UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Yasmin Lopes de Carvalho

Um estudo comparativo entre espaços vetoriais normados de dimensão finita e infinita

Recife - PE
Junho de 2022

Um estudo comparativo entre espaços vetoriais normados de dimensão finita e infinita

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciada em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza

Recife - PE
Junho de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C331e Carvalho, Yasmin Lopes de
Um Estudo Comparativo entre Espaços Vetoriais Normados de Dimensão Finita e Infinita / Yasmin Lopes de Carvalho. - 2022.
99 f. : il.

Orientador: Eudes Mendes Barboza.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2024.

1. Espaços Vetoriais Normados. 2. Dimensão. 3. Equivalência de Normas. 4. Continuidade. 5. Completude e Compacidade. I. Barboza, Eudes Mendes, orient. II. Título

CDD 510

Yasmin Lopes de Carvalho

Um estudo comparativo entre espaços vetoriais normados de dimensão finita e infinita

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciada em matemática.

Aprovado em: 09/06/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Profa. Dra. Yane Lísley Ramos Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Recife - PE
Junho de 2022

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por ter me iluminado e abençoado na minha trajetória.

A minha família, em especial a minha avó, Edileuza, a minha mãe Sharlene, a minha madrinha Edilma e as minhas irmãs, que entenderam minhas ausências e não mediram esforços para que eu realizasse o meu sonho.

Ao meu namorado, João Pedro, que me acompanhou em grande parte dessa trajetória, me dando confiança e apoio para seguir em frente, sendo amoroso e paciente.

Ao meu orientador, Eudes Mendes, que está comigo desde o início da graduação, me ensinando, acreditando na minha capacidade, tendo paciência e dedicação e pelo incentivo à carreira acadêmica.

A todos os professores do departamento de matemática, em especial Clessius Silva, Tarciana Maria, Thiago Dias e Gilson Carvalho, pelos ensinamentos, contribuições ao longo do curso e por todas as oportunidades que deram.

Aos meus amigos da universidade, em especial, Beatriz Gomes, José Arthur, Laryssa Almeida, Vivian Santos e a todos os outros que estiveram comigo ao longo dessa trajetória, que me ajudaram com palavras de incentivo e que compartilharam bons momentos.

Aos meus amigos Raquel Aquino e Matheus Oliveira que entenderam minhas ausências e me incentivaram para que eu nunca desistisse.

À banca examinadora, Yane Araújo e Uberlândio Severo, por ter aceitado o convite e pelas contribuições à versão final do meu trabalho.

À FACEPE, Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco, pelo apoio financeiro.

Resumo

Espaços vetoriais são estruturas nas quais podemos somar elementos e multiplicar seus elementos por escalares. Quando um espaço vetorial é munido de uma norma, também podemos verificar propriedades métricas e topológicas. Em Álgebra Linear, estudamos resultados importantes que são válidos para os espaços vetoriais de dimensão finita. Mas, nem sempre, podemos estender esses resultados para os espaços vetoriais normados de dimensão infinita. Com o auxílio da Álgebra Linear, dos Espaços Métricos e da Análise Funcional, veremos noções básicas e ferramentas suficientes para discutir algumas diferenças entre os espaços vetoriais normados de dimensão finita e infinita. As diferenças que veremos estão relacionadas com as normas, transformações lineares, completude, compacidade e os subespaços vetoriais fechados. Mostraremos os resultados válidos para espaços de dimensão finita e apresentaremos exemplos e contraexemplos para mostrar que nem sempre tais resultados são válidos em dimensão infinita.

Palavras-Chave: Espaços Vetoriais Normados, Dimensão, Equivalência de Normas, Continuidade, Completude e Compacidade.

Abstract

Vector spaces are structures in which we can add elements and multiply their elements by scalars. When a vector space is provided with a norm, we can also verify metric and topological properties. In Linear Algebra, we study important results that hold for finite-dimensional vector spaces. However, we cannot always extend these results to infinite-dimensional normed vector spaces. With the help of Linear Algebra, Metric Spaces and Functional Analysis, we will see basic notions and enough tools to discuss some differences between normed vector spaces of finite and infinite dimensions. The differences we'll see are related to norms, linear transformations, completeness, compactness, and closed vector subspaces. We will show valid results for finite dimensional spaces and present examples and counterexamples to show that such results are not always valid in infinite dimensions.

Key-Words: Normed Vector Spaces, Dimension, Norm Equivalence, Continuity, Completeness and Compactness.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Notações

- $\mathbb{K}^n$ denota o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{K}$;
- $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ denota o conjunto das aplicações $f : X \to \mathbb{K}$;
- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ denota o conjunto das aplicações contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$;
- $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ denota o conjunto das matrizes 2×2 com entradas no corpo $\mathbb{K}$;
- Im T representa a imagem da transformação T;
- Nuc T representa o núcleo da transformação T;
- id_V denota a identidade de V;
- $U \cong V$ indica que U é isomorfo a V;
- (M, d) denota um espaço métrico, sendo M um conjunto e d uma métrica;
- $d(x, y)$ representa distância entre x e y com a métrica euclidiana;
- $d^{'}(x, y)$ representa distância entre x e y com a métrica da soma;
- $d^{''}(x, y)$ representa distância entre x e y com a métrica do máximo;
- $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ denota o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$;
- $\mathcal{B}(a; r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r;
- $\mathcal{B}[a; r]$ denota a bola fechada de centro a e raio r;
- $\mathcal{S}(a; r)$ denota a esfera de centro a e raio r;
- $\mathcal{B}_x(a; r)$ indica a interseção da bola aberta $\mathcal{B}(a; r)$ com o conjunto X;
- $\mathcal{B}_x[a; r]$ indica a interseção da bola aberta $\mathcal{B}[a; r]$ com o conjunto X;

- $\mathcal{S}_x(a;r)$ indica a interseção da bola aberta $\mathcal{S}(a;r)$ com o conjunto X;
- $intX$ denota o conjunto dos pontos interiores de X;
- ∂X representa a fronteira de X;
- $M - X$ indica o complementar do conjunto X no espaço métrico M;
- $\varnothing$ representa o conjunto vazio;
- ε e δ denotam constantes positivas;
- X' indica o conjunto dos pontos de acumulação de X;
- $\overline{X}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a X;
- $|\cdot|$ denota a norma num espaço vetorial E;
- $||f||$ denota uma norma da aplicação f;
- $\sup X$ representa a menor das cotas superiores;
- $\inf X$ representa a maior das cotas superiores;
- $|x|$ indica a norma de x com a métrica euclidiana;
- $|x|_M$ indica a norma de x com a métrica do máximo;
- $|x|_S$ indica a norma de x com a métrica da soma;
- $\mathcal{B}_M(0;\varepsilon)$ indica que a sequência (f_n) converge para f na topologia fraca*;
- $C[0,1]$ o conjunto das aplicações contínuas no intervalo $[0,1]$;
- $C^1[0,1]$ o conjunto das funções contínuas e diferenciáveis no intervalo $[0,1]$;
- I_X representa o operador identidade;
- $L_p(X,\Sigma,\mu)$ denota o espaço das funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$;
- $L_p[0,1]$ denota o espaço das funções integráveis do intervalo $[0,1]$;
- $\mathcal{P}[0,1]$ representa o conjunto das funções polinomiais de $C[0,1]$;
- c_0 indica o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero;

- c_{00} subespaço de c_0 formado pelas sequências quase nulas;
- B_E denota a bola fechada unitária num espaço normado E;
- l_2 denota o espaço das sequências cuja série dos termos ao quadrado são convergentes.

Introdução

Os espaços vetoriais são estruturas que estão relacionadas a duas operações, a saber, a soma e a multiplicação por escalar, e satisfazem algumas propriedades. Já os espaços vetoriais normados são aqueles que possuem uma norma associada, induzindo a noção de distância. Esses espaços possuem dimensão finita ou infinita, que será definida a partir da cardinalidade de uma base que está relacionada ao espaço. Há diversos resultados que dependem intrinsecamente da finitude da dimensão do espaço vetorial normado.

Ao observar a pouca exploração sobre esse tema na graduação, notou-se a necessidade de elaborar uma pesquisa com ênfase em alguns resultados que são válidos em dimensão finita e que não são em dimensão infinita. Na graduação, estudamos os espaços vetoriais em Álgebra Linear com o foco em dimensão finita e, muitas vezes, é evitado a discussão a respeito dos espaços com dimensão infinita, pois outras ferramentas mais rebuscadas são necessárias.

Partindo do que foi observado, buscamos reunir algumas diferenças entre esses espaços, no intuito de responder ao seguinte problema de pesquisa: quais as principais diferenças entre os espaços vetoriais de dimensão finita e os de dimensão infinita?

Dessa forma, nosso objetivo principal é verificar resultados que dependem fortemente da dimensão do espaço vetorial. Para isto, apresentaremos resultados e definições relativos aos espaços vetoriais normados e compararemos certos resultados. Além disso, exibiremos contraexemplos para os resultados válidos em dimensão finita, mas que nem sempre são verificados em dimensão infinita.

Inicialmente, focamos nos conceitos de espaços vetoriais e espaços métricos e, posteriormente, nos estudos acerca da comparação entre resultados para espaços vetoriais que dependem da finitude da sua dimensão. A pesquisa fundamentou-se na abordagem qualitativa, enfatizando a pesquisa bibliográfica. Nos dois primeiros capítulos, fez-se um levantamento bibliográfico sobre conceitos, exemplos e resultados básicos. No primeiro capítulo, serão apresentados conceitos e resultados importantes da Álgebra Linear, para auxiliar nos estudos posteriores, como o conceito de corpos, espaços vetoriais, bases e transformação linear. Em seguida, no Capítulo 2, veremos as principais definições e resultados relativos aos espaços métricos. É importante salientar que algumas demonstrações dos resultados destes capítulos poderiam ser omitidas. No entanto, optamos por apresentá-las com a finalidade de tornar o texto autossuficiente. Por fim, no último capítulo, apresentamos um estudo comparativo entre os espaços vetoriais normados de dimensão finita e infinita.

Capítulo 1

Noções de Espaços Vetoriais

Neste capítulo, estudaremos os espaços vetoriais e algumas propriedades e resultados sobre a existência de bases que serão importantes para atingir o objetivo principal. Veremos, também, as propriedades das transformações lineares. A notação $\mathbb{K}$ denotará um corpo qualquer. Durante o capítulo, utilizaremos como base as referências [1] e [2].

1.1 Espaços Vetoriais

Antes de definirmos o conceito de espaço vetorial, precisaremos rever a definição de corpos. Em seguida, veremos alguns exemplos para ilustrar o conceito de espaços vetoriais.

Definição 1.1. Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é um corpo se em $\mathbb{K}$ pudermos definir duas operações a adição, denotada por $+$ e a multiplicação, denotada por $\cdot$ que satisfazem as seguintes propriedades:

i) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$;

ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$;

iii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por 0 e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz $0 + a = a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{K}$;

iv) Para todo $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $-a$ e chamado de inverso aditivo de a que satisfaz $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

v) $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$;

vi) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$;

vii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por 1 e chamado de elemento neutro da multiplicação ou identidade de $\mathbb{K}$, que satisfaz $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{K}$;

viii) Para todo $0 \neq a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por a^{-1} e chamado de inverso multiplicativo de a que satisfaz $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$;

ix) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$.

Exemplo 1.2. Os conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos, mas o conjunto $\mathbb{Z}$ não é corpo, pois a condição *viii*) não é satisfeita.

Definição 1.3. Seja V um conjunto não vazio. O conjunto V é um espaço vetorial sobre um corpo qualquer $\mathbb{K}$ se em seus elementos, chamados de vetores, estiverem satisfeitas com uma operação de soma e produto por escalar as seguintes condições:

1) Sejam u e v vetores de V. A soma de u e v será denotado por $u + v \in V$ e

   1.1) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

   1.2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$;

   1.3) existe um vetor $0 \in V$ tal que $0 + v = v$, $\forall v \in V$ e será denominado por vetor nulo;

   1.4) existe um vetor, denotado por $-v \in V$, tal que $v + (-v) = 0$.

2) Sejam v vetor de V e α um escalar de $\mathbb{K}$. O produto escalar de α e v será denotado por $\alpha \cdot v \in V$ e

   2.1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$;

   2.2) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$, com 1 a identidade de $\mathbb{K}$;

   2.3) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u, v \in V$;

   2.4) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$.

Exemplo 1.4. Todo corpo é um espaço vetorial sobre ele próprio. Seja o corpo $\mathbb{K}$. Se considerarmos que as duas operações já definidas em $\mathbb{K}$ são equivalentes a soma de vetores e a multiplicação por escalar, as condições para ser espaço vetorial serão válidas. Agora, de forma geral, vamos considerar que para cada $n \geq 1$ temos o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K} = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, 2, ..., n\}$$

com as seguintes operações:

- $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$, para todo $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$;
- $\alpha \cdot (a_1, ..., a_n) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Assim, vamos verificar que $\mathbb{K}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

1.1) Sejam $(a_1, ..., a_n)$ e $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) &= (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)\\ &= (b_1 + a_1, ..., b_n + a_n)\\ &= (b_1, ..., b_n) + (a_1, ..., a_n).\end{aligned}$$

1.2) Sejam $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)$ e $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{K}^n$, então

$$\begin{aligned}((a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n)) + (c_1, ..., c_n) &= (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n) + (c_1, ..., c_n)\\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, ..., (a_n + b_n) + c_n)\\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), ..., a_n + (b_n + c_n))\\ &= (a_1, ..., a_n) + (b_1 + c_1, ..., b_n + c_n)\\ &= (a_1, ..., a_n) + ((b_1, ..., b_n) + (c_1, ..., c_n)).\end{aligned}$$

1.3) Dado $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$. Suponha $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ o vetor nulo, então

$$(x_1, ..., x_n) + (a_1, ..., a_n) = (a_1, ..., a_n),$$

isto é,

$$(x_1 + a_1, ..., x_n + a_n) = (a_1, ..., a_n).$$

Logo, $x_1 + a_1 = a_1, ..., x_n + a_n = a_n$ e, portanto, $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$ é o vetor nulo.

1.4) Seja $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$. Suponha $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ o inverso aditivo e $(0, ..., 0)$ o vetor nulo. Assim,

$$\begin{aligned}(a_1, ..., a_n) + (y_1, ..., y_n) &= (0, ..., 0)\\ (a_1 + y_1, ..., a_n + y_n) &= (0, ..., 0).\end{aligned}$$

Logo, $a_1 + y_1 = 0, ..., a_n + y_n = 0$ e, portanto, $(y_1, ..., y_n) = (-a_1, ..., -a_n) = -(a_1, ..., a_n)$.

2.1) Dados $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, obtemos

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) \cdot (a_1, ..., a_n) &= ((\alpha\beta)a_1, ..., (\alpha\beta)a_n)\\ &= (\alpha(\beta a_1), ..., \alpha(\beta a_n))\\ &= \alpha(\beta a_1, ..., \beta a_n)\\ &= \alpha(\beta(a_1, ..., a_n)).\end{aligned}$$

2.2) Suponha $1 \in \mathbb{K}$ a identidade e $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$. Então,

$$(1 \cdot a_1, ..., 1 \cdot a_n) = (a_1, ..., a_n).$$

2.3) Sejam $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então temos

$$\begin{aligned}\alpha \cdot ((a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n)) &= \alpha(a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)\\ &= (\alpha(a_1 + b_1), ..., \alpha(a_n + b_n))\\ &= (\alpha a_1 + \alpha b_1, ..., \alpha a_n + \alpha b_n)\\ &= (\alpha a_1, ..., \alpha a_n) + (\alpha b_1, ..., \alpha b_n)\\ &= \alpha(a_1, ..., a_n) + \alpha(b_1, ..., b_n).\end{aligned}$$

2.4) Dados $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Logo

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)(a_1, ..., a_n) &= ((\alpha + \beta)a_1, ..., (\alpha + \beta)a_n) \\
&= (\alpha a_1 + \beta a_1, ..., \alpha a_n + \beta a_n) \\
&= (\alpha a_1, ..., \alpha a_n) + (\beta a_1, ..., \beta a_n) \\
&= \alpha(a_1, ..., a_n) + \beta(a_1, ..., a_n).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{K}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Da mesma forma temos que $\mathbb{R}^n$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.5. $\mathbb{C}^2$ é espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ com as seguintes operações:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}^2$, para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}^2$.
- $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

De forma análoga ao exemplo anterior, podemos verificar que $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

A partir dos Exemplos 1.4 e 1.5 podemos concluir que $\mathbb{C}^2$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, mas são espaços vetoriais distintos. Assim, é de extrema importância deixar claro sobre qual corpo de escalares estamos considerando.

Exemplo 1.6. Considere um conjunto qualquer não vazio X e $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções definidas em X, $f : X \to \mathbb{K}$. As operações definidas em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ são:

- seja $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, a função $f + g : X \to \mathbb{K}$ é dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in X$;
- seja $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, a função $\alpha \cdot f : X \to \mathbb{K}$ é dada por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ para cada $x \in X$.

Vamos, então, mostrar que o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial. De fato,

1.1) Sejam f e $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, então

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= g(x) + f(x) \\
&= (g + f)(x),
\end{aligned}$$

para todo x.

1.2) Dados f, g e $h(x) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, logo

$$
\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x) \\
&= (f(x)+g(x))+h(x) \\
&= f(x)+(g(x)+h(x)) \\
&= f(x)+(g+h)(x) \\
&= (f+(g+h))(x),
\end{aligned}
$$

para todo x.

1.3) Suponha $p \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ elemento neutro e $f \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, então

$$
\begin{aligned}
p(x)+f(x) &= f(x) \\
p(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $p(x)$ deverá ser a função nula.

1.4) Seja $q \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ o inverso aditivo, p a função nula e $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Assim,

$$
\begin{aligned}
q(x)+f(x) &= p(x) \\
q(x)+f(x)-f(x) &= p(x)-f(x) \\
q(x) &= -f(x).
\end{aligned}
$$

Logo, $-f(x)$ é o inverso aditivo de $f(x)$.

2.1) Sejam $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então obtemos

$$
\begin{aligned}
((\alpha\beta)f)(x) &= (\alpha\beta)f(x) \\
&= \alpha(\beta f(x)) \\
&= \alpha(\beta f)(x) \\
&= (\alpha(\beta f))(x),
\end{aligned}
$$

para todo x.

2.2) Seja 1 a identidade do corpo $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Então,

$$\begin{aligned} 1 \cdot f(x) &= f(x) \\ &= (1 \cdot f)(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Logo, 1 é o elemento neutro da multiplicação de $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$.

2.3) Dados $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, logo

$$\begin{aligned} (\alpha(f+g))(x) &= \alpha(f(x)+g(x)) \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\ &= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x), \end{aligned}$$

para todo x.

2.4) Dados $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Assim,

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta)f)(x) &= (\alpha+\beta)f(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\ &= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x), \end{aligned}$$

para todo x.

Assim, o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, sendo a função nula o vetor nulo do espaço.

Definição 1.7. Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $W \subseteq V$. O subconjunto W de V é um subespaço vetorial de V com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar do espaço vetorial V e satisfaz as seguintes condições:

i) $0 \in W$;

ii) se $v_1, v_2 \in W$ então $v_1 + v_2 \in W$;

iii) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in W$ então $\alpha \cdot v \in W$.

Exemplo 1.8. Seja V um espaço vetorial arbitrário. V é subespaço vetorial de V e o subconjunto formado apenas pelo elemento nulo também é subespaço de V.

Exemplo 1.9. Seja $\mathbb{C}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{C}$ a cadeia de subespaços de $\mathbb{C}$. Observe que se $\mathbb{C}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, então $\mathbb{Q}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{C}$ já que a multiplicação de um elemento em $\mathbb{R}$ por um elemento em $\mathbb{Q}$ nem sempre é racional.

1.2 Bases

Nesta seção iremos discutir um conceito muito importante dos espaços vetoriais, a saber, base. É através da base que podemos identificar a dimensão do espaço e, assim, classificá-los como dimensão finita e infinita. Para isto, veremos algumas definições importantes e exemplos.

Definição 1.10. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $v \in V$. O vetor v é uma combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n \in V$ se existir escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Definição 1.11. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. O conjunto $\mathcal{B}$ gera V se todo $v \in V$ for uma combinação linear de elementos $\mathcal{B}$.

Exemplo 1.12. Seja $\mathbb{R}^4$ espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. O conjunto $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^4$. De fato, considere $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, então

$$(a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1),$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.13. Considere $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Observe que $\{(1,0), (0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{C}^2$, pois seja $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, então

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1),$$

com $a, b \in \mathbb{C}^2$. Mas, ao considerarmos $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ não é gerador de $\mathbb{C}^2$. Note que não é possível escrever o elemento $(1,i)$ como combinação linear $a(1,0) + b(0,1)$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$. A partir desse exemplo podemos notar a importância de sempre deixar claro sobre qual o corpo $\mathbb{K}$ estamos considerando o espaço vetorial.

Geralmente, um espaço vetorial possui vários conjuntos geradores e às vezes precisamos utilizar um conjunto gerador mais simples possível, em que cada elemento do espaço vetorial se escreva de maneira única como combinação linear dos elementos desse conjunto gerador. Para isto, veremos o conceito de conjunto linearmente independente.

Definição 1.14. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. Diremos que $\mathcal{B}$ é um subconjunto linearmente independente (LI) se $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$, para $v_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $i = 1, ..., n$, então $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Um conjunto é dito linearmente independente infinito quando cada uma de suas partes finitas é LI. Se $\mathcal{B}$ não for linearmente independente, diremos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente (LD).

Exemplo 1.15. Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0, (i, 0), (0, 1), (0, i)\} \subseteq \mathbb{C}^2$. Ao considerarmos o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{B}$ é linearmente dependente, pois $(0,0) = 1 \cdot (1,0) + i \cdot (i,0) + 0 \cdot (0,1) + 0 \cdot (0,i)$. Mas, se consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathcal{B}$ é linearmente independente, pois

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(i,0) + \alpha_3(0,1) + \alpha_4(0,i) = (0,0).$$

Dessa forma, $\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 + i\alpha_4 = 0$ e, portanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Exemplo 1.16. Sejam as funções $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ dadas por $f_n(t) = t^n$, com $n = 0, 1, 2, ...$ e $\mathcal{B} = \{f_n : n = 0, 1, 2, ...\}$. O subconjunto $\mathcal{B}$ é linearmente independente infinito em $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ vamos mostrar que $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ é LI. Logo

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n = 0$$

e, então

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + ... + \alpha_n x^n = 0.$$

Assim, $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$ e concluímos que $\mathcal{B}$ não pode ser LD, pois cada parte finita de $\mathcal{B}$ é LI.

Definição 1.17. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. O conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de V se for um conjunto gerador de V e for linearmente independente.

Exemplo 1.18. Como vimos no Exemplo 1.15, o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ é gerador do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ e é linearmente independente. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.19. Também no Exemplo 1.15 vimos que $\mathcal{B} = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ é gerador do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, mas não é linearmente independente. Logo, $\mathcal{B}$ não é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

1.3 Espaços Vetoriais Finitamente Gerados

Nesta seção mostraremos que todo espaço vetorial não nulo que possua um conjunto gerador finito tem uma base. Para isto, veremos a seguinte definição:

Definição 1.20. Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é finitamente gerado se possuir um conjunto gerador finito.

Proposição 1.21. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado não nulo e $\{v_1,...,v_m\}$ um conjunto gerador de V. Então todo conjunto linearmente independente de vetores em V tem no máximo m elementos.*

Demonstração. Para facilitar a demonstração, vamos provar que todo conjunto que contenha mais de m elementos é linearmente dependente. Então, seja $\{u_1,...,u_n\}$ sendo $n > m$. Como $\{v_1,...,v_m\}$ é conjunto gerador de V, então existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, com $j = 1,...,n$, tal que

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + ... + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i.$$

Se existe $i = 1,...,n$ tal que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \neq 0$, já temos o que queremos. Então vamos analisar o caso em que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = 0$. Agora, sejam $\lambda_1,...,\lambda_n$ escalares em $\mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i \right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i.$$

Se $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0$, com $i = 1, ..., m$, obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 & + & ... & + & \alpha_{1n}\lambda_n = & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1}\lambda_1 & + & ... & + & \alpha_{mn}\lambda_n = & 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

com $\lambda_1, ..., \lambda_n$ incógnitas e coeficientes $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Como supomos que $n > m$, então o número de equações em (1.1) é menor que o número de incógnitas, logo esse sistema possui uma solução não nula. Então, existem $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{K}$, que não sejam todos nulos tal que $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_{ij} = 0$, para $i = 1, ..., m$. Assim, temos

$$\gamma_1 u_1 + ... + \gamma_n u_n = 0,$$

com $\gamma_1, ..., \gamma_n$ não todos nulos e isso implica que $\{u_1, ..., u_n\}$ é linearmente dependente. $\square$

Corolário 1.22. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado e não nulo. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases de V. Pela proposição anterior decorre que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são finitamente gerados, pois são linearmente independentes, logo possuem m e m' elementos, respectivamente. Se $\mathcal{B}$ é conjunto gerador de V e $\mathcal{B}'$ é linearmente independente, então pela proposição anterior, resulta que $m' \leq m$. Por outro lado, se $\mathcal{B}'$ é conjunto gerador e $\mathcal{B}$ é linearmente independente, novamente pela proposição anterior, temos que $m \leq m'$. Portanto, $m = m'$. $\square$

Definição 1.23. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se V possuir uma base finita, então o número de elementos de tal base será a dimensão de V. Caso contrário, a dimensão de V é infinita.

Exemplo 1.24. No Exemplo 1.18, o conjunto $\mathbb{C}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ tem dimensão 4.

Exemplo 1.25. Pelo Exemplo 1.16, vimos que o conjunto $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ das funções contínuas $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ possui um conjunto infinito LI e, pela definição anterior, o conjunto $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ tem dimensão infinita.

Corolário 1.26. *Seja V um espaço de dimensão finita e seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\mathcal{B}$ é uma base;

b) $\mathcal{B}$ é linearmente independente;

c) $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.

Proposição 1.27. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_m\}$ um conjunto linearmente independente em V. Se existir $v \in V$ que não seja combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, então $\{v_1, ..., v_m, v\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}$ escalares em $\mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v = 0.$$

Se α_{m+1} fosse não nulo, teríamos

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} v_1 - ... - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} v_m,$$

o que é uma contradição, pois por hipótese v não é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. Logo, $\alpha_{m+1} = 0$ e $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$. Como $\mathcal{B}$ é linearmente independente, então $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$. Portanto, $\{v_1, ..., v_m, v\}$ é linearmente independente. □

Teorema 1.28. *Todo espaço vetorial finitamente gerado não nulo possui uma base.*

Demonstração. Considere V um espaço vetorial finitamente gerado não nulo sobre $\mathbb{K}$. Então V possui um conjunto gerador finito com m elementos. Seja $v_1 \in V$ e não nulo, logo se $\mathcal{B}_1$ for conjunto gerador de V, então é uma base. Se não o for, existe $v_2 \in V$ que não é múltiplo de v_1. Pela proposição anterior, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Novamente, se $\mathcal{B}_2$ for conjunto gerador de V, então é uma base. Caso contrário, existe $v_3 \in V$ que não possui combinação linear com v_1 e v_2. Logo, pela proposição anterior, $\mathcal{B}_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente. Se continuarmos da mesma forma ou teremos uma base de V ou construiremos conjuntos linearmente independentes em V arbitrariamente grandes, o que não pode ocorrer pois todo conjunto linearmente independente possui no máximo m elementos. Portanto, o espaço V possui uma base. □

Teorema 1.29. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e seja $\mathcal{B}$ um conjunto linearmente independente em V. Então existe uma base de V contendo $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{B}$ já é uma base não há nada o que demonstrar. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_m\} \subset V$ um subconjunto linearmente independente, com $m < dim\ V$. Então, vamos mostrar que existe um conjunto de vetores $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}, ..., w_{m+k}\}$ que seja linearmente independente e que se adicionarmos o vetor w a essa base esse novo conjunto não será linearmente independente. Como o conjunto é LI, então existe $w_{m+1} \in V$ tal que $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}\}$ é LI. Se $m+1$ for a dimensão do espaço, não temos nada há mostrar. Se $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}\}$ não é linearmente dependente, então existe $w_{m+2} \in V$ tal que $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}, w_{m+2}\}$ é LI. Caso $m + 2$ seja a dimensão do espaço, então não temos mais nada para provar. Caso contrário, podemos repetir esse processo finitamente, no máximo $n - m$ vezes, já que todo subconjunto LI de V tem no máximo $n = dim V$ elementos. Como $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}, ..., w_n\}$ é LI e tem n elementos, se adicionarmos outro vetor v então $\{v, w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., w_n\}$ não será linearmente independente. Logo, podemos escrever v como combinação linear dos outros vetores. Portanto, $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}, ..., w_n\}$ é uma base de V que contém $\mathcal{B}$. □

1.4 Transformações Lineares

Nesta seção, estudaremos as transformações lineares que são funções que preservam as operações do espaço vetorial. Veremos definições, exemplos e resultados que serão importantes ao longo do trabalho, como o Teorema do núcleo e da imagem.

Definição 1.30. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear é uma função $T : U \to V$ que cumpre as seguintes condições:

i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos $u_1, u_2 \in U$;

ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in U$.

Proposição 1.31. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. A função $T : U \to V$ é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2), \quad \forall\, u_1, u_2 \in U, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Demonstração. Se T é uma transformação linear, então $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, logo

$$T(\lambda u_1 + u_2) = T(\lambda u_1) + T(u_2), \quad \forall\, u_1, u_2 \in U, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ainda, se T é transformação linear, então $T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$, logo

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2), \quad \forall\, u_1, u_2 \in U, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Reciprocamente, se $T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$, $\forall\, u_1, u_2 \in U, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, então

i) Como é válido para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, então tome $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} T(1 \cdot u_1 + u_2) &= T(u_1 + u_2) \\ &= T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

ii) Como é válido para todo $u_2 \in U$, então tome $u_2 = 0$, logo

$$\begin{aligned} T(\lambda u_1 + u_2) &= T(\lambda u_1 + 0) \\ &= \lambda T(u_1). \end{aligned}$$

Portanto, T é transformação linear. □

Proposição 1.32. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Assim, temos as seguintes afirmações:*

a) $T(0_U) = 0_V$, com 0_U e 0_V denotando os vetores nulos de U e V, respectivamente.

b) $T(-u) = -T(u)$, para todo $u \in U$.

c) $T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_1 u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(u_i)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in U$ para $i = 1, ..., m$.

Demonstração.

a) Observe que

$$0_V + T(0_U) = T(0_U) = T(0_U + 0_U) = T(0_U) + T(0_U).$$

Logo, $0_V + T(0_U) = T(0_U) + T(0_U)$ e, então, $0_V = T(0_U)$.

b) Podemos escrever $-u = (-1)u$, para cada $u \in U$ e como T é transformação linear, então

$$T(-u) = T((-1)u) = (-1)T(u) = -T(u).$$

c) Como T é transformação linear, então

$$T\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right) = T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m) = \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_m T(u_m) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i T(u_i).$$

$\square$

Veremos agora alguns exemplos de transformações lineares e para provar poderemos utilizar a Definição 1.30 ou a Proposição 1.31.

Exemplo 1.33. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. A função identidade $Id : U \to U$ definida por $Id(u) = u$, $\forall u \in U$ é uma transformação linear. A função nula $T : U \to V$ dada por $T(u) = 0$, $\forall u \in U$ também é uma transformação linear.

Exemplo 1.34. A função

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ & (a,b,c) & \mapsto & T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} \end{array}$$

é uma transformação linear. De fato,

i) Sejam $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} T((a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)) &= T(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & 0 \\ 0 & (c_1+c_2)-(b_1+b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2) & 0 \\ 0 & (c_1-b_1)+(c_2-b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & c_1-b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 & 0 \\ 0 & c_2-b_2 \end{pmatrix} \\ &= T(a_1,b_1,c_1)+T(a_2,b_2,c_2). \end{aligned}$$

ii) Dados $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned}
T(\lambda(a_1, b_1, c_1)) &= T(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 & 0 \\ 0 & \lambda c_1 - \lambda b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + b_1) & 0 \\ 0 & \lambda(c_1 - b_1) \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & c_1 - b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda T(a_1, b_1, c_1).
\end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

Exemplo 1.35. Seja $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A função

$$\begin{array}{rccc}
T: & \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\
 & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx
\end{array}$$

é uma transformação linear. De fato, sejam $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned}
T(\lambda f + g) &= \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx \\
&= \int_a^b \lambda f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\
&= \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\
&= \lambda T(f) + T(g).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.36. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$. Vamos mostrar que T não é transformação linear. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Por um lado, temos

$$T(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Por outro lado, temos

$$T(x) + T(y) = x^2 + y^2.$$

Logo, concluímos que T não é transformação linear, pois a primeira condição para ser transformação linear não é satisfeita.

Teorema 1.37. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $\{u_1, ..., u_n\}$ for uma base de U e se $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, então existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i = 1, ..., n$.*

Demonstração. Seja $T(u) \in V$, sendo u um vetor que pertence a U. Já que $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de U, então existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ e definimos $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$. Como os valores de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são únicos, a função $T : U \to V$ está bem definida. Assim, $T(u_i) = v_i$ e basta mostrar que é linear. Sejam $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in U$, sendo $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo,

$$\begin{aligned}
T(\lambda u + v) &= T\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right)\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\beta_i + \alpha_i)\, u_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\beta_i + \alpha_i)\, v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \\
&= \lambda T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \lambda T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

Então, concluímos que T é linear e nos resta mostrar que T é única. Para isto, seja $S : U \to V$ uma transformação linear tal que $S(u_i) = v_i$, para cada $i = 1, ..., n$. Sendo $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in U$ com $\lambda_i \in \mathbb{K}$, então

$$S(u) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = T(u)$$

e, portanto, a transformação linear é única. □

Agora, veremos algumas definições e resultados importantes do núcleo e da imagem de transformações lineares.

Definição 1.38. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. O núcleo de T é o conjunto $\{u \in U : T(u) = 0\}$ e é denotado por

$Nuc\ T$. A imagem de T é o conjunto $\{v \in V : \exists\, u \in U \text{ com } T(u) = v\}$ e é denotado por $Im\ T$.

Observe que uma transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetiva se, e somente se, $Im\ T = V$.

Proposição 1.39. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então $Nuc\ T$ é um subespaço vetorial de U e $Im\ T$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração. Vamos mostrar que o núcleo de T é um subespaço de U. Note que $0 \in Nuc\ T$, pois $T(0) = 0$ já que T é uma transformação linear. Sejam $u, v \in Nuc\ T$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0 \in Nuc\ T, \text{ e}$$

$$T(\alpha u) = \alpha \cdot T(u) = \alpha \cdot 0 = 0 \in Nuc\ T.$$

Agora, vamos mostrar que a imagem de T é um subespaço de V. De forma análoga, como T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$. Assim, sejam $v_1, v_2 \in U$ tal que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, logo

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2 \in Im\ T, \text{ e}$$

$$T(\alpha v_1) = \alpha \cdot T(v_1) = \alpha \cdot w_1 \in Im\ T.$$

□

Proposição 1.40. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, $Nuc\ T = \{0\}$.*

Demonstração. Suponha que T é injetora, então tome $v \in Nuc\ T$, logo $T(v) = 0$. Mas, como T é uma transformação linear vale que $T(0) = 0$. Como supomos que T é injetiva, então $v = 0$. Agora, vamos supor que $Nuc\ T = \{0\}$. Sejam $v_1, v_2 \in U$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Assim,

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1) - T(v_2) = 0 \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0.$$

Então, $v_1 - v_2 \in Nuc\ T = \{0\}$ e, portanto, $v_1 = v_2$, o que conclui que T é injetiva. □

Definição 1.41. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. A dimensão do subespaço $Im\ T$ é chamado de posto de T e a dimensão do subespaço $Nuc\ T$ é chamado nulidade de T.

Exemplo 1.42. Considere a seguinte transformação linear

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ & (a,b,c) & \mapsto & T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}. \end{array}$$

Vamos determinar o núcleo de T. Um elemento $(a,b,c) \in Nuc\ T$ se, e somente se, $a+b=0$ e $c-b=0$. Logo, $a=-b$ e $c=b$. Então,

$$Nuc\ T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a=-b \text{ e } c=b\} = \{(-b,b,b) : b \in \mathbb{R}\}.$$

Note que $\{(-1,1,1)\}$ é uma base do $Nuc\ T$ e, por isso, a dimensão do núcleo de T é 1. Por outro lado, a imagem de T é da forma

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $a,b,c \in \mathbb{R}$. Assim, temos um conjunto gerador que será

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Porém, podemos perceber que esse conjunto gerador não é linearmente independente, pois podemos reescrever um dos vetores do conjunto gerador como a diferença dos outros dois:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E, por isso, não é uma base de T. Já o conjunto gerador

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é linearmente independente e, portanto, uma base de T. Note que $dim_{\mathbb{R}}\ Im\ T = 2$ e podemos observar que

$$dim_{\mathbb{R}}\ Nuc\ T + dim_{\mathbb{R}}\ Im\ T = dim_{\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^3.$$

Lema 1.43. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de U, então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ gera $Im\ T$.*

Demonstração. Seja $v \in Im\ T$, logo existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Assim, vamos escrever u como $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Agora, vamos calcular $T(u)$:

$$v = T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i).$$

Dessa forma, v é combinação linear de $T(u_1), ..., T(u_n)$, então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ gera $Im\ T$. □

Teorema 1.44 (Teorema do Núcleo e da Imagem)**.** *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com $dim_{\mathbb{K}}\ U$ finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então*

$$dim_{\mathbb{K}}\ U = dim_{\mathbb{K}}\ Nuc\ T + dim_{\mathbb{K}}\ Im\ T.$$

Demonstração. Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base do $Nuc\ T$. Como $Nuc\ T \subset U$ e é subespaço de U, logo pelo Teorema 1.29 podemos completar esta base do $Nuc\ T$ para que seja uma base de U. Assim, vamos considerar $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ uma base de U. Então temos que mostrar que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ é uma base de $Im\ T$. Para isto, devemos mostrar que $[T(w_1), ..., T(w_m)] = Im\ T$ e que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ é linearmente independente. Dado $w \in Im\ T$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = w$, então $u = a_1v_1 + ... + a_nv_n + b_1w_1 + ... + b_mw_m$. Logo,

$$\begin{aligned} w &= T(u) = T(a_1v_1 + ... + a_nv_n + b_1w_1 + ... + b_mw_m) \\ &= a_1T(v_1) + ... + a_nT(v_n) + b_1T(w_1) + ... + b_mT(w_m). \end{aligned}$$

Mas $v_1, ..., v_n$ são vetores do $Nuc\ T$, logo $T(v_i) = 0$, para $i = 1, ..., n$. Assim,

$$w = b_1T(w_1) + ... + b_mT(w_m)$$

e a imagem de T é gerada pelos vetores $T(w_1), ..., T(w_m)$. Agora, vamos mostrar que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ é linearmente independente. Considere a combinação linear

$$a_1T(w_1) + a_2T(w_2) + ... + a_mT(w_m) = 0$$

e vamos mostrar que os a_i são nulos. Como T é linear, então $T(a_1w_1+a_2w_2+...+a_mw_m) = 0$. Logo, $a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_mw_m \in Nuc\ T$. Assim, podemos escrever como combinação da base do núcleo, isto é, existem $b_1, ..., b_n$ tais que

$$\begin{aligned} & a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_mw_m = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n \\ \Rightarrow\ & a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_mw_m - b_1v_1 - b_2v_2 - ... - b_nv_n = 0. \end{aligned}$$

Mas supomos que $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ é uma base de U, logo $a_1 = ... = a_m = b_1 = ... = b_n = 0$. □

1.4.1 Isomorfismos

Até aqui estudamos as transformações lineares que preservam as operações do espaço vetorial. Mas nesta seção, veremos que se adicionarmos a hipótese da função ser injetora e sobrejetora os espaços vetoriais que estão sendo discutidos podem ser identificados.

Definição 1.45. Seja $F : U \to V$ uma função bijetora. Para cada $v \in V$, existe um único $u \in U$ tal que $F(u) = v$. Assim, podemos definir $G : V \to U$ por $G(v) = u$ tal que $(F \circ G) = Id_V$ e $(G \circ F) = Id_U$ e chamamos G de função inversa de F.

Proposição 1.46. *A inversa de uma transformação linear bijetora é também linear.*

Demonstração. Seja $F : U \to V$ uma função bijetora e $G : V \to U$ a inversa de F. Dados $v_1, v_2 \in V$ e $u_1, u_2 \in U$ tais que $F(u_i) = v_i$, com $i = 1, 2$ e $G(v_i) = u_i$, com $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} G(v_1 + v_2) &= G(F(u_1) + F(u_2)) \\ &= G(F(u_1 + u_2)) \\ &= (G \circ F)(u_1 + u_2) \\ &= u_1 + u_2 \\ &= G(v_1) + G(v_2). \end{aligned}$$

e seja $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} G(\lambda v_1) &= G(\lambda F(u_1)) \\ &= G(F(\lambda u_1)) \\ &= (G \circ F)(\lambda u_1) \\ &= \lambda u_1 \\ &= \lambda G(v_1). \end{aligned}$$

Portanto, G, a inversa de F, também é transformação linear. □

Definição 1.47. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Se a transformação T for bijetora, então será um isomorfismo. Ainda, se existir um isomorfismo $T : U \to V$, então os espaços vetoriais U e V serão isomorfos e denotaremos por $U \cong V$. Ou seja, dois espaços vetoriais são isomorfos quando preservam as mesmas propriedades topológicas.

Proposição 1.48. *A transformação linear $T : U \to V$ é injetora se, e somente se, transforma subconjuntos linearmente independentes de U em subconjuntos linearmente independentes de V.*

Demonstração. Seja $S \subset U$ um subconjunto LI e sejam $u_1, ..., u_n \in S$. Assim, os vetores $T(u_1), ..., T(u_n)$ são linearmente independentes, pois

$$\begin{aligned} \lambda_1 T(u_1) + ... + \lambda_n T(u_n) &= 0 \\ T(\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n) &= 0 \\ \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n &= 0, \end{aligned}$$

já que T é injetora. Logo, $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Reciprocamente, se T transforma subconjuntos linearmente independentes de U em subconjuntos linearmente independentes de V, então seja $u \neq 0$ um elemento de U. Como o subconjunto $S = \{u\}$ é LI, logo $T(S) = \{T(u)\}$ é LI. Portanto, como $T(u) \neq 0$, então T é injetora. □

Proposição 1.49. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se U e V são isomorfos, então $dim_{\mathbb{K}}\, U = dim_{\mathbb{K}}\, V$.*

Demonstração. Seja $T : U \to V$ um isomorfismo entre os espaços vetoriais U e V. Dividiremos em dois casos: o caso em que $dim_{\mathbb{K}}\ U = \infty$ e o caso em que $dim_{\mathbb{K}}\ U = n < \infty$. Suponha que $dim_{\mathbb{K}}\ U = \infty$. Como T é bijetora, em particular, injetora, então T leva cada subconjunto linearmente independente de U em um subconjunto linearmente independente de V. Logo, $dim_{\mathbb{K}}\ V = \infty$. Agora, se $dim_{\mathbb{K}}\ U = n$ e T é injetora então, pelo Teorema 1.44, $dim_{\mathbb{K}}\ Im\ T = n$. E como T é sobrejetora, então $Im\ T = V$ e concluímos a demonstração. □

Proposição 1.50. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ de mesma dimensão $n \geq 1$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. São equivalentes as seguintes afirmações:*

a) T é um isomorfismo.

b) T é injetora.

c) T é sobrejetora.

Demonstração. As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(a) \Rightarrow (c)$ seguem diretamente por definição.

$(b) \Rightarrow (a)$: Se T é injetora, então $Nuc\ T = \{0\}$ e, por isso, $dim_{\mathbb{K}}\ Nuc\ T = 0$. Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $dim_{\mathbb{K}}\ Im\ T = dim_{\mathbb{K}}\ U = dim_{\mathbb{K}}\ V = n$. Como $Im\ T$ é um subespaço de V e ambos com dimensão n, logo $Im\ T = V$ e T é sobrejetora. Portanto, T é um isomorfismo.

$(c) \Rightarrow (a)$: Se T é sobrejetora, então $Im\ T = V$. Dessa forma, temos que $dim_{\mathbb{K}}\ Im\ T = dim_{\mathbb{K}}\ U$ e, do Teorema 1.44, $dim\ Nuc\ T = 0$. Logo, $Nuc\ T = \{0\}$ e, assim, T é injetora. Portanto, T é um isomorfismo. □

Capítulo 2

Noções de Espaços Métricos

Neste capítulo, veremos as noções principais de espaços métricos que nos auxiliarão no capítulo seguinte. Estudaremos conceitos e resultados importantes sobre bolas, conjuntos limitados, abertos e fechados, limites de sequências, sequências de Cauchy e os conjuntos compactos. Aqui, utilizaremos como base a referência [5].

2.1 Definições e Exemplos

Nesta seção, daremos a definição de métrica, espaços métricos e subespaços métricos, bem como exemplos de cada conceito apresentado.

Definição 2.1. Dado um conjunto M não vazio, uma métrica em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa um par de elementos $(x, y) \in M$ a um número real $d(x, y)$ que é chamado de distância de x a y e que satisfaz as seguintes condições:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é o conjunto e d é uma métrica de M.

Exemplo 2.2. Um conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de forma fácil através da métrica "zero-um". Definimos a métrica a partir de $d : M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. De fato, sejam $x, y, z \in M$:

1) $d(x,x) = 0$;

2) $d(x,y) = 1 > 0$;

3) $d(x,y) = d(y,x)$, pois a distância de elementos distintos é sempre igual a 1;

4) Como $d(x,z) = 1, d(x,y) = 1$ e $d(y,z) = 1$, pois os elementos são distintos, então

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Definição 2.3. Uma norma em um espaço vetorial E é uma função $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$ que goza das seguintes propriedades, para todos $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Subaditiva);
- $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$ (Homogênea);
- Se $x \neq 0$ então $|x| \neq 0$ (Positiva).

Definição 2.4. Um produto interno num espaço vetorial E, indicado por $\langle x, y\rangle$, de tal modo que, para qualquer $x, x', y, y' \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, se

- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
- $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$;
- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$;
- $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Isto exprime dizendo que um produto interno é uma função real simétrica, bilinear, positiva definida, $E \times E \to \mathbb{R}$.

Exemplo 2.5. O exemplo mais importante é o produto interno canônico do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, dado por

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n,$$

onde $x = (x_1, ..., x_n$ e $y = (y_1, ..., y_n)$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, ou seja,

$$|x| = \sqrt{\langle x_1^2 + ... + x_n^2\rangle}$$

. O número $|x|$ chama-se norma euclidiana ou o comprimento do vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais quando $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposição 2.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é um múltiplo escalar do outro.*

Demonstração. Se $y = 0$, não há nada para provar. Então, se $y \neq 0$ vamos supor $\alpha = \langle x, y\rangle \,/\, |y|^2$. Agora, seja um vetor $z = x - \alpha y$ ortogonal a y. De fato,

$$\langle z, y\rangle = \langle x - \alpha y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha|y|^2 = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|x|^2 &= \langle z + \alpha y, z + \alpha y\rangle \\
&= \langle z, z + \alpha y\rangle + \langle \alpha y, z + \alpha y\rangle \\
&= \langle z, z\rangle + \alpha\langle z, y\rangle + \alpha\langle y, z\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle z, z\rangle - \alpha\langle y, z\rangle + \alpha\langle y, z\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle z, z\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \\
&= |z|^2 + \alpha^2|y|^2.
\end{aligned}$$

Como $\alpha = \langle x, y\rangle \,/\, |y|^2$, então

$$|x|^2 \geq \alpha^2|y|^2 = \left(\frac{\langle x, y\rangle}{|y|^2}\right)^2 \cdot |y|^2 = \frac{\langle x, y\rangle^2}{|y|^2},$$

isto é, $|x|^2\,|y|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$, como queríamos demonstrar. Vale a igualdade se, e somente se, $z = 0$, ou seja, $x = \alpha \cdot y$. $\square$

Exemplo 2.7. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ generaliza o conjunto dos números reais. Os pontos do $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Existem pelo menos três formas de determinar a distância no $\mathbb{R}^n$. Dados

$x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, temos:

- $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$;

- $d'(x, y) = |x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2$;

- $d''(x, y) = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$.

Vamos mostrar que cada uma dessas distâncias é uma métrica, então sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$:

- $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$:

  1) $d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + ... + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0^2 + ... + 0^2} = 0$.

  2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ é sempre maior que 0, pois o quadrado de qualquer número é sempre positivo e a raiz de um número positivo é também positiva.

  3) Note que

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\
&= \sqrt{((-1)(y_1 - x_1))^2 + ... + ((-1)(y_n - x_n))^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2(y_1 - x_1)^2 + ... + (-1)^2(y_n - x_n)^2} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} \\
&= d(y, x),
\end{aligned}$$

  e concluímos que $d(x, y) = d(y, x)$.

  4) Observe que

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\
&= \sqrt{(x_1 - z_1 + z_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - z_n + z_n - y_n)^2} \\
&\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + ... + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + ... + (z_n - y_n)^2} \\
&= d(x, z) + d(z, y).
\end{aligned}$$

  e obtemos $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

- $d^{'}(x,y) = |x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2$:

  1) $d^{'}(x,x) = |x_1 - x_1|^2 + ... + |x_n - x_n|^2 = 0^2 + ... + 0^2 = 0.$

  2) Se $x \neq y$, então $d^{'}(x,y) = |x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2$ é sempre maior que 0, pois o módulo de qualquer número diferente de zero é sempre positivo e o quadrado de um número positivo também é positivo.

  3) Note que

$$
\begin{aligned}
d^{'}(x,y) &= |x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2 \\
&= |(-1)(y_1 - x_1)|^2 + ... + |(-1)(y_n - x_n)|^2 \\
&= |-1|^2|y_1 - x_1|^2 + ... + |-1|^2|y_n - x_n|^2 \\
&= |y_1 - x_1|^2 + ... + |y_n - x_n|^2 \\
&= d^{'}(y,x).
\end{aligned}
$$

  Assim, $d^{'}(x,y) = d^{'}(y,x)$.

  4) Observe que

$$
\begin{aligned}
d^{'}(x,y) &= |x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2 \\
&= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - z_n + z_n - y_n|^2 \\
&\leq |x_1 - z_1|^2 + ... + |x_n - z_n|^2 + |z_1 - y_1|^2 + ... + |z_n - y_n|^2 \\
&= d^{'}(x,z) + d^{'}(z,y).
\end{aligned}
$$

  Então, $d^{'}(x,y) \leq d^{'}(x,z) + d^{'}(z,y)$.

- $d^{''}(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$:

  1) $d^{''}(x,x) = \max\{|x_1 - x_1|, ..., |x_n - x_n|\} = \max\{0, ..., 0\} = 0.$

  2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = |x_i - y_i|$ é sempre maior que 0, pois o módulo de qualquer número diferente de zero é sempre positivo.

3) Temos que

$$\begin{aligned}
d^{''}(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}\\
&= \max\{|(-1)(y_1-x_1)|,...,|(-1)(y_n-x_n)|\}\\
&= \max\{|-1||y_1-x_1|,...,|-1||y_n-x_n|\}\\
&= \max\{|y_1-x_1|,...,|y_n-x_n|\}\\
&= |y_i-x_i|\\
&= d^{''}(y,x),
\end{aligned}$$

e concluímos que $d^{''}(x,y) = d^{''}(y,x)$.

4) Note que

$$\begin{aligned}
d^{''}(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}\\
&= \max\{|x_1-z_1+z_1-y_1|,...,|x_n-z_n+z_n-y_n|\}\\
&\leq \max\{|x_1-z_1|,...,|x_n-z_n|\}+\max\{|z_1-y_1|,...,|z_n-y_n|\}\\
&= d^{''}(x,z)+d^{''}(z,y).
\end{aligned}$$

então $d^{''}(x,y) \leq d^{''}(x,z) + d^{''}(z,y)$.

Portanto, as distâncias $d(x,y), d^{'}(x,y)$ e $d^{''}(x,y)$ são métricas.

Exemplo 2.8. Seja (M,d) um espaço métrico e $S \subset M$ um subconjunto. O subconjunto S é chamado de subespaço de M e a métrica utilizada em S é a métrica induzida de M. Observe que vamos considerar que a distância entre os elementos de S possuam a mesma distância que os mesmos elementos possuíam como elementos de M.

Exemplo 2.9. Seja X um conjunto arbitrário. Uma função f é limitada quando tem-se $f : X \to \mathbb{R}$ e existe uma constante $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicaremos $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ o conjunto das função limitadas $f : X \to \mathbb{R}$. A soma, a diferença e o produto de funções limitadas também são limitadas. A métrica em $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, para $f,g \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ é dada por,

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|.$$

Essa métrica pode ser chamada de métrica da convergência uniforme ou métrica do sup. Seja $X = [a, b]$ e $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas, a distância $d(f, g)$ é dada pelo comprimento da maior corda vertical que liga o gráfico de f a g. Vamos, então, mostrar que, de fato, é uma métrica. Então, sejam $f, g, h \in \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$:

1) $d(f, f) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in X} |0| = 0;$

2) Se $f \neq g$, então $f(x) \leq g(x)$ ou $g(x) \leq f(x)$. Se a diferença entre essas funções forem positivas, não precisamos mostrar nada. Caso contrário, o módulo de uma função negativa, é positiva. Logo, $d(f, g)$ é sempre maior ou igual a 0.

3) Observe que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |(-1)(g(x) - f(x))| \\ &= \sup_{x \in X} |-1||g(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f). \end{aligned}$$

4) Note que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| = d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

2.2 Bolas e Esferas

Aqui veremos as definições de bolas e esferas e pontos isolados, além de exemplos para o melhor entendimento dessas definições.

Definição 2.10. Dado um ponto $a \in M$, M um espaço métrico e r um número real maior que zero, uma bola aberta de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $\mathcal{B}(a; r)$, dos pontos de M de modo que a distância ao ponto a é menor que r e escrevemos

$$\mathcal{B}(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

Definição 2.11. Uma bola fechada de centro a e raio r, denotado por $\mathcal{B}[a;r]$, é formado pelos pontos de M tais que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto a e escrevemos

$$\mathcal{B}[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 2.12. Uma esfera de centro a e raio r, denotada por $S(a;r)$, será o conjunto formado pelos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r e escrevemos

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Com essas definições, podemos concluir que $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$.

Seja X um subespaço de M e para cada $a \in X$ e $r > 0$ temos $B_X(a;r)$ relativamente à métrica induzida. Tem-se $B_X(a;r) = B(a;r) \cap X$ e, analogamente, $B_X[a;r] = B[a;r] \cap X$ e $S_X(a;r) = S(a;r) \cap X$.

Exemplo 2.13. Seja $M = \{z \in \mathbb{R}^2; d(z,0) \leq 1\}$ o disco de centro 0 e raio 1, com métrica euclidiana do plano. No espaço métrico M, temos então para todo $r > 1$ que

- $B(0;r) = B[0;r] = M$;
- $S(0;r) = \varnothing$.

Exemplo 2.14. Dado o produto cartesiano $M = M_1 \times ... \times M_n$ e $a = (a_1, ..., a_n)$, tomemos a métrica $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i)$. Então as bolas em M são produtos cartesianos de bolas:

- $B(a;r) = B(a_1;r) \times B(a_n;r)$; e
- $B[a;r] = B[a_1;r] \times B[a_n;r]$.

Dizer que $d(a,x) < r$ ou $d(a,x) \leq r$ equivale afirmar que $d(a_i,x_i) < r$ ou $d(a_i,x_i) \leq r$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Definição 2.15. Seja M um espaço métrico e $a \in M$. Um ponto a chama-se isolado quando é uma bola aberta em M, isto é, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) = \{a\}$. Ou seja, além do próprio a, não existem outros pontos de M a uma distância de a menor que r. Não é isolado quando para todo $r > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in A$ tal que $0 < d(a,x) < r$.

Exemplo 2.16. Seja $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ com métrica induzida pela métrica usual da reta. Todo ponto de $\mathbb{Z}$ é isolado, pois, se tomarmos $r = 1$ temos que se $x \in \mathbb{Z}$ é tal que $x \in B(n; 1)$ então $|x - n| < 1$ e portanto $x = n$.

Exemplo 2.17. Seja $\overline{P} = \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ ainda com a métrica usual da reta. O ponto 0 não é isolado em $\overline{P}$, pois dado qualquer $r > 0$, existe um número natural $n > \frac{1}{r}$. Logo $0 < \frac{1}{n} < r$ e portanto $\frac{1}{n}$ é um ponto da bola $B(0; r)$, diferente do seu centro 0.

2.3 Conjuntos Limitados

Nesta seção, veremos o que significa um espaço métrico e uma aplicação serem limitados e daremos alguns exemplos para ilustrar.

Definição 2.18. Um subconjunto $X \subset M$ espaço métrico é limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, para todo $x, y \in X$. O menor desses números c será chamado o diâmetro de X. Dizer que, $x, y \in X$ implica em $d(x, y) \leq c$ significa dizer que c é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre os pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto chama-se o supremo desse conjunto. Então podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ como

$$diam(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Para indicar que X não é limitado, escreve-se $diam(X) = \infty$, isto é, seja c um número arbitrário, podemos obter pontos $x_c, y_c \in X$ tal que $d(x_c, y_c) > c$.

Exemplo 2.19. Toda bola $B(a; r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$. De fato, seja $x, y \in B(a; r)$ então

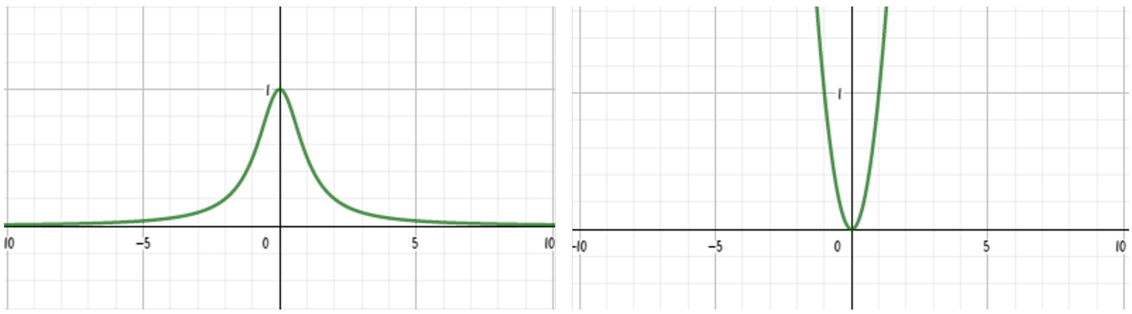
$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r.$$

A bola fechada (e, portanto, a bola aberta e esfera) pode ter o seu diâmetro menor que $2r$. Basta considerar M reduzido a um único ponto a. Então, a $B[a; r] = \{a\}$, com diâmetro 0 para todo $r > 0$.

Definição 2.20. Uma aplicação $f : X \to M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M, chama-se limitada quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M.

Exemplo 2.21. Observe a figura abaixo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)}$ é limitada, pois $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$. Por outro lado, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = x^2$, não é limitada pois $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

Figura 2.1: No lado esquerdo, a $f(x)$ e no lado direito, $g(x)$.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 2.22. Dada a aplicação $f : X \to M$, com X sendo um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. A notação $\mathscr{B}(X; M)$ denota o conjunto das funções limitadas $f : X \to M$. Sejam $f, g \in \mathscr{B}(X; M)$, com suas distâncias $d(f(x), g(x))$, variando x em X, formam um conjunto limitado de números reais maiores ou igual a zero, pois $f(X) \cup g(X) \subset M$ é limitado. Então, podemos definir a distância entre duas funções limitadas pondo

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

a qual denominamos métrica da convergência uniforme ou métrica do sup. De fato é métrica, pois como essas funções formam um conjunto de números reais maior ou igual a zero, a distância entre elas também é maior ou igual a zero, alcançando a igualdade quando as funções são iguais. Além disso, a maior das distâncias entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ é igual a $g(x)$ e $f(x)$. E satisfaz a Desigualdade Triangular, pois se somarmos e subtrairmos uma função limitada $h(x) \in \mathscr{B}(X; M)$ obedece a condição que desejamos.

2.4 Conjuntos Abertos

Nesta seção, estudaremos os conjuntos abertos e veremos definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 2.23. Seja $X \subset M$, com M espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, a é um *ponto interior* a X quando for centro de uma bola aberta contida em X, isto é, existe $r > 0$ tal que $d(x,a) < r \Rightarrow x \in X$. O *interior* de X em M é o conjunto formado por todos os pontos interiores a X e é denotado por $intX$.

Exemplo 2.24. No intervalo da reta $(1,5)$, o ponto 3 é interior, pois tome $r = 2 > 0$ tal que a distância de qualquer ponto desse intervalo ao ponto 3 é menor que r.

Definição 2.25. Um ponto $b \in X$ não é interior quando toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X. A fronteira do conjunto X em M, denotado por ∂X, é formado pelos pontos $b \in M$ tais que a bola aberta de centro b possui pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.

Exemplo 2.26. O interior dos intervalos da forma $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ e (a,b) é o intervalo aberto (a,b) e sua fronteira são os pontos a e b. Vamos mostrar para o caso do intervalo $[a,b)$ e os outros intervalos seguem de forma análoga. De fato, se tomarmos $a < c < b$ e $r = \min\{c, b-c\}$, então $(c-r, c+r) \subset [a,b)$, logo $c \in int[a,b)$. Agora, os pontos a e b são fronteira de $[a,b)$, pois se centrarmos uma bola de centro a terá pontos à esquerda do ponto a que não pertencem ao intervalo e se centrarmos uma bola de centro b, além de $b \notin [a,b)$, terá pontos à direita de b que não pertencem ao intervalo.

Exemplo 2.27. O interior do conjunto $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio, pois não existe um intervalo aberto formado apenas por números racionais. Mas a fronteira de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$ já que todo intervalo aberto possui números racionais e irracionais.

Definição 2.28. Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se aberto em M quando $intA = A$, ou seja, quando todos os pontos de A são interiores a A. Assim, $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \varnothing$. Para provar que um conjunto $A \subset M$ é aberto em M devemos, obter, para cada $x \in A$, um raio $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset A$.

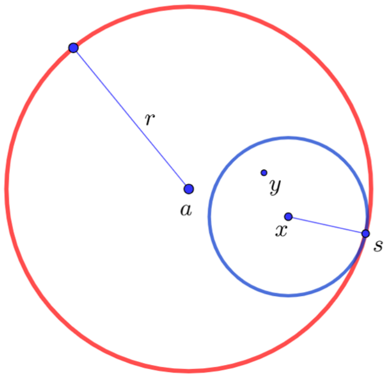
Proposição 2.29. *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a;r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $x \in B(a;r)$, logo, $d(a;x) < r$. Então podemos considerar $s = r - d(a;x)$ sendo um número positivo. Agora, seja a bola $B(x;s)$. Vamos mostrar que $B(x;s) \subset B(a;x)$. Seja $y \in B(x;s)$, logo

$$d(a;y) \leq d(a;x) + d(x;y) < d(a;x) + s = r.$$

Portanto, concluímos que $y \in B(a; r)$.

Figura 2.2: Representação da bola $B(x; s)$ dentro da bola $B(a; r)$.



Fonte: Autoria própria.

$\square$

Exemplo 2.30. O espaço métrico M é, evidentemente, aberto em M. Isto mostra como a propriedade "X é aberto" é relativa, isto é, depende do espaço M em que se considera X imerso: X é sempre aberto no próprio espaço X. Para um exemplo menos trivial, observemos que $X = [0, 1)$ é um subconjunto aberto do espaço $M = [0, 1]$: basta notar que cada intervalo do tipo $[0, \varepsilon)$, com $0 < \varepsilon < 1$, é uma bola aberta de centro 0 no espaço $M = [0, 1]$. No entanto, $[0, 1)$ não é aberto na reta $\mathbb{R}$. Também o intervalo aberto $(0, 1)$ dos eixos das abcissas em $\mathbb{R}^2$ é aberto nesse eixo mas não é aberto em $\mathbb{R}^2$. Um conjunto que é aberto em qualquer espaço métrico que o contenha é o conjunto vazio $\varnothing$. Para provar que um conjunto X não é aberto, deve-se exibir um ponto $x \in X$ que não seja interior a X. Como é impossível de obter este ponto quando $X = \varnothing$, logo $\varnothing$ é aberto.

Proposição 2.31. *Seja $\mathcal{U}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M. Então:*

(1) $M \in \mathcal{U}$ e $\varnothing \in \mathcal{U}$. (O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.)

(2) Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{U}$ então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{U}$. (A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

(3) Se $A_\lambda \in \mathcal{U}$ para todo $\lambda \in L$ então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{U}$. (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

Demonstração. O item (1) já foi comentado no exemplo anterior. Para mostrar o item (2), vamos supor $a \in A_1, ..., a \in A_n$. Como cada um dos A_n são abertos, então vão existir $r_1 > 0, ..., r_n > 0$ tais que $B(a; r_1) \subset A_1, ..., B(a; r_n) \subset A_n$. Agora, vamos considerar $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$. Então,

$$B(a;r) \subset B(a;r_1) \subset A_1, ..., B(a;r) \subset B(a;r_n) \subset A_n.$$

Logo, $B(a;r) \subset A_1 \cap ... \cap A_n$ e, portanto, $A_1 \cap ... \cap A_n$ é aberto, ou seja, a interseção finita de abertos é aberta. Agora, vamos mostrar o item (3). Para isso, seja $a \in A$. Como $A = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Sabemos que A_λ é aberto, então existe $B(a;r) \subset A$ e com isso concluímos a demonstração. □

Exemplo 2.32. A interseção qualquer de abertos não é necessariamente aberta. Se considerarmos $x \neq a$ então $d(x, a) > 0$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, a) > 1/n$. Então, $x \notin B(a; \frac{1}{n})$ e, portanto, a é o único ponto que pertence a todas as bolas. Mas o ponto a não é aberto.

Definição 2.33. Num espaço métrico, diz-se que o conjunto V é uma vizinhança do ponto a quando $a \in intV$. Assim, V é uma vizinhança de a se, e somente se, V contém um aberto que contém a. A interseção de número finito de vizinhanças de a é ainda uma vizinhança de a. Se V é uma vizinhança de a e $W \supset V$ então W é uma vizinhança de a. Um conjunto é aberto se, e somente se, é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.

2.5 Conjuntos Fechados

Aqui, veremos a definição de conjuntos fechados e alguns resultados e exemplos.

Definição 2.34. Um conjunto $F \subset M$ é fechado no espaço métrico M quando o complementar $M - F$ é aberto em M.

Exemplo 2.35. Em todo espaço métrico M, a bola fechada $B[a;r]$ é um conjunto fechado, pois seu complementar $A = M - B[a;r]$ é aberto. De fato, seja $c \in A = M - B[a;r]$, então $d(a;c) > r$. Se tomarmos $s > 0$ tal que $d(a;c) > r + s$, logo as bolas $B[a;r]$ e $B[c;s]$ são disjuntas, isto é, $B[a;r] \cap B[c;s] = \varnothing$. Assim, $B[c;s] \subset A = M - B[a;r]$ e, portanto, $c \in A$ é um ponto interior. Concluímos, então, que o complementar da bola fechada é aberto.

Proposição 2.36. *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

1) o conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço inteiro M são fechados;

2) a reunião $F = F_1 \cup ... \cup F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M;

3) a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L}^{n} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$ é um subconjunto fechado de M.

Demonstração. O item 1) segue do fato que o complementar do conjunto vazio $\varnothing$ e do espaço inteiro M é aberto, pela Proposição 2.31. No item 2), como o complementar de um conjunto fechado é aberto, então os conjuntos $A_1 = \complement F_1$, $A_2 = \complement F_2$, ... , $A_n = \complement F_n$ são abertos em M. Assim, como a interseção de abertos ainda é aberto, temos

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \complement F_1 \cap \complement F_2 \cap ... \cap \complement F_n = \complement(F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n).$$

Logo, se o complementar da reunião de conjuntos fechados é aberto, então a reunião de fechados é um conjunto fechado. Para provar o item 3), tomamos $A_\lambda = \complement F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Como cada A_λ é aberto e a reunião de abertos continua aberto, então

$$\cup A_\lambda = \cup(\complement F_\lambda) = \complement(\cap F_\lambda)$$

é um conjunto aberto. Portanto, $\cap F_\lambda$ é fechado. $\square$

Exemplo 2.37. A união qualquer de fechados nem sempre é fechada. Um exemplo disso é que todo conjunto é união dos conjuntos unitários de uma bola aberta, que dará a própria bola aberta que não é fechada.

2.6 Continuidade

Nesta seção, vamos apresentar e discutir o conceito de continuidade.

2.6.1 Funções Contínuas

Aqui, estudaremos o conceito de funções contínuas, bem como exemplos para o melhor entendimento.

Definição 2.38. Dados M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Uma função $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Observação 2.39. A fim de que $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que, para cada vizinhança V de $f(a)$ em N exista uma vizinhança U de a em M tal que $f(U) \subset V$.

Exemplo 2.40. Sejam M e N espaços métricos e uma aplicação $f : M \to N$. Se existir uma constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para todo $x, y \in M$ chamaremos f de aplicação lipschitziana. Uma aplicação lipschitziana é contínua em cada ponto $a \in M$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e tome $\delta = \varepsilon/c$. Então,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \varepsilon.$$

Definição 2.41. Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$. Diz-se que a função f é descontínua no ponto a quando, para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Exemplo 2.42. A função característica $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais definida por

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, se tomarmos $\varepsilon = 1/2$, então para todo $\delta > 0$, tomemos x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$. Escolheremos x_δ como um racional e a um irracional ou vice-versa. Logo, $|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = |1 - 0| = 1 > 1/2$.

Definição 2.43. Diremos que uma aplicação f é uma contração fraca se $f : M \to N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$. Em particular, uma aplicação lipschitziana com $c = 1$ é uma contração fraca.

Exemplo 2.44. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. É uma contração fraca, pois $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y)$.

2.6.2 Continuidade Uniforme

Aqui, veremos as funções uniformemente contínuas e alguns exemplos.

Definição 2.45. Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observação 2.46. Pelo Exemplo 2.47, as seguintes implicações são verdadeiras:

$$f \text{ é lipschitziana} \Rightarrow f \text{ é uniformemente contínua} \Rightarrow f \text{ é contínua} \Rightarrow f \text{ é contínua no ponto } a \in M.$$

Exemplo 2.47. Note que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como f é lipschitz, então para todo $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon/k$, logo

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq k \cdot d(x, y) \\ &< k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

E isso mostra que se f é lipschitziana, então f é uniformemente contínua. Pela definição, verificamos que uma função uniformemente contínua é contínua e isto segue do fato que se fixarmos y como uma constante. E,por fim, se f é contínua, então é contínua em todos os pontos de M, em particular, em algum ponto $a \in M$.

Mas, a recíproca nem sempre é válida. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 2.48. Seja a função $f(x) = 1/x$. Ela é contínua em $(0, +\infty)$, mas não é uniformemente contínua nesse domínio. Mas se restringirmos a função f ao intervalo $[1, 2]$ ela será uniformemente contínua.

Exemplo 2.49. Seja $f : [0, a] \to [0, a]$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Note que f é uniformemente contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, se subdividimos o intervalo $[0, a]$ por n pontos interiores $y_1 < y_2 < ... < y_n$, em $n + 1$ subintervalos com comprimentos menor que $\varepsilon/2$. Sendo f sobre $[0, a]$, então existem $x_1, ..., x_n$ tais que $f(x_1) = y_1, ..., f(x_n) = y_n$. Como f é monótona não-decrescente, então $x_1 < ... < x_n$. Seja δ o menor dos números $x_{i+1} - x_i$. Se $x, y \in X$ tais que $|x - y| < \delta$, então entre x e y existe no máximo um dos pontos x_i.

Pela monotonicidade de f segue que entre $f(x)$ e $f(y)$ existe no máximo um dos pontos $y_i = f(x_i)$. Logo, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Mas não é lipschitziana, pois dados $x \neq y$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} &= \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \\
&= \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{y - x}{y - x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}},
\end{aligned}$$

que não é limitado pra nenhum valor de x e y no intervalo $[0, a]$. Logo, f não é lipschitziana.

Assim, esses exemplos nos mostram que realmente a recíproca da observação 2.46 não é verdadeira.

2.6.3 Homeomorfismos

Nesta seção, estudaremos os homeomorfismos, conceito importante que será utilizado ao decorrer do trabalho.

Definição 2.50. Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. Dizemos, então, que M e N são homeomorfos.

Exemplo 2.51. Toda bola aberta de um espaço vetorial normado E é homeomorfa ao espaço inteiro E. De fato, se considerarmos a bola unitária $B = B(0; 1)$ e o homeomorfismo $f : E \to B$ definido por $f(x) = x/(1 + |x|)$. Temos que $|f(x)| = |x|/(1 + |x|) < 1$ para todo $x \in E$, logo f é uma aplicação contínua de E em B. Seja, agora, $g : B \to E$ a inversa de f definida por $g(y) = y/(1 - |y|)$. Como $|y| < 1$ para todo $y \in B$, então g é contínua. Temos, ainda, que $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$ para qualquer $y \in B$ e $x \in E$. Logo, f e $f^{-1} = g$ é um homeomorfismo.

Observação 2.52. Um homeomorfismo $f : M \to N$ é uniforme se f é uniformemente contínua e sua inversa $f^{-1} : N \to M$ também é uniformemente contínua.

Exemplo 2.53. Seja M a reta com a métrica zero-um. A aplicação identidade $i : M \to \mathbb{R}$ é contínua, mas sua inversa $j : \mathbb{R} \to M$, que também é dada por $j(x) = x$, é descontínua em cada ponto $a \in \mathbb{R}$. De fato, se tomarmos $\varepsilon = 1/2$, teremos que $B(j(a); 1/2) = \{j(a)\}$ em M. Logo, não existe $\delta > 0$ tal que $j((a-\delta, a+\delta)) \subset B(j(a); \varepsilon)$.

2.7 Limites de Sequências

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos que serão importantes ao decorrer do trabalho sobre limites de sequências, como sequências de números reais, sequências de funções, limites de funções, funções contínuas, continuidade uniforme e homeomorfismo. Daremos, também, alguns exemplos para facilitar a compreensão.

Definição 2.54. Uma sequência num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ e o valor que a sequência assume no valor $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n e será chamado o n-ésimo termo da sequência. Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\} \subset \mathbb{N}$.

Para representar uma sequência poderemos utilizar as notações $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n). Mas quando queremos indicar o conjunto dos valores ou conjunto dos termos de uma sequência utilizaremos as notações $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$. Para representar uma subsequência utilizaremos as notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou (x_{n_k}).

Exemplo 2.55. Seja a sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, ...)$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números ímpares, teremos duas subsequências $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}'} = (1, 1, 1, ...)$ e $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}''} = (-1, -1, -1, ...)$.

Definição 2.56. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. O ponto $a \in M$ é limite de uma sequência (x_n) quando para todo $\varepsilon > 0$ podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$ e escreveremos $a = \lim x_n$, $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ou $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Quando $\lim x_n = a \in M$ existe diremos que a sequência (x_n) é convergente em M e, caso contrário, diremos que a sequência é divergente.

Observação 2.57. O limite de uma sequência é chamado de ponto de aderência. O fecho $\overline{X}$ do conjunto X de um espaço métrico M é o conjunto de todos os pontos que são aderentes a X, isto é, os pontos a que pertencem a X tal que $d(a, X) = 0$. Também podemos provar que um conjunto é fechado se, e somente se, é igual ao seu fecho. Ver demonstração em [5].

Definição 2.58. Um ponto $a \in M$ é de acumulação do subconjunto X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X, diferente do próprio ponto a. O conjunto formado por todos os pontos de acumulação de X em M é chamado de conjunto derivado e é denotado por $X^{'}$.

Exemplo 2.59. Na reta $\mathbb{R}$, sejam $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Z}$ e $U = [0,1]$. Então, $X^{'} = \mathbb{R}$, pois toda bola centrada em algum ponto de $\mathbb{Q}$ contém pontos racionais e irracionais, $Y^{'} = \varnothing$ já que $\mathbb{Z}$ é discreto, logo todos os seus pontos são isolados e $U^{'} = U$, pois toda bola centrada em $a \in (0,1)$ contém pontos de $[0,1] - \{a\}$ e os pontos 0 e 1 são limites da sequência $(x_n) = \dfrac{1}{n}$ e $(y_n) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, respectivamente.

Observação 2.60. É válido reforçar a diferença entre pontos isolados e pontos de acumulação. Um ponto é isolado quando existe alguma bola que contenha apenas o próprio ponto, já o ponto de acumulação é quando para qualquer bola, além do próprio ponto, existem outros pontos do conjunto.

Exemplo 2.61. Seja a sequência $x_n = 1/n$. Note que $\lim x_n = 0$, pois para qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 > 1/\varepsilon$. Então

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, para todo n suficientemente grande, $x_n = 1/n$ pertence ao intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Proposição 2.62. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$ num espaço métrico M, então para todo $\varepsilon > 0$, em particular, $\varepsilon = 1$ obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in B(a;1)$. Assim, o conjunto dos termos da sequência x_n está contido na união de dois conjuntos limitados $\{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup B(a;1)$. Portanto, a sequência x_n é limitada. $\square$

Proposição 2.63 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Considere (x_n) uma sequência no espaço métrico M, $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$, com $a, b \in M$. Então,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}; n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon.$$

Se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ maior que n_0 e n_1, então $d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < 2\varepsilon$. Logo, $0 \leq d(a,b) < 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $d(a,b) = 0$, então $a = b$. □

Proposição 2.64. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para* a.

Demonstração. Considere $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Se $\lim x_n = a$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \varepsilon$. Existe também $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Assim,

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = a.$$

□

2.7.1 Sequências de Números Reais

A seguir, estudaremos sequências na reta e veremos a definição de sequência monótona e alguns resultados. Temos, ainda, alguns exemplos ao longo da seção.

Definição 2.65. Uma sequência (x_n) é monótona quando:

a) $x_n \leq x_{n+1}$ (respectivamente, $x_n \geq x_{n+1}$) e chama-se monótona não-decrescente (respectivamente, não-crescente); ou

b) $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente, $x_n > x_{n+1}$) e chama-se monótona crescente (respectivamente, decrescente).

Proposição 2.66. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja uma sequência monótona, isto é, crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente. Neste caso, vamos considerar uma sequência monótona não-decrescente, ou seja, $(x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots)$. Considere $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Note que $\lim x_n = a$. De fato, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, então o número $a - \varepsilon$ é menor que a e não pode ser cota superior do conjunto de termos da sequência de x_n. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Rightarrow \quad a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

E, portanto, concluímos a demonstração. □

Corolário 2.67. *Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.*

Demonstração. Basta mostrar que uma sequência monótona convergente possui uma subsequência limitada. Dessa forma, vamos supor que (x_n) é não-decrescente, isto é, $x_{n_k} \leq c$ para todo k. Seja $n \in \mathbb{N}$, podemos obter k de forma que $n < n_k$, logo $x_n \leq x_{n_k} \leq c$. Então, concluímos que $x_1 \leq x_n \leq c$ e, portanto, (x_n) é limitada. □

Teorema 2.68 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada, ou seja, $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$, podemos perceber que $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$, com $X_n \subset [\alpha, \beta]$. Agora, seja $a_n = \inf X_n$, então $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq \beta$. Logo, $a = \lim a_n$. Vamos mostrar, então, que a é limite de alguma subsequência de (x_n), isto é, dado $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. De fato, existe $n_0 > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a < a + \varepsilon$, já que $a = \lim a_n$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, então existe $n \geq n_0$ tal que $a_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$. Portanto, $n > n_1$ e $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. □

Exemplo 2.69. O $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, quando $|a| < 1$, é igual a zero. Pela definição de limite, não existe diferença entre $\lim x_n = 0$ e $\lim |x_n| = 0$, então vamos considerar o segundo caso e $0 \leq a < 1$. Logo, $a \geq a^2 \geq a^3 \geq ... \geq a^n \geq ... \geq 0$. Então, $(x_n) = a^n$, com $n \in \mathbb{N}$ é monótona limitada. Pela Proposição 2.66 essa sequência é convergente. Assim, temos que

$$l = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot l.$$

Dessa forma, $l = a \cdot l$ e, então, $(1 - a) \cdot l = 0$. Como $(1 - a) > 0$, então $l = 0$ e concluímos a demonstração.

Proposição 2.70. *Seja (x_n) uma sequência de números reais, com $\lim x_n = a > b$. Então $x_n > b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Então, se é válido para todo $\varepsilon > 0$, em particular, é válido para $\varepsilon = a - b > 0$, pois $a > b$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow b < x_n$ e concluímos a demonstração. $\square$

2.7.2 Sequências de Funções

Aqui veremos o que significa uma sequência de funções convergir pontualmente e uniformemente, além de resultados e exemplos.

Definição 2.71. Seja X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge simplesmente ou pontualmente em X quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$ tem limite $f(x)$ em M.

Exemplo 2.72. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ converge simplesmente em $\mathbb{R}$ para a função nula. De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, então tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{|x|}{\varepsilon}$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{n}\right| < \varepsilon$.

Definição 2.73. Seja X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge uniformemente em X para $f : X \to M$ quando, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

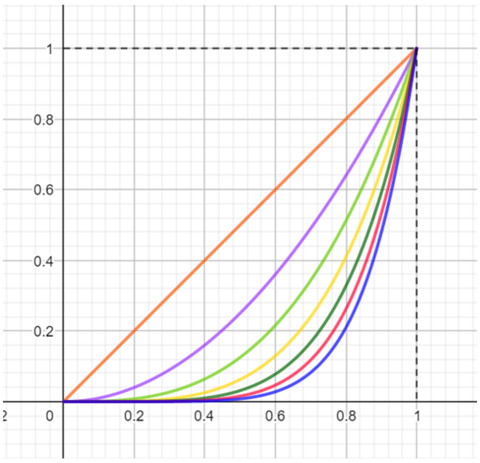
Exemplo 2.74. A sequência de funções $f_n(x) = x/n$ também converge uniformemente para a função nula num subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$. Com efeito, seja $|x| \leq c$, para todo $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, tomaremos $n_0 > c/\varepsilon$ e obtemos para qualquer $x \in X$

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{|n|} \leq \frac{c}{n} < \frac{c}{(c/\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Se f_n converge uniformemente para f em X, então f_n converge para f simplesmente em X. Porém, se f_n converge simplesmente não implica que f_n converge uniformemente. Veremos um exemplo a seguir:

Exemplo 2.75. A sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^n$ converge simplesmente em $[0, 1]$ para a aplicação $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Seja $x \in [0, 1)$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, enquanto que $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Mas não converge uniformemente em $[0,1]$, pois tomando $0 < \varepsilon < 1$, qualquer que seja n sempre vão existir pontos deste intervalo tais que $f_n(x) - f(x) = x^n \geq \varepsilon$.

Figura 2.3: Sequências de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^n$.



Fonte: Autoria própria.

Proposição 2.76. *Se $f_n \to f$ uniformemente em X então, para todo n suficientemente grande, f_n está a uma distância finita de f e $\lim f_n = f$ no espaço métrico $\mathcal{B}_f(X;M)$. Reciprocamente, se $\lim f_n = f$ em $\mathcal{B}_f(X;M)$, então $f_n \to f$ uniformemente em X.*

Demonstração. Observe que se $d(f_n, f) = \sup\limits_{x \in X} d(f_n(x), f(x))$, então

$$d(f_n, f) < \varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \, \forall x \in X.$$

Reciprocamente, se $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$, então $d(f_n, f) < \varepsilon$. □

Proposição 2.77. *Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f : M \to N$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Se a sequência de aplicações f_n é contínua no ponto $a \in M$ significa que para todo $\varepsilon > 0$, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implica em $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$. Se f_n converge uniformemente em M para f então para todo $\varepsilon > 0$ é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ então $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$, qualquer que seja $x \in X$. Assim, obtemos

$$d(f(a), f(x)) = d(f(a), f_n(a)) + d(f_n(a), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

2.8 Limites de Funções

Ao longo desta seção, veremos resultados importantes sobre o limite de funções.

Definição 2.78. Sejam X um subconjunto do espaço métrico M, a um ponto aderente de X e a aplicação $f : X \to N$, sendo N um espaço métrico. O ponto $b \in N$ é limite de $f(x)$ quando x tende para a se, para todo $\varepsilon > 0$ é possível obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$. E, escrevemos,

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

Proposição 2.79. *Seja $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \to N$, tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in N$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in X$, com $x_n \to a$, tem-se $\lim f(x_n) = b$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), b) < \varepsilon$. A partir de δ obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ se $d(x_n, a) < \delta$, então

$$\lim f(x_n) = f(a) = b.$$

Reciprocamente, vamos supor, por absurdo, que $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$. Então para todo $\delta > 0$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), b) \geq \varepsilon$. Logo, se $x_n \to a$ implica que $f(x_n)$ não converge para b. □

Proposição 2.80. *Sejam M, N espaços métricos, X um subespaço de M e $f : X \to N$ uma aplicação contínua. Se, para cada ponto $a \in \overline{X}$, existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ então a aplicação $F : \overline{X} \to N$, definida por $F(x) = f(x)$ quando $x \in X$ e $F(y) = \lim_{x\to y} f(x)$ quando $y \in \overline{X} - X$, é contínua.*

Demonstração. Por hipótese, sabemos que f é contínua em todo ponto $a \in X$, então para qualquer $a \in \overline{X}$ implica que $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Assim, para todos $a \in \overline{X}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), F(a)) < \varepsilon/2$. Queremos mostrar que para todo $\overline{x} \in \overline{X}$, com $d(\overline{x}, a) < \delta$, então $d(F(\overline{x}), F(a)) < \varepsilon$. Se $\overline{x} = \lim x_n$, com $x_n \in X$ para todo n, em particular, $d(x_n, a) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $d(f(x_n), F(a)) < \varepsilon/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $F(\overline{x}) = \lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, logo

$$d(F(\overline{x}), F(a)) = \lim_{n \to \infty} d(f(x_n), F(a)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

□

2.9 Espaços Métricos Completos

Aqui veremos o que são as sequências de Cauchy, resultados importantes e exemplos. Além de definir o que é um espaço métrico completo. Veremos também resultados sobre completude que serão utilizados no capítulo seguinte.

Definição 2.81. Seja M um espaço métrico. Uma sequência (x_n) é de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposição 2.82. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico. Se $\lim x_n = a$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy. □

Exemplo 2.83. Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Basta tomar uma sequência de números racionais x_n convergindo para um número irracional a. Por exemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$, $x_4 = 1,414, ...$, com $\lim x_n = \sqrt{2}$. Sendo convergente em $\mathbb{R}$, segue-se da Proposição 2.82 que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais, mas (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2.84. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Tome $\varepsilon = 1$.

Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}.$$

Como $\{x_1, ..., x_{n_0}\}$ é limitado , então a união é limitada. E, portanto, a sequência (x_n) é limitada. $\square$

Exemplo 2.85. Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Um exemplo disso é a sequência $(1, 0, 1, 0, ...)$ na reta. Embora limitada, esta sequência não é de Cauchy pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo n.

Proposição 2.86. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p$ implica que $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$ e existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q$ implica que $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Tome $n_0 = \max\{p, q\}$, então para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e segue que

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &\leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência (x_n) converge para a. $\square$

Observação 2.87. Se uma sequência possui duas subsequências que convergem para limites distintos então ela não é de Cauchy. Em particular, uma sequência que possui apenas um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.

Exemplo 2.88. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ em $\mathbb{R}$ definida por $x_n = 1/n, \forall n \in \mathbb{N}$. Primeiro, vamos mostrar que essa sequência é de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$, então se $n, m \geq n_0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $n \geq m$. Logo, $0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{n_0}$. Assim, temos

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n_0} \right| = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

e, portanto, a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy. Logo, pela Proposição 2.86, a sequência (x_n) é convergente.

Proposição 2.89. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Então, precisamos mostrar que a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy. Assim, como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por outro lado, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0$, então

$$d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon.$$

□

Definição 2.90. Um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 2.91. Todo espaço métrico M munido com a métrica zero-um é completo, pois a partir de um certo índice a sequência de Cauchy é constante, logo é convergente.

Exemplo 2.92. Como vimos no Exemplo 2.83, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo, pois a sequência em questão não é convergente em $\mathbb{Q}$, já que converge para $\sqrt{2}$ que não pertence a $\mathbb{Q}$.

Proposição 2.93. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Sejam M um espaço métrico completo e $F \subset M$ um subespaço fechado. Se tomarmos em F uma dada sequência de Cauchy (x_n), então existe $\lim x_n = a \in M$. Como F é um subespaço fechado em M, logo $a \in F$ e, portanto, F é completo. Reciprocamente, seja $M \subset N$ um subespaço completo, então pegamos uma sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a$. Como toda sequência convergente é de Cauchy, então a sequência (x_n) é de Cauchy. Assim, existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b$. Pela unicidade do limite, $a = b$, logo M é fechado em N. □

2.10 Conjuntos Compactos

Nesta seção, estudaremos os espaços métricos compactos, veremos alguns resultados importantes e exemplos. Esta seção será importante para atingirmos o objetivo deste trabalho uma vez que veremos a diferença dos conjuntos compactos entre dimensão finita e infinita. Para definirmos um conjunto compacto de um espaço métrico, precisamos de alguns conceitos:

Definição 2.94. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \cup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $x \in X$ existe pelo menos um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Essa cobertura é aberta quando cada conjunto C_λ, com $\lambda \in L$, é aberto em M.

Exemplo 2.95. Os intervalos abertos $(0, \frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, 3)$ e $(\frac{5}{2}, 5)$ formam uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ para o intervalo fechado $[1, 4]$, pois a união desses intervalos abertos é igual a $(0, 5)$ que contém o intervalo fechado $[1, 4]$.

Definição 2.96. Se tivermos $L^{'} \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda podemos obter $\lambda \in L^{'}$ com $x \in C_\lambda$, ou seja, $X \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então essa subfamília é chamada subcobertura própria de $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$. Uma cobertura diz-se finita quando L é um conjunto finito.

Definição 2.97. Um espaço métrico M é compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita. Um subconjunto $K \subset M$ é um subconjunto compacto quando o subespaço métrico K é compacto.

Exemplo 2.98. A união de dois subconjuntos compactos é compacto. De fato, sejam M um espaço métrico compacto e $K, L \subset M$ subconjuntos compactos. Se $K \cup L \subset \cup A_\lambda$ então, $K \subset \cup A_\lambda$ então, $K \subset \cup A_\lambda$ e $L \subset \cup A_\lambda$. Logo,

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n} \quad e \quad L \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup ... \cup A_{\lambda_p}.$$

Assim, $K \cup L \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda=1}^{p} A_{\lambda_p}$. Portanto, a reunião de um número finito de subconjuntos compactos é compacta. Mas a reunião infinita de compactos pode não ser compacta. Pois, todo conjunto é reunião de seus pontos, que são compactos. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Proposição 2.99. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Sejam M um conjunto compacto e F um conjunto fechado. Dada $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ uma cobertura aberta. Como F é fechado, então $M - F$ é aberto e

$$M = \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup (M - F).$$

Como M é compacto, existem $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n} \cup (M - F)$. Logo,

$$F \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}.$$

Reciprocamente, seja F compacto e vamos mostrar que $M - F$ é aberto. Seja $a \in M - F$. Defina $B_n = M - B\left[a; \dfrac{1}{n}\right]$. Note que F está contida numa cobertura aberta $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} M - B\left[a; \dfrac{1}{n}\right] = M - \{a\}$. Como F é compacto, existem $\lambda_1, ..., \lambda_n$, tais que

$$F \subset B_{\lambda_1} \cup ... \subset B_{\lambda_n} \subset B_{\lambda_{n_0}}.$$

Logo, $F \subset M - B\left[a, \dfrac{1}{\lambda_{n_0}}\right]$, então $B\left[a; \dfrac{1}{n_0}\right] \subset M - F$. Assim, $B\left(a; \dfrac{1}{\lambda_{n_0}}\right) \subset M - F$. □

Proposição 2.100. *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração. Como M é compacto, então podemos extrair uma subcobertura finita da cobertura $M = \bigcup_{x \in M} B(x; 1)$ sendo

$$M = B(x_1; 1) \cup ... \cup B(x_n; 1).$$

Portanto, M é limitado. □

Assim, a partir da Proposição 2.99 e 2.100, um subconjunto compacto qualquer de um espaço métrico é sempre fechado e limitado.

Definição 2.101. Um espaço métrico M chama-se totalmente limitado quando, para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter uma decomposição $M = X_1 \cup ... \cup X_n$, de M como reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro menor do que ε.

Exemplo 2.102. Se um subconjunto da reta é limitado, então é totalmente limitado. Note que dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < \delta \leq \varepsilon$, então podemos escrever $\mathbb{R} = \bigcup_{-\infty}^{\infty} [n \cdot \delta, (n+1) \cdot \delta]$, pois dado X contido em $\mathbb{R}$ então X está contido numa união finita desses intervalos.

Proposição 2.103. *As seguintes afirmações sobre espaço métrico M são equivalentes:*

1) M é compacto;

2) Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;

3) Toda sequência em M possui uma subsequência convergente;

4) M é completo e totalmente limitado.

Demonstração.

1) $\Rightarrow$ 2) Seja M um conjunto compacto e $X \subset M$ um subconjunto que não contém pontos de acumulação, ou seja, $X' = \varnothing$. Se $\overline{X} = X \cup X' = X \cup \varnothing = X$, logo X é um conjunto fechado em M e, portanto, compacto. Como não existe nenhum ponto de acumulação em X, então X é discreto. Portanto, X é finito.

2) $\Rightarrow$ 3) Seja (x_n) uma sequência em M. Se o conjunto de valores desta sequência x_n é finito, então existe um valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = ... = x_{n_k} = ...$ que se repete infinitas vezes logo essa subsequência (x_{n_k}) converge para a. Mas o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ é infinito, logo possui um ponto de acumulação a. Como toda bola centrada em a contém valores x_n com índices arbitrariamente grandes. Portanto, a é limite de alguma subsequência de (x_n).

3) $\Rightarrow$ 4) Se toda sequência de Cauchy em M possui uma subsequência convergente, então é convergente, pela Proposição 2.86. Logo M é completo. Agora, precisamos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, podemos exprimir M como reunião de um número finito de bolas de raio ε. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $x_1 \in M$. Se $M = B(x_1; \varepsilon)$, então já provamos. Se não, existe $x_2 \in M$, com $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$ tal que $M = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_3 \in M$, com $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ e $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ tal que $M = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon) \cup B(x_3; \varepsilon)$. Prosseguindo assim, chegamos a um n tal que $M = B(x_1; \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n; \varepsilon)$ ou obtemos uma sequência (x_n) tal que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ para todo $m \neq n$. Assim, nenhuma subsequência seria de Cauchy e nem convergente. Como isso não ocorre, M é totalmente limitado.

4) $\Rightarrow$ 1) Seja M completo e totalmente limitado. Vamos supor, por absurdo, que exista uma cobertura aberta $M = \cup A_\lambda$ que não possui uma subcobertura finita. Escreveremos M como a reunião finita de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro menor que 1. Pelo menos um desses subconjuntos, que chamaremos de X_1, é tal que $X_1 \subset \cup A_\lambda$ não possui uma subcobertura finita. Como X_1 é totalmente limitado, então pode ser escrito como reunião finita de subconjuntos fechados, cada um com o diâmetro menor que $1/2$. Pelo menos um desses subconjuntos, que chamaremos de X_2, não possui uma subcobertura finita. Prosseguindo desta forma, obtemos uma sequência $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ de subconjuntos fechados de M todos eles com $diam\, X_n < 1/n$ e X_n não está contido em nenhuma reunião finita dos A_λ. Logo, nenhum X_n é vazio, então existe $a \in M$ tal que $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Para algum λ, então $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, então existe $B(a; 1/n) \subset A_\lambda$ para algum n. Como $a \in X_n$ e $diam\, X_n < 1/n$, concluímos que $X_n \subset B(a; 1/n)$, com $X_n \subset A_\lambda$, que é um absurdo.

□

Teorema 2.104 (Teorema de Weierstrass). *Se M é compacto, toda função real contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Ou seja, existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x \in M$.*

Demonstração. A imagem $f(M)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Assim, $f(M)$ é fechado e limitado. Como f é limitada e $\alpha = \inf f(M)$, $\beta = \sup f(M)$, então $\alpha \in f(M)$ e $\beta \in f(M)$. Ou seja, existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = \alpha$ e $f(x_1) = \beta$. Logo, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$. □

Corolário 2.105. *Sejam M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.*

Capítulo 3

Espaços Vetoriais Normados

Neste capítulo, nosso objetivo é fazer uma comparação entre resultados que valem em dimensão finita, mas que, em geral, não são válidos em espaços de dimensão infinita. Inicialmente, daremos a definição dos espaços vetoriais normados. A partir de agora, quando utilizarmos a notação $\mathbb{K}$ será para indicar que estamos considerando o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Neste capítulo, utilizaremos as referências [3], [4] e [6].

Definição 3.1. Seja E um espaço vetorial real e uma norma em E. Um espaço vetorial normado é o par $(E, |\cdot|)$. Normalmente, denotaremos apenas por E, deixando a norma subentendida.

Exemplo 3.2. Um exemplo de espaço vetorial normado é o conjunto $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$ das funções limitadas com $||f|| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$, visto no Exemplo 2.22. Afirmamos que $||f|| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$ é uma norma em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$. De fato,

1) Sejam $f, g \in \mathscr{B}(X;\mathbb{R})$ e $x \in X$, então

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)| = ||f|| + ||g||.$$

Logo, $|f(x)+g(x)| \leq ||f|| + ||g||$ para todo $x \in X$ de onde segue que

$$||f+g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

2) Para cada $x \in X$, temos $\sup\limits_{x\in X}|\alpha f(x)| = \sup\limits_{x\in X}(|\alpha|\,|f(x)|) = |\alpha|\sup\limits_{x\in X}|f(x)| = |\alpha|\,||f||.$

3) Se $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)| = 0$, então $|f(x)| = 0$ para todo $x \in X$. Logo, f é a função nula.

Observação 3.3. Num espaço vetorial normado E, toda norma gera uma métrica utilizando a definição $d(x, y) = |x - y|$. De fato, sejam $x, y, z \in E$, então

1) $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$.

2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = |x - y|$ é sempre maior que 0, pois o módulo de um número é sempre maior ou igual, sendo igual a 0 apenas se $x = y$.

3) $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x| = d(y, x)$.

4) $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Logo, a norma induz uma métrica em E.

Os espaços vetoriais normados podem ser vistos como um espaço métrico com a métrica proveniente da norma $|\cdot|$. Assim, todos os resultados vistos no Capítulo 2 valem para um espaço vetorial normado.

Neste contexto, faz sentido falar sobre continuidade de transformações lineares. No Capítulo 2, na Observação 2.46, vimos que as recíprocas sobre continuidade não são verdadeiras. Mas, se adicionarmos a hipótese de que a função seja linear, verificamos a equivalência entre esses conceitos de continuidade, como podemos ver no teorema a seguir:

Teorema 3.4. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é lipschitziano.

(b) T é uniformemente contínuo.

(c) T é contínuo.

(d) T é contínuo em algum ponto de E.

(e) T é contínuo na origem.

(f) $\sup\{||T(x)|| : x \in E \,e\, ||x|| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $||T(x)|| \leq C||x||$ para todo $x \in E$.

Demonstração. As implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ são válidas, como vimos anteriormente. Seja T contínuo no ponto $x_0 \in E$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $||x - x_0|| < \delta$, então $||T(x) - T(x_0)|| < \varepsilon$. Agora seja $x \in E$ tal que $||x - 0|| = ||x|| < \delta$. Logo $||(x + x_0) - x_0|| = ||x|| < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} ||T(x) - T(0)|| &= ||T(x) - 0|| = ||T(x)|| = ||T(x) + T(x_0) - T(x_0)|| \\ &= ||T(x + x_0) - T(x_0)|| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, T é contínuo na origem e isso prova $(d) \Rightarrow (e)$. Para provar $(e) \Rightarrow (f)$, pela continuidade de T na origem, então existe $\delta > 0$ tal que $||T(x)|| < 1$ sempre que $||x|| < \delta$. Se $||x|| \leq 1$ e $\left\|\dfrac{\delta}{2}x\right\| < \delta$, logo $\dfrac{\delta}{2}||T(x)|| = ||T\left(\dfrac{\delta}{2}x\right)|| < 1$. Portanto,

$$\sup\{||T(x)|| : x \in E \ e \ ||x|| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

Agora, supondo (f), a desigualdade em (g) é válida para $x = 0$. Para todo $x \in E$, com $x \neq 0$, então

$$\frac{||T(x)||}{||x||} = \left\|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\| \leq \sup\{||T(y)|| : ||y|| \leq 1\},$$

que implica em $||T(x)|| \leq (\sup\{||T(y)|| : ||y|| \leq 1\})||x||$, para todo $x \neq 0$. Por fim, vamos provar $(g) \Rightarrow (a)$. Sejam $x_1, x_2 \in E$,

$$||T(x_1) - T(x_2)|| = ||T(x_1 - x_2)|| \leq C||x_1 - x_2||,$$

e portanto T é lipschitziano e a constante de Lipschitz é C. □

Proposição 3.5. *Todo homeomorfismo linear é um homeomorfismo uniforme.*

Demonstração. Um homeomorfismo linear é uma bijeção contínua cuja inversa também é contínua. Pela Proposição 1.46, a inversa de f também é linear e, então, pelo Teorema 3.4, podemos concluir que f e f^{-1} são uniformemente contínuas. □

3.1 Identificação para Espaços de Dimensão Finita

Ao longo deste capítulo, precisaremos provar resultados para espaços vetoriais normados de dimensão finita e, para isto, nesta seção, veremos que um espaço de dimensão finita é homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.6. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita n. Então, E é linearmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Sejam $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de E e a aplicação $h : \mathbb{R}^n \to E$ definida por $h(x) = h(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot v_1 + ... + x_n \cdot v_n$. Segue da definição de base que h é uma bijeção linear. Além disso, h também é contínua, pois

$$\begin{aligned} ||h(x_1, ..., x_n)||_E &= ||x_1 v_1 + ... + x_n v_n|| \\ &\leq |x_1| \cdot ||v_1|| + ... + |x_n| \cdot ||v_n|| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} \{||v_i||\} \cdot (|x_1| + ... + |x_n|) = \max_{0 \leq i \leq n} \{||v_i||\} \cdot |x|_S, \end{aligned}$$

sendo $|x|_S$ a norma da soma. Agora, precisamos mostrar que a inversa de h também é contínua. Para isto, precisamos obter $\alpha > 0$ tal que $\|h(x)\| \geq \alpha \cdot |x|_S$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é compacta. Como h é linear injetiva, então $\|h(u)\| > 0$ para todo $u \in S^{n-1}$. Pelo Teorema de Weierstrass, Teorema 2.104, existe $\alpha > 0$ tal que $\|h(u)\| > \alpha$ para todo $u \in S^{n-1}$. Assim, para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, temos $x/|x|_S \in S^{n-1}$ logo

$$\|h(x)\| = \|h(x/|x|_S)\| \cdot |x|_S \geq \alpha \cdot |x|_S$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, para $v \in E$ existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(x) = v$, ou seja, $x = h^{-1}(v)$. Portanto,

$$\|v\| = \|h(h^{-1}(v))\| \geq \alpha |h^{-1}(v)|_S$$

e podemos concluir pelo Teorema 3.4 que h^{-1} é contínua. □

Assim, a partir desse teorema poderemos provar os resultados para os espaços de dimensão finita trabalhando com os espaços euclidianos.

3.2 Duas Normas quaisquer podem não ser Equivalentes

Nesta seção, veremos que quaisquer duas normas são equivalentes em espaços vetoriais normados de dimensão finita. Entretanto, se tivermos em dimensão infinita, isso nem sempre é verdade. Antes, precisamos definir o que são normas equivalentes:

Definição 3.7. Diremos que duas normas arbitrárias $|\cdot|$ e $||\cdot||$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes quando existirem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tais que $|x| \leq a||x||$ e $||x|| \leq b|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

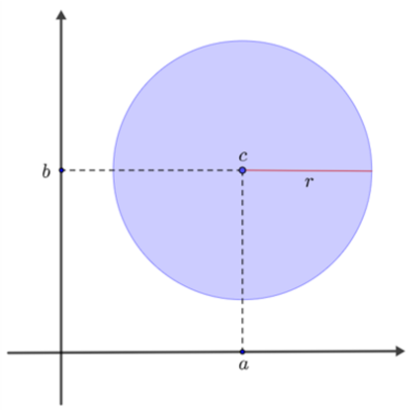
Há uma infinidade de normas que podemos considerar no $\mathbb{R}^n$, porém daremos ênfase às três mais utilizadas, sendo elas:

- Norma euclidiana: $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$;
- Norma do máximo: $|x|_M = max\left\{|x_1|, ..., |x_n|\right\}$;
- Norma da soma: $|x|_S = |x_1| + ... + |x_n|$.

Exemplo 3.8. Quando calculamos a norma de um vetor nem sempre temos o mesmo valor. Por exemplo, se tomarmos o vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2)$, a norma euclidiana é igual a $|x| = \sqrt{5}$, a norma do máximo é igual a $|x|_M = 2$ e a norma da soma é igual a $|x|_S = 3$.

Exemplo 3.9. A forma geométrica das bolas e esferas dependem em geral da norma que se usa. No plano $\mathbb{R}^2$, ao utilizarmos a norma euclidiana $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ como norma de $z = (x, y)$, a bola de centro $c = (a, b)$ e raio r será vista na figura abaixo.

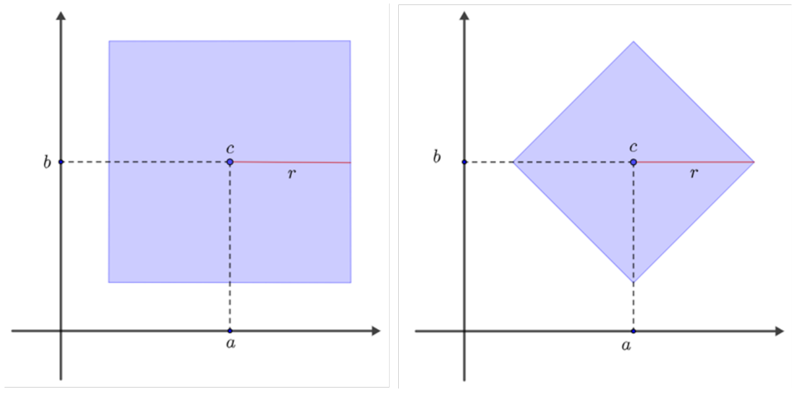
Figura 3.1: Representação da bola com a norma euclidiana.



Fonte: Autoria própria.

Se utilizarmos a norma do máximo $|z|_M = \max\left\{|x|, |y|\right\}$ como norma de $z = (x, y)$, a bola de centro $c = (a, b)$ e raio r será vista na figura abaixo. Por outro lado, se tomarmos a norma da soma $|z|_S = |x| + |y|$ como norma de $z = (x, y)$, a bola de centro $c = (a, b)$ e raio r será representada também na figura abaixo.

Figura 3.2: Representação da bola com a norma do máximo e da soma.



Fonte: Autoria própria.

Observação 3.10. Quando não fizermos menção a que norma estamos utilizando no $\mathbb{R}^n$, fica subentendido que é a euclidiana.

Exemplo 3.11. Sejam $|x-y|$, $|x-y|_M$ e $|x-y|_S$ a norma euclidiana, a norma do máximo e a norma da soma, respectivamente. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$|x-y|_M \leq |x-y| \leq |x-y|_S \leq n \cdot |x-y|_M.$$

De fato,

a) Seja $|x-y|_M = \max\{|x_1-y_1|, ..., |x_n-y_n|\} = |x_i-y_i|$, para algum $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned} |x-y|_M &= |x_i-y_i| \\ &= \sqrt{(x_i-y_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} \\ &= |x-y|. \end{aligned}$$

Logo, $|x-y|_M \leq |x-y|$.

b) Note que

$$\begin{aligned}
|x-y| &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} \\
&= \sqrt{|x_1-y_1|^2+...+|x_n-y_n|^2} \\
&\leq \sqrt{|x_1-y_1|^2+...+|x_n-y_n|^2+2\sum_{i\neq j}|x_i-y_i||x_j-y_j|} \\
&= \sqrt{(|x_1-y_1|+...+|x_n-y_n|)^2} \\
&= |x_1-y_1|+...+|x_n-y_n| \\
&= |x-y|_S.
\end{aligned}$$

Logo, $|x-y| \leq |x-y|_S$.

c) Seja $|x_i-y_i| \leq \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}$, para algum $1 \leq i \leq n$,. Então,

$$\begin{aligned}
|x-y|_S &= |x_1-y_1|+...+|x_n-y_n| \\
&\leq \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}+...+\max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} \\
&= n\cdot\max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} \\
&= n\cdot|x-y|_M.
\end{aligned}$$

Logo, $|x-y|_S \leq n\cdot|x-y|_M$. Portanto, $|x-y|_M \leq |x-y| \leq |x-y|_S \leq n\cdot|x-y|_M$ e essas normas são equivalentes, pois

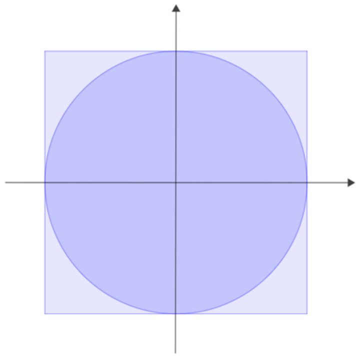
$$|x-y|_M \leq |x-y| \leq |x-y|_S \leq n\cdot|x-y|_M \leq n\cdot|x-y| \leq n\cdot|x-y|_S.$$

Observação 3.12. Vamos mostrar que, a partir desta proposição, podemos provar que uma bola está dentro da outra. Assim,

$$B(0;\varepsilon) \subseteq B_M(0;\varepsilon).$$

Se pegarmos um elemento $x \in B(0;\varepsilon)$, temos $|x-0| < \varepsilon$. Como $|x|_M \leq |x|$, então $|x-0|_M \leq |x-0| < \varepsilon$.

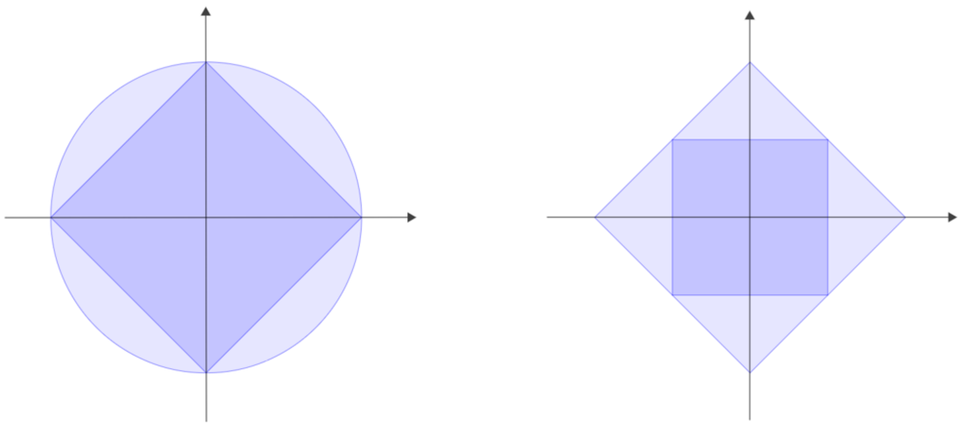
Figura 3.3: Bola da norma euclidiana dentro da bola com a norma do máximo.



Fonte: Autoria própria.

De forma análoga, podemos concluir pelo exemplo anterior que, a bola de centro na origem e raio ε da norma da soma está contida na bola da norma euclidiana de mesmos centro e raio. Também que a bola de centro na origem e raio $\dfrac{\varepsilon}{n}$ da norma do máximo está dentro da bola coma a norma da soma de mesmo centro e raio ε.

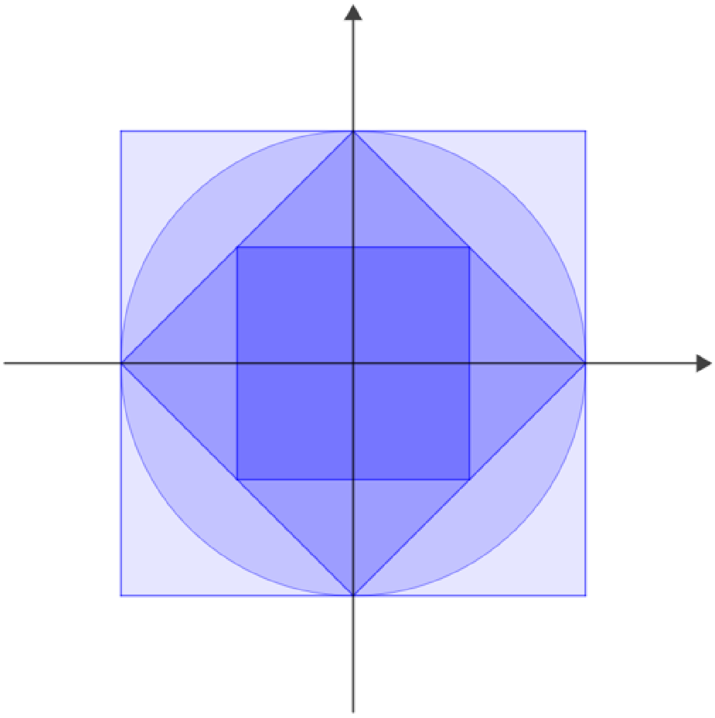
Figura 3.4: Bola da norma da soma dentro da bola com a norma euclidiana e a bola da norma do máximo dentro da bola com a norma da soma.



Fonte: Autoria própria.

A partir da conclusão do Exemplo 3.11, podemos ter todas essas bolas uma contida na outra.

Figura 3.5: Bolas contida uma na outra de acordo com o Exemplo 3.11.



Fonte: Autoria própria.

3.2.1 Dimensão Finita

De maneira mais geral, vamos mostrar a seguir que quaisquer duas normas em espaços de dimensão finita são equivalentes. Iremos focar na demonstração no $\mathbb{R}^n$, mas também é válido para espaços de dimensão finita em geral.

Teorema 3.13. *Duas normas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração. Seja $|x|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ a norma da soma. Por transitividade, basta demonstrar que uma norma arbitrária $\|x\|$ em $\mathbb{R}^n$ é equivalente a esta. Em primeiro lugar, seja $b = \max\{\|e_1\|, ..., \|e_n\|\}$. Então, para qualquer $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + ... + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + ... + |x_n| \|e_n\| \leq b \cdot |x|_S .$$

Resta provar que existe $a > 0$ tal que $|x|_S \leq a \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que não seja assim. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|x_k|_S > k \cdot \|x_k\| .$$

Ponhamos $u_k = x_k / |x_k|_S$. Isto nos dá $\|u_k\| = \|x_k\| / |x_k|_S < 1/k$ e $|u_k|_S = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O Teorema de Bolzano-Weierstrass nos diz que toda sequência limitada (u_k) possui uma subsequência $\left(u_{k_j}\right)$ que converge para um ponto $u \in \mathbb{R}^n$. Note que $|u| = \lim_{j\to\infty} \left|u_{k_j}\right| = 1$, donde $u \neq 0$. Por outro lado, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\|u\| \leq \left\|u_{k_j} - u\right\| + \left\|u_{k_j}\right\| \leq b\left|u_{k_j} - u\right| + \frac{1}{k_j}.$$

Como as duas últimas parcelas acima tendem para zero quando $j \to \infty$, concluímos que $\|u\| = 0$, donde $u = 0$. Esta contradição demonstra o teorema. □

Então, concluímos que quaisquer duas normas são equivalentes em espaços vetoriais normados em dimensão finita. Agora, veremos um exemplo de um espaço de dimensão finita para ilustrar:

Exemplo 3.14. Seja $\mathbb{C}^n$ um espaço de dimensão finita com as normas

$$||x||_\infty = \max_{1\leq j\leq n} ||\varphi_j|| \quad e \quad ||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^p\right)^{1/p}.$$

Por um lado, temos

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^p\right)^{1/p} \geq (|\varphi_i|^p)^{1/p} = |\varphi_i|, \ \forall\ i = 1, 2, ..., n.$$

E isso implica que $||x||_p \geq ||x||_\infty$. Por outro lado, temos que

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n}\{|\varphi_i|^p\}\right)^{1/p} = ||x||_\infty \left(\sum_{j=1}^{n} 1\right)^{1/p} = n^{1/p}||x||_\infty.$$

Logo, $||x||_p \leq n^{1/p}||x||_\infty$. Portanto,

$$||x||_\infty \leq ||x||_p \leq n^{1/p}||x||_\infty,$$

e concluímos que as normas são equivalentes.

3.2.2 Dimensão Infinita

Observe o exemplo a seguir de um espaço de dimensão infinita:

Exemplo 3.15. Seja $C[0,1]$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[0,1]$, isto é,

$$C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } [0,1]\},$$

é um espaço vetorial com a norma

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Agora, seja $C^1[0,1]$ um subespaço vetorial de $C[0,1]$ formado pelas funções contínuas e diferenciáveis no intervalo $[0,1]$, isto é,

$$C^1[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \;\text{ é diferenciável em } [0,1] \; e \; f^{'} \in C[0,1]\}$$

com a norma

$$||f||_{C^1} = \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |f^{'}(x)|.$$

Temos a seguinte desigualdade $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_{C^1}$. Sejam $E_1 := (C^1[0,1], ||\cdot||_\infty)$, $E_2 := (C^1[0,1], ||\cdot||_{C^1})$ e a aplicação identidade $i : E_2 \to E_1$, então temos

$$||i(g)||_{E_1} = ||g||_\infty \leq ||g||_\infty + ||g^{'}||_\infty = ||g||_{C^1}.$$

E é possível provar que $||g^{'}||_\infty \leq C||g||_{C^1}$ para toda $g \in C^1[0,1]$. Portanto, as normas são equivalentes. Veremos mais detalhes sobre esse espaço na Seção 3.6, no Exemplo 3.53.

Entretanto, em dimensão infinita, não podemos afirmar que quaisquer duas normas são equivalentes. Veja o contra-exemplo abaixo:

Exemplo 3.16. Seja $\mathcal{C}([0,1])$ o conjunto das funções contínuas no intervalo $[0,1]$ munido com as normas

$$||\varphi||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)| \quad e \quad ||\varphi||_1 = \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx.$$

Considere uma φ_0 não crescente dada por $\varphi_0(0) = 1$ e $\varphi_0(1) = 0$ e uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n\varphi_0(nx), & se \; x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \quad 0 & se \; x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos $||\varphi_n||_1 = ||\varphi_0||_1$, pois

$$\begin{aligned} ||\varphi_n||_1 &= \int_0^1 |\varphi_n(x)| \\ &= \int_0^{1/n} |\varphi_0(nx)|dx + \int_{1/n}^1 |0|dx \\ &= \int_0^1 |\varphi_0(y)|dy = ||\varphi_0||_1, \end{aligned}$$

se fizermos $y = nx$ e $dy = dx/x$. Mas $||\varphi_0||_\infty \to \infty$, pois $||\varphi_n||_\infty = n$. Logo não pode existir $a > 0$ tal que $||\varphi||_\infty \leq a||\varphi||_1$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Portanto, $||\cdot||_\infty$ e $||\cdot||_1$ não são normas equivalentes.

Portanto, mostramos que quaisquer duas normas são equivalentes em espaços de dimensão finita, mas nem sempre em espaços de dimensão infinita.

3.3 Transformações Lineares podem ser Descontínuas

Considerando espaços vetoriais normados, que também são espaços métricos, é natural verificar a continuidade de transformações lineares.

3.3.1 Dimensão Finita

Nesta seção, vamos mostrar que transformações lineares são sempre contínuas em espaços de dimensão finita. Antes, precisaremos de um resultado:

Proposição 3.17. *Seja $h : \mathbb{R}^n \to F$ uma transformação linear. Então h é contínua.*

Demonstração. Seja $v = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} ||h(v)|| &= ||h(a_1e_1) + ... + h(a_ne_n))|| \\ &= ||a_1h(e_1) + ... + a_nh(e_n)|| \\ &\leq |a_1| \cdot ||h(e_1)|| + ... + |a_n| \cdot ||h(e_n)|| \\ &\leq \max_{j=1,...,n} \{||h(e_j)||\} \cdot (|a_1| + ... + |a_n|) \\ &\leq C \cdot ||a||_S \leq \tilde{C}||v||_F. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.4, concluímos que h é contínua. □

Proposição 3.18. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita n. Então, toda transformação linear $f : E \to F$ é contínua.*

Demonstração. Considere $h : \mathbb{R}^n \to E$ um homeomorfismo linear, isto é, uma bijeção linear contínua cuja inversa também é contínua. Agora, seja $f \circ h : \mathbb{R}^n \to F$. Como toda transformação linear em $\mathbb{R}^n$ é contínua, então $(f \circ h)$ é contínua. Portanto, $(f \circ h) \circ h^{-1}$ também é contínua. $\square$

Exemplo 3.19. Um exemplo de transformação linear contínua em um espaço de dimensão finita é a transformação definida como

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{M}_2(\mathbb{K}) \\ & (a,b,c) & \mapsto & T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} \end{array}$$

que foi visto Capítulo 1, no Exemplo 1.34.

Portanto, concluímos que, em dimensão finita, transformações lineares são contínuas.

3.3.2 Dimensão Infinita

A seguir, veremos alguns exemplos de transformações lineares que são contínuas tanto em espaços vetoriais normados de dimensão finita quanto em dimensão infinita.

Exemplo 3.20. Seja o operador $I_X : X \to X$ dado por $I_X(x) = x$ para qualquer $x \in X$. Este operador é linear e chama-se operador identidade. Este operador será contínuo se estiver com a mesma norma.

Exemplo 3.21. Considere o operador nulo $0 : X \to Y$ definido por $0(x) = 0$ para todo $x \in X$. O operador nulo é linear e contínuo.

A seguir, daremos a definição do espaço $L_p(X, \Sigma, \mu)$ das funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$, com o intuito de exibirmos um exemplo em espaço vetorial de dimensão infinita em que a transformação linear é contínua.

Definição 3.22. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$ tais que

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$.

Exemplo 3.23. Sejam $1 \leq p < \infty$, $g \in L_p[0,1]$ e o operador definido por

$$T : C[0,1] \to L_p[0,1], \; T(f) = fg.$$

Observe que esse operador é linear. Além disso, como f é contínua, então podemos concluir que é linear. Se munirmos com a norma do sup, temos

$$\begin{aligned} ||T(f)||_p &= \left(\int (|f|^p |g|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \{|f|\} \cdot \left(\int_0^1 |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ||g||_p \cdot ||f||_\infty = C \cdot ||f||_\infty. \end{aligned}$$

Portanto, T é contínuo e T é chamado de operador multiplicação.

Mas, nem sempre, transformações lineares são contínuas. Daremos um exemplo a seguir:

Exemplo 3.24. Seja $\mathcal{P}[0,1]$ o conjunto das funções polinomiais de $C[0,1]$. Observe que $\mathcal{P}[0,1]$ é subespaço de $C[0,1]$ e, por isso, herda a norma $|| \cdot ||_\infty$ de $C[0,1]$. O operador T é dado por

$$T : \mathcal{P}[0,1] \to \mathcal{P}[0,1], T(f) = f^{'} = \textit{derivada de } f.$$

Note que T é linear. Agora, vamos supor que T é contínuo, isto é, pelo Teorema 3.4, existe C tal que $||T(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$ para todo polinômio $f \in \mathcal{P}[0,1]$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \in \mathcal{P}[0,1]$ dada por $f_n(t) = t^n$. Logo,

$$n = ||f_n^{'}||_\infty = ||T(f_n)||_\infty \leq C||f_n||_\infty = C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, é um absurdo e isso prova que T é descontínuo.

Portanto, mostramos que transformações lineares são contínuas sempre que os seus domínios forem espaços vetoriais de dimensão finita, mas em dimensão infinita, nem sempre esse resultado é válido.

3.4 Nem todo Espaço Vetorial Normado é Completo

Nesta seção, mostraremos todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo, mas nem sempre espaços vetoriais normados de dimensão infinita são completos.

3.4.1 Dimensão Finita

Para o resultado a seguir, precisaremos de alguns resultados de Análise na Reta:

Definição 3.25. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Sendo $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e não-vazio, um número $b \in \mathbb{R}$ é supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X e denotaremos por $\sup X = b$.

Definição 3.26. Seja $X \subset \mathbb{R}$. O conjunto X é dito limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Sendo $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente e não-vazio, um número $a \in \mathbb{R}$ é ínfimo do conjunto X quando é a maior das cotas superiores de X e podemos denotar por $\inf X = a$.

Proposição 3.27. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ os conjuntos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ são limitados e $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$. Seja $a_n = \inf X_n$, com $n = 1, 2, ...$. Assim,

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b = \sup X_1,$$

logo uma sequência não-decrescente. Como toda sequência monótona limitada é convergente, logo $\lim a_n = a$. Agora, vamos mostrar que $\lim x_n = a$ e para isto vamos mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n), ou seja, dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ podemos obter $n > n_0$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. De fato, se $a = \lim a_n$, então existe $m > n_0$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, então existe $n \geq m$ tal que $a - \varepsilon < a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, logo $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. $\square$

No espaço vetorial normado de dimensão finita, veremos que uma sequência é de Cauchy se, e somente se, é convergente. Para provar esta afirmação, precisaremos de um resultado:

Teorema 3.28. *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, ..., a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, 2, ..., n$, tem-se $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$, ou seja, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a.*

Demonstração. Como (x_{k_i}) é uma subsequência de (x_k), então $|x_{k_i} - a_i| \leq |x_k - a|_M$ e isso implica que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, logo $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$, para todo $i = 1, ..., n$. Por outro lado, se $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$, para cada $i = 1, ..., n$, então dado $\varepsilon > 0$, existem $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ tais que se $k > k_i$, logo $|x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$. Se tomarmos $k_0 = \max\{k_1, ..., k_n\}$, então

$$k > k_0 \Rightarrow |x_k - a|_M = \max_i |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim x_k = a$. □

Teorema 3.29. *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.*

Demonstração. Seja $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ uma sequência de Cauchy, então para cada i-ésima coordenada será formada uma sequência de Cauchy de números reais $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$, com $i = 1, 2, ..., n$ e $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$. Pelo resultado anterior, se $a = (a_1, ..., a_n)$, então $\lim x_k$ converge para o ponto a. Logo, é convergente. Por outro lado, se $\lim x_k = a$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow ||x_k - a|| < \varepsilon/2$. Se tomarmos $k, r > k_0$, obteremos

$$||x_k - x_r|| = ||x_k - a + a - x_r|| \leq ||x_k - a|| + ||x_r - a|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto, (x_k) é uma sequência de Cauchy. □

Corolário 3.30. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Pelo que acabamos de mostrar, como toda sequência de Cauchy é convergente em $\mathbb{R}^n$, temos que esses espaços vetoriais são sempre completos e pela Proposição 3.5 todo espaço de dimensão finita também será completo.

Corolário 3.31. *Todo espaço vetorial normado E de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é completo, então E é completo. □

3.4.2 Dimensão Infinita

Em dimensão infinita, nem todos os espaços vetoriais normados são completos. Veremos mais adiante um exemplo disso. Mas antes veremos um espaço de dimensão infinita que é completo.

Definição 3.32. Um espaço normado E é chamado de espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

A seguir, mostraremos que os espaços das funções integráveis $L_p(X, \Sigma, \mu)$, um espaço de dimensão infinita, é um espaço de Banach. Para isto, precisaremos de alguns resultados preliminares, como as desigualdades de Hölder e Minkowski para integrais.

Teorema 3.33 (Desigualdade de Hölder para integrais)**.** *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in L_q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_p.$$

Demonstração. Quando $||f||_p = 0$ ou $||g||_q = 0$ nada temos a provar. Suponha então $||f||_p \neq 0 \neq ||g||_q$. Assim, vamos mostrar que

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad \forall\, a, b \geq 0. \tag{3.1}$$

Seja $0 < \alpha < 1$, a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Como f tem um máximo em $t = 1$, então $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$ para $t > 0$. Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$ obtemos (3.1). Se $a = 0$ ou $b = 0$, é válido a desigualdade (3.1). Substituindo

$$a = \frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p} \quad e \quad b = \frac{|g(x)|^q}{||g||_q^q}$$

em (3.1), temos que

$$\left(\frac{|f(x)|^p}{||f(x)||_p^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g(x)|^q}{||g(x)||_q^q}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \leq \quad \frac{\frac{|f(x)|^p}{||f(x)||_p^p}}{p} + \frac{\frac{|g(x)|^q}{||g(x)||_q^q}}{q}$$

Integrando dos dois lados em relação a x, então

$$\int \left(\frac{|f(x)|^p}{||f(x)||_p^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g(x)|^q}{||g(x)||_q^q}\right)^{\frac{1}{q}} dx \leq \int \frac{\frac{|f(x)|^p}{||f(x)||_p^p}}{p} + \frac{\frac{|g(x)|^q}{||g(x)||_q^q}}{q} dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{||f(x)||_p \cdot ||g(x)||_q} \int |f(x)| \cdot |g(x)| dx &\leq \frac{1}{p} \frac{||f(x)||_p^p}{||f(x)||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{||g(x)||_q^q}{||g(x)||_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Daí,

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Como $f \in L_p$ e $g \in L_q$, então $||f||_p \cdot ||g||_q$ são finitas e, portanto, a expressão $||fg||_1$ é finita. □

Teorema 3.34 (Desigualdade de Minkowski para integrais)**.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Se* $f, g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$*, então* $f + g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ *e*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \tag{3.2}$$

Demonstração. Se $p = 1$ ou $||f + g||_p = 0$, nada há a demonstrar. Podemos então supor $||f + g||_p \neq 0$ e $p > 1$. Perceba que para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \\ &\leq (2 \cdot max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= 2^p (max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &\leq 2^p (\{|f(x)|^p + |g(x)|^p\}),\end{aligned}$$

e daí segue que $f + g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$. Agora vamos provar (3.2). Observe primeiro que

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot (|f(x)| + |g(x)|) \\ &= |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \qquad (3.3)\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos $(p-1)q = p$ e, portanto, $|f + g|^{p-1} = |f + g|^{p/q} \in L_q(X, \Sigma, \mu)$. Da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Somando as duas desigualdades acima e combinando com (3.3), temos

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right],$$

e dividindo ambos os membros por $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, temos

$$\begin{array}{rcl} \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} & \leq & \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \leq & \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ ||f+g||_p & \leq & ||f||_p + ||g||_p, \end{array}$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 3.35. Observe que $||\cdot||_p$ não é, em geral, uma norma em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma\ \mu)$, pois pode acontecer $||f||_p = 0$ para f não identicamente nula. Mas se definimos

$$||[f]||_p := ||f||_p,$$

corrigimos o que falta para $||\cdot||_p$ ser uma norma. Assim, $(L_p(X, \Sigma, \mu), ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado.

Os resultados a seguir serão utilizados para provar que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é de Banach. Assim, as demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [6].

Lema 3.36 (Lema de Fatou)**.** *Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções não-negativas, então*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 3.37 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $L_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que converge μ-quase sempre para uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Se existe $g \in L_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$ para todo n, então $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Assim, como temos as ferramentas necessárias, vamos mostrar que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é espaço de Banach e, portanto, completo.

Teorema 3.38. *Se $1 \leq p < \infty$, então $L_p(X, \Sigma\ \mu)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||[f]||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Já sabemos que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço normado. Nos resta mostrar que é completo. Para isso seja $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = ||f_n - f_m||_p^p < \varepsilon^p,$$

sempre que $m, n \geq M$. Seja $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $||g_{k+1} - g_k||_p < 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere a função

$$g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, g(x) = |g_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \tag{3.4}$$

Sabemos que g é mensurável e não negativa. Além disso,

$$|g(x)|^p = \lim_{n\to\infty} \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\right)^p.$$

Pelo Lema de Fatou, temos

$$\int_X |g|^p\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu.$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$ e usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\left(\int_X |g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \left(||g_1||_p + \sum_{k=1}^{n} ||g_{k+1} - g_k||_p\right) \leq ||g_1||_p + 1. \tag{3.5}$$

Então, definindo $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$, de (3.5) podemos concluir que $\mu(X - A) = 0$. Logo, a série em (3.4) converge exceto talvez no conjunto de medida nula $X - A$, isto é, a série converge μ- quase sempre. Segue que a função $g \cdot \chi_A \in L_p(X, \Sigma, \mu)$, onde χ_A é a função característica de A. Defina então $f : X \to \mathbb{K}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), \ \ se \ x \in A, \\ \qquad\qquad 0, \quad se \quad x \notin A. \end{cases}$$

Como $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + ... + (g_k - g_{k-1})$, temos

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x),$$

para todo x e $g_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in A$, isto é, a sequência $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para f μ-quase sempre. Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$. Como

$$|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2g)^p \cdot \chi_A \ \mu - quase \ sempre \ e$$

$$\lim_{k \to \infty} |f - g_k|^p = 0 \ \mu - quase \ sempre,$$

novamente pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{k \to \infty} \int_X |f - g_k|^p d\mu = \int_X 0 d\mu = 0.$$

Daí, concluímos que $g_k \to f$ em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e, portanto, $[g_k] \to [f]$ em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$. Assim, $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência $([g_k])_{k=1}^{\infty}$ que converge para $[f]$. Segue imediatamente que $[f_n] \to [f]$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. $\square$

Agora, daremos um exemplo de um espaço de dimensão infinita que não é completo:

Exemplo 3.39. Seja c_0 o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, isto é,

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \ para \ todo \ k \in \mathbb{N} \ e \ a_k \to 0\}.$$

O conjunto c_0 é um espaço vetorial normado com as operações usuais de coordenada a coordenada e com a norma

$$||(a_k)_{k=1}^{\infty}||_{\infty} = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Agora, seja c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas sequências quase nulas, ou seja,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0 : \textit{existe } k_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } a_k = 0 \textit{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Considere, então, os seguintes vetores de c_{00}:

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, ...), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, ...\right), ..., x_n = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...\right), ...$$

A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ desses vetores é uma sequência em c_{00}. Observe que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está contido em c_{00}, é LI e infinito. Se tomarmos um $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ elemento de c_0, teremos

$$||x_n - x||_{\infty} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

e podemos concluir que $x_n \to x$ em c_0. Como é convergente em c_0, então é de Cauchy em c_0 e, portanto, também é de Cauchy em c_{00}, já que seus elementos estão em c_{00}. Mas $x \notin c_{00}$, então (x_n) não é convergente em c_{00}. Portanto, c_{00} não é Banach.

3.5 Conjuntos Fechados e Limitados podem não ser Compactos

Nesta seção, veremos que conjuntos fechados e limitados em espaços de dimensão finita são necessariamente compactos. Mas, em dimensão infinita, nem sempre conjuntos fechados e limitados são compactos. Ao final da seção, veremos que a bola fechada unitária é compacta se, e somente se, está em um espaço de dimensão finita.

3.5.1 Dimensão Finita

Como vimos no Capítulo 2, subconjuntos compactos são sempre fechados e limitados. Para demonstrar a proposição seguinte, precisaremos de um lema:

Lema 3.40. *Seja $B = \{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independente de um espaço normado E. Então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto B, tal que*

$$||a_1x_1 + ... + a_nx_n|| \geq c(|a_1| + ... + |a_n|),$$

para quaisquer escalares $a_1, ..., a_n$.

Proposição 3.41. *Se* E *é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então* E *é um conjunto compacto se, e somente se, é um conjunto fechado e limitado.*

Demonstração. Como vimos no Capítulo 2, nas Proposições 2.99 e 2.100, conjuntos compactos em espaços métricos são sempre fechados e limitados. Basta, então, mostrar que conjuntos fechados e limitados são compactos. Considere $K \subseteq E$ fechado e limitado e suponha que E tenha dimensão finita. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base normalizada de E. Em espaços métricos, basta mostrar que toda sequência em K admite subsequência convergente em K. Assim, seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em K e para cada m existem escalares $a_1^{(m)}, ..., a_n^{(m)}$ tais que $x_m = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(m)} e_j$. Como K é limitado então existe $L > 0$ tal que $||x_m|| \leq L$ para todo m. Seja $|| \cdot ||_1$ uma norma em $\mathbb{K}^n$. Pelo Lema 3.40, existe $c > 0$ tal que

$$L \geq ||x_m|| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_j^{(m)} \right| \right) = c \cdot \left\| \left(a_1^{(m)}, ..., a_n^{(m)} \right) \right\|_1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência $\left((a_1^{(m)}, ..., a_n^{(m)}) \right)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{K}^n$. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, esta sequência possui uma subsequência $\left((a_1^{(m_k)}, ..., a_n^{(m_k)}) \right)_{k=1}^{\infty}$ que converge para $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$. Então, de

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j^{(m_k)} e_j - \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| a_j^{(m_k)} - b_j \right| = \left\| \left(a_1^{(m_k)}, ..., a_n^{(m_k)} \right) - b \right\|_1 \to 0,$$

podemos concluir que $x_{m_k} \to \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$. Portanto, como K é fechado, então $\sum_{j=1}^{n} b_j e_j \in K$ e concluímos que K é compacto. $\square$

Assim, concluímos que em espaços vetoriais normados de dimensão finita, todo subconjunto é fechado e limitado se, e somente se, é compacto.

Definição 3.42. Seja E um espaço normado. O conjunto

$$B_E = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$$

é chamado de bola unitária fechada de E.

Corolário 3.43. *A bola unitária fechada em um espaço vetorial normado de dimensão finita é sempre compacta.*

3.5.2 Dimensão Infinita

Vimos, em dimensão finita, que conjuntos fechados e limitados também são conjuntos compactos. Se considerarmos, em um espaço vetorial normado de dimensão infinita um subconjunto finito, teremos um subconjunto fechado e limitado que é compacto. Porém, em dimensão infinita, existem conjuntos fechados e limitados que não são compactos. Veremos um exemplo a seguir:

Exemplo 3.44. Considere o seguinte espaço vetorial normado de dimensão infinita

$$l_2 = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty \right\}.$$

Este espaço é chamado de espaços das sequências cuja série dos termos ao quadrado são convergentes. Em l_2, podemos definir a seguinte norma:

$$||(x_n)|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 \right)^{1/2}.$$

Agora, vamos mostrar que l_2 possui dimensão infinita. Sabemos que um conjunto infinito é linearmente independente se qualquer subconjunto finito contido nele também é linearmente independente. Então, considere os seguintes elementos de l_2:

$$e_1 = (1, 0, ..., 0, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, ..., 0, 0, 0, ...), \dots, e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...), ...$$

e seja $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_2$. Note que A é linearmente independente, pois se fizermos uma combinação linear dos e_n com uma quantidade finita, temos

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0, 0, ...) = (0, 0, ..., 0, 0, ...).$$

Logo, teríamos $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Portanto, l_2 possui dimensão infinita. Agora, vamos mostrar que a bola B_{l_2} mesmo sendo fechada e limitada não é compacta. Para isto, vamos mostrar que B_{l_2} possui uma sequência limitada que não possui subsequência convergente. Considere a sequência formada pelos vetores de e_n e note que $||e_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $e_n \in B_{l_2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $n \neq m$, com $n < m$, logo

$$||e_n - e_m|| = ||(0, ..., 0, 1, 0, ..., -1, 0, 0, ..., 0, ...)|| = \sqrt{2}.$$

Logo, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não possui uma subsequência convergente. Ou seja, consideramos um conjunto fechado e limitado que não admite subsequência convergente, logo não pode ser compacto.

Veremos, a seguir, que não existem espaços de dimensão infinita cuja bola unitária fechada seja compacta. Para isto, precisamos de um resultado muito importante:

Lema 3.45 (Lema de Riesz)**.** *Seja M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \theta < 1$. Então existe $y \in E - M$ tal que $||y|| = 1$ e $||y - x|| \geq \theta$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Considere $y_0 \in E - M$ e $d = dist(y_0, M) := \inf\limits_{x \in M} ||y_0 - x||$. Por hipótese, temos que M é fechado e como $y_0 \notin M$, logo $d > 0$. Do contrário, se $d = 0$, existiria uma sequência de elementos de M convergindo para y_0 e $y_0 \in M$, pois M é fechado. Assim, como $d < \dfrac{d}{\theta}$, então podemos tomar $x_0 \in M$ tal que

$$||y_0 - x_0|| \leq \frac{d}{\theta}.$$

Se escolhemos

$$y = \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||},$$

as condições são satisfeitas, pois $y \in E - M$ e a norma de y é igual a 1. Agora, seja $x \in M$ e como M é subespaço vetorial, então $(x_0 + ||y_0 - x_0||x) \in M$ e $d \leq ||y_0 - (x_0 + ||y_0 - x_0||x)||$. Logo, concluímos que

$$||y - x|| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} - x \right\| = \frac{||y_0 - (x_0 + ||y_0 - x_0||x)||}{||y_0 - x_0||} \geq \frac{d}{||y_0 - x_0||} \geq \theta.$$

□

Assim, como consequência do Lema de Riesz, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.46. *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Demonstração. A primeira implicação já está garantida pelo Corolário 3.43. Basta, então, mostrar que se a bola unitária fechada é compacta, então o espaço normado E tem dimensão finita. Suponha que E tenha dimensão infinita. Seja $x_1 \in E$ com norma 1. Como E possui dimensão infinita, então o subespaço $[x_1]$ gerado por x_1 é próprio de E. Como $[x_1]$ tem dimensão finita, então é um subespaço fechado de E. Logo, pelo Lema de Riesz, temos que se $\theta = 1/2$, então existe $x_2 \in E - [x_1]$ com norma 1 tal que

$$||x_2 - x_1|| \geq \frac{1}{2}.$$

Da mesma forma, o subespaço $[x_1, x_2]$ gerado por $\{x_1, x_2\}$, é fechado e próprio, então existe $x_3 \in E - [x_1, x_2]$ de norma 1 tal que

$$||x_3 - x_j|| \geq \tfrac{1}{2} \text{ para } j = 1, 2.$$

Se repetimos esse processo indefinidamente, pois em todas as etapas teremos um subespaço de dimensão finita de E, que é fechado e próprio. Logo, prosseguindo dessa forma, obtemos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E tal que

$$||x_m - x_n|| \geq \frac{1}{2}$$

sempre que $m \neq n$. Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente. Portanto, B_E não é compacta. □

3.6 Subespaços Vetoriais podem não ser Fechados

Aqui, veremos que todo subespaço vetorial de dimensão finita é fechado, enquanto que em dimensão infinita, os subespaços vetoriais nem sempre são fechados.

3.6.1 Dimensão Finita

Para demonstrar o resultado principal, precisaremos de uma proposição de espaços métricos completos:

Proposição 3.47. *Seja E um espaço vetorial normado. Todo subespaço vetorial de dimensão finita $F \subset E$ é fechado.*

Demonstração. Como E é completo, pela Proposição 2.93, F também é fechado. □

Corolário 3.48. *Em $\mathbb{R}^n$ todo subespaço é completo.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, todo homeomorfismo linear $h : \mathbb{R}^n \to E$ é um homeomorfismo uniforme. Assim, como $\mathbb{R}^n$ é completo, então E também é completo. □

Então, podemos concluir que em dimensão finita todo subespaço é fechado.

Exemplo 3.49. Sejam $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial e $U = \{u \in \mathbb{R}^2; \, u = \alpha(1,1), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que U é subespaço do $\mathbb{R}^2$:

i) Sabemos que o elemento neutro do $\mathbb{R}^2$ é $(0,0)$, então se tomarmos $\alpha = 0$, temos

$$u = \alpha(1,1) = 0(1,1) = (0,0) \in U.$$

Logo, o elemento neutro pertence a U.

ii) Sejam $u, v \in U$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, logo

$$u + v = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2)(1,1) \in U.$$

Como $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{R}$, então $u + v \in U$.

iii) Sejam $u \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\beta \cdot u = \beta \cdot (\alpha(1,1)) = \beta\alpha(1,1) \in U.$$

Como $\beta\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\beta u \in U$.

Portanto, U é um subespaço vetorial em $\mathbb{R}$ e como provamos anteriormente, se U tem dimensão finita também é fechado.

3.6.2 Dimensão Infinita

Podemos reescrever a Proposição 2.93 para os espaços de Banach da seguinte forma:

Proposição 3.50. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E.*

Isso juntamente com o Corolário 3.31, nos garante que todo subespaço de espaço vetorial normado de dimensão finita é fechado, mesmo que sejam subespaços contido em espaços de dimensão infinita. Mas nem sempre subespaços vetoriais serão fechados. O c_{00}, visto no Exemplo 3.39, é um subespaço de c_0 que não é fechado, pois não é completo.

Aqui veremos mais um exemplo de subespaço que não é fechado. Antes disso, veremos alguns resultados que nos auxiliarão. A demonstração desses resultados serão omitidas e poderão ser encontradas em [6] e nas referências indicadas lá.

Teorema 3.51 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Teorema 3.52 (Teorema de Ascoli)**.** *Sejam K um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K)$. Então $\overline{A}$ é compacto em $C(K)$ se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

a) A é equicontínuo, isto é, para todos $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \text{ para todos } t \in K \text{ com } d(t, t_0) < \delta \text{ e } f \in A.$$

b) O conjunto $\{f(t) : f \in A\}$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo $t \in K$.

Exemplo 3.53. Agora, seja $C^1[0,1]$ um subespaço vetorial de $C[0,1]$ formado pelas funções contínuas e diferenciáveis no intervalo $[0,1]$ visto no Exemplo 3.15. Isto é,

$$C^1[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [0,1] \text{ e } f^{'} \in C[0,1]\}.$$

Queremos mostrar que $C^1[0,1]$ não é fechado em $C[0,1]$ e, para isto, vamos mostrar que todo subespaço fechado F de dimensão infinita de $C[0,1]$ contém pelo menos uma função que não pertence a $C^1[0,1]$. Suponha $F \subseteq C^1[0,1]$ e como F é fechado em $C[0,1]$, então pela Proposição 3.50, o espaço $E_1 := (F, ||\cdot||_\infty)$ é completo. Além disso, o espaço $E_2 := (F, ||\cdot||_{C^1})$ é completo, pois dadas uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ e uma função $f \in C^1[0,1]$ tais que $f_n \to f$ em $C^1[0,1]$ e da desigualdade $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_{C^1}$ segue que $f_n \to f$ em $C[0,1]$. Pela Proposição 3.50, se F é fechado em $C^1[0,1]$ concluímos que E_2 é completo. A aplicação identidade $i : E_2 \to E_1$ é bijetora e linear. Além disso, é contínua, pois

$$||i(g)||_{E_1} = ||g||_\infty \leq ||g||_\infty + ||g^{'}||_\infty = ||g||_{E_2}.$$

E, pelo Teorema 3.51, existe $C > 0$ tal que $||g^{'}||_\infty \leq C||g||_\infty$ para toda $g \in F$. Agora, seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência na bola unitária de E_1, ou seja, $\max\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \leq 1$ para todo n. Mas pela desigualdade garantida pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que $\max\limits_{t\in[0,1]} |f_n^{'}(t)| \leq C$ para todo n. Como o conjunto das funções f_n satisfaz as condições do Teorema de Ascoli, então seu fecho é compacto em $C[0,1]$. Logo, obtemos uma subsequência $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ e $f \in C[0,1]$ tais que $f_{n_j} \to f$ em $C[0,1]$. Como f é fechado em F, então a bola unitária de E_1 é compacta. Mas, pelo Teorema de Riesz, F teria que ter dimensão finita, o que é um absurdo, pois supomos que F tem dimensão infinita. Portanto, concluímos que o subespaço $C^1[0,1]$ não é fechado em $C[0,1]$.

Considerações Finais

Neste estudo, utilizamos conceitos e resultados muito importantes da teoria da Álgebra Linear, dos Espaços Métricos e da Análise Funcional a fim de ilustrar algumas diferenças que ocorrem entre espaços vetoriais normados de dimensão finita e infinita. Dessa forma, a pesquisa possibilitou a conclusão de que nem sempre duas normas são equivalentes, que transformações lineares podem ser descontínuas, que nem todo espaço vetorial normado é completo, que existem conjuntos fechados e limitados que não são compactos e, por fim, que subespaços vetoriais podem não ser fechados. Sendo assim, cumprimos os objetivos previamente definidos, os quais nos fizeram perceber a importância desse estudo na Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. Editora da Universidade de São Paulo, 2020.

[2] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. Prentice Hall, 1961.

[3] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 1**. 10 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[4] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 2**. Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[5] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[6] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO, E. TEIXEIRA. **Fundamentos da Análise Funcional**. Rio de Janeiro, SBM, 2012.