Finais, estão listadas abaixo:

Figura 1 – Habilidades de Geometria - 6º ano

	Unidade Temática - Geometria
Ensino Fundamental Anos Finais	**Habilidades**
6º ano	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
	(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Fonte: (BRASIL, 2017).

Figura 2 – Habilidades de Geometria - 7º ano

	Unidade Temática - Geometria
Ensino Fundamental Anos Finais	**Habilidades**
7º ano	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
	(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Fonte: (BRASIL, 2017).

Figura 3 – Habilidades de Geometria - 8º e 9º ano

	Unidade Temática - Geometria
Ensino Fundamental Anos Finais	**Habilidades**
8º ano	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
	(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
9º ano	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Fonte: (BRASIL, 2017).

2 Um pouco sobre Geometria

Neste capítulo será abordado os temas mais recorrentes da Geometria presentes na primeira fase nível 2 da OBMEP, nas edições de 2017 a 2022.

2.1 O que é Geometria?

Pela etimologia a palavra Geometria vem do grego *Geometrein*, de modo que *Geo* significa *terra* e *metron* significa *para medir*, sendo assim Geometria seria o estudo de medição da terra. No entanto, atualmente o conceito de Geometria esta mais atrelado ao ramo da Matemática que tem como objetivo estudar as formas e o espaço, sendo importante para o desenvolvimento da capacidade analítica de observação dos objetos.

A Geometria está presente no desenvolvimento de diversas civilizações, de modo que foi se adaptando e evoluindo ao longo do tempo. Inicialmente, podemos perceber seu uso de acordo com a necessidade dos povos em solucionar problemas do cotidiano como por exemplo, realizar demarcações de terras.

Com as civilizações egípcias e babilônias temos o uso da Geometria prática, tendo como exemplo os problemas como remarcação de terra após enchentes no Rio Nilo ou ainda problemas que envolvam comprimento e área. Parte dos conhecimentos dos gregos Tales de Mileto e Pitágoras foram adquiridos em viagens para o Egito e Babilônia, de modo que seus trabalhos contribuíram para o desenvolvimento da Geometria dedutiva, bem como os trabalhos do também grego Euclides de Alexandria contribuíram para desenvolvimento da Geometria demonstrativa, em especial o livro “Os elementos”.

2.2 Áreas e Perímetro de Figuras Planas

Podemos pensar em área como a medida positiva associada a um espaço ocupado por uma figura ou região em um plano.

Exemplos de fórmulas de áreas de algumas figuras planas:

- $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$;
- $A_{\text{quadrado}} = l^2$;
- $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

Sendo b representando a medida da base, h a medida da altura e l a medida do lado.

Quanto ao perímetro pode ser definido como o resultado da soma das medidas aritméticas dos lados de uma figura plana ou região. Nos polígonos regulares, pode ser expresso como sendo o número de lados multiplicado pela medida aritmética de um lado.

Exemplo 2.1. João deu uma volta completa em um quarteirão retangular, cujas medidas de seu comprimento é $20m$ e da sua largura é de $35m$. Qual a área do quarteirão e quantos metros João andou?

Solução: Sabendo que a área de um retângulo pode ser determinada pela medida de seu comprimento multiplicado pela medida de sua largura, temos:

$$A = 20m \cdot 35m = 700m^2.$$

Já para determinar o quanto João andou usaremos o cálculo de perímetro de um retângulo, que pode ser feito da seguinte forma:

$$P = 35m + 20m + 35m + 20m = 110m.$$

2.3 Relações de Retas paralelas

Duas retas no plano são ditas paralelas quando não possuem pontos em comum, isto é, elas não se cruzam. Além disso, quando cortadas por uma terceira reta, transversal, é formada então uma relação de congruência entre os ângulos formados. Com isso temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então, os ângulos correspondentes são congruentes.*

Demonstração. Ver (BARBOSA, 2012, p. 103). □

Exemplo 2.3. Duas estradas retas, A e B, são paralelas. Uma terceira estrada, C, cruza as estradas A e B. Se o ângulo entre A e C é de 60°, determine os ângulos formados correspondentes e os ângulos alternos internos em relação à estrada B.

Solução: Sendo A e B retas paralelas, então os ângulos formados entre B e C serão congruentes aos ângulos formados entre A e C, sendo assim sabemos que os ângulos formados entre A e C são 60° e 120°, que são suplementares entre si. Agora sabemos que os seus correspondentes serão também 60° e 120° respectivamente. Por fim pela regra dos ângulos alternos internos serem suplementares entre si, temos que o ângulo alterno interno em relação à estrada B mede 120°.

2.4 Semelhança de Triângulos

Por meio de (BARBOSA, 2012), temos as seguintes informações.

Dois triângulos são ditos semelhantes quando podemos traçar uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de forma que os ângulos correspondentes sejam iguais e as medidas dos lados correspondentes sejam proporcionais.

Portanto, diremos que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \to E$, $B \to F$ e $C \to G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, logo, será válido as relações a seguir:

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$$

e

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE}.$$

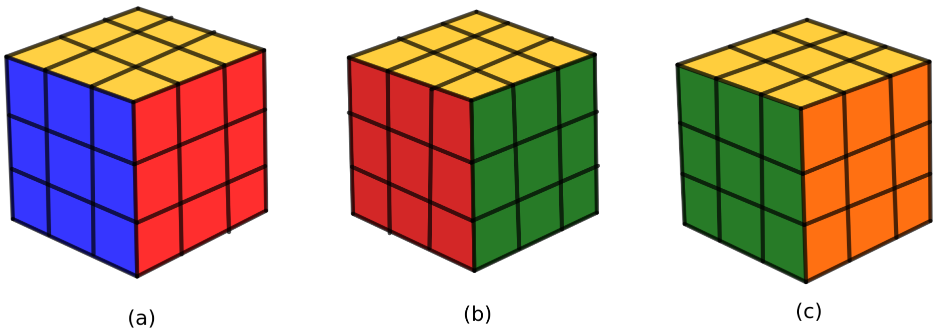
O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes será chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

2.5 Vista Ortogonal de figuras espaciais

Vista Ortogonal é assunto bastante frequente no principal vestibular do país, geralmente, associado à projeção de "sombras" num plano localizado em algum lugar próximo a um objeto tridimensional ou então com uma vista em perspectiva desse objeto, com o objetivo de determinar a figura que se encontra em dada perspectiva.

Exemplo 2.4. Na figura abaixo, podemos analisar a vista ortogonal do cubo de Rubik (cubo mágico), onde é mostrado sua a vista lateral esquerda, vista frontal e vista lateral direita.

Figura 4 – (a) vista lateral esquerda, (b) vista frontal e (c) vista lateral direita.



Fonte: O Autor, 2023.

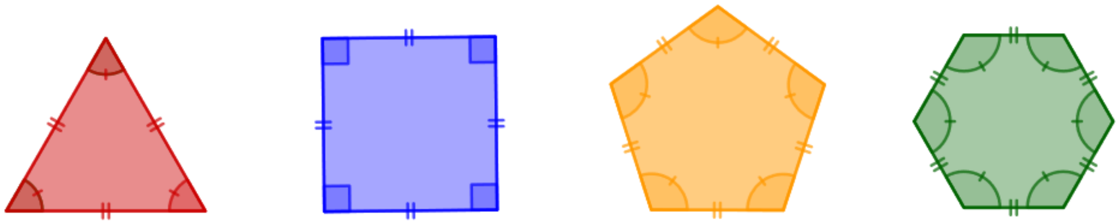
2.6 Polígonos Regulares

Podemos imaginar um polígono como sendo uma figura fechada que você pode desenhar sem tirar o lápis do papel, ou seja, informalmente, entendemos como polígonos, figuras fechadas formadas por segmentos de retas que não se cruzam. Em (MUNIZ NETO, 2013), temos a seguinte definição de polígonos.

Definição 2.1. Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano . Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um polígono (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta A_iA_{i+1} não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina. Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são vértices do polígono; os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ são os lados do polígono.

Um polígono é dito regular quando todos os seus lados possuírem mesma medida e todos os seus ângulos forem congruentes. Alguns exemplos de polígonos regulares são o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono.

Figura 5 – Exemplo de Polígonos Regulares.



Fonte: O Autor, 2023.

2.7 Elementos de um Polígono

Os vértices de um polígono são os pontos de onde partem os segmentos que serão chamados de lados do polígono, isto é, de um vértice a outro será traçado um segmento que delimitará o polígono, segmento este que será chamado de lado ou aresta de um polígono, este segmento não poderá cruzar com outro do polígono. Já os ângulos de um polígono são as aberturas formadas por esses segmentos de retas quando eles partem do mesmo vértice. Por fim, as diagonais de um polígono são segmentos que podem ser traçados de um vértice a outro, sendo esses vértices não consecutivos.

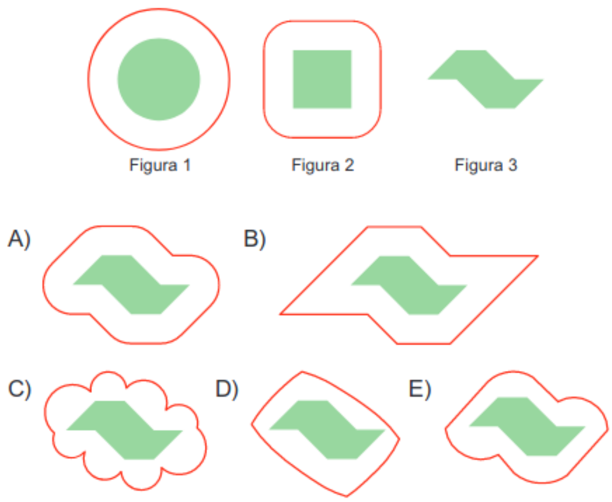
3 Análise de Questões da OBMEP nível 2

Neste capítulo analisaremos as questões da primeira fase nível 2 da OBMEP dos anos de 2017 a 2022, de modo que apresentaremos as soluções fornecidas pela OBMEP e em alguns casos soluções alternativas, adicionando também comentários quando necessário. As questões foram organizadas em ordem crescente, sequencialmente, em provas em ordem cronológica. A análise foi feita por meio da investigação de quais as habilidades se encaixaram melhor para a resolução de cada questão, levando em conta a maneira mais fácil de entendimento da resolução, e os comentários feitos a respeito das habilidades e métodos de resolução alternativos não mostrados pela OBMEP.

3.1 Problemas 2017

Questão 5: Um ponto está a $1cm$ de uma figura quando a menor distância desse ponto aos pontos da figura é $1cm$. Celinha traçou com uma caneta vermelha todos os pontos que estão a $1cm$ de distância do círculo da Figura 1. A seguir, ela fez o mesmo para a região quadrada da Figura 2. Qual é o desenho que ela vai obter se traçar todos os pontos que estão a $1cm$ de distância da região poligonal da Figura 3?

Figura 6 – Representação ilustrativa da questão 5 e das alternativas.

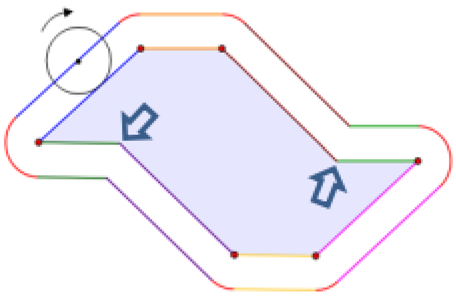


Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

Solução da OBMEP: Alternativa A.

Como a distância de um ponto a uma figura geométrica é a menor distância desse ponto aos pontos da figura, o desenho que Celinha obtém ao traçar os pontos que estão a 1 cm da Figura 3 é a trajetória do centro de um círculo de raio 1 quando este se move pelo contorno da figura tangenciando-o. Nesse caso, as curvas obtidas são segmentos de retas ou arcos de circunferências. Nos vértices em que a figura se lança para fora, aparecem arcos de circunferências, mas isto não ocorre nos dois vértices em que a figura se lança para dentro (marcados com as setas largas).

Figura 7 – Representação ilustrativa da solução da questão 5.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

Outra solução: Uma maneira de obter o traço cujos pontos distam 1 cm da Figura 3 é considerar o contorno da figura formada ao considerar a união dos discos (círculos preenchidos) de raio 1 cm centrados em pontos da Figura 3. O contorno dessa união de discos aparece representado na alternativa A.

Habilidade BNCC:

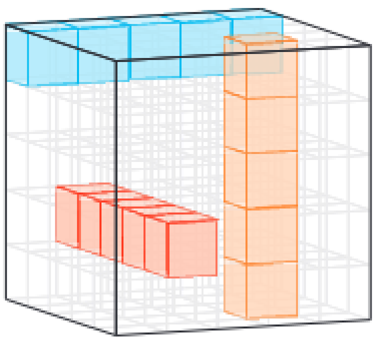
- EF07MA22: Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

Comentário e sugestão:

A forma de resolução proposta pela OBMEP é prática e objetiva, pois ela é clara e direta na resolução do problema. Quanto à habilidade da BNCC utilizada nesta questão precisamos ter em mente que para obter a noção desta resolução é necessário que sejam feitos exercícios com o compasso de forma a demonstrar que no pontos dos vértices será feito um arco de circunferência para que seja mantido a distância de $1cm$ de cada ponto da figura.

Questão 6: João formou um cubo $5 \times 5 \times 5$ usando cubinhos menores numerados, sendo que cada cubinho recebeu um número diferente dos demais. O cubo foi montado de tal modo que a soma dos números em qualquer bloco de 5 cubinhos alinhados lado a lado fosse sempre a mesma. A soma dos números de todos os cubinhos é 7875. Qual é a soma dos números dos cubinhos de uma face qualquer do cubo?

Figura 8 – Representação ilustrativa da questão 6.



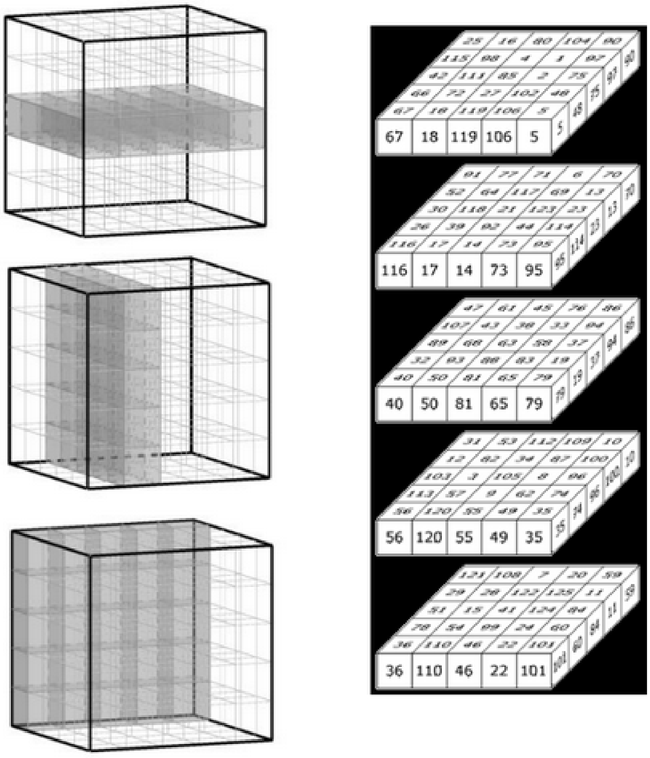
Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

$A)315 \quad B)1575 \quad C)2875 \quad D)5625 \quad E)7875$

Solução da OBMEP: Alternativa B.

Observe que, nas figuras abaixo à esquerda, uma fatia qualquer do cubo é formada por 25 cubinhos, sendo 5 blocos de 5 cubinhos alinhados lado a lado. Como a soma dos números em qualquer bloco de 5 cubinhos alinhados lado a lado é a mesma, segue que a soma dos números dos 25 cubinhos de uma fatia qualquer do cubo também é a mesma. Sendo o cubo formado por 5 fatias, essa soma é igual a um quinto de 7875, ou seja, 1575. Finalizando, uma face qualquer do cubo também é uma fatia do cubo e, portanto, a soma dos números numa face qualquer do cubo é 1575.

Figura 9 – Representação ilustrativa da solução da questão 6.



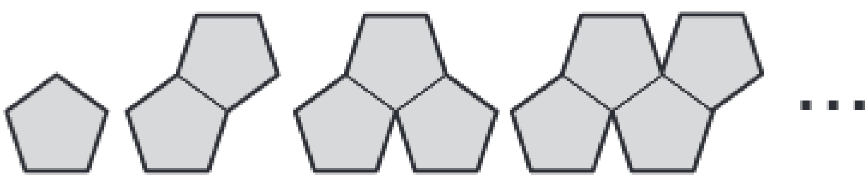
Fonte: Solução da prova da OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

Observe na figura acima à direita um possível preenchimento do cubo $5 \times 5 \times 5$.

Comentário e sugestão: A questão requer apenas a noção de organização espacial no que diz respeito à Geometria. De forma geral são avaliadas habilidades de outras áreas para sua resolução, principalmente a área da Aritmética.

Questão 7: Com pentágonos regulares com 1 cm de lado, formamos uma sequência de polígonos como na figura. O perímetro do primeiro polígono é 5 cm, o perímetro do segundo é 8 cm, e assim por diante. Quantos pentágonos são necessários para formar um polígono com perímetro igual a 1736 cm?

Figura 10 – Representação ilustrativa da questão 7.



Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

$A)570$ $B)572$ $C)574$ $D)576$ $E)578$

Solução da OBMEP: Alternativa E.

Cada figura da sequência, a partir da segunda, é formada a partir da anterior com a anexação de um pentágono regular de lado 1 cm, fazendo-se coincidir um lado da figura anterior com um lado do pentágono adicionado. Isto implica que, a cada nova adição, o perímetro aumente 3 cm. Assim, os perímetros das figuras da sequência são $5; 8 = 5 + 1 \times 3; 11 = 5 + 2 \times 3; 14 = 5 + 3 \times 3$, etc. Se n é o número de polígonos que foram adicionados ao primeiro, então o perímetro da figura é $5 + 3n$. No caso da figura com perímetro 1736, temos

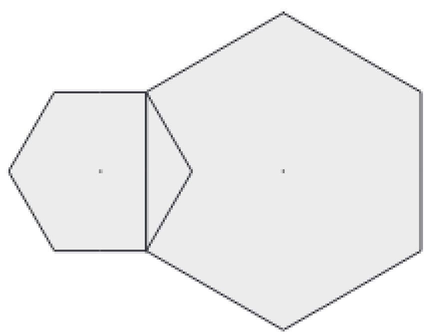
$$1736 = 5 + 3n \Leftrightarrow 3n = 1731 \Leftrightarrow n = 577.$$

Portanto, esta figura é composta de $577 + 1 = 578$ pentágonos.

Comentário e sugestão: Esta questão é uma de várias questões de Geometria da OBMEP que possui outro assunto relacionado, assunto esse que é o de Sequências contido na unidade temática de Álgebra. A resolução dessa questão é simples, visto que a Geometria é utilizada apenas para identificar quem será o primeiro termo dessa sequência e quem serão os próximos termos, mas todo o restante da questão é feito pelo método algébrico de resolver questões de Sequências, tendo muito mais ênfase na resolução da questão que a parte geométrica.

Questão 12: Na figura, dois vértices do hexágono regular maior coincidem com dois vértices do hexágono regular menor. O hexágono menor tem área igual a 10 cm^2. Qual é a área do hexágono maior?

Figura 11 – Representação ilustrativa da questão 12.



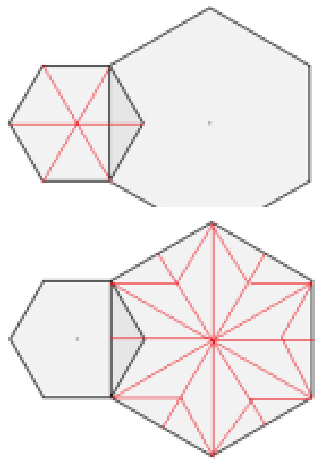
Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

$A)20\ cm^2$ $B)30\ cm^2$ $C)35\ cm^2$ $D)36\ cm^2$ $E)40\ cm^2$

Soluções da OBMEP: Alternativa B.

- **Primeira solução:** Primeiro decompomos o hexágono menor em seis triângulos equiláteros e vemos que a região de sobreposição tem área igual a duas metades de um desses triângulos equiláteros, ou seja, um triângulo equilátero inteiro, com área medindo, portanto, $\frac{10}{6}$. Veja a figura abaixo. A seguir, dividimos o hexágono maior também em seis triângulos equiláteros e cada um desses triângulos em outros três menores, todos congruentes ao triângulo de sobreposição. O hexágono maior fica decomposto em 18 triângulos congruentes ao triângulo de sobreposição e, portanto, sua área é $18 \times (\frac{10}{6}) = 30\ cm^2$.

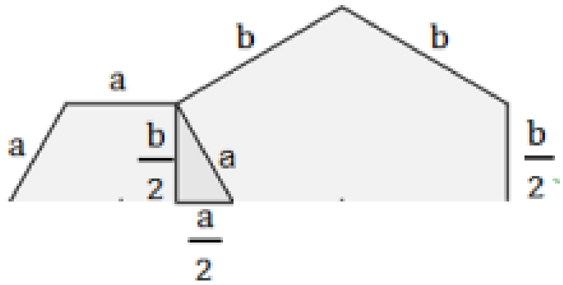
Figura 12 – Representação ilustrativa da primeira solução da questão 12.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

- **Segunda solução:** Vamos representar as medidas dos lados dos hexágonos, em centímetros, por a e b, conforme a figura ao lado, obtida a partir da figura do enunciado. Observemos o triângulo retângulo com lados medindo a, $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$ centímetros. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que $b^2 = 3a^2$. Por outro lado, sabemos que os dois hexágonos são semelhantes, pois ambos são regulares. Consequentemente, a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os respectivos lados. Denotemos a área do hexágono maior, medida em centímetros quadrados, por S. Assim, $\frac{S}{10} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{3a^2}{a^2} = 3$. Consequentemente, $S = 30\ cm^2$.

Figura 13 – Representação ilustrativa da segunda solução da questão 12.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

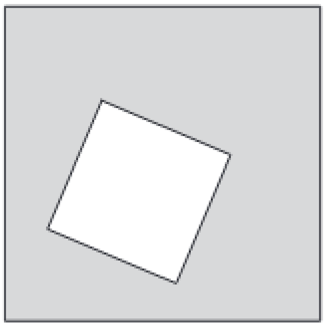
Habilidades BNCC:

- EF06MA18: Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
- EF07MA17: Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
- EF09MA14: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Comentário e sugestão: Essa é mais uma questão de Geometria da OBMEP que se relaciona com outra unidade temática da Matemática que é a Álgebra, mais em específico a parte de grandezas diretamente proporcionais. Sobre as resoluções propostas pela OBMEP, a primeira forma de resolver talvez não seja tão clara um aluno visto que exige um pouco mais de noção sobre triângulos equiláteros e como ele pode ser decomposto para que a resolução fique clara, já a segunda forma de resolver é mais aparente visto a propriedade de proporcionalidade de polígonos regulares, talvez a maior dificuldade seja em tornar essa solução mais algébrica para que seja resolvido, entretanto é também importante salientar que para a segunda forma de resolução proposta é preciso notar a divisão de ambos os hexágonos em triângulos equiláteros para que a partir disso seja utilizado a proporcionalidade dos lados dos hexágonos, tendo em vista a divisão do lado do hexágono maior em duas partes e a divisão de um dos lados do triângulo equilátero formado da decomposição do hexágono menor em triângulos equiláteros em duas partes iguais também e a partir disso se faz o uso da Geometria Euclidiana com o Teorema de Pitágoras para encontrar qual é a proporção entre os lados dos hexágonos e assim resolver o problema de maneira algébrica.

Questão 13: Na figura vemos um quadrado dentro de outro, determinando uma região cinza. A área (em cm^2) e o perímetro (em cm) dessa região são numericamente iguais, ou seja, o valor numérico da soma dos perímetros desses quadrados é igual ao valor numérico da diferença entre suas áreas. Qual é a diferença entre as medidas dos lados desses quadrados?

Figura 14 – Representação ilustrativa da questão 13.



Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

$A)1cm \quad B)4cm \quad C)6cm \quad D)8cm \quad E)10cm$

Solução da OBMEP: Alternativa B.

Denote por L e l os lados dos quadrados grande e pequeno, respectivamente. Do enunciado, temos que

$$4L + 4l = L^2 - l^2 \Rightarrow 4(L + l) = (L + l)(L - l).$$

Como $L + l \neq 0, L - l = 4$.

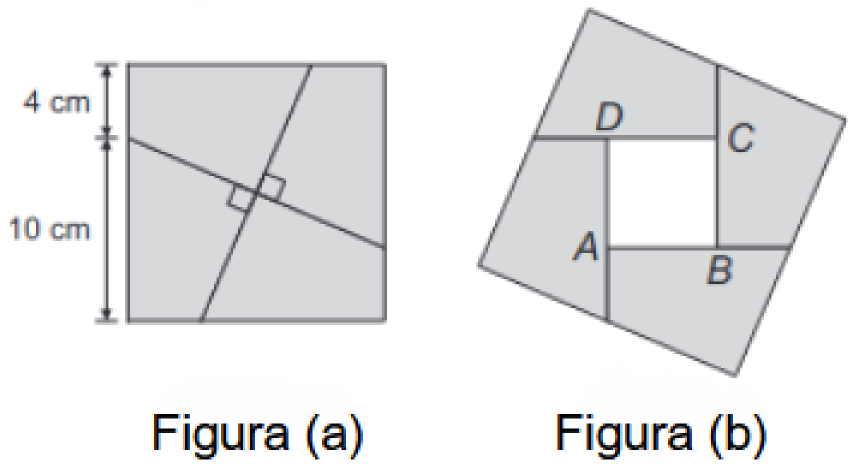
Habilidades BNCC:

- EF09MA09: Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Comentário e sugestão: Essa é mais outra questão de Geometria da OBMEP que está associada à Álgebra, é uma questão que não possui uma forma mais simples do que a mostrada pela OBMEP, isto é, é uma questão se utiliza de conceitos de área e perímetro de figuras geométricas, mais em específico do quadrado, e a partir disso se desenvolve de forma algébrica fazendo uso da decomposição de um produto notável resolver o problema. No mais é uma questão de resolução simples e interpretativa que faz uso de conceitos algébricos e geométricos para se resolver.

Questão 14: Pelo centro do quadrado da Figura 15(a) traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais. Esses quadriláteros são rearranjados em outro quadrado maior, como na Figura 15(b). Qual é a área do quadrado $ABCD$ da Figura 15(b)?

Figura 15 – Representação ilustrativa da questão 14.



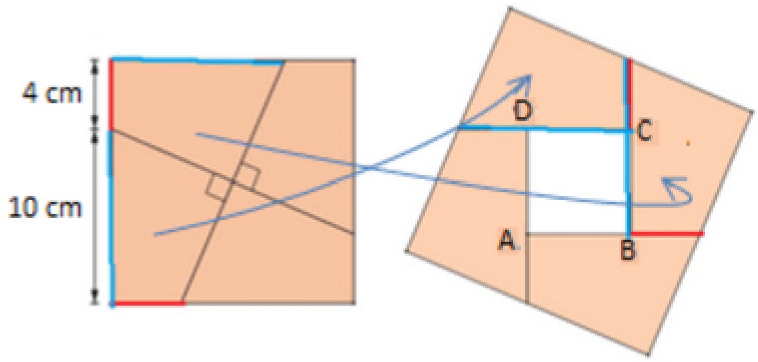
Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

$A)16cm^2$ $\quad B)25cm^2$ $\quad C)36cm^2$ $\quad D)49cm^2$ $\quad E)64cm^2$

Solução da OBMEP: Alternativa C.

Ao rearranjarmos os quadriláteros, observamos que os lados com comprimentos conhecidos ficam encostados, com uma das extremidades em comum, como indicado na figura (o segmento menor, em vermelho, torna-se parte do segmento maior, em azul). O comprimento dos lados do quadrado $ABCD$ é a diferença entre os comprimentos desses lados: $10 - 4 = 6$ cm. Portanto, a área desse quadrado é 36 cm^2.

Figura 16 – Representação ilustrativa da solução da questão 14.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

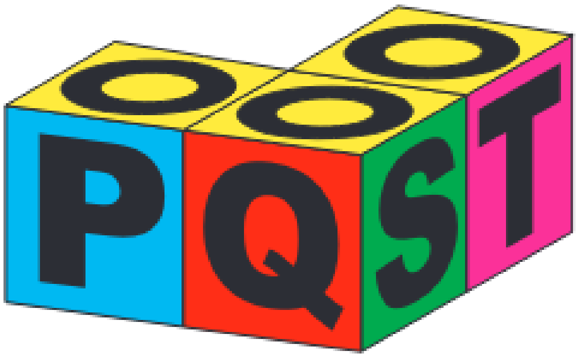
Habilidades BNCC:

- EF07MA31: Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- EF08MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Comentário e sugestão: Questão razoavelmente simples, mas que para melhor entendimento seria importante uma aula de Geometria plana que trabalhasse figuras sendo decompostas e assim remontadas em outras figuras para que fosse treinada a capacidade de observação sobre o reajuste das novas figuras formadas.

Questão 15: Zequinha tem três dados iguais, com letras O, P, Q, R, S e T em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

Figura 17 – Representação ilustrativa da questão 15.



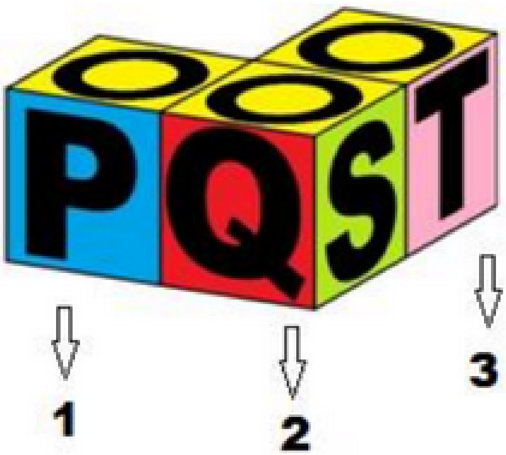
Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

$A)S \quad B)R \quad C)Q \quad D)P \quad E)O$

Solução da OBMEP: Alternativa A.

Como as letras P, Q, S e T estão visíveis na ilustração, essas são as faces adjacentes à face com a letra O, e a face oposta à letra O é a face com a letra R. As faces em contato entre os dados 1 e 2 não podem ser P (visível na ilustração do dado 1), nem Q ou S (visíveis na ilustração do dado 2). Portanto, tem que ser T. Olhando para o dado 2, concluímos que a face com S é oposta à face com T.

Figura 18 – Representação ilustrativa da solução da questão 15.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2017, nível 2, 1ª fase.

Outra solução: A letra O possui quatro faces vizinhas com as letras P, Q, S e T. Primeiramente observe que Zequinha juntou o dado 2 com o dado 3 pela face P, pois esta mesma face não pode estar na junção do dado 2 com o dado 1, que possui a face P visível. Logo, os dados 1 e 2 foram juntados pela face T. Assim, S e T são faces opostas, o que responde à questão. É claro também que P é oposta a Q, bem como R, que não aparece na ilustração, é oposta a O.

Habilidades BNCC:

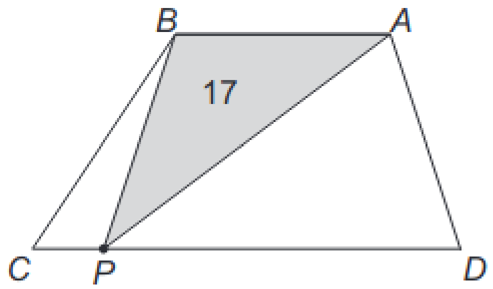
- EF09MA17: Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
- EF06MA17: Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

Comentário e sugestão: Uma questão de Geometria focada na percepção espacial de cubos. Uma habilidade que pode ser desenvolvida é a EF09MA17, durante uma aula com dados de seis faces onde se procura identificar padrões das faces opostas, no caso do dado de seis faces o padrão mais aparente é de que a soma dos números de faces opostas tem resultado igual a 7. Aula essa que, assim como na resolução da questão, pode se trabalhar essa noção por eliminação a partir das faces que podem ser vistas.

3.2 Problemas 2018

Questão 11: No trapézio $ABCD$ da figura, os lados AB e CD são paralelos e o comprimento de CD é o dobro do comprimento de AB. O ponto P está sobre o lado CD e determina um triângulo ABP com área igual a 17. Qual é a área do trapézio $ABCD$?

Figura 19 – Representação ilustrativa da questão 11.



Fonte: Prova OBMEP 2018, nível 2, 1ª fase.

$A)32 \quad B)34 \quad C)45 \quad D)51 \quad E)68$

Solução da OBMEP: Alternativa D.

O trapézio $ABCD$ da figura está dividido em três triângulos, cujas alturas coincidem com a altura do trapézio. Vamos chamar de H a medida dessa altura e lembrar que a área de cada um dos triângulos é a metade do produto do comprimento da base pela altura. A área do trapézio é a soma das áreas dos triângulos CPB, PAB e PDA, e essa soma é igual a: $\frac{1}{2}CP \cdot H + 17 + \frac{1}{2}PD \cdot H$. Podemos reescrever essa expressão como

$$17 + \frac{1}{2}(CP + PD) \cdot H = 17 + \frac{1}{2}CD \cdot H.$$

Podemos calcular o valor da parcela $\frac{1}{2}CD \cdot H$, pois sabemos ainda que $CD = 2 \cdot BA$; logo, $\frac{1}{2}CD \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BA \cdot H = 2 \cdot \frac{1}{2}BA \cdot H$. Como $\frac{1}{2}BA \cdot H$ é a área conhecida do triângulo PAB, então $\frac{1}{2}CD \cdot H = 2 \cdot 17 = 34$. Portanto, a área do trapézio $ABCD$ é igual a $17 + 34 = 51$.

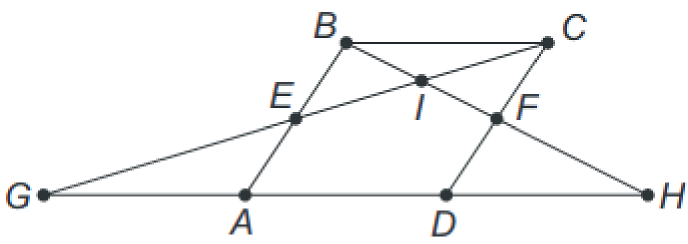
Habilidade BNCC:

- EF08MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Comentário e sugestão: Uma questão que trabalha os conhecimentos de áreas enfatizando na decomposição da figura para assim determinar a resposta.

Questão 17: Na figura abaixo, $ABCD$ é um paralelogramo. O ponto E é ponto médio de AB, e F é ponto médio de CD. Qual é a razão entre a área do triângulo GIH e a área do paralelogramo $ABCD$?

Figura 20 – Representação ilustrativa da questão 17.



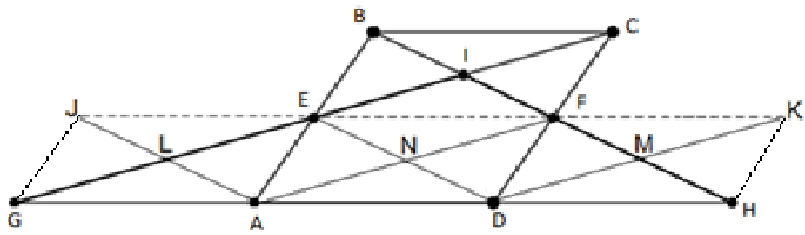
Fonte: Prova OBMEP 2018, nível 2, 1ª fase.

$A)9/8$ $B)5/4$ $C)4/3$ $D)3/2$ $E)2$

Solução da OBMEP: Alternativa A.

De acordo com o enunciado, segue que $BCFE$ e $EFDA$ são dois paralelogramos congruentes, pois E e F são pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente. Observemos que os triângulos EBF e DFH são congruentes, pois têm mesmos ângulos e $EB = DF$. Analogamente, os triângulos GEA e ECF também são congruentes. Agora, traçando-se a reta por E e F, como na figura, obtemos também que $AGJE$ e $HDFK$ são paralelogramos congruentes aos dois iniciais ($BCFE$ e $EFDA$). Mais ainda, as diagonais determinam, em seus respectivos paralelogramos, quatro triângulos de mesma área, com dois pares de triângulos congruentes (em cada paralelogramo, os triângulos opostos pelo vértice são congruentes). Observe que o paralelogramo $ABCD$ contém 8 desses triângulos e o triângulo GIH contém 9. Logo, a razão entre eles é igual a $\frac{9}{8}$.

Figura 21 – Representação ilustrativa da solução da questão 17.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2018, nível 2, 1ª fase.

Habilidades BNCC:

- EF09MA12: Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
- EF09MA10: Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- EF08MA14: Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

- EF07MA32: Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Comentário e sugestão: Nota se que essa é uma questão mais objetiva, em que é trabalhado a semelhança entre triângulos pela congruência de dois ângulos e um lado, congruência essa determinada pela propriedade dos ângulos opostos pelo vértice e pela relação dos ângulos formados por uma transversal que corta duas retas paralelas. Outra parte que é importante salientar é como ele faz uso do de triângulos para decompor os paralelogramos e assim facilitar a determinação das áreas, triângulos esse que são congruentes com o triângulo formado por um de seus ângulos opostos.

3.3 Problemas 2019

Questão 10: Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

A) Ela ficará preenchida em 7/8 de sua capacidade.

B) Ela ficará preenchida em 8/13 de sua capacidade.

C) Ela ficará preenchida com 5/8 de sua capacidade.

D) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.

E) Ela vai transbordar.

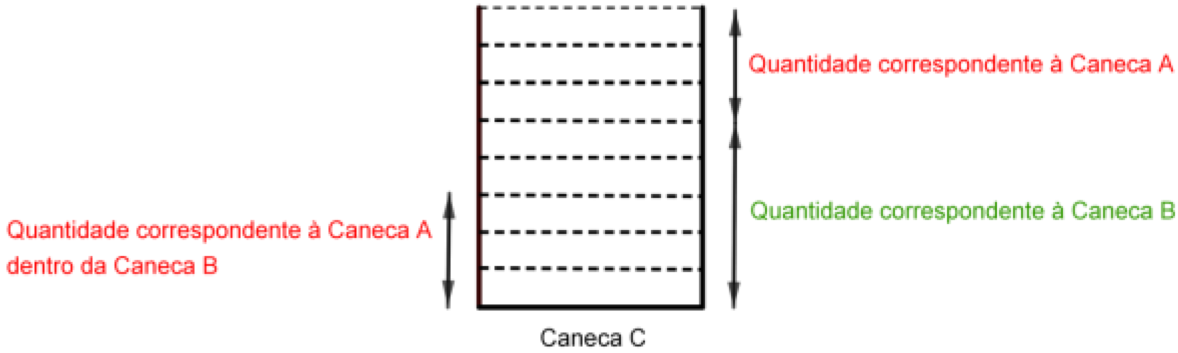
Solução da OBMEP: Alternativa D

Ao despejar o conteúdo das canecas A (pequena) e B (média) cheias na Caneca C (grande) será ocupado

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

da capacidade da Caneca C, ou seja, ela ficará totalmente cheia, sem transbordar. De forma ilustrativa, dividindo a Caneca C em 8 partes iguais, a figura a seguir mostra que 5 dessas partes correspondem à capacidade da Caneca B, e as outras 3, à capacidade da Caneca A.

Figura 22 – Representação ilustrativa da solução da questão 10.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2019, nível 2, 1ª fase.

Habilidades BNCC:

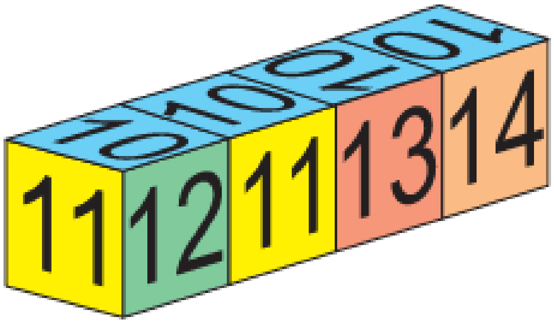
- EF06MA24: Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

- EF06MA07: Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiro e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

Comentário e sugestão: Questão de resolução simples, sem uso de uma média de capacidade visto que é mais associada a interpretação e uso da operação com frações para determinar a capacidade.

Questão 11: Os quatro dados da figura são idênticos, e há três pares de faces em contato. Qual é o valor da soma dessas faces?

Figura 23 – Representação ilustrativa da questão 11.



Fonte: Prova OBMEP 2019, nível 2, 1ª fase.

$A)73 \quad B)74 \quad C)75 \quad D)76 \quad E)77$

Solução da OBMEP: Alternativa D

A ilustração nos permite concluir que os números escritos nas quatro faces que compartilham um lado com a face de número 10 são: 11, 12, 13 e 14. Observando as rotações do número 10, podemos concluir que 11 é oposto a 14 e 12 oposto ao 13. Mais precisamente, 13 é o número que está mais próximo do algarismo 1 do número 10, e 12 o que está mais próximo do algarismo 0. Assim, a soma dos números das faces em contato é $14 + 13 + 12 + 14 + 11 + 12 = 76$.

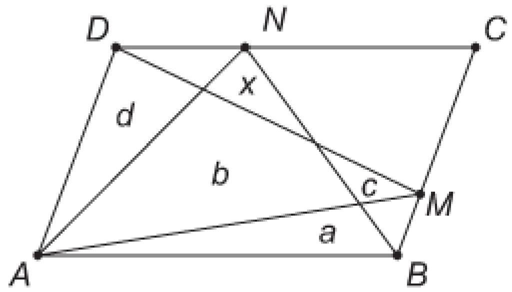
Habilidades BNCC:

- EF09MA17: Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Comentário e sugestão: Um questão simples de resolver, pois a própria figura fornece de forma clara tudo que precisa para a resolução, visto que os cubos que estão em contato apenas foram rotacionados ao redor do próprio eixo em 90° de um para o outro, tornando fácil subentender quais são as faces ocultas sem precisar fazer uma análise por eliminação de qual número já foi mostrado e qual não poderia estar em determinada face.

Questão 12: No paralelogramo $ABCD$ da figura, os pontos M e N são dos lados BC e CD, respectivamente. As áreas a, b, c e d são conhecidas. Qual é o valor da área x?

Figura 24 – Representação ilustrativa da questão 12.



Fonte: Prova OBMEP 2019, nível 2, 1ª fase.

$A)c + d - a \quad B)a + c + d - b \quad C)a + c + d - 2b \quad D)a + d - b \quad E)a + c - d$

Solução da OBMEP: Alternativa A

O triângulo ABN tem base AB igual à do paralelogramo e altura relativa a essa base igual à altura do paralelogramo relativa a essa mesma base. Portanto, a área de ABN (que é igual a $a + b + x$) é igual à metade da área do paralelogramo. Do mesmo modo, a área de ADM (igual a $d + b + c$) é também igual à metade da área do paralelogramo. Logo, $a + b + x = d + b + c$ e, daí, $x = c + d - a$.

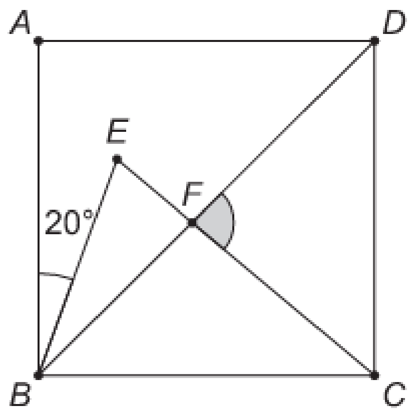
Habilidades BNCC:

- EF06MA24: Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Comentário e sugestão: É uma questão de resolução simples, mas não tão aparente, pois é necessário perceber as áreas dos triângulos como metade da área do paralelogramo, mas que a partir disso se faz simples a resolução, visto que após isso se torna claro que as áreas do triângulos são iguais e assim podem ser igualadas e por fim achado o valor da área de x.

Questão 14: Na figura, $ABCD$ é um quadrado, a medida do ângulo ABE é 20° e $EC = BC$. Qual é a medida do ângulo DFC?

Figura 25 – Representação ilustrativa da questão 14.



Fonte: Prova OBMEP 2019, nível 2, 1ª fase.

A) 80° B) 85° C) 90° D) 95° E) 100°

Solução da OBMEP: Alternativa B

Temos 90° = ABC = ABE +EBC = 20° + EBC e, então, EBC = 70°; como o triângulo CBE é isósceles de base BE, temos também BEC = 70°. Por outro lado, temos DBC = 45°, pois BD é diagonal do quadrado; de 70° = EBF +FBC = EBF + 45° segue então que EBF = 25°. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180° e no triângulo EBF já temos os ângulos BEC = 70° e EBF = 25°, segue que BFE = 180° - (25° +70°) = 85°. Finalmente, os ângulos BFE e CFD são opostos pelo vértice, logo, iguais. Assim, DFC = 85°.

Habilidades BNCC:

- EF09MA10: Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

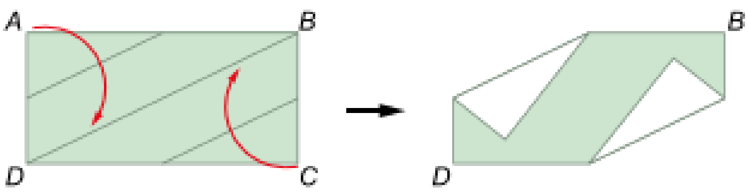
- EF07MA27: Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

Comentário e sugestão: Apesar da habilidade EF07MA27 falar sobre o uso "preferencialmente vinculados a mosaicos em ladrilhamento"esse não é o foco da questão, mas sim determinar os ângulos internos tendo em vista as noções sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e as propriedades de congruência de ângulos.

3.4 Problemas 2022

Questão 7: Uma folha de papel retangular $ABCD$, de $10cm$ por $20cm$, tem uma face colorida e um verso em branco. Foram feitas duas dobras nessa folha, levando-se os A e C sobre a diagonal BD, de modo que as dobras ficaram paralelas a essa diagonal, como mostrado na figura a baixo.

Figura 26 – Representação ilustrativa da questão 7.



Fonte: Prova OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

Qual é a área da região colorida que fica visível após as dobras?

A) 25 cm² B) 50 cm² C) 75 cm² D) 100cm² E) 125 cm²

Solução da OBMEP: Alternativa D

Solução sem usar semelhança de triângulos:

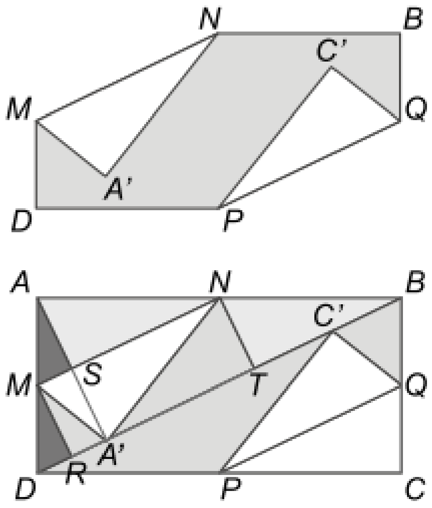
Ao dobrar a folha, o vértice A do quadrado coincide com o ponto A' da diagonal. Como a reta MN é a mediatriz do segmento AA', temos $AS = SA'$ e AA' perpendicular a MN. Como MN é paralela à diagonal BD, o segmento MR paralelo a AA' é também perpendicular a BD. Temos, dessa forma, dois triângulos retângulos congruentes ASM e MRD, pelo caso ALA de congruência de triângulos. Logo, $AM = MD = 5$. De forma análoga, concluímos que os triângulos retângulos ANS e NBT são congruentes, logo $AN = NB = 10$.

A área dos triângulos congruentes AMN e $A'MN$ é igual a $\dfrac{10 \times 5}{2} = 25$.

Dada a simetria de 180ř da figura, concluímos que a área do triângulo CPQ e

$C'PQ$ também é 25. Consequentemente, a área da região colorida visível é igual à área da folha menos quatro vezes a área do triângulo AMN, ou seja, igual a $10 \times 20 - 4 \times 25 = 200 - 100 = 100\ cm^2$.

Figura 27 – Representação ilustrativa da solução da questão 7.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

Solução por semelhança de triângulos:

Como MN é paralela a BD, concluímos que os triângulos AMN e ADB são semelhantes, de alturas homólogas AS e AA'. Pela dobra temos $AA' = 2AS$, logo a área do triângulo ABD é 4 vezes a área do triângulo AMN. Como a área do triângulo ADB é metade da área da folha, isto é, $100cm^2$, a área do triângulo AMN é $25cm^2$. Novamente, a área da região colorida visível é igual à área da folha menos quatro vezes a área do triângulo AMN, ou seja, igual a $10 \times 20 - 4 \times 25 = 200 - 100 = 100cm^2$.

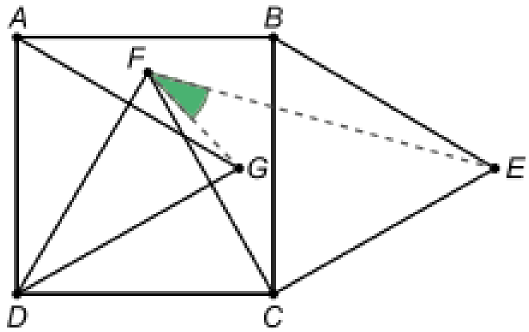
Habilidades BNCC:

- EF06MA23:Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
- EF09MA13:Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Comentário e sugestão: Das duas formas de resolução apresentadas pela OBMEP a segunda se faz mais simples e objetiva, pois tem como foco usar a partir da semelhança de triângulos e de propriedades de proporcionalidade para determinar as áreas necessárias para a conclusão da questão, além disso também torna mais objetiva a solução. Porém a primeira forma de resolver é a que melhor faz uso da Geometria euclidiana clássica fazendo maior uso das propriedades de retas transversais e paralelas como base na justificativa para chegar a solução.

Questão 12: Na figura, $ABCD$ é um quadrado e AGD, BEC e CDF são triângulos equiláteros. Quando mede o ângulo GFE?

Figura 28 – Representação ilustrativa da questão 12.



Fonte: Prova OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

$A)15 \quad B)22,5 \quad C)30 \quad D)36 \quad E)45$

Solução da OBMEP: Alternativa C

Observemos primeiro os ângulos com vértice D. Como o triângulo DFC é equilátero, temos $CDF = 60°$, e como $CDA = 90°$ segue que $FDA = 30°$. Analogamente temos $CDG = 30°$ e então $GDF = 30°$. Passemos ao triângulo GDF. Ele é isósceles, pois $DG = DF$, e segue que $DFG = DGF = 75°$. Logo $CFG = DFG$ - $DFC = 75°$ - $60° = 15°$.

Agora consideremos o triângulo CFE. Como acima, temos $BCF = 30°$ e segue que $ECF = 90°$. Por outro lado, como $CF = CE$, esse triângulo também é isósceles, e temos, então, $CFE = 45°$.

Finalmente, temos $GFE = CFE$ - $CFG = 45$ - $15 = 30$.

Habilidade BNCC:

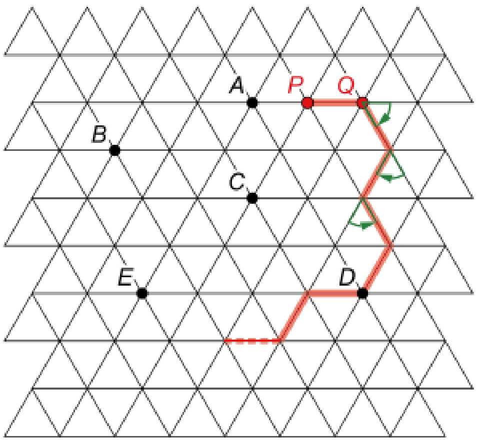
- EF07MA27: Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

- EF09MA12: Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Comentário e sugestão: Essa questão é mais uma questão que faz uso principal de semelhança de triângulos e propriedades de ângulos congruentes e para poder determinar quais são os ângulos necessários para que possa determinar o ângulo GFE, sendo usado propriedades de triângulos isósceles e equiláteros para isso, assim permitindo fazer pouco uso de cálculos extensos e por fim chegar à resolução da questão.

Questão 13: Uma formiguinha passeia em uma malha formada por triângulos equiláteros de lado $1cm$, como na figura. ela parte do ponto P para o ponto Q, e sempre que encontra um vértice da malha, muda de direção, fazendo um giro de 60°. Ela repete dois giros para a direita e um para a esquerda, percorrendo o caminho vermelho da figura. Em qual ponto da malha a formiguinha vai estar após percorrer $1000cm$?

Figura 29 – Representação ilustrativa da questão 13.



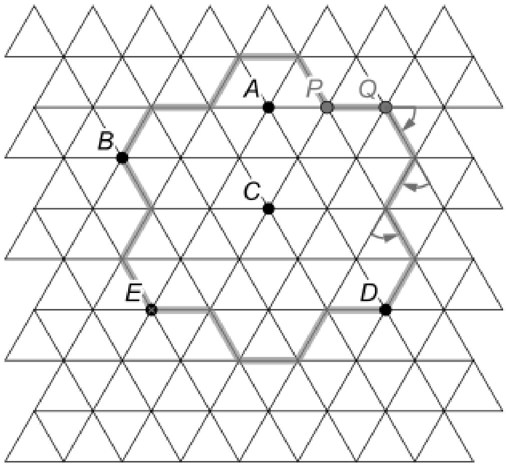
Fonte: Prova OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

$A)A \quad B)B \quad C)C \quad D)D \quad E)E$

Solução da OBMEP: Alternativa E

O percurso da formiguinha é fechado, conforme mostra a figura. O comprimento desse ciclo é 18, o que significa que, ao caminhar de acordo com a regra enunciada, ela vai retornar ao ponto P depois de percorrer 18 segmentos. Então ao percorrer 1000 segmentos, ela vai andar 55 ciclos e mais 10 segmentos, pois $1000 = 18 \times 55 + 10$. Ao andar mais 10 segmentos, depois de completar o último ciclo, ela vai estar no ponto E.

Figura 30 – Representação ilustrativa da solução da questão 13.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

Habilidades BNCC:

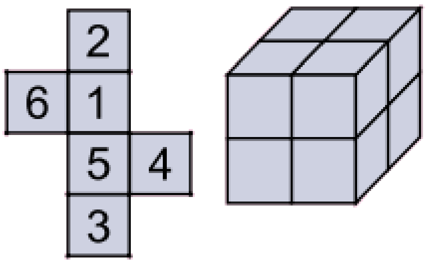
- EF06MA21: Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

- EF06MA23: Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Comentário e sugestão: A questão em si é muito clara com o que se quer pois ela determina com simplicidade o percurso da formiga e a partir disso se chega que o percurso da formiga será fechado e ela terá percorrido $18cm$ ao final. Após determinar que uma volta completa o percurso é de $18cm$ tornasse fácil de perceber que o resto da divisão de 1000 por 18 é o que determinará o ponto final onde a formiga se encontrará.

Questão 16: João montou 8 dados idênticos a partir da planificação da figura, e com eles formou um cubo. Qual é a menor soma possível para os 24 números que aparecem nas faces dos cubos?

Figura 31 – Representação ilustrativa da questão 16.



Fonte: Prova OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

$A)32 \quad B)48 \quad C)56 \quad D)64 \quad E)72$

Solução da OBMEP: Alternativa C

Observando a planificação, vemos que a menor soma possível para três faces vizinhas de um pequeno dado é $1 + 2 + 4 = 7$ e, juntando adequadamente 8 dados na posição em que essas faces com soma mínima formem as faces do cubo grande, concluímos que a menor soma possível dos 24 números que aparecem nas faces do cubo grande é $8 \times 7 = 56$.

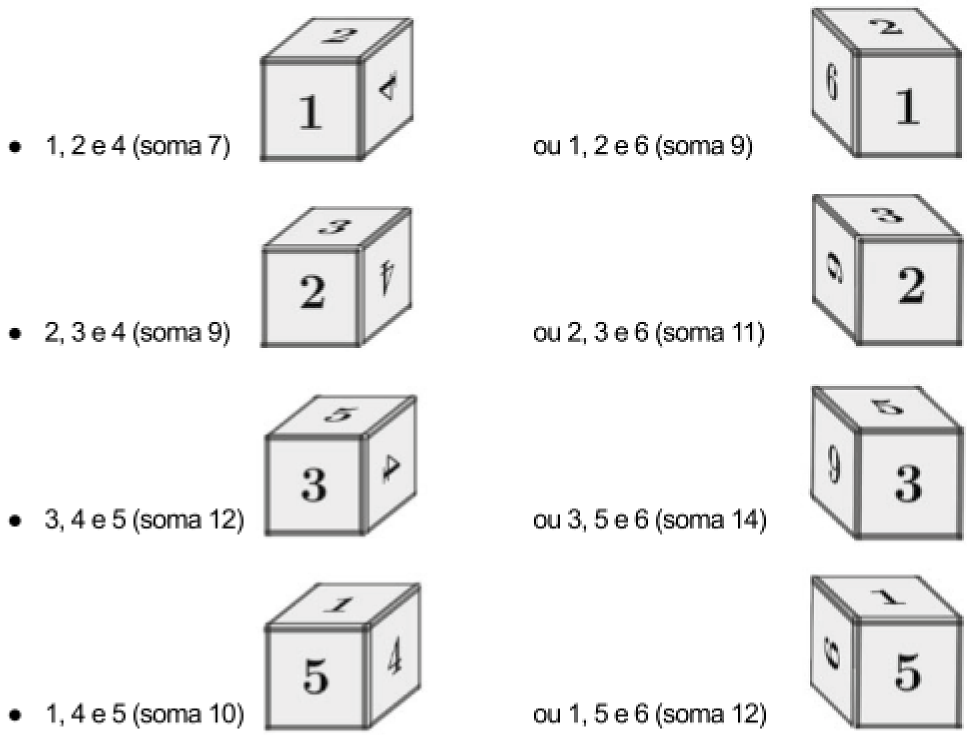
Mais detalhadamente, ao juntar os oito dados idênticos, formamos um cubo maior, como na figura a cima, e em cada face desse cubo maior aparecem quatro números. Portanto, nas seis faces desse cubo maior aparecem $6 \times 4 = 24$ números. Por outro lado, cada vértice do cubo maior corresponde a um dos oito vértices do dado e cada vértice do dado tem três de suas faces concorrendo nesse vértice. Assim, os 24 números que aparecem nas seis faces do cubo maior são provenientes de faces comuns dos dados, faces essas que ficaram visíveis após a montagem, incluindo a que fica apoiada sobre a mesa. Logo, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado é igual a oito vezes a menor soma possível para as três faces comuns de um vértice de um dado.

Ao montar o dado a partir de sua planificação observamos as faces opostas serão

2 e 5, 1 e 3, 6 e 4

Observamos também que as faces comuns aos vértices do dado serão:

Figura 32 – Representação ilustrativa da solução da questão 16.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

Assim, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado será $8 \times 7 = 56$.

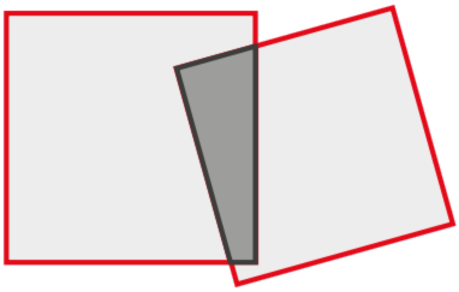
Habilidades BNCC:

- EF09MA17: Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Comentário e sugestão: Uma questão que depende unicamente de uma vista ortogonal e noção espacial, pois a partir disso fica mais objetivo a resolução como visto no primeiro parágrafo de resolução apresentada pela OBMEP que sintetiza bem como resolver sem se estender muito e falando de forma concisa a forma da solução.

Questão 19: A figura abaixo é formado por dois quadrados parcialmente sobrepostos. A interseção desses quadrados, com contorno preto, tem área igual a $18cm^2$ e perímetro $20cm$, a união desses quadrados, com contorno vermelho, tem área $163cm^2$ e perímetro $56cm$. Qual é, em cm^2, a diferença entre as áreas dos dois quadrados?

Figura 33 – Representação ilustrativa da questão 19.



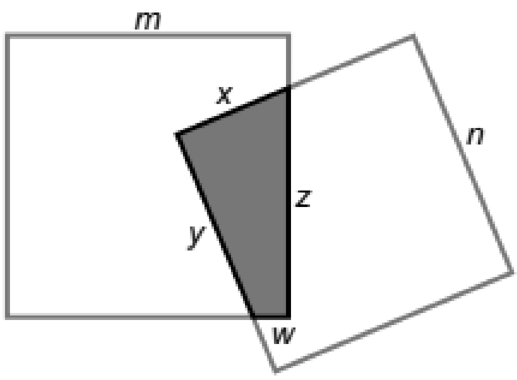
Fonte: Prova OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

$A)1 \quad B)4 \quad C)10 \quad D)15 \quad E)19$

Solução da OBMEP: Alternativa E

Na figura abaixo, m e n são os comprimentos dos lados dos quadrados e x, y, z e w os comprimentos dos segmentos determinados pelas interseções entre eles.

Figura 34 – Representação ilustrativa da solução da questão 19.



Fonte: Solução da prova da OBMEP 2022, nível 2, 1ª fase.

Como o perímetro da figura inteira (contorno vermelho) é 56 e o da interseção (contorno preto) é 20, temos $(4m-z-w)+(4n-x-y) = 56$ e $4(m+n) = 56+(x+y+z+w) = 76$, ou seja, $m + n = 19$.

Dado que a área da interseção é 18, temos $m^2+n^2-18 = 163$, ou seja, $m^2+n^2 = 181$. Daí, $2mn = (m + n)^2 - (m^2 + n^2) = 19^2 - 181 = 180$. A partir de $90 = mn = m(19 - m)$, podemos concluir que m é uma das raízes da equação do segundo grau $m^2 - 19m + 90 = 0$, que são 10 e 9.

Consequentemente, $n = 19 - m = 9$ ou 10. Finalmente, a diferença entre as áreas dos quadrados é $10^2 - 9^2 = 19$.

Habilidades BNCC:

- EF08MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Comentário e sugestão: Mais uma questão que faz uso da álgebra para a resolução, visto que foi usada para simplificar o caminho necessário para obter o resultado,pois é usado as medidas do quadrilátero menor apenas ao começo para que seja montada uma relação com m e n e assim é usado equações polinomiais do 1º grau e do 2º grau como suporte para chegar às áreas e dos quadrados determinando as medidas de seus lados e assim obter a resposta da questão.

4 Considerações Finais

Esse trabalho teve como principal objetivo verificar se as habilidades da BNCC da unidade temática de Geometria estavam sendo supridas nas questões referentes da OBMEP dos anos de 2017 a 2022, além de relacionar e analisar estas questões.

No capítulo 2, foi destacado os principais temas presentes na OBMEP nos anos referidos, sequenciando-os em ordem do mais recorrente ao menos recorrente. Já no capítulo 3, onde foi feito o levantamento das habilidades de cada questão foi notado que na maioria das questões que tratavam de Geometria não a tinham como tema principal, mas sim, como tema secundário, sempre se utilizando da Geometria como apoio para trabalhar outros assuntos, ou seja, na maioria dos casos a Geometria é tida como matéria “coadjuvante” mesmo em suas questões temáticas, logo não satisfazendo as habilidades da BNCC da unidade temática de Geometria de forma adequada.

Das oitenta questões das provas da OBMEP entre 2017-2022, observamos que um total de dezoito delas envolvem conceitos de Geometria, embora apenas treze trouxeram a Geometria como tema principal. As habilidades EF06MA07, EF06MA17, EF06MA18, EF06MA21, EF06MA23, EF06MA24, EF07MA17, EF07MA22, EF07MA27, EF07MA31, EF07MA32, EF08MA14, EF08MA19, EF09MA09, EF09MA10, EF09MA13, EF09MA14, EF09MA12 e EF09MA17 foram abordadas nas provas da competição o que torna a OBMEP um excelente material pedagógico para a complementação do aprendizado dos estudantes. Surpreendentemente, as habilidades EF06MA16, EF06MA19, EF06MA20, EF06MA22, EF07MA19, EF07MA20, EF07MA21, EF07MA23, EF07MA24, EF07MA25, EF07MA26, EF07MA28, EF08MA15, EF08MA16, EF08MA17, EF08MA18, EF09MA11, EF09MA15 e EF09MA16 fundamentais de acordo com a BNCC, não foram abordadas em nenhuma das questões da OBMEP do período analisado. Este cenário mostra uma lacuna significativa, pois apesar da OBMEP ser uma fonte valiosa de exercícios, não é possível depender exclusivamente dela para o desenvolvimento de todas as habilidades estabelecidas pela BNCC.

Referências

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana.* SBM, 11ª edição, 2012.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática.* Editora Blucher, 3ª edição, 2012.

BRASIL, M. d. E. e. S. d. E. B. Base Nacional Comum Curricular. [S.l.: s.n.], 2017.

CALDAS, Carlas Ciane Silva; VIANA, Cléber Soares. *As olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas na formação de professores e alunos.* Revista Margens Interdisciplinar, v. 7, n. 8, p. 325-339, 2013.

Histórico da BNCC. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico>. Acesso em: 31 ago. 2023.

MUNIZ NETO, A. C. Tópicos de matemática elementar. *Geometria Euclidiana. Coleção do Professor de Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2ª edição, 2013.

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 31 ago. 2023.

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 31 ago. 2023.

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 31 ago. 2023.