



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Da propagação do calor à construção de desenhos: uma
aplicação das séries de Fourier com Python**

Cle Anderson Paz Domingos

Orientadora: Dra. Lorena Brizza Soares Freitas

RECIFE

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cle Anderson Paz Domingos

**Da propagação do calor à construção de desenhos: uma
aplicação das séries de Fourier com Python**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Orientadora: Profa. Dra. Lorena Brizza Soares Freitas

RECIFE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D671p Domingos, Cleianderson Paz
Da propagação do calor à construção de desenhos: uma aplicação das séries de Fourier com Python / Cleianderson Paz
Domingos. - 2024.
113 f.

Orientadora: Lorena Brizza Soares Freitas.
Inclui referências e apêndice(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em
Matemática, Recife, 2024.

1. séries de Fourier. 2. Python. 3. epiciclos. I. Freitas, Lorena Brizza Soares, orient. II. Título

CDD 510

Cle Anderson Paz Domingos

Da propagação do calor à construção de desenhos: uma aplicação das séries de Fourier com Python

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Trabalho aprovado. Recife, 29 de fevereiro de 2024:

**Profa. Dra. Lorena Brizza Soares
Freitas**

Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Profa. Dra. Maité Kulesza

Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Prof. Dr. Thiago Yukio Tanaka

Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Recife

2024

À minha família: Cláudia, Ivan, Ivanderson, Artur e Cecília

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais: Ana Cláudia Paz e Ivan de Assis Domingos por me fazerem quem sou e pelos ensinamentos. Sou fruto de vocês, dos seus esforços, batalhas e conquistas.

À minha mãe, Cláudia, pelo apoio e preocupação com minha formação, pelo seu cuidado e pelo seu esforço para dar a mim e meus irmãos uma direção para a vida.

Ao meu pai, Ivan, pelos bons conselhos, por sempre dar o seu melhor, pelos dias e noites trabalhados que puderam me colocar onde estou.

Aos meus irmãos, Ivanderson e Artur, às minhas primas, primos, tias, tios e demais familiares, pelos momentos de partilha, conversa e alegria que serviram muitas vezes como escape da vida universitária.

Agradeço à minha orientadora, Lorena Brizza Soares Freitas, pela imensa paciência comigo, pelos bons conselhos e orientação na vida acadêmica, pelas conversas, pela disponibilidade, por sempre incentivar a minha participação em projetos e, principalmente, pelas palavras de conforto e por sempre dizer que iria dar tudo certo (acho que as coisas deram certo mesmo).

Agradeço ainda à Laryssa Desirée pelo apoio e momentos especiais, a Alejandro Loamy, Dayene Vitória, Gemeson Gama, Heloísa Cardoso, Laís Karine, Lucas Freitas, Pablo Rodrigo, Paulo Sérgio, Pedro Borges, Pedro Henrique, Rafael Barbosa, Sillas Bernardo, Vinícius Barreto e a todos os outros amigos que compartilharam seus conhecimentos, experiências e apoio ao longo desta jornada. Sem vocês, certamente eu não teria aprendido tanto quanto aprendi. Agradeço pelas risadas, conversas e momentos de descontração.

Ao professor Rodrigo Bezerra pelo incentivo no estudo. Às professoras Julienne e Jerônima por me mostrarem como a Matemática pode ser maravilhosa. Aos demais professores e professoras, que tive o prazer de conhecer, agradeço pelos ensinamentos.

À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço por não ingressar em Ciência da Computação no SiSU de 2019, com

isso, tive a oportunidade de conhecer pessoas maravilhosas, viver momentos incríveis e me apaixonar pela Matemática. Obrigado!

*“A beleza da Matemática só se mostra
aos seguidores mais pacientes”
(Maryam Mirzakhani)*

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar uma aplicação das séries de Fourier na geração de figuras, para tal, estudamos em um primeiro momento o problema da condução do calor em uma barra finita, bem como a equação que o modela e sua solução, ambas propostas por Joseph Fourier no início do século XIX. Inicialmente, é apresentada uma nota histórica que exhibe alguns fatos que culminam na motivação para o estudo da propagação do calor. Em seguida, deduzimos a Equação do Calor a partir de duas leis físicas e estudamos como as séries de Fourier surgem na tentativa de solucionar esta equação. Com isso, por meio dos teoremas de convergências, estudamos condições necessárias para que uma função possa ser representada por sua série de Fourier. Por fim, apresentamos uma aplicação das séries de Fourier na geração de figuras por meio de epiciclos e desenvolvemos um algoritmo em Python para visualizar esta aplicação.

Palavras-chave: séries de Fourier; Python; epiciclos.

Abstract

This work aims to present an application of Fourier series in generating figures. To do so, we first study the problem of heat conduction in a finite rod, as well as the equation that models it and its solution, both proposed by Joseph Fourier in the early 19th century. Initially, a historical note is presented, exhibiting some facts that lead to the motivation for studying heat propagation. Then, we derive the Heat Equation from two physical laws and study how Fourier series emerge in an attempt to solve this equation. Subsequently, through convergence theorems, we study necessary conditions for a function to be represented by its Fourier series. Finally, we explore an application of Fourier series in figure generation using epicycles and develop a Python algorithm to visualize this application.

Keywords: Fourier series; Python; epicycles.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Retrato de Fourier em 1823 por Amédée Félix Barthélemy Geille	21
Figura 2 – Retrato de Monge por François-Séraphin Delpech	22
Figura 3 – Retrato de Dirichlet em 1853	24
Figura 4 – Barra de comprimento L e secção transversal A	25
Figura 5 – Barra acoplada a um sistema de eixos xyz	25
Figura 6 – Dinâmica da Lei de Fourier	26
Figura 7 – Dinâmica do fluxo de calor	27
Figura 8 – Secções S_1, S e S_2	28
Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = x^2$	32
Figura 10 – Gráfico de $f_2(x)$ e e^x	34
Figura 11 – Gráfico de $f_8(x)$ e e^x	34
Figura 12 – Gráfico de f com $n = 2$	35
Figura 13 – Gráfico de f com $n = 100$	35
Figura 14 – Gráfico da função do Exemplo 3.6	54
Figura 15 – Gráfico de $f(x)$ definida em (3.23)	54
Figura 16 – Soma parcial de Fourier com $n = 1$	55
Figura 17 – Soma parcial de Fourier com $n = 5$	55
Figura 18 – Soma parcial de Fourier com $n = 15$	56
Figura 19 – Soma parcial de Fourier com $n = 50$	56
Figura 20 – Gráfico de $f(x) = x - [x]$	58
Figura 21 – Gráfico de $\varphi(x)$ e $\psi_n(x)$	59
Figura 22 – Gráfico de $f(x)$	80
Figura 23 – Soma parcial de Fourier com $n = 1$	80
Figura 24 – Soma parcial de Fourier com $n = 3$	80
Figura 25 – Soma parcial de Fourier com $n = 5$	81
Figura 26 – Soma parcial de Fourier com $n = 20$	81
Figura 27 – Barras fundidas com $t = 0$	86
Figura 28 – Barras fundidas com $t > 0$	86
Figura 29 – Soma parcial com $K = 1$	93
Figura 30 – Soma parcial com $K = 20$	93
Figura 31 – Soma parcial com $K = 2$	94

Figura 32 – Soma parcial com $K = 50$	94
Figura 33 – Relação entre s_1 , $2e^{ix}/i\pi$ e $2e^{-ix}/i\pi$ no plano complexo.	96
Figura 34 – Relação entre s_1 e o vetor $4e^{ix}/\pi$	97
Figura 35 – Relação entre s_5 e o vetor $2\sum_{k=-5}^5[1 + (-1)^{k+1}]e^{ikx}/ik\pi$	97
Figura 36 – Conjunto Ω	98
Figura 37 – Diagrama da função f com $N = 3$	98
Figura 38 – Vetor $c_k e^{2ik\pi n/N}$ no plano complexo	99
Figura 39 – Série discreta de Fourier com 5 termos	100
Figura 40 – Conjunto X no plano complexo.	103
Figura 41 – Soma discreta de Fourier de X com $n=0, 1, 2, 3$	103
Figura 42 – Imagem <i>SVG</i> de um coelho	104
Figura 43 – Soma discreta de Fourier com $n=0, 20, 160, 247$	104

Sumário

Introdução	19
1 NOTA HISTÓRICA	21
1.1 Condução do calor em uma barra finita	24
2 A LINGUAGEM PYTHON	31
2.1 Gráfico de função	31
3 A TEORIA DE FOURIER	37
3.1 Método de Fourier e a condução do calor	38
3.1.1 Barra finita com condição de Dirichlet	39
3.2 Séries de Fourier	43
3.2.1 Funções periódicas	43
3.2.2 Convergência de Séries	45
3.2.3 Coeficientes a_n e b_n	47
3.2.4 Série de Fourier	52
4 CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER	57
4.1 Convergência pontual	61
4.1.1 Núcleo de Dirichlet	62
4.2 Convergência uniforme	72
4.2.1 Desigualdade de Bessel	72
4.2.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz e Desigualdade de Minkowski	76
4.2.3 Teoremas de convergências uniforme	78
5 EQUAÇÃO DO CALOR	85
5.1 Barra com extremidades a 0° C	85
6 SÉRIES DE FOURIER EM PYTHON E APLICAÇÕES	91
6.1 Séries de Fourier em Python	91
6.1.1 Formulação complexa da série de Fourier	95
6.2 Epíclis e séries de Fourier	96
7 CONCLUSÃO	107
REFERÊNCIAS	109

APÊNDICE A CÓDIGOS 111

Introdução

As Equações Diferenciais modelam inúmeros fenômenos biológicos, físicos, econômicos, entre outros fenômenos naturais. Elas se classificam em Equação Diferencial Ordinária (EDO) e Equação Diferencial Parcial (EDP). No primeiro tipo, temos, por exemplo: Modelo Predador-Presa^[1, p. 45], Modelos de Crescimento Populacional^[1, p. 120] e Vibrações Mecânicas e Elétricas^[1, p. 265]. Já nas EDPs, temos dois modelos clássicos: a Equação da Onda^[2, p. 130] e a Equação do Calor^[2, p. 102], que modelam, respectivamente, a propagação de uma onda em um meio e a propagação do calor em uma barra. Neste trabalho, estudaremos a Equação do Calor e mostraremos como a série de Fourier nasce na tentativa de solucionar tal equação.

A Equação do Calor, proposta em 1807 por Joseph Fourier (1768–1830) na obra *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, modela a propagação do calor em uma barra finita de comprimento L cuja superfície lateral é isolada termicamente em relação ao meio no qual a barra está inserida, podendo haver troca de calor apenas em suas extremidades. Nesta obra, Fourier apresenta uma forma de solucionar a EDP do calor por meio de um método de separação de variáveis, atualmente conhecido como Método de Fourier^[2, p. 10].

Ao aplicar este método, Fourier encontra, como possível solução, uma função $u(x, t)$, dada por uma soma infinita de senos e cossenos, que determina a temperatura da barra em um ponto x no instante de tempo t . No entanto, neste problema, Fourier se depara com a seguinte pergunta: quando uma soma infinita de senos e cossenos é igual a uma função f dada? Para Fourier, “qualquer função podia ser expressa pela série que hoje leva seu nome”^[2, p. 44]. No entanto, a afirmação dada por Fourier não é verdadeira e, neste trabalho, veremos funções que, em pelo menos um ponto, diferem de sua série de Fourier.

O desenvolvimento desta teoria, conhecida como Análise de Fourier, proporcionou diversas aplicações na Física, Matemática, Engenharia e até nos dias atuais. Por exemplo, esta ferramenta é utilizada na compressão de imagens no tipo de arquivo *JPEG*, na compressão de sons nos arquivos *MP3* e em filtros de imagens utilizados em redes sociais e programas de edição de vídeos e fotos. No presente trabalho, mais especificamente no [Capítulo 6](#), apresentamos uma aplicação da série discreta de Fourier.

Assim, esta monografia visa apresentar a construção da Equação do Calor, estudar

as séries de Fourier e como elas são obtidas ao tentarmos resolver esta equação, estudar as convergências das séries de Fourier e, por fim, apresentar uma aplicação das séries na geração de figuras por meio de epiciclos utilizando a linguagem de programação Python.

Este trabalho é um dos frutos de uma Iniciação Científica (IC), orientada pela Profa. Dra. Lorena Brizza e fomentada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), cujo objetivo principal foi estudar a Análise de Fourier como método de solução para EDPs. Além deste trabalho, a IC teve como resultado um minicurso e dois pôsteres sobre a Equação do Calor e as Séries de Fourier.

No que se segue, no [Capítulo 1](#), traremos uma nota história narrando a relação entre a Revolução Francesa, Napoleão Bonaparte, Joseph Fourier, o Egito e o problema da condução do calor. No final deste capítulo, realizamos uma dedução da Equação do Calor a partir de duas leis físicas. O [Capítulo 2](#), traz conceitos básicos sobre a linguagem de programação Python enquanto implementamos algoritmos para a construção de gráficos de funções. No [Capítulo 3](#), realizamos uma formalização do problema da condução do calor, bem como trazemos a definição de série de Fourier, alguns exemplos e resultados. Em seguida, no [Capítulo 4](#), realizamos um estudo sobre os tipos de convergência da série de Fourier, obtendo resultados que garantem, sob certas condições, tal convergência. No [Capítulo 5](#), estudamos, novamente, a Equação do Calor, mas desta vez utilizando toda a maquinaria estudada nos capítulos anteriores, assim, neste capítulo definimos o que se entende por solução da Equação do Calor e estudamos condições suficientes para haver solução para tal equação. Por fim, no [Capítulo 6](#), trazemos uma aplicação das séries de Fourier na geração de figuras por meio de epiciclos, partindo da teoria e construindo um algoritmo em Python que implementa esta aplicação.

1 Nota histórica

Neste capítulo, realizaremos uma breve revisão histórica sobre o matemático Joseph Fourier e sobre os acontecimentos que levaram Fourier a desenvolver a teoria atualmente conhecida como Análise de Fourier. Além disso, realizaremos a dedução da Equação do Calor. No que se segue, utilizamos como referências deste capítulo: [Figueiredo](#)^[2], [Boyer, Merzbach e Castro](#)^[3], [Gonzales-Velasco](#)^[4] e [Gonzalez-Velasco](#)^[5].

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) foi um matemático e físico francês que viveu durante os séculos *XVIII* e *XIX*. Nascido na cidade de Auxerre, Fourier ficou órfão aos nove anos, perdendo seu pai pouco tempo depois da morte de sua mãe. Ficou sob os cuidados do bispo de sua cidade e, por isso, ingressou em uma escola militar mantida pela Ordem Beneditina.

Figura 1 – Retrato de Fourier em 1823 por Amédée Félix Barthélemy Geille



Fonte: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=33502>>

Fourier é uma figura de extrema importância para a Matemática. Segundo [Boyer, Merzbach e Castro](#)^[3], ele foi o matemático mais influente na década de 1820. A importância de Fourier está relacionada, em grande parte, com os seus trabalhos que foram, e são, muito relevantes para a Matemática e Física.

Do ponto de vista matemático, Fourier foi um dos responsáveis pelo rigor dado por Cauchy, Riemann e Dirichlet à Matemática, pois, em seus trabalhos, Fourier constantemente utilizava conceitos que ainda não estavam bem definidos.

Ele trabalhou com funções descontínuas enquanto outros tratavam apenas de contínuas, usou integral como área enquanto a maioria utilizava a ideia de antiderivada, falou sobre a convergência de séries de funções antes da definição de convergência (4, p. 3, tradução própria¹)

Além disso, por viver em uma época de revoluções, Fourier se envolve ativamente nas políticas de sua época. Após a Queda da Bastilha, em 1789, a França dá início à Revolução Francesa sob os ideais iluministas, fortemente ligados à ciência. Naquele momento, a França sofria com uma grande falta de engenheiros e servidores públicos instruídos, assim, para desenvolver rapidamente a ciência e tecnologia do país, foi criada uma comissão de obras que resultou na fundação da *École Centrale des Travaux Publics* em 1794^[3, p. 322]. Mais tarde, em 1804, sob o comando de Napoleão Bonaparte, a escola passará por uma reorganização, ganhando um caráter militar, passando a se chamar *École Polytechnique*.

Devido a esta carência no desenvolvimento científico do país, uma comissão de ciências e artes foi criada para acompanhar a expedição ao Egito comandada por Napoleão Bonaparte em 1798. Um dos responsáveis por esta comissão era o matemático francês Gaspard Monge (1746–1818). Monge convocou inúmeros cientistas, engenheiros e técnicos para fazer parte desta comissão, dentre estes, destacamos Joseph Fourier.

Figura 2 – Retrato de Monge por François-Séraphin Delpech



Fonte: <<https://library.si.edu/image-gallery/73683>>

Em 20 de agosto de 1798, Napoleão decreta a fundação do *Institut d’Egypte*, órgão francês responsável pelo estudo e avanço da ciência no Egito. Fourier é nomeado secretário do *Institut* logo após a sua fundação. Durante o período em que exerceu este cargo administrativo, Fourier desenvolveu dores reumáticas crônicas, mas apesar disto, produziu inúmeras pesquisas em diversas áreas enquanto exercia o cargo de secretário.

¹ He worked with discontinuous functions when others dealt with continuous ones, used integral as an area when integral as a prederivative was popular, and talked about the convergence of a series of functions before there was a definition of convergence.

A expedição francesa batalhava constantemente com outras expedições europeias, assim, após inúmeros confrontos, as forças francesas rendem-se às forças britânicas e retornam à França em novembro de 1801.

Na França, em fevereiro de 1802, Fourier foi nomeado por Napoleão como prefeito do Departamento² de Isère, localizado nos alpes franceses. Em Grenoble, capital de Isère, Fourier retorna às pesquisas físicas e matemáticas iniciadas durante as expedições egípcias. No entanto, após sua estadia no Egito, os alpes franceses foram um desafio climático para Fourier, “ele parecia precisar de grandes quantidades de calor, pois, vivia em quartos superaquecidos e se cobria com várias roupas, mesmo no verão”.

Este desafio climático, fez com que os esforços científicos de Fourier fossem direcionados a temas envolvendo calor, como: propagação do calor em corpos sólidos, perda de calor por radiação e conservação do calor. Estes esforços, deram origem ao trabalho *Mémoire sur la propagation de la chaleur* apresentado em 21 de dezembro de 1807 no *Institut de France*. Um comitê formado por Monge e outros matemáticos ficou responsável por avaliar este trabalho.

Os relatores teceram críticas sobre como Fourier deduziu a Equação do Calor e a forma que ele utilizou algumas séries de funções trigonométricas. Devido a isso, o trabalho não foi publicado. Após estas críticas, Fourier apresenta uma versão expandida do seu trabalho, intitulada *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, para um concurso promovido pelo *Institut* em 1811. Um novo comitê julgou os dois trabalhos inscritos no concurso e definiram o trabalho de Fourier vencedor com as seguintes ressalvas:

Este ensaio contém a equação diferencial correta da propagação do calor, tanto no interior de corpos sólidos como em sua superfície. A abordagem inovadora sobre o assunto induziu este comitê a determinar tal trabalho como vencedor do concurso, no entanto, a maneira que o autor deduz as suas equações não estão bem definida. Além disso, a integração destas equações carece de rigor.

Mesmo sendo o ganhador do concurso, o trabalho de Fourier não é publicado em 1822 devido às observações feitas pelo comitê. Cerca de 15 anos após a apresentação de seu *mémoire*, Fourier compila toda sua pesquisa sobre o calor no livro *Théorie analytique de la chaleur*.

Talvez a dificuldade principal enfrentada pelos matemáticos dos comitês fosse o rigor dos conceitos que não estavam bem definidos naquele momento, noções como: função e convergência de séries de funções, não estavam bem-postos. Estes matemáticos “questionaram sobre como escrever a função $f(x) = e^x$ (não periódica) definida no intervalo

² Coletividade regional equivalente aos estados brasileiros.

$[-\pi, \pi]$, como uma soma infinita de senos (periódica)” (5, p. 3, tradução própria³). O fato é que, atualmente, conseguimos definir uma tal função sob certas condições. No entanto, naquele momento, o conceito de função era limitado apenas às funções analíticas. E por isso, os trabalhos de Fourier não foram compreendidos pela comunidade acadêmica durante os anos iniciais do século XIX.

Com isto, o problema de provar a convergência das séries de Fourier estava posto e grandes matemáticos tentaram resolvê-lo, como Poisson em 1820, Cauchy em 1823 e o próprio Fourier, que não conseguiu demonstrar tal resultado durante toda sua vida^[4, p. 25]. Foi somente em 1829 que Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) conseguiu fornecer condições para uma convergência pontual da série de Fourier, tal resultado foi obtido realizando uma substituição trigonométrica em uma das tentativas de demonstração de Fourier^[4, p. 25]. No ano seguinte, em 1830, Fourier morre devido a uma queda que sofreu em sua casa.

Figura 3 – Retrato de Dirichlet em 1853



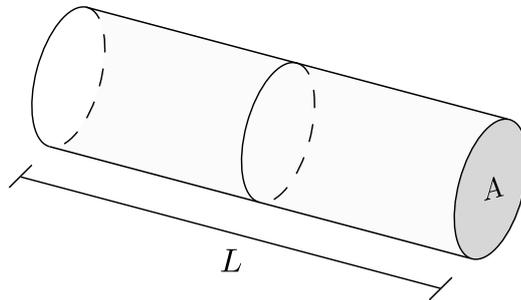
Fonte: 4, p. 37

A seguir apresentaremos um dos primeiros problemas estudado por Fourier: a propagação do calor em uma barra finita. No que se segue, nos baseamos na referência Figueiredo^[2].

1.1 Condução do calor em uma barra finita

Considere uma barra feita de material condutor uniforme com comprimento L em que cada secção transversal à barra tenha área A .

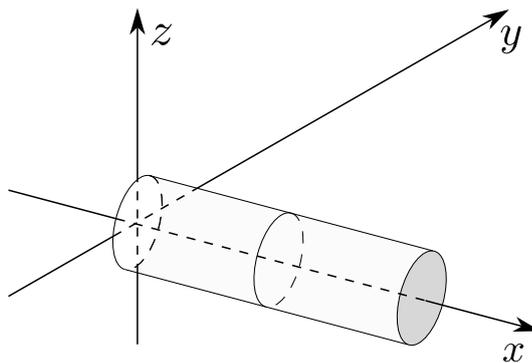
³ No original: “how, they demanded, can $f(x) = e^x$ be the sum of an infinite series of sines on an interval $[-\pi, \pi]$?”

Figura 4 – Barra de comprimento L e secção transversal A 

Fonte: próprio autor.

Queremos determinar uma função u que descreve a temperatura desta barra em relação ao tempo. Para tal, suponha que a superfície lateral da barra a isole termicamente em relação ao meio. No entanto, a troca de calor pode ocorrer em seus extremos, além disso, considere que em todos os pontos de uma seção a temperatura seja a mesma.

Acoplado à barra em um sistema de eixos coordenados xyz , temos que a temperatura u depende apenas de x , pois, em cada seção transversal, a temperatura é constante. Com isso, a transferência de calor se dará apenas na direção do eixo x .

Figura 5 – Barra acoplada a um sistema de eixos xyz 

Fonte: próprio autor.

Assim, estamos buscando uma função $u(x, t)$ que determina a temperatura de uma seção transversal no ponto x em um instante de tempo t .

O problema de determinar tal função $u(x, t)$ permeia duas ciências: a Matemática e a Física. Nesse sentido, precisamos de teorias físicas para entender o processo do fluxo de calor e conseguirmos estabelecer um modelo matemático para esse problema. Teremos

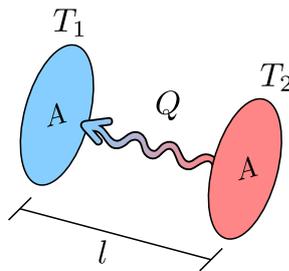
como base teórica da Física dois resultados, enunciados como postulados, que determinam a quantidade de calor (energia térmica trocada entre dois corpos devido à diferença de temperatura) de uma certa situação física.

Postulado 1 (Lei do resfriamento de Fourier). Considere duas placas P_1 e P_2 em um meio homogêneo, ambas de áreas iguais a A , mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente. Seja l a distância entre essas placas, então a quantidade de calor por unidade de medida Q é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{l},$$

onde k é a condutibilidade térmica do meio.

Figura 6 – Dinâmica da Lei de Fourier



Fonte: próprio autor.

Postulado 2 (Equação Fundamental da Calorimetria). Considere um corpo de massa m feito de um material homogêneo com calor específico c (quantidade de calor necessária para elevar em 1° C a temperatura de um grama do material do corpo). Então, a quantidade de calor Q que esse corpo transmite ao variar sua temperatura de T_1 para T_2 é dada por

$$Q = mc(T_2 - T_1).$$

Sejam S_1 e S_2 duas secções da barra. Considere que S_1 tenha abscissa x_0 , isto é, S_1 intercepta o eixo x perpendicularmente em $x = x_0$ e que S_2 tenha abscissa em $x_0 + d$, assim, as temperaturas em S_1 e S_2 em um tempo $t \geq 0$ fixado, são dadas, respectivamente, por $T_1 = u(x_0, t)$ e $T_2 = u(x_0 + d, t)$. Note que podemos usar a Lei do Resfriamento de Fourier, pois, T_1 e T_2 são constantes, uma vez que dependem apenas de números fixados.

Desse modo, se quisermos determinar a transferência instantânea de calor entre as secções, devemos calcular o seguinte limite

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA|u(x_0 + d, t) - u(x_0, t)|}{d}.$$

Assim, não estamos apenas calculando a quantidade de calor Q transferida entre as secções, estamos calculando a taxa de transferência de calor entre S_1 e S_2 , isto é, o fluxo de calor $q(x_0, t)$.

Sendo k e A constantes, segue que

$$q(x_0, t) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA |u(x_0 + d, t) - u(x_0, t)|}{d} = kA \lim_{d \rightarrow 0} \frac{|u(x_0 + d, t) - u(x_0, t)|}{d}.$$

Pela continuidade da função módulo e o fato da distância d ser não negativa, temos que

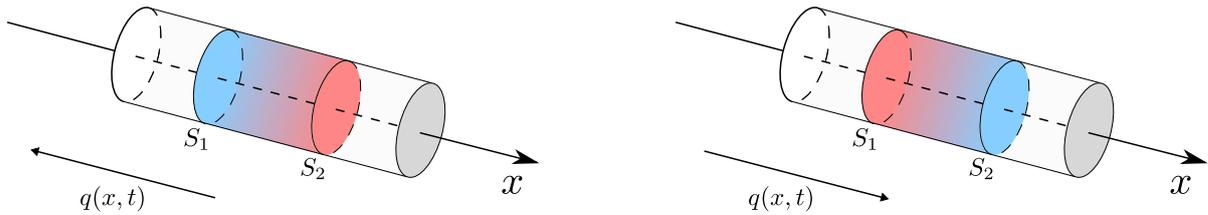
$$q(x_0, t) = kA \left| \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + d, t) - u(x_0, t)}{d} \right| = kA \left| \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, t) \right| = kA |u_x(x_0, t)|.$$

Agora, analisaremos a dinâmica do calor nesta situação de modo a determinar uma expressão, sem módulo, para $q(x_0, t)$. Note que se a temperatura da barra aumenta em relação a x ($u_x > 0$), então o fluxo de calor q será na direção de S_2 para S_1 , pois, o calor em S_2 é maior e irá fluir na direção de S_1 . Assim, $q(x_0, t) < 0$ em razão do fluxo de calor ser na direção contrária ao eixo x (veja [Figura 7.a](#)). Analogamente, se a temperatura decresce em relação a x ($u_x < 0$), então o fluxo será de S_1 para S_2 , logo, $q(x_0, t) > 0$ (veja [Figura 7.b](#)).

Figura 7 – Dinâmica do fluxo de calor

(a) Quando $u_x(x, t) > 0$

(b) Quando $u_x(x, t) < 0$



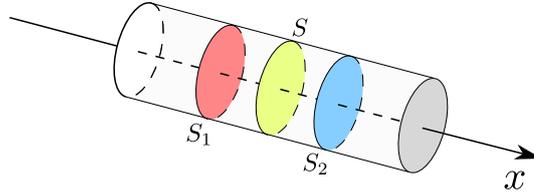
Fonte: próprio autor.

Assim, por meio desta dinâmica, podemos concluir que

$$q(x_0, t) = -kAu_x(x_0, t).$$

Mais geralmente, sendo x_0 fixo, porém, arbitrário, temos que $q(x, t) = -kAu_x(x, t)$, com $0 \leq x \leq L$.

Agora, considere outra secção S com abscissa x^* no intervalo $(x_0, x_0 + d)$ que no intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \tau]$ tenhamos troca de calor apenas entre S_1 e S_2 .

Figura 8 – Secções S_1 , S e S_2 

Fonte: próprio autor.

Assim, em um instante t , o fluxo de calor que passa pela secção S é dado pela diferença entre $q(x_0, t)$ e $q(x_0 + d, t)$. Se quisermos o fluxo total de calor q que passa por S no intervalo de tempo t_0 a $t_0 + \tau$, fazemos

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + d, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} -kAu_x(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} -kAu_x(x_0 + d, t) dt \\ &= kA \int_{t_0}^{t_0+\tau} u_x(x_0 + d, t) - u_x(x_0, t) dt. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), segue que

$$q = kA \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+d} u_{xx}(x, t) dx dt. \quad (1.1)$$

Por outro lado, usando o [Postulado 2](#), segue que a quantidade de calor em S é dada pela expressão

$$Q_S = Q(x^*, t_0 + \tau) - Q(x^*, t_0) = mc [u(x^*, t_0 + \tau) - u(x^*, t_0)].$$

A massa m do recorte da barra de S_1 a S_2 pode ser dada por meio da densidade ρ do material da barra e volume V do recorte, assim, temos que $m = \rho \cdot V = A\rho d$, logo,

$$Q_S = A c \rho [u(x^*, t_0 + \tau) - u(x^*, t_0)] d.$$

Desse modo, se quisermos o fluxo total de calor q de S_1 para S_2 , precisamos somar a temperatura de todas as secções infinitesimais de x_0 a $x_0 + d$. Assim,

$$\begin{aligned} q &= A c \rho \sum_{x^* \in (x_0, x_0+d)} [u(x^*, t_0 + \tau) - u(x^*, t_0)] \Delta x^* \\ &= A c \rho \int_{x_0}^{x_0+d} u(x^*, t_0 + \tau) - u(x^*, t_0) dx. \end{aligned}$$

Pelo TFC,

$$q = Ac\rho \int_{x_0}^{x_0+d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} u_t(x, t) dt dx. \quad (1.2)$$

Igualando as equações (1.1) e (1.2), segue que

$$Ac\rho \int_{x_0}^{x_0+d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} u_t(x, t) dt dx = kA \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+d} u_{xx}(x, t) dt.$$

Como a igualdade acima vale para todo $\tau > 0$ e todo $d > 0$, concluímos que as funções integradas são iguais para quaisquer valores de x e t . Assim, obtemos a equação

$$u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t), \quad (1.3)$$

onde $K = k/c\rho$. Tal equação é conhecida como Equação do Calor.

Uma vez posta a Equação do Calor, é natural que tentemos encontrar uma função $u(x, t)$ que seja solução de tal equação diferencial parcial (EDP). No [Capítulo 3](#), iremos estabelecer precisamente o problema de encontrar soluções para esta equação e utilizaremos um método de separação de variáveis a fim de determinar uma função que satisfaça a equação.

Tendo em vista que um dos nossos objetivos é implementar as séries de Fourier em Python e apresentar uma aplicação, no próximo capítulo, iremos abordar a linguagem de programação Python e mostraremos como obter gráficos de funções utilizando esta linguagem.

2 A linguagem Python

Python é uma linguagem de programação de propósito geral criada por Guido van Rossum em 1991^[6]. Segundo [Lutz e Ascher^{\[7\]}](#), o enfoque que o Python dá à legibilidade, coerência e qualidade dos códigos o difere de outras linguagens de programação. Além disso, a comunidade desenvolve inúmeros algoritmos complementares ao Python e os publicam para que outras pessoas possam utilizá-los, tais algoritmos são chamados de *pacotes* ou *bibliotecas*.

Cada biblioteca possui uma finalidade específica. Neste trabalho, utilizamos três:

- Matplotlib: biblioteca focada em criação de gráficos;
- Numpy: biblioteca com inúmeras funcionalidades para computação científica;
- Arcade: biblioteca focada na criação de jogos.

Utilizaremos as bibliotecas matplotlib e numpy para criarmos os gráficos das funções e das séries de Fourier e o pacote arcade será utilizado na geração das figuras por meio de epiciclos.

2.1 Gráfico de função

Formalmente, o gráfico de uma função $f : X \rightarrow Y$ é o conjunto de pontos da forma (x, y) , onde $y = f(x)$ e $x \in X$. Assim, se quisermos gerar (*plotar*) o gráfico de uma função em Python, basta definir a função f , os conjuntos X, Y e exibirmos os pontos (x, y) .

Exemplo 2.1. *Seja $X = [-5, 5]$ e $f(x) = x^2$. Plote o gráfico de f definida em X .*

Inicialmente, definiremos nossa função f utilizando o comando `def`

```
1 def f(x):
2     return x ** 2
```

Em seguida, definiremos o nosso domínio X com auxílio do pacote numpy. Para utilizar o numpy precisamos importá-lo utilizando o comando `import`

```
1 import numpy
2
3 X = numpy.linspace(-5, 5, 100)
```

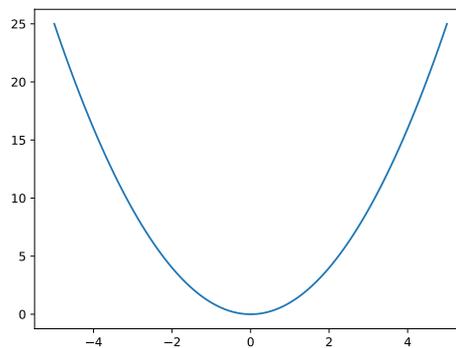
Na linha 3 acima, utilizamos o método `linspace` para criar uma lista de 100 números equidistantes entre si de -5 a 5.

Agora, definiremos o nosso conjunto imagem Y e exibiremos o gráfico da função f utilizando a biblioteca `matplotlib`

```
1 Y = f(X)
2
3 import matplotlib.pyplot
4
5 matplotlib.pyplot.plot(X, Y)
6 matplotlib.pyplot.show()
```

Como resultado, obtemos a figura

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: próprio autor.

Para evitar algoritmos prolixos, é comum renomearmos as bibliotecas utilizando o comando `as`. Além disso, existe um padrão de importarmos todos os pacotes no início do código, assim, o algoritmo do [Exemplo 2.1](#) deve ser escrito da seguinte forma

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def f(x):
5     return x ** 2
6
7 X = np.linspace(-5, 5, 100)
8 Y = f(X)
9
```

```
10 plt.plot(X, Y)
11 plt.show()
```

Observação. Os comandos `import numpy as np` e `import matplotlib.pyplot as plt` serão omitidos nos códigos que se seguirão a partir daqui. Além disso, em todos os gráficos gerados com Python, utilizaremos um estilo padrão que será omitido nos códigos, mas pode ser encontrado no [Algoritmo A.1](#).

As séries de Fourier, um dos temas centrais deste trabalho, são um tipo de série de funções, logo, se gerarmos o gráfico da série de Fourier, estaremos gerando o gráfico de uma série de funções. Desse modo, a seguir, iremos abordar o problema *plotar* o gráfico de uma de série de funções.

Considere o problema de plotar o gráfico da função f dada pela série de funções:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Inicialmente nos deparamos com o problema de gerar uma soma infinita em um computador. Sendo o computador uma máquina física, então há um limite para as capacidades de armazenamento e processamento desta máquina. Assim, o problema acima, deve ser reformulado da seguinte forma

Exemplo 2.2. *Seja a função*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

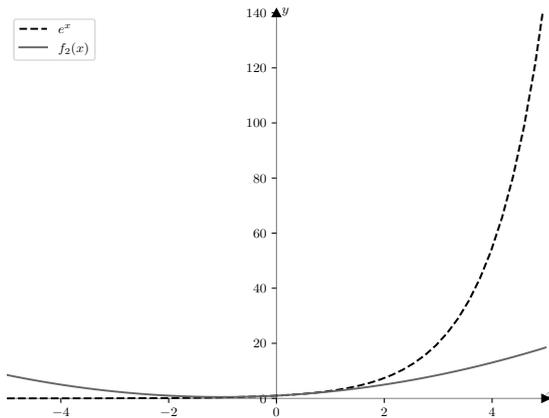
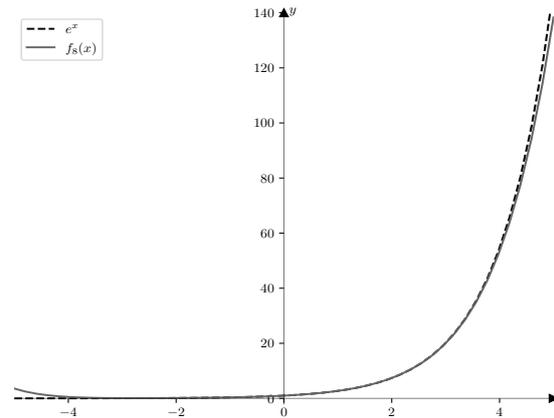
Plote o gráfico de f_n para algum n natural.

Para definir a função f_n utilizaremos o laço de repetição `for` da seguinte forma

```
1 def fn(x, n):
2     soma = 0
3     for k in range(n + 1):
4         termo = x ** k / np.math.factorial(k)
5         soma += termo
6
7     return soma
```

Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x$, assim, mostraremos um comparativo entre as funções f_n e e^x a fim de observarmos esta convergência.

Dessa forma, definindo o intervalo $[-5, 5]$ como domínio e calculando o conjunto imagem, obtemos os gráficos

Figura 10 – Gráfico de $f_2(x)$ e e^x Figura 11 – Gráfico de $f_8(x)$ e e^x 

Fonte: próprio autor.

Outro tipo de função são as dadas por integrais. Por exemplo, considere o problema de plotar o gráfico da função

$$f(x) = \int_0^x 3t^2 dt.$$

Para escrevermos um algoritmo que gera o gráfico da função acima em um determinado intervalo, devemos calcular, em cada ponto desse intervalo, a integral acima, mas como realizar tal cálculo? Para isso, precisamos implementar, em Python, a seguinte definição de integral definida por Soma de Riemann:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x,$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i\Delta x$, com $i = 0, 1, \dots, n$.

Assim, temos o problema

Exemplo 2.3. *Plote o gráfico da função*

$$f(x) = \int_0^x 3t^2 dt,$$

no intervalo $[-1, 1]$.

A Soma de Riemann com n termos é implementada com o algoritmo

```

1 def soma_riemann(f, a, b, n):
2     # iniciando o resultado
3     soma = 0
4     # definindo o Δx
5     dx = (b - a) / n
6
7     # x_0 = a
8     x_i = a
9     # realizando as somas f(x_i)Δx com i = 1, ..., n

```

```

10 for i in range(1, n + 1):
11     soma += f(x_i) * dx
12     x_i = a + i * dx
13 # retornando o resultado da soma
14 return soma

```

Utilizando este algoritmo, definimos a nossa função f como

```

1 def f(x, n):
2     # função  $3t^2$ 
3     ft = lambda t: 3 * t ** 2
4     # calculando e retornando a soma de Riemann de  $3t^2$ 
5     return soma_riemann(ft, 0, x, n)

```

Obtemos o gráfico de f , com o seguinte algoritmo onde a precisão aumenta conforme n cresce.

```

1 # intervalo de integração
2 X = np.linspace(-1, 1)
3 # conjunto imagem da função f
4 Y = [f(x, n) for x in X]
5
6 # plotando o gráfico
7 plt.plot(X, Y)

```

Os seguintes gráficos foram obtidos com $f(x, 2)$ e $f(x, 100)$ na linha 4 do código acima.

Figura 12 – Gráfico de f com $n = 2$

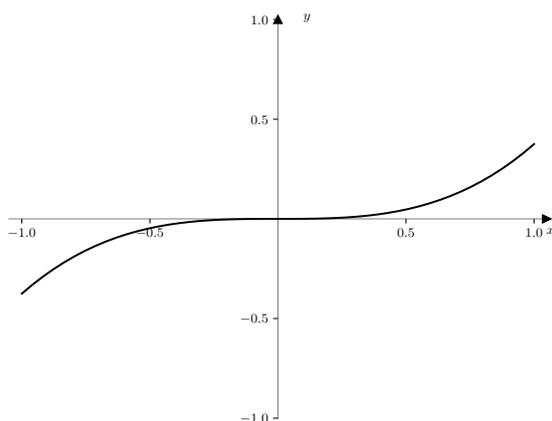
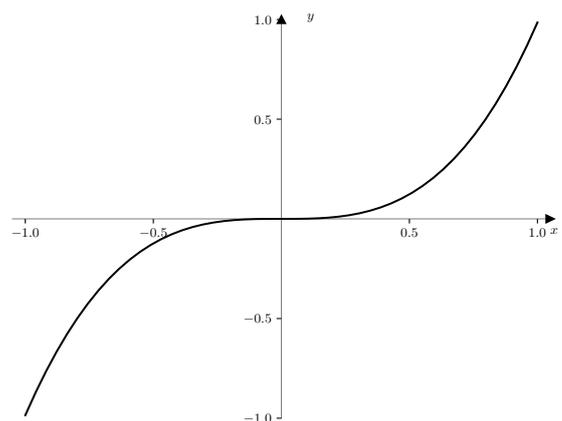


Figura 13 – Gráfico de f com $n = 100$



Fonte: próprio autor.

Tendo uma ideia de como *plotar* alguns tipos de funções, partiremos para uma discussão teórica sobre a formalização do problema da condução do calor em uma barra finita que culminará na definição da série de Fourier.

3 A Teoria de Fourier

Neste capítulo, iremos realizar a formalização do problema da condução do calor em uma barra finita utilizando como referências: [Figueiredo](#)^[2], [Lima](#)^[8] e [Braun](#)^[9].

Segundo o comitê que julgou o trabalho de Fourier como vencedor do concurso, a [equação \(1.3\)](#) de fato modela a dinâmica do calor em corpos sólidos. Isto nos diz que suas soluções devem estar fisicamente corretas, isto é, as soluções devem ter um comportamento razoável segundo à Física.

Assim, o problema de solucionar a EDP do calor vai além de exibir uma função $u(x, t)$ que a satisfaça. Por exemplo, qualquer função da forma $u(x, t) = ax + b$ é solução da [equação \(1.3\)](#), pois, $u_t = 0$ e $u_{xx} = 0$. Desse modo, temos infinitas soluções para este problema e isto não é interessante, pois, não conseguimos determinar uma única função que satisfaça o problema físico.

Diante deste problema, é necessário sabermos o comportamento da função $u(x, t)$ no instante inicial $t = 0$ e nas extremidades da barra, $x = 0$ e $x = L$, em qualquer instante, pois, a dinâmica do calor depende diretamente da temperatura inicial ao longo da barra e das trocas de calor nas extremidades. Desse modo, fazemos a seguinte classificação de Condições de Fronteira:

Tipo I (Condição de Dirichlet) Suponha que existam funções $h_1(t)$ e $h_2(t)$ tais que, h_1 descreva a temperatura na extremidade esquerda e h_2 a temperatura na extremidade direita, isto é,

$$u(0, t) = h_1(t) \quad \text{e} \quad u(L, t) = h_2(t).$$

Tipo II (Condição de Neumann) Suponha que as extremidades da barra estão isoladas termicamente, então o fluxo de calor nas extremidades é nulo, isto é

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

Tipo III Se a temperatura do meio é u_0 e há troca de calor entre a barra e o meio regida pela lei

$$u_x(0, t) = \frac{e}{k} [u(0, t) - u_0] \quad \text{e} \quad u_x(L, t) = -\frac{e}{k} [u(L, t) - u_0],$$

onde e é a constante de *emissividade* do material em relação ao meio.

Tipo IV Qualquer combinação dos três casos anteriores.

Ao longo desta seção, focaremos nas condições de contorno do Tipo I e II, uma vez que estas motivam a definição das séries de Fourier. Um estudo sobre as condições Tipo III e Tipo IV podem ser encontrado em 2, p. 115-117.

3.1 Método de Fourier e a condução do calor

Buscando solucionar a Equação do Calor, apresentaremos e utilizaremos um método de separação de variáveis conhecido como Método de Fourier^[2] que consiste em supor que, dada uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, existam funções $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Em um primeiro momento, utilizaremos o Método de Fourier para determinarmos uma função $u(x, t)$ que satisfaça a Equação do Calor. Será útil definir as seguintes regiões do plano:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L \text{ e } t > 0\}, \\ \overline{\mathcal{R}} &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0\}.\end{aligned}$$

Desse modo, para solucionar o problema da Equação do Calor, buscamos determinar uma função $u : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça: a equação (1.3), a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, com $0 \leq x \leq L$, onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e que u satisfaça a condição de fronteira do problema.

Observação. Ao problema composto por uma EDP, sujeita às condições inicial e de fronteira, damos o nome Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF).

Utilizando o Método de Fourier, suponha que existam funções $F : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$u(x, t) = F(x)G(t), \quad (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}.$$

Assim, fazendo a substituição acima na equação (1.3), segue que

$$u_t(x, t) = Ku_{xx}(x, t) \implies F(x)G'(t) = K F''(x)G(t).$$

Considerando que o produto $F(x)G(t)$ não se anula em todo ponto de \mathcal{R} , então podemos dividir ambos os lados da equação acima por $KF(x)G(t)$, obtendo

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}, \quad (x, t) \in \mathcal{R}. \quad (3.1)$$

Note que em (3.1), o membro esquerdo da equação é função apenas de t , enquanto o membro direito está apenas em função de x . Isto nos diz que ambos os lados desta equação devem independer dos valores de x e t , assim existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \alpha, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \alpha, \quad 0 < x < L. \quad (3.3)$$

Assim, obtemos duas equações diferenciais ordinárias (EDOs) que podem ser resolvidas com métodos usuais para equações deste tipo.

A equação (3.2) é uma EDO separável e sua solução é a função

$$G(t) = c_1 e^{\alpha K t}, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

onde c_1 é uma constante não nula, pois, supomos que o produto $F(x)G(t)$ não deve se anular em \mathcal{R} .

A equação (3.3) nos diz que $F(x)$ deve satisfazer a igualdade

$$F''(x) - \alpha F(x) = 0, \quad 0 < x < L.$$

Usando o método de resolução para EDOs homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, que pode ser encontrado em 9, p. 138, 142 e 148, temos as seguintes soluções para a equação acima

$$F(x) = \begin{cases} c_2 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_3 e^{-\sqrt{\alpha}x}, & \text{se } \alpha > 0, \\ c_2 + c_3 x, & \text{se } \alpha = 0, \\ c_2 \cos(\sqrt{|\alpha|x}) + c_3 \sin(\sqrt{|\alpha|x}), & \text{se } \alpha < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Logo, $u(x, t) = G(t)F(x)$ é dada pela expressão,

$$u(x, t) = c_1 e^{\alpha K t} F(x). \quad (3.6)$$

A seguir, consideraremos um PVIF com condição de fronteira do Tipo I e estudaremos as possíveis expressões para $F(x)$, a fim de obter $u(x, t)$. Em seguida, estudaremos, de forma análoga, problemas sob condições do Tipo II.

3.1.1 Barra finita com condição de Dirichlet

Considere o seguinte PVIF sob a condição de Dirichlet com $h_1(t) = h_2(t) = 0$:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t), & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizando o Método de Fourier, realizando os procedimentos feitos anteriormente e considerando a condição de fronteira dada em (3.7), temos que as funções F e G devem satisfazer as equações

$$\begin{aligned} u(0, t) &= F(0)G(t) = 0, \\ u(L, t) &= F(L)G(t) = 0, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Assim, $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(0) = F(L) = 0$, pois, supomos que $G(t)$ não deve se anular para $t > 0$.

Considerando as expressões para $F(x)$ em (3.5) e as condições de fronteira, temos três possibilidades:

i) Se $\alpha > 0$, então

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= c_2 + c_3 = 0 \\ F(L) &= c_2 e^{\sqrt{\alpha}L} + c_3 e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \end{aligned} \right\} \implies c_2 = c_3 = 0.$$

Logo, temos que $F(x) \equiv 0$, uma contradição, pois, o produto $F(x)G(t)$ não deve se anular em \mathcal{R} .

ii) Se $\alpha = 0$, então

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= c_2 = 0 \\ F(L) &= c_2 + c_3 L = 0 \end{aligned} \right\} \implies c_2 = c_3 = 0.$$

Analogamente ao caso anterior, temos $F(x) \equiv 0$, que gera uma contradição.

iii) Se $\alpha < 0$, faremos a seguinte mudança $\alpha = -\lambda^2$, para algum $\lambda > 0$. Então $F(x) = c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sin(\lambda x)$, logo

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= c_2 = 0 \\ F(L) &= c_2 \cos(\lambda L) + c_3 \sin(\lambda L) = 0 \end{aligned} \right\} \implies c_3 \sin(\lambda L) = 0.$$

Queremos que $c_3 \neq 0$, caso contrário, teremos $F(x) \equiv 0$. Assim, segue que

$$\sin(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi \implies \lambda = \frac{n\pi}{L},$$

onde $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Observação. Não consideramos $n = 0$, pois, neste caso, teríamos $L = 0$ ou $\lambda = 0$. Sendo L o comprimento da barra, $L = 0$ não pode ocorrer e, na mudança de variável, consideramos $\lambda > 0$, assim, $\lambda = 0$ não pode ocorrer.

Desta análise concluímos que, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a função $u_n(x, t)$ dada por

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= G_n(t)F_n(x) \\ &= c_n e^{-Kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

satisfaz a equação do calor e a condição de fronteira do PVIF (3.7). No entanto, aplicando u_n na condição inicial, temos que

$$u_n(x, 0) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Assim, $u_n(x, t)$ só será solução do PVIF (3.7), se

$$f(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Dada uma quantidade finita de soluções da equação (1.3), a função obtida a partir da soma dessas soluções é, também, uma solução desta equação. Utilizando esta proposição, segue que, para algum N natural,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-Kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.8)$$

satisfaz a EDP do calor e a condição de fronteira. Mas só será uma solução do PVIF (3.7) se tivermos a seguinte condição inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Nesta situação, surge a pergunta: o que acontece se $f(x)$ não for da forma acima? A resposta para tal pergunta foi dada por Fourier e consiste em transformarmos o somatório em uma série e considerar que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

No entanto, simplesmente igualar a série e a função não garante que tal igualdade ocorra, assim, no Capítulo 4, determinaremos condições necessárias sobre f para tal equação ser válida.

Observação. Na equação (3.8), não consideramos os casos em que $n < 0$, pois, os somatórios diferem a menos de constantes, uma vez que

$$\sum_{n=-N}^{-1} d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^N (c_n - d_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

A seguir, procederemos de forma análoga a anterior com a finalidade de determinarmos uma solução para o PVIF da Equação do Calor sob condições do Tipo II.

Exemplo 3.1 (Condições de Neumann). *Considere o seguinte PVIF sob a condição de Tipo II:*

$$\begin{cases} u_t(x, t) = Ku_{xx}(x, t), & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.9)$$

Considerando as expressões para $F(x)$, em (3.5), temos que

$$F'(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha} (c_2 e^{\sqrt{\alpha}x} - c_3 e^{-\sqrt{\alpha}x}), & \text{se } \alpha > 0, \\ c_3, & \text{se } \alpha = 0, \\ \sqrt{|\alpha|} [-c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{|\alpha|x}) + c_3 \cos(\sqrt{|\alpha|x})], & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Considerando a condição de fronteira e os possíveis valores de α , iremos determinar a função $u(x, t) = c_1 e^{\alpha Kt} F(x)$. Note que se $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$, então $F'(0) = F'(L) = 0$. Desse modo, segue que

i) Se $\alpha > 0$, então

$$\left. \begin{aligned} c_2 - c_3 &= 0 \\ c_2 e^{\sqrt{\alpha}L} - c_3 e^{-\sqrt{\alpha}L} &= 0 \end{aligned} \right\} \implies c_2 = c_3 = 0.$$

Logo, temos que $F(x) \equiv 0$, que gera uma contradição como visto na seção anterior.

ii) Se $\alpha = 0$, então

$$\begin{aligned} F'(0) &= c_3 = 0. \\ F'(L) &= c_3 = 0. \end{aligned}$$

Note que não podemos dizer nada sobre c_2 , logo, $F(x) = c_2$ satisfaz a condição de fronteira de (3.9).

iii) Se $\alpha < 0$, faça $\alpha = -\lambda^2$, então

$$\begin{aligned} F'(0) &= -c_2 \operatorname{sen}(\lambda \cdot 0) + c_3 \cos(\lambda \cdot 0) = 0, \\ F'(L) &= -c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) + c_3 \cos(\lambda L) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= 0 \\ -c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) + c_3 \cos(\lambda L) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies -c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0.$$

Como queremos que $F(x) \neq 0$, então devemos ter que $c_2 \neq 0$, logo

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{L}.$$

Daí, $F_n(x) = c_n \cos(n\pi x/L)$, com $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, satisfaz a condição de fronteira do PVIF (3.9).

De forma análoga, obtemos

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{-Kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pela condição inicial, devemos ter

$$u(x, 0) = f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

3.2 Séries de Fourier

Na seção anterior, vimos a necessidade de saber quando uma função $f(x)$ com $0 \leq x \leq L$ pode ser expressa por meio de uma série de senos e cossenos.

Iremos considerar o caso geral: funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que podem ser expressas na forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.10)$$

Note que não podemos garantir a igualdade acima, pois, não sabemos se a série da expressão converge. Assim, em um primeiro momento estaremos preocupados em garantir a convergência desta série.

Todos os resultados sobre séries de Fourier, têm como hipótese a função f ser periódica, assim, faremos uma breve revisão dos conceitos e resultados sobre funções periódicas.

3.2.1 Funções periódicas

Intuitivamente, uma função periódica é uma função que repete seus valores em uma mesma sequência de forma cíclica ao longo do seu domínio, ou seja, à medida que avançamos ao longo do eixo horizontal, os valores da função se repetem em intervalos regulares. Esses intervalos são chamados de períodos da função. Definimos como período fundamental, ou apenas período, o menor número positivo que satisfaz tal propriedade.

Formalmente, damos a seguinte definição:

Definição 3.1. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Exemplo 3.2. A função $f(x) = \sin(x)$ é periódica de período 2π , pois, considerando $T \in \mathbb{R}$ e utilizando o seno da soma, temos que

$$\sin(x + T) = \sin(x) \cos(T) + \cos(x) \sin(T).$$

Para obter a relação $\sin(x + T) = \sin(x)$, devemos ter $\cos(T) = 1$ e $\sin(T) = 0$. Assim, qualquer número da forma $T = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ satisfaz essa propriedade, no entanto, o menor valor positivo para T é 2π , portanto, a função $\sin(x)$ é periódica de período 2π .

Exemplo 3.3. Queremos determinar o período da função $\cos(n\pi x/L)$, isto é, determinar o menor número positivo T de modo que a seguinte igualdade ocorra

$$\cos\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Utilizando o cosseno da soma, segue que

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Assim, devemos ter que $\cos(n\pi T/L) = 1$ e $\operatorname{sen}(n\pi T/L) = 0$, isto é, queremos que

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi.$$

Portanto, $T = 2L/n$.

Proposição 3.1. Se f for uma função periódica de período T e diferenciável, então a primeira derivada de f é também periódica de mesmo período.

Demonstração. De fato, se f é periódica de período T , então dado um ponto de acumulação a (vide 8, p. 121) no domínio de f , temos $f(a) = f(a+T)$. Sendo f diferenciável em a , segue que

$$\begin{aligned} f'(a+T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a+T)+h) - f(a+T)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= f'(a). \end{aligned}$$

■

Proposição 3.2. Seja f uma função periódica de período $2T$ e integrável, então

$$\int_{-T}^T f(x) \, dx = \int_0^{2T} f(x) \, dx.$$

Demonstração. Inicialmente, note que $f(x) = f(x+2T)$, fazendo $t = x+2T$, então $f(t-2T) = f(t)$. Assim, $-2T$ é, também, um período para f .

Na integral, observe que

$$\int_{-T}^T f(x) \, dx = \int_{-T}^0 f(x) \, dx + \int_0^T f(x) \, dx.$$

Fazendo a substituição $u = x+2T$ na primeira integral do membro direito da igualdade acima, segue que

$$\int_{-T}^T f(x) \, dx = \int_T^{2T} f(u-2T) \, du + \int_0^T f(x) \, dx.$$

Com isso, aliado ao fato de que $f(u - 2T) = f(u)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T f(x) dx &= \int_T^{2T} f(u) du + \int_0^T f(x) dx \\ &= \int_0^T f(x) dx + \int_T^{2T} f(x) dx \\ &= \int_0^{2T} f(x) dx. \end{aligned}$$

■

3.2.2 Convergência de Séries

Como dito acima, antes de podermos garantir a igualdade em (3.10) devemos avaliar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Nesse sentido, utilizaremos as definições a seguir para estudarmos as convergências das séries de funções.

Definição 3.2 (Convergência pontual). Sejam as funções $u_j : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ com $j = 1, 2, \dots$; dizemos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ convergirá pontualmente para $x = x_0$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir um natural N tal que

$$\left| \sum_{j=1}^m u_j(x_0) - \sum_{j=1}^n u_j(x_0) \right| = \left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \varepsilon,$$

para todos m, n naturais tais que $N \leq n < m$.

Definição 3.3 (Convergência uniforme). Uma série de funções $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ converge uniformemente, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um natural N tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m > n \geq N \implies \left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Exemplo 3.4. Sejam as funções $u_j(x) = jx$, então a série $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ converge pontualmente para $x = 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, para quaisquer $m > n > 1 = N$, temos que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(0) \right| = \sum_{j=n}^m j \cdot 0 = 0 < \varepsilon.$$

Exemplo 3.5. Sejam as funções $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$u_n(x) = \frac{x}{n^2}.$$

Então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ e $x \in [0, 1]$, sabemos que

$$0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Assim, para avaliar a convergência uniforme da série das funções $u_n(x)$ basta avaliarmos a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, pois, a primeira série é majorada por esta última, isto é

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ é uma p -série com $p = 2$, segue que, esta série numérica é convergente e, portanto, a série de funções também é.

Note que não demonstramos formalmente a convergência uniforme do exemplo acima. Apenas majoramos a série de funções por uma série numérica convergente. Isto é precisamente a estratégia conhecida como “O Teste M de Weierstrass” que será enunciado a seguir.

Teorema 3.1 (Teste M de Weierstrass). *Sejam as funções $u_n : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que*

$$|u_n(x)| \leq M_n,$$

para todo $x \in I$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente.

Demonstração. Queremos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente. Assim, note que pela Desigualdade Triangular, temos a seguinte relação

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Sendo $u_n(x)$ majorada por M_n para $n = 1, 2, \dots$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m M_k \right| = \sum_{k=n}^m M_k < \varepsilon.$$

Unindo as desigualdades, segue que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m M_k < \varepsilon.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente para todo $x \in I$. ■

Se a convergência uniforme de uma série for garantida, conseguimos determinar certos comportamentos sobre esta série.

Proposição 3.3. *Seja (u_n) uma sequência de funções contínuas com $u_n : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então, a função*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

é também uma função contínua.

Demonstração. Seja $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$.

Caso a seja um ponto isolado de I (vide 8, p. 177), então existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap I = \{a\}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome este δ , então

$$\begin{aligned} x \in I, |x - a| < \delta &\implies x = a \implies |u_n(x) - u_n(a)| = 0 < \varepsilon \\ &\implies \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \right| = 0 < \varepsilon \\ &\iff |u(x) - u(a)| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Se a for um ponto de acumulação de I , então

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = u(a).$$

■

Proposição 3.4. *Suponha que as funções u_n sejam integráveis no intervalo I e a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente, então*

$$\int_I \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_I u_n(x) dx \right].$$

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em 8, p. 262

■

Proposição 3.5. *Suponha que $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ convirja uniformemente. Então*

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser consultada em 8, p. 264.

■

3.2.3 Coeficientes a_n e b_n

Agora, estamos interessados em encontrar os coeficientes a_n e b_n da equação (3.10). Assim, se supormos que f seja periódica de período $2L$, integrável em $[-L, L]$ e que a série da

equação (3.10) é uniformemente convergente, então pela [Proposição 3.4](#), podemos integrar a equação no intervalo $[-L, L]$, obtendo

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.11)$$

Fazendo $u = n\pi x/L$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \operatorname{sen}(u) du \\ &= -\frac{L}{n\pi} \cos(u) \Big|_{-n\pi}^{n\pi} \\ &= -\frac{L}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] \\ &= -\frac{L}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos(u) du \\ &= \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(u) \Big|_{-n\pi}^{n\pi} \\ &= -\frac{L}{n\pi} [\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi)] \\ &= -\frac{L}{n\pi} [0 - 0] = 0. \end{aligned}$$

Assim, substituindo essas integrais na [equação \(3.11\)](#), segue que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = a_0 \int_{-L}^L dx \implies a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (3.12)$$

Com esse processo conseguimos determinar o coeficiente a_0 .

Assim, para encontrarmos os coeficientes a_n e b_n , multiplicaremos (3.10) por uma função conveniente a fim de usar a ortogonalidade das funções seno e cosseno.

Multiplicando a equação (3.10) por $\cos(m\pi x/L)$ com $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= a_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]. \end{aligned}$$

Se a série for uniformemente convergente, então, novamente pela [Proposição 3.4](#), podemos integrar a equação acima no intervalo $[-L, L]$, logo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L a_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Das integrais do coeficiente a_0 , já sabemos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Para calcular

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx,$$

usamos o fato que temos uma integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico, logo

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

obtemos a relação

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Assim, fazendo $\alpha = n\pi x/L$, $\beta = m\pi x/L$ e integrando a equação acima no intervalo $[-L, L]$, obtemos

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi(m+n)}{L}\right) + \cos\left(\frac{x\pi(m-n)}{L}\right) dx. \quad (3.14)$$

Iremos calcular a integral acima considerando duas situações:

i) Se $m = n$ e fazendo $u = 2m\pi x/L$, então o membro direito de (3.14) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2mx\pi}{L}\right) + 1 dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{-2\pi m}^{2\pi m} \frac{L}{2\pi m} \cos(u) du + \int_{-L}^L dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{2\pi m} \left(\operatorname{sen}(2\pi m) - \operatorname{sen}(-2\pi m) \right) + 2L \right] \\ &= L. \end{aligned}$$

ii) Se $m \neq n$, faça $u = (m+n)\pi x/L$ e $w = (m-n)\pi x/L$, então

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi(m+n)}{L}\right) + \cos\left(\frac{x\pi(m-n)}{L}\right) dx \\ &= \frac{L}{2\pi} \left[\int_{-\pi(m+n)}^{\pi(m+n)} \frac{\cos(u)}{m+n} du + \int_{-\pi(m-n)}^{\pi(m-n)} \frac{\cos(w)}{m-n} dw \right] \\ &= \frac{L}{2\pi} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi(m+n)) - \operatorname{sen}(-\pi(m+n))}{m+n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi(m-n)) - \operatorname{sen}(-\pi(m-n))}{m-n} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

pois, o seno de qualquer múltiplo inteiro de π é zero.

Agora, multiplicando (3.10) por $\text{sen}(m\pi x/L)$ com $m \in \mathbb{N}$ e integrando no intervalo $[-L, L]$, temos que

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L a_0 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.15)$$

Já sabemos que

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0,$$

pois, cada integrando é uma função ímpar e o intervalo é simétrico.

Por fim, usando a identidade

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

segue que

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi x(m-n)}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x(m+n)}{L}\right) dx. \quad (3.16)$$

Novamente, iremos considerar duas situações:

i) Se $m = n$, faça $w = 2m\pi x/L$, então o membro direito de (3.16) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 - \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L dx - \frac{L}{2\pi m} \int_{-2\pi m}^{2\pi m} \cos(w) dw \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2L - \frac{L}{2\pi m} \left(\cos(2\pi m) - \cos(-2\pi m) \right) \right] \\ &= L. \end{aligned}$$

ii) Se $m \neq n$, faça $u = (m-n)\pi x/L$ e $w = (m+n)\pi x/L$, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi x(m-n)}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x(m+n)}{L}\right) dx &= \frac{L}{2\pi} \left[\int_{-\pi(m-n)}^{\pi(m-n)} \frac{\cos(u)}{m-n} du - \int_{-\pi(m+n)}^{\pi(m+n)} \frac{\cos(w)}{m+n} dw \right] \\ &= \frac{L}{2\pi} \left[\left(\frac{\text{sen}(\pi(m-n)) - \text{sen}(-\pi(m-n))}{m-n} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\text{sen}(\pi(m+n)) - \text{sen}(-\pi(m+n))}{m+n} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Novamente, usamos que o seno de múltiplos inteiros de π é zero.

Em resumo, temos as seguintes relações

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (3.17)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m; \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases} \quad (3.19)$$

Usando essas relações em (3.13) e (3.15), resulta que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= a_n L, \\ \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= b_n L. \end{aligned}$$

Com isso, podemos obter as seguintes expressões

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Reescrevendo equação (3.10) da seguinte forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

notamos que as expressões para a_0 , a_n e b_n acima podem ser reduzidas a

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

No entanto, para definir esses coeficientes, supomos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$. Assim, se f for uma tal função que atende estes requisitos, então a_n e b_n são os coeficientes da expressão

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.22)$$

Os coeficientes a_n e b_n são obtidos a partir de uma integral definida em um intervalo simétrico. Assim, a seguinte proposição será bastante útil no cálculo destes coeficientes.

Proposição 3.6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e integrável em $[-L, L]$. Se f é ímpar (resp.: par), então $a_n = 0$ (resp.: $b_n = 0$).*

Demonstração. Supondo f ímpar, note que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

Fazendo $u = -x$ na primeira integral entre colchetes acima e utilizando a paridade das funções f e cosseno, segue que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \left[- \int_L^0 f(-u) \cos\left(\frac{n\pi(-u)}{L}\right) du + \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[- \int_0^L f(u) \cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right) du + \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Se f for par, a demonstração é análoga e pode ser encontrada em 2, p. 27. ■

Em posse das definições e resultados acima, agora podemos estudar de forma mais aprofundada esta série de funções trigonométricas conhecidas como série de Fourier.

3.2.4 Série de Fourier

Definição 3.4 (Série de Fourier). Dizemos que (3.22) é a representação de f por meio de sua Série de Fourier, onde os coeficientes de Fourier a_n e b_n são dados em (3.20) e (3.21).

Não podemos garantir uma igualdade entre uma função f qualquer e sua representação dada em (3.22), portanto, escreveremos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

para dizer que a expressão à direita do sinal “ \sim ” é a série de Fourier de f .

A seguir veremos um primeiro resultado, demonstrado por Dirichlet, sobre convergência da série de Fourier. Para tal, precisaremos das seguintes definições

Definição 3.5 (Contínua por partes). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será contínua por partes se possuir um número finito de descontinuidades (todas do tipo salto) em qualquer intervalo limitado.

Definição 3.6 (Diferenciável por partes). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável por partes se f e f' forem contínuas por partes.

A definição de contínua por partes pode ser entendida da seguinte forma: dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto $I_j = (a_j, a_{j+1})$ e os seguintes limites existem

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x),$$

para $j = 1, \dots, n - 1$.

Teorema 3.2 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável por partes e periódica de período $2L$. Então a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x , para $[f(x+0) + f(x-0)]/2$, isto é*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Este resultado será demonstrado no capítulo seguinte. Por enquanto apenas usaremos ele para entender o comportamento da série de Fourier do exemplo a seguir.

Exemplo 3.6. *Seja f uma função periódica de período 2π definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ -1, & \text{se } -\pi \leq x < 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Então, f é diferenciável por partes, uma vez que $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, logo, f é contínua nesses pontos. Portanto, f' e f são contínuas por partes nos intervalos $(k\pi, (k+1)\pi)$ com k inteiro.

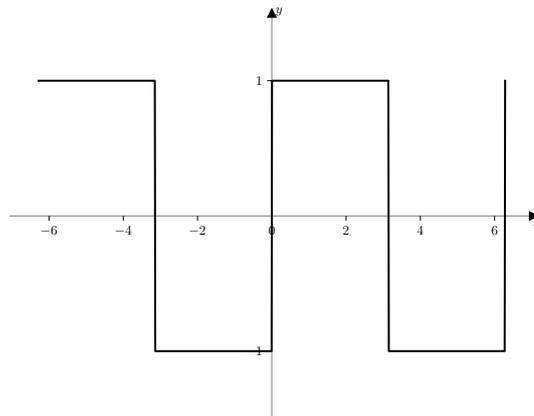
Para gerar o gráfico desta função, tivemos a ideia de olhar o intervalo seccionado pelo período π e verificar a paridade dessa secção.

```

1 def f(x):
2     q = x // np.pi
3     if q % 2 == 0:
4         return 1
5
6     return -1
7 f = np.vectorize(f)
8
9 X = np.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, 10 ** 3)
10 Y = f(X)
11
12 plt.plot(X, Y)
13 plt.show()

```

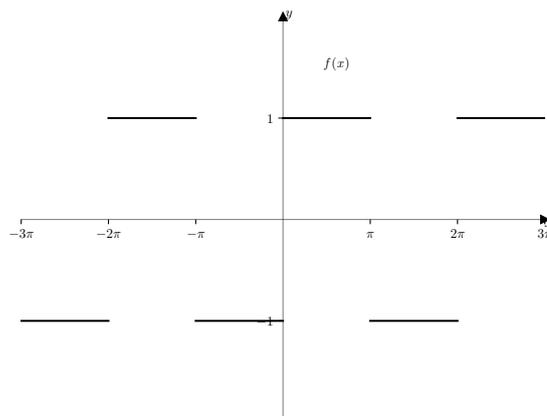
Figura 14 – Gráfico da função do Exemplo 3.6



Fonte: próprio autor.

A figura obtida possui um erro matemático nos pontos de abscissa $0, \pm\pi, \pm2\pi \dots$. Para resolver este problema, precisamos remover as descontinuidades do tipo salto do gráfico desta função utilizando o método `diff` do `numpy`.

O método `diff` retorna a diferença entre o sucessor de um número e o número em uma lista. Assim, iremos verificar se o módulo da diferença é maior que zero e substituir este número por uma constante especial, caso a condição seja satisfeita. Usaremos o comando `Y[np.where(np.abs(np.diff(Y)) > 0)] = np.nan` para realizar tal modificação e obtermos a figura

Figura 15 – Gráfico de $f(x)$ definida em (3.23)

Fonte: próprio autor.

Se quisermos determinar a série de Fourier de f precisamos, inicialmente, calcular seus coeficientes. Para isso, note que dado $x \in (0, \pi]$ então

$$f(-x) = -1 = -f(x),$$

logo, f é ímpar e pela [Proposição 3.6](#), $a_n = 0$ para $n = 0, 1, \dots$. Assim, precisamos apenas calcular os coeficientes b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{-\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[1 - \cos(-n\pi) - (\cos(n\pi) - 1) \right] = \frac{2[1 + (-1)^{n+1}]}{n\pi} \end{aligned}$$

Segue que,

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^{n+1}] \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}([2k-1]x)}{2k-1}. \quad (3.24)$$

Considerando a soma parcial de Fourier

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{sen}([2k-1]x)}{2k-1}.$$

Esta expressão pode ser implementada em Python com o seguinte algoritmo.

```

1 def sn(x, n):
2     soma = 0
3     for k in range(1, n+1):
4         termo = np.sin((2*k - 1) * x) / (2*k - 1)
5         soma += termo
6
7     return (4 / np.pi) * soma
8 %
9 X = np.linspace(-3 * np.pi, 3 * np.pi, 10 ** 3)
10 Y = sn(X, n)
11
12 plt.plot(X, Y)
13 plt.show()

```

Com este algoritmo, obtemos os gráficos:

Figura 16 – Soma parcial de Fourier com $n = 1$

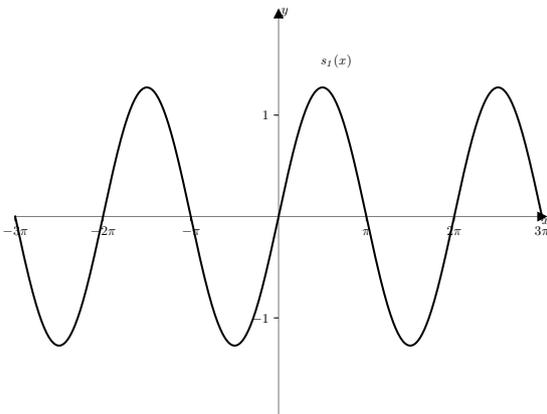
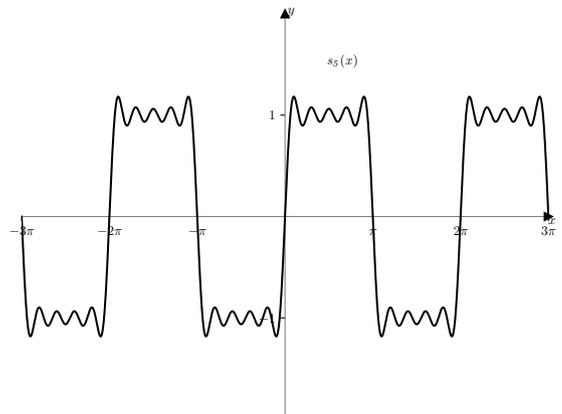


Figura 17 – Soma parcial de Fourier com $n = 5$



Fonte: próprio autor.

Figura 18 – Soma parcial de Fourier com $n = 15$

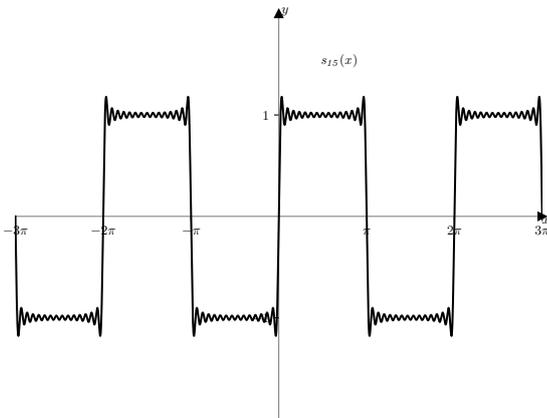
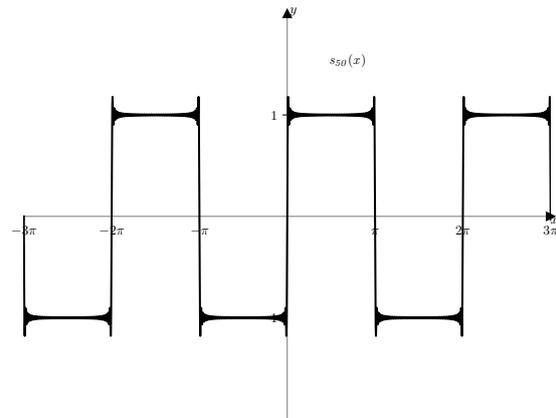


Figura 19 – Soma parcial de Fourier com $n = 50$



Fonte: próprio autor.

No exemplo acima, para obter o gráfico da soma parcial de Fourier, utilizamos a expressão da série calculada manualmente. Desse modo, se a função f mudar, será necessário calcularmos novamente a série de Fourier dessa nova função. Sob essa motivação, no [Capítulo 6](#), implementaremos um algoritmo que calcula a soma parcial de Fourier de uma função dada.

Note que a série de Fourier da função f em (3.23) assume valor nulo nos pontos da forma $x = \pm 0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots$ isto se deve ao fato de que nesses pontos, pelo [Teorema de Fourier](#), a série converge para o ponto médio dos limites laterais em x , isto é, $(1+(-1))/2 = 0$. Além disso, perceba que a função f tem como conjunto imagem $\{-1, 1\}$. Isso evidencia que a série de Fourier de uma função pode não convergir para a própria função em todos os seus pontos, portanto, a afirmação de Fourier de que toda função pode ser dada por uma série de funções trigonométricas é incorreta.

Vale ressaltar que a definição de função na época de Fourier não estava posta da mesma forma que atualmente, logo, mesmo sua afirmação sendo falsa ela é compreensível devido às limitações da Matemática naquele período.

No próximo capítulo, estudaremos que condições são necessárias sobre f para termos algum resultado sobre convergência.

4 Convergência das séries de Fourier

Nesta seção, estudaremos condições sobre f para que a seguinte igualdade ocorra:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função periódica de período $2L$, onde f e $|f|$ são integráveis, então os coeficientes de Fourier da série de f estarão bem definidos, pois, usamos essas hipóteses para determiná-los.

Desse modo, começaremos por definir a noção de integrabilidade e, em seguida, definiremos o espaço das funções onde os coeficientes de Fourier estão bem definidos.

Definição 4.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, se uma das situações abaixo ocorrer, então f é integrável.

- (i) A função f é limitada e para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a, b]$ tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon,$$

onde

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_{i-1}, x_i), \quad M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_{i-1}, x_i), \quad m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

- (ii) A função é ilimitada e dados $\delta, \eta > 0$, existe uma partição $P : a_1 = a < b_1 < a_2 < \cdots < a_k < b_k = b$ cujos fechados $F_1 = [a_1, b_1], \dots, F_k = [a_k, b_k]$ são tais que $[a, b] = \bigcup_{i=1}^k F_i$ e f é limitada em $[a_i + \delta, b_i - \eta]$ para $i = 1, \dots, k$.

Definição 4.2. Se f for uma função integrável e absolutamente integrável, isto é, f e $|f|$ integráveis, então diremos que f é uma função \mathcal{L}^1 .

Exemplo 4.1. A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é \mathcal{L}^1 , pois, $|f(x)| = f(x)$ e qualquer polinômio é integrável em $[a, b]$.

Exemplo 4.2. Seja a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Note que $|f(x)| = 1$, logo, $|f(x)|$ é integrável. No entanto, f não é \mathcal{L}^1 , uma vez que dada uma partição $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, segue da densidade dos conjuntos \mathbb{Q} e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ que

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^n (x_{i-1}, x_i) = b - a, \\ s(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^n -(x_{i-1}, x_i) = -b + a. \end{aligned}$$

Logo, para $\varepsilon = b - a > 0$, então

$$S(f, P) - s(f, P) = 2(b - a) > \varepsilon.$$

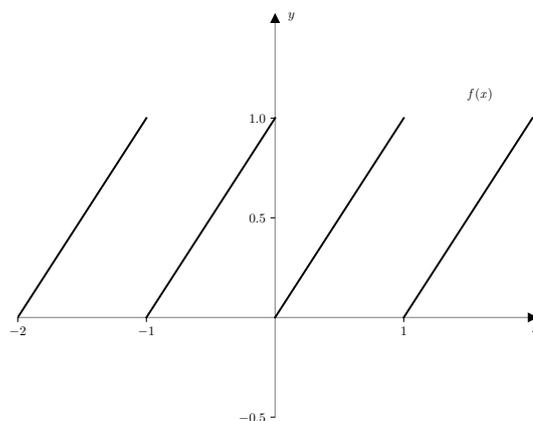
Portanto, f não é integrável.

As funções contínuas possuem propriedades ótimas, nesse sentido, o ideal seria que todas as funções em \mathcal{L}^1 fossem contínuas. No entanto, este fato não se verifica, basta observar que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x - [x],$$

onde $[x]$ é a parte inteira de x , é uma função \mathcal{L}^1 , mas possui uma quantidade infinita de descontinuidades.

Figura 20 – Gráfico de $f(x) = x - [x]$



Fonte: próprio autor.

O resultado a seguir afirma que existe uma função contínua que aproximam qualquer função em \mathcal{L}^1 definida em um intervalo.

Teorema 4.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ e*

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Demonstração. Iremos considerar dois casos.

- i) Caso f seja limitada e, por hipótese, sendo f uma função \mathcal{L}^1 , então dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ do intervalo $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.1)$$

onde $m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$. Agora, tome a função

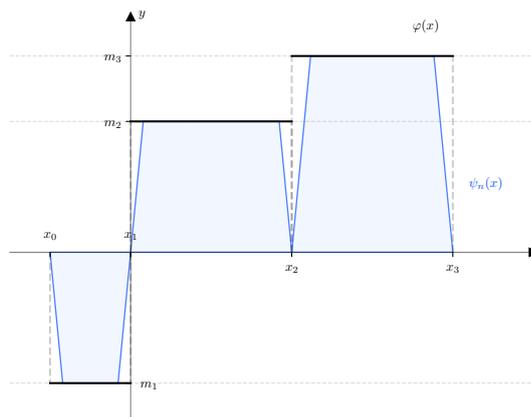
$$\begin{aligned} \varphi : [x_{i-1}, x_i] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto m_i. \end{aligned}$$

Note que o somatório em (4.1) é a integral de φ no intervalo $[a, b]$, assim, temos que

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) - \varphi(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.2)$$

Agora, construiremos uma função ψ_n , formada por trapézios com ângulos da base medindo n , cujo gráfico aproxima-se ao de φ . Para ilustrar tal função, apresentamos a seguinte figura.

Figura 21 – Gráfico de $\varphi(x)$ e $\psi_n(x)$.



Fonte: próprio autor.

Assim, a diferença, em módulo, entre as áreas de φ e ψ_n é dada pela soma dos triângulos retângulos pontilhados na [Figura 21](#).

Utilizando conceitos básicos de trigonometria, conseguimos a seguinte relação

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)| dx = \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2}{\operatorname{tg}(n)}.$$

Como f é limitada, então existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Desse modo, segue que,

$$\sum_{i=1}^k \frac{m_i^2}{\text{tg}(n)} \leq \sum_{i=1}^k \frac{M^2}{\text{tg}(n)} = \frac{kM^2}{\text{tg}(n)}.$$

Assim, fixado k , existe n tal que

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)| \, dx \leq \frac{kM^2}{\text{tg}(n)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3)$$

Portanto, das inequações (4.2) e (4.3), segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| \, dx &= \int_a^b |f(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - \psi_n(x)| \, dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx + \int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)| \, dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Se f for ilimitada e sendo f uma função \mathcal{L}^1 , então dados $\varepsilon, \delta, \eta > 0$, existem fechados $F_1 = [a_1, b_1], \dots, F_k = [a_k, b_k]$ tais que

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{i=1}^k \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} f(x) \, dx \right| < \varepsilon/2. \quad (4.4)$$

Como f é limitada em cada intervalo $[a_i + \delta, b_i - \eta]$, então, pelo caso anterior, existem funções contínuas $\psi_i : [a_i + \delta, b_i - \eta] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_i(a_i + \delta) = \psi_i(b_i - \eta) = 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \psi_i(x)| \, dx \right\} < \varepsilon/2. \quad (4.5)$$

Considere a função $\tilde{\psi}_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{\psi}_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x), & a_i + \delta \leq x \leq b_i - \eta. \\ 0, & a_i \leq x < a_i + \delta \quad \text{e} \quad b_i - \eta < x \leq b_i. \end{cases}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \tilde{\psi}_i(x)| \, dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i}^{a_i+\delta} |f(x) - 0| \, dx \right\} + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{b_i-\eta}^{b_i} |f(x) - 0| \, dx \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \psi_i(x)| \, dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i}^{a_i+\delta} |f(x)| \, dx \right\} + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{b_i-\eta}^{b_i} |f(x)| \, dx \right\} + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \psi_i(x)| \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i}^{a_i+\delta} |f(x)| dx \right\} + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{b_i-\eta}^{b_i} |f(x)| dx \right\} = \int_a^b |f(x)| dx - \sum_{i=1}^k \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x)| dx.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \tilde{\psi}_i(x)| dx \right\} \\ &= \int_a^b |f(x)| dx - \sum_{i=1}^k \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x)| dx + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \psi_i(x)| dx \right\} \\ &\leq \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^k \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} f(x) dx \right| + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \psi_i(x)| dx \right\}. \end{aligned}$$

Concluimos das relações (4.4) e (4.5) que

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \int_{a_i+\delta}^{b_i-\eta} |f(x) - \tilde{\psi}_i(x)| dx \right\} < \varepsilon.$$

■

Estando os coeficientes de Fourier bem definidos em \mathcal{L}^1 e aliado ao resultado que existe uma função contínua que aproxima qualquer função neste espaço, podemos começar a estimar o erro na aproximação de uma função por meio de sua série de Fourier.

4.1 Convergência pontual

O problema de analisar a convergência da série de Fourier em um ponto $x \in [-L, L]$, pode se resumir a determinar o erro

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (4.6)$$

onde $s_n(x)$ é a soma parcial de Fourier dada por

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right]. \quad (4.7)$$

Inicialmente, iremos reescrever (4.7) a fim de simplificar a expressão. Assim,

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right] \\
&= \int_{-L}^L \frac{f(y)}{2L} dy + \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \int_{-L}^L \frac{f(y)}{L} \cos\left(\frac{ky\pi}{L}\right) dy \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \int_{-L}^L \frac{f(y)}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{ky\pi}{L}\right) dy \right] \\
&= \int_{-L}^L \frac{f(y)}{2L} dy + \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-L}^L \frac{f(y)}{L} \left[\cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{ky\pi}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ky\pi}{L}\right) \right] dy \right\} \\
&= \int_{-L}^L \frac{f(y)}{2L} dy + \int_{-L}^L \frac{f(y)}{L} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{ky\pi}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ky\pi}{L}\right) \right] \right\} dy \\
&= \int_{-L}^L \frac{f(y)}{2L} dy + \int_{-L}^L \frac{f(y)}{L} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(\frac{kx\pi}{L} - \frac{ky\pi}{L}\right) \right] \right\} dy \\
&= \int_{-L}^L f(y) \left\{ \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) \right] \right\} dy.
\end{aligned}$$

A seguir estudaremos a expressão entre chaves acima a fim de garantir algum resultado sobre o erro $e_n(x)$.

4.1.1 Núcleo de Dirichlet

A expressão

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx\pi/L) \right]$$

é conhecida como Núcleo de Dirichlet, portanto

$$s_n(x) = \int_{-L}^L f(y) D_n(x-y) dy \quad (4.8)$$

Proposição 4.1. *O núcleo de Dirichlet, possui as seguintes propriedades:*

i) $D_n(x)$ é uma função par;

Demonstração. Mostraremos que $D_n(-x) = D_n(x)$. Assim, note que

$$D_n(-x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k(-x)\pi}{L}\right) \right].$$

Usando a paridade da função cosseno, temos que

$$\cos\left(\frac{k(-x)\pi}{L}\right) = \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right),$$

assim

$$D_n(-x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right] = D_n(x).$$

■

ii) $D_n(x)$ é uma função contínua;

Demonstração. Iremos avaliar $\lim_{x \rightarrow a} D_n(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} D_n(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{ka\pi}{L}\right) \right] = D_n(a) \end{aligned}$$

■

iii) $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$;

Demonstração. Mostraremos que $D_n(x + 2L) = D_n(x)$, assim

$$\begin{aligned} D_n(x + 2L) &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi(x + 2L)}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L} + \frac{2k\pi L}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos(2k\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}(2k\pi) \right] \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot 0 \right] \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] \\ &= D_n(x). \end{aligned}$$

■

iv) $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;

Demonstração. Usando as propriedades de integral e a substituição $u = k\pi x/L$,

temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{L - (-L)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{L}{n\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \cos(u) du \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[L + \frac{L}{n\pi} \sum_{k=1}^n -\text{sen}(u) \Big|_{-k\pi}^{k\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[L + \frac{L}{n\pi} (-\text{sen}(k\pi) - \text{sen}(-k\pi)) \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left(L + \frac{L}{n\pi} \cdot 0 \right) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

■

$$v) D_n(0) = \frac{1}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right);$$

Demonstração. Iremos avaliar $D_n(x)$ com $x = 0$, assim

$$\begin{aligned}
 D_n(0) &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(0 \cdot k\pi/L) \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + n \right]
 \end{aligned}$$

■

vi) Se $x \in \mathbb{R} - 2L\mathbb{Z} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2L, \pm 4L, \pm 6L, \dots\}$, então

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}.$$

Demonstração. Seja S_n uma função da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 S_n(\theta) &= L \cdot D_n\left(\frac{L\theta}{\pi}\right) + \frac{1}{2} \\
 &= L \cdot \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{L} \cdot \frac{L\theta}{\pi}\right) \right] + \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Note que, $S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right)$, além disso,

$$1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta},$$

é a soma dos $(n+1)$ -ésimos primeiros termos de uma Progressão Geométrica (P.G) com termo inicial 1 e razão $e^{i\theta}$, assim, usando a fórmula da soma finita de uma P.G e tomando θ de forma que $e^{i\theta} \neq 1$, isto é, $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned} k &= 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \cdot \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} \\ &= \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta(n+1/2)}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Euler no último quociente acima, temos que

$$\begin{aligned} k &= \frac{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \left[\cos\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right)\right]}{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\theta}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\theta}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re}(k) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta\frac{2n+1}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

assim, fazendo $L\theta/\pi = x$ na [equação \(4.9\)](#) e utilizando a expressão para S_n dada

acima, temos que

$$\begin{aligned}
 L \cdot D_n(x) + \frac{1}{2} &= S_n \left(\frac{\pi x}{L} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \cdot (2n+1) \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right)} \\
 \implies L \cdot D_n(x) &= \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \cdot (2n+1) \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right)} \\
 \implies D_n(x) &= \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \cdot (2n+1) \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}
 \end{aligned}$$

■

Como supomos $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e realizamos a mudança de variável $L\theta/\pi = x$, segue $x \notin 2L\mathbb{Z}$.

Agora, estamos em condições de apresentar outra expressão para o erro $e_n(x)$.

Usando a substituição $t = x - y$ na equação (4.8), temos que

$$\int_{-L}^L f(y) D_n(x-y) dy = \int_{x-(-L)}^{x-L} f(x-t) D_n(t) \cdot (-1) dt = \int_{x-L}^{x+L} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Segue da periodicidade de D_n e f que

$$\int_{x-L}^{x+L} f(x-t) D_n(t) dt = \int_{-L}^L f(x-t) D_n(t) dt,$$

dessa forma,

$$\int_{-L}^L f(y) D_n(x-y) dy = \int_{-L}^L f(x-t) D_n(t) dt. \quad (4.10)$$

Além disso, note que

$$\int_{-L}^L f(x-t) D_n(t) dt = \int_{-L}^0 f(x-t) D_n(t) dt + \int_0^L f(x-t) D_n(t) dt. \quad (4.11)$$

Fazendo $u = -t$ na primeira integral do membro direito da igualdade acima e usando a paridade de D_n , temos que

$$\int_{-L}^0 f(x-t) D_n(t) dt = - \int_L^0 f(x+u) D_n(-u) du = \int_0^L f(x+u) D_n(u) du.$$

Sendo t e u apenas símbolos, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_0^L f(x+u) D_n(u) du &= \int_0^L f(x+t) D_n(t) dt \implies \\
 \int_{-L}^0 f(x-t) D_n(t) dt &= \int_0^L f(x+t) D_n(t) dt
 \end{aligned}$$

Assim, usando a igualdade acima na equação (4.11), segue que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x-t)D_n(t) dt &= \int_{-L}^0 f(x-t)D_n(t) dt + \int_0^L f(x-t)D_n(t) dt \\ &= \int_0^L f(x+u)D_n(u) du + \int_0^L f(x-t)D_n(t) dt \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \end{aligned}$$

Agora, usando (4.8), (4.10) e esta última integral, podemos reescrever e_n da seguinte forma

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_{-L}^L f(y)D_n(x-y) dy - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \end{aligned}$$

Além disso, usando o fato de que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L D_n(t) dt &= 1 = \int_{-L}^0 D_n(t) dt + \int_0^L D_n(t) dt \implies \\ \int_0^L D_n(t) dt &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde realizamos a substituição $u = -t$ e usamos a paridade de D_n para obter a última expressão. Então, podemos escrever

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_0^L D_n(t) [f(x+0) + f(x-0)] dt,$$

logo,

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_{-L}^L f(y)D_n(x-y) dy - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \int_0^L D_n(t) [f(x+0) + f(x-0)] dt \\ &= \int_0^L D_n(t) \{ [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)] \} dt. \end{aligned}$$

Fazendo $g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]$, resulta que

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)g(x, t) dt.$$

Com esta expressão para o erro $e_n(x)$ cometido na aproximação da soma parcial $s_n(x)$ da série de Fourier em um ponto $x \in [-L, L]$, podemos estudar certas propriedades e comportamentos sobre f de modo que a integral acima convirja para 0. Este resultado é conhecido como Teste de Dini, para demonstrá-lo utilizaremos o seguinte lema.

Lema 4.1.1 (Riemann-Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 em $[a, b]$. Então,*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= 0. \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração. i) Supondo que f seja limitada, então existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Sendo f uma função \mathcal{L}^1 em $[a, b]$, então f é integrável. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição π do intervalo $[a, b]$ da seguinte forma

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

tal que a diferença entre as somas superiores e inferiores de f seja menor que $\varepsilon/2$, ou seja,

$$S[f, \pi] - s[f, \pi] < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.12)$$

Considerando os intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, então

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx &= \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \cos(tx) \, dx - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \cos(tx) \, dx \\ &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) \, dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \cos(tx) \, dx \end{aligned}$$

Note que, sendo $t > 0$, podemos estimar a primeira integral acima da seguinte forma

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) \, dx \right| = \left| \frac{\operatorname{sen}(tx)}{t} \right|_{x_{j-1}}^{x_j} \leq \frac{2}{t}.$$

Além disso,

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx \right| &= \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) \, dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \cos(tx) \, dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) \, dx \right| + \left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \cos(tx) \, dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) \, dx \right| + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |[f(x) - f(x_j)] \cos(tx)| \, dx \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) \, dx \right| + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(x_j)| \, dx \\ &\leq \frac{2}{t} \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \right| + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_{j-1} - x_j) \\ &\leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_{j-1} - x_j). \end{aligned}$$

Note que $\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_{j-1} - x_j) = S[f, \pi] - s[f, \pi]$. Tome t_0 natural tal que $2nM/t_0 < \varepsilon/2$. Logo, da desigualdade acima, e de (4.12), segue que

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx \right| < \varepsilon.$$

Concluimos que dado $\varepsilon > 0$, existe t_0 natural tal que

$$t > t_0 \implies \left| \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx \right| < \varepsilon,$$

portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx = 0.$$

ii) Se f for não limitada e sendo f uma função \mathcal{L}^1 , então, pelo Teorema 4.1, existe uma função $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| \, dx < \varepsilon/2. \quad (4.13)$$

Pelo Teorema de Weierstrass, toda função contínua em um intervalo compacto é limitada e, portanto, integrável. Assim, ψ_n é integrável em $[a, b]$. Pelo caso anterior, dado $\varepsilon > 0$, existe t_0 tal que, para todo $t > t_0$, ocorre que

$$\left| \int_a^b \psi_n(x) \cos(tx) \, dx \right| < \varepsilon/2. \quad (4.14)$$

Note que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx \right| &= \left| \int_a^b \psi_n(x) \cos(tx) \, dx + \int_a^b [f(x) - \psi_n(x)] \cos(tx) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \psi_n(x) \cos(tx) \, dx \right| + \left| \int_a^b [f(x) - \psi_n(x)] \cos(tx) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \psi_n(x) \cos(tx) \, dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| \cdot |\cos(tx)| \, dx \\ &\leq \left| \int_a^b \psi_n(x) \cos(tx) \, dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| \, dx. \end{aligned}$$

De (4.13) e (4.14), segue que

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) \, dx \right| < \varepsilon.$$

Se o integrando for a função $f(x) \sin(tx)$, o procedimento é análogo e pode ser encontrado em 2, p. 56. ■

Teorema 4.2 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$ cujos limites $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existam para $x \in [-L, L]$. Suponha que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| \, dt < \infty, \quad (4.15)$$

onde $g(x, t) = [f(x + t) - f(x + 0)] + [f(x - t) - f(x - 0)]$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0.$$

Demonstração. Note que

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)g(x, t) dt = \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L D_n(t)g(x, t) dt,$$

para algum $0 < \delta < L$. Pelo item vi) da [Proposição 4.1](#), temos a seguinte igualdade

$$\int_\delta^L D_n(t)g(x, t) dt = \int_\delta^L \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi t}{2L}\right)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} \frac{g(x, t)}{t} dt.$$

Assim, temos que

$$e_n(x) = \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi t}{2L}\right)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} \frac{g(x, t)}{t} dt. \quad (4.16)$$

Iremos estimar ambas as integrais acima. Para isso, note que

$$\begin{aligned} |tD_n(t)| &= \left| \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi t}{2L}\right)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} \right|, \quad t \in (0, L] \\ &\leq \left| \frac{t}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} \right| = \frac{t}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)}. \end{aligned}$$

Além disso, se $t \in (0, L]$, então a função $\operatorname{sen}(\pi t/2L)$ é crescente neste intervalo e seu máximo ocorre quando $t = L$, assim

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad t \in (0, L].$$

Multiplicando a desigualdade acima por $|g(x, t)/t|$, segue que

$$\left| tD_n(t)\frac{g(x, t)}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{g(x, t)}{t} \right|.$$

Utilizando a hipótese (4.15) e tomando convenientemente $\delta < \min\{L, \eta\}$ de modo que dado $\varepsilon > 0$, tenhamos

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left| tD_n(t)\frac{g(x, t)}{t} \right| dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2} \implies \\ \left| \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x, t)}{t} dt \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Fixado este δ . Pelo lema de [Riemann-Lebesgue](#), dado $\varepsilon > 0$, então para n suficientemente grande, temos que

$$\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi t}{2L}\right) \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De (4.16), segue que

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &= \left| \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt + \int_{\delta}^L \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi t}{2L}\right) \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt \right| + \left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi t}{2L}\right) \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} dt \right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0$ ■

Perceba que nas hipóteses do [Teorema de Fourier](#) temos f diferenciável por partes, assim, as derivadas laterais

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad \text{e} \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

existem. Nessas condições,

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt &= \int_0^{\eta} \left| \frac{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]}{t} \right| dt \\ &= \int_0^{\eta} \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt + \int_0^{\eta} \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt. \end{aligned}$$

O fato de $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ existirem, implica que existem constantes M, N tais que $|f'_+(x)| \leq M$ e $|f'_-(x)| \leq N$. Tomando η suficientemente pequeno, então

$$\int_0^{\eta} \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt + \int_0^{\eta} \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt \leq (M+N)\eta < \infty.$$

Portanto, o [Teste de Dini](#) é um caso mais geral do [Teorema de Fourier](#).

Exemplo 4.3. Considere a função do [Exemplo 3.6](#) dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

Então a série de Fourier converge pontualmente em $x = 1/2$.

De fato, note que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}, t\right) &= \left[f\left(\frac{1}{2} + t\right) - f\left(\frac{1}{2} + 0\right) \right] + \left[f\left(\frac{1}{2} - t\right) - f\left(\frac{1}{2} - 0\right) \right] \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2} + t\right) - 1 \right] + \left[f\left(\frac{1}{2} - t\right) - 1 \right] \\ &= f\left(\frac{1}{2} + t\right) + f\left(\frac{1}{2} - t\right) - 2. \end{aligned}$$

Assim, tome $\eta = 1/4$, então

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \left| \frac{g\left(\frac{1}{2}, t\right)}{t} \right| dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \left| \frac{f\left(\frac{1}{2} + t\right) + f\left(\frac{1}{2} - t\right) - 2}{t} \right| dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \left| \frac{2 - 2}{t} \right| dt = 0 < \infty.$$

Portanto pelo *Teste de Dini*, no ponto $x = 1/2$, a série de Fourier é pontualmente convergente.

O *Teste de Dini* estabelece condições suficientes para que a série de Fourier de uma função f convirja para f em um ponto $x \in [-L, L]$. No entanto, se quisermos garantir esta convergência para todo ponto do domínio de f , não poderemos utilizar este resultado. Assim, na próxima seção estudaremos a *convergência uniforme* da série de Fourier de uma função f .

4.2 Convergência uniforme

Em muitos casos, para analisar a convergência da série de Fourier de uma função, precisamos analisar os seus coeficientes, pois, os coeficientes e as séries de Fourier estão intimamente relacionados.

Nesse sentido, esta seção apresentará a *Desigualdade de Bessel* que estabelece resultados sobre a convergência dos coeficientes de Fourier de uma função.

4.2.1 Desigualdade de Bessel

Definição 4.3. Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se f e $|f|^2$ forem integráveis, então f é de *quadrado integrável*. Se f for uma função deste tipo, diremos que f é uma função de \mathcal{L}^2 .

Proposição 4.2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função limitada e integrável, então $f \in \mathcal{L}^2$.

Demonstração. Precisamos mostrar que $|f|^2$ é integrável, isto é

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Sendo f limitada, então existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, desse modo

$$|f(x)| \leq M \implies |f(x)|^2 \leq M^2.$$

Integrando esta inequação em relação a x no intervalo $[a, b]$, segue que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a).$$

■

Definição 4.4. Dada uma sequência de funções (f_n) , com $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_n \in \mathcal{L}^2$. Diremos que (f_n) converge, em *média quadrática* para f se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Com esta definição, mostraremos que as somas parciais de Fourier são o melhor polinômio trigonométrico que aproxima, em média quadrática, uma função $f \in \mathcal{L}^2$.

Seja $s_n(x)$ a soma parcial de Fourier de ordem n e considere um polinômio trigonométrico $t_n(x)$ de grau n da forma

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right].$$

Desse modo, os erros cometidos na aproximação de f por s_n e t_n são dados, respectivamente, por

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx,$$

$$\hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Provaremos que $e_n \leq \hat{e}_n$ e isto mostrará que s_n é o melhor polinômio trigonométrico que aproxima f .

Fazendo $C_i = c_i \cos(i\pi x/L)$ e $D_i = d_i \sin(i\pi x/L)$, segue que

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n &= \int_{-L}^L \left| \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] - f(x) \right|^2 dx \\
&= \int_{-L}^L \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] - f(x) \right\}^2 dx \\
&= \int_{-L}^L \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\}^2 - 2f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\} + f^2(x) dx \\
&= \int_{-L}^L \left(\frac{c_0}{2} \right)^2 + c_0 \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] + \left(\sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right)^2 \\
&\quad - 2f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\} + f^2(x) dx \\
&= \int_{-L}^L \left(\frac{c_0}{2} \right)^2 + c_0 \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] - 2f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\} \\
&\quad + f^2(x) dx + \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right)^2 dx &= \int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (C_j + D_j)(C_k + D_k) dx \\
&= \int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_j C_k + C_j D_k + D_j C_k + D_j D_k dx \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-L}^L C_j C_k dx + \int_{-L}^L C_j D_k dx + \int_{-L}^L D_j C_k dx + \int_{-L}^L D_j D_k dx \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-L}^L c_j c_k \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L c_j d_k \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\
&\quad + \int_{-L}^L d_j c_k \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L d_j d_k \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.
\end{aligned}$$

Utilizando as relações (3.17), (3.18) e (3.19) nas integrais acima, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right)^2 dx &= \int_{-L}^L \sum_{k=1}^n c_k^2 \cos^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k^2 \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\
&= L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2).
\end{aligned}$$

Substituindo tal expressão no cálculo de \hat{e}_n , temos que

$$\begin{aligned}\hat{e}_n &= \int_{-L}^L \left(\frac{c_0}{2}\right)^2 + c_0 \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] - 2f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\} + f^2(x) dx \\ &\quad + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) \\ &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L f^2(x) dx + \int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] dx \\ &\quad - 2 \int_{-L}^L f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\} dx.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] dx &= c_0 \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ &= c_0 \sum_{k=1}^n \left(\frac{Lc_k}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + d_k \int_{-L}^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \right).\end{aligned}$$

Sendo o seno uma função ímpar e sabendo que o seno de qualquer múltiplo inteiro de π é zero, então

$$\int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] dx = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\hat{e}_n &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L f^2(x) dx - 2 \int_{-L}^L f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n [C_k + D_k] \right\} dx \\ &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L f^2(x) dx - c_0 \int_{-L}^L f(x) dx \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-L}^L f(x) C_k dx + \int_{-L}^L f(x) D_k dx \right\} \\ &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L f^2(x) dx - c_0 \int_{-L}^L f(x) dx \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \left\{ c_k \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + d_k \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \right\}.\end{aligned}$$

De (3.20) e (3.21), segue que

$$\begin{aligned}\hat{e}_n &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L f^2(x) dx - Lc_0 a_0 - 2L \sum_{k=1}^n (c_k a_k - d_k b_k) \\ &= \frac{L}{2} (c_0^2 - 2c_0 a_0) + \int_{-L}^L f^2(x) dx + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 2c_k a_k) + L \sum_{k=1}^n (d_k^2 - 2d_k b_k).\end{aligned}$$

Completando quadrados, temos que

$$\begin{aligned}\hat{e}_n &= \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L f^2(x) dx \\ &\quad - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - \frac{L}{2} a_0^2.\end{aligned}$$

Seja \hat{e}_n um número não negativo, então, na expressão acima, o menor valor para \hat{e}_n ocorre quando $c_0 = a_0, c_k = a_k$ e $d_k = b_k$. Assim, segue que $t_n(x) = s_n(x)$ e, portanto

$$e_n \leq \hat{e}_n.$$

E isto mostra que a soma parcial de Fourier é o melhor polinômio trigonométrico que aproxima f . Concluímos ainda, que

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L f^2(x) dx - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - \frac{L}{2} a_0^2,$$

desse modo,

$$\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \frac{a_0^2}{2} \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx.$$

Como esta relação vale para todo $n > 0$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3 (Desigualdade de Bessel). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ com $f \in \mathcal{L}^2$, então*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx.$$

4.2.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz e Desigualdade de Minkowski

Teorema 4.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam (a_k) e (b_k) duas seqüências de números reais, então*

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}$$

Demonstração. Considere a seguinte expressão

$$\sum_{k=1}^n (a_k + t b_k)^2,$$

para algum t real. Segue que

$$\sum_{k=1}^n (a_k + t b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 2t a_k b_k + t^2 b_k^2) = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2t \sum_{k=1}^n a_k b_k + t^2 \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Note que o último membro da expressão acima é um trinômio quadrático na variável t .

Desse modo, o discriminante deste trinômio é não positivo, pois, seu gráfico toca o eixo das abscissas no máximo uma vez, pois, $(a_k + t b_k)^2 \geq 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \left(2 \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) &\leq 0 \implies \\ \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \implies \\ \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Corolário 4.4.1. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções com $f, g \in \mathcal{L}^2$, então*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) \, dx \right)^{1/2}$$

Segue de forma análoga ao resultado para seqüências. Basta considerar a expressão

$$\int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 \, dx.$$

Proposição 4.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f \in \mathcal{L}^2$, então $f \in \mathcal{L}^1$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que

$$\int_a^b |f(x)| \, dx < \infty.$$

Considerando uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $g(x) \equiv 1$ e aplicando a [Desigualdade de Cauchy-Schwarz](#) para integrais, segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| \, dx &\leq \left(\int_a^b 1^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{L}^2$, então o membro direito da desigualdade acima converge e, portanto, $|f|$ é integrável. ■

Teorema 4.5 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam (a_k) e (b_k) duas seqüências de números reais, então*

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}$$

Demonstração. Considere a expressão

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Pela [Desigualdade de Cauchy-Schwarz](#), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} \right]^2. \end{aligned}$$

Segue que

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}.$$

■

Corolário 4.5.1. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções com $f, g \in \mathcal{L}^2$, então*

$$\left[\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right]^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

De fato, basta considerar a expressão

$$\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx.$$

E aplicar a [Desigualdade de Cauchy-Schwarz](#) para integrais.

Para garantir a convergência uniforme da série de Fourier de uma função f , periódica de período $2L$, devemos analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|,$$

pois, uma vez que

$$\left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq |b_n|,$$

então

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| + \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|. \end{aligned}$$

Desse modo, as desigualdades estudadas anteriormente serão importantes ferramentas para esta análise.

4.2.3 Teoremas de convergências uniforme

Teorema 4.6 (Primeiro Teorema de Convergência Uniforme). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ tal que $f' \in \mathcal{L}^2$, então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f .*

Demonstração. Sabemos de (3.20) que

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Fazendo $u = f(x)$ e $dv = \cos(n\pi x/L) dx$ e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} La_n &= \frac{L}{n\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \implies \\ a_n &= -\frac{L}{n\pi} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga para b_n , concluímos que

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n \quad \text{e} \quad b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n,$$

onde a'_n e b'_n são os coeficientes de Fourier de f' .

Assim, temos que

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^n \left(\left| -\frac{L}{k\pi} b'_k \right| + \left| \frac{L}{k\pi} a'_k \right| \right) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|).$$

Pela [Desigualdade de Cauchy-Schwarz](#), segue que

$$\left| \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \right| = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \leq \frac{L}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{1/2}.$$

Pela mesma desigualdade considerando (a_k, b_k) e $(1, 1)$, temos que $(|a'_k| + |b'_k|)^2 \leq 2[(a'_k)^2 + (b'_k)^2]$, assim

$$\begin{aligned} \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) &\leq \frac{L}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right]^{1/2} \left[2 \sum_{k=1}^n (a'_k)^2 + (b'_k)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^n (a'_k)^2 + (b'_k)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Como essas relações valem para todo $n > 0$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n)^2 + (b'_n)^2 \right]^{1/2}.$$

Ambas as séries do membro direito da desigualdade acima convergem. A primeira é uma p -série com $p > 1$, a segunda converge pela [Desigualdade de Bessel](#).

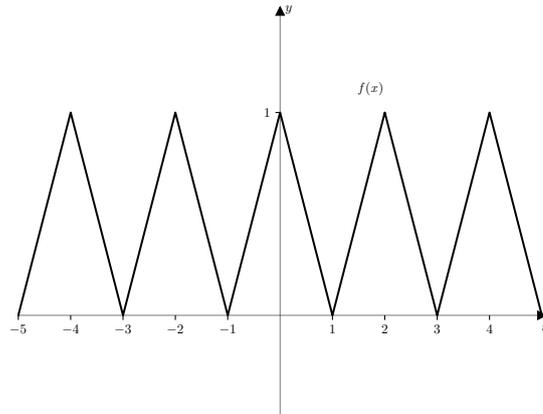
Portanto, aplicando o [Teste M de Weierstrass](#), a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

converge uniformemente. ■

Exemplo 4.4. *Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2 definida por*

$$f(x) = -|x| + 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Figura 22 – Gráfico de $f(x)$ 

Fonte: próprio autor.

Então, pelo [Teorema 4.6](#), a série de Fourier de f converge absolutamente para f , uma vez que, f é contínua e f' é \mathcal{L}^2 .

Os coeficientes de Fourier de f são $a_0 = 1/2$, $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi)) \implies a_{2n} = 0 \text{ e } a_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

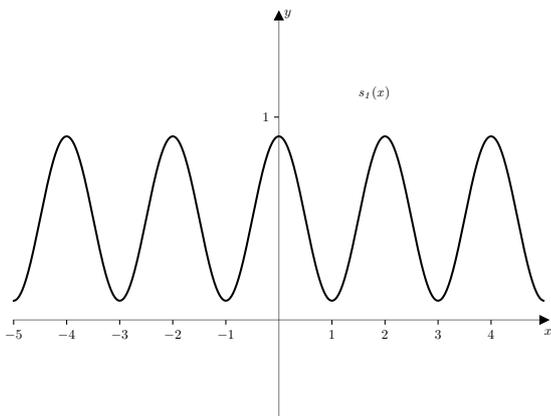
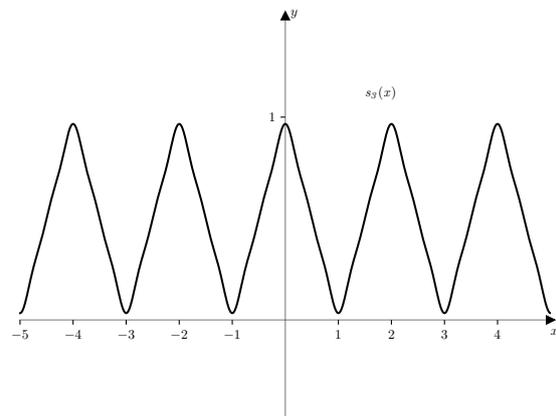
Assim,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x)$$

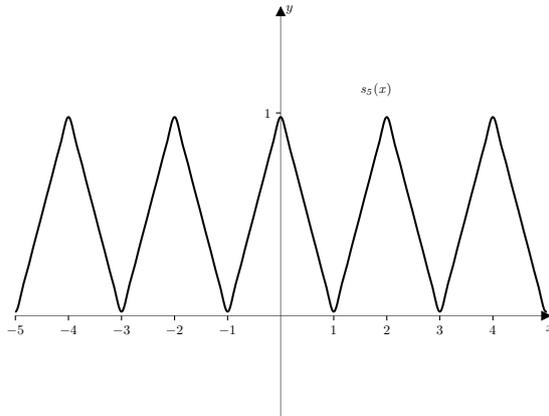
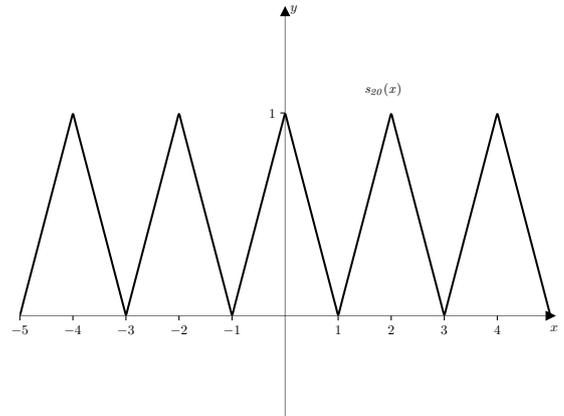
Agora, considerando a soma parcial de Fourier de f

$$s_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)\pi x),$$

obtemos os seguintes gráficos

Figura 23 – Soma parcial de Fourier com $n = 1$ Figura 24 – Soma parcial de Fourier com $n = 3$ 

Fonte: próprio autor.

Figura 25 – Soma parcial de Fourier com $n = 5$ Figura 26 – Soma parcial de Fourier com $n = 20$ 

Fonte: próprio autor.

No [Teorema 4.6](#), a hipótese de f ser contínua em toda a reta é muito forte, nesse sentido, enunciaremos um segundo teorema que nos dará resultados sobre a convergência de f definida em um intervalo fechado sem pontos de descontinuidades de f .

Para obter tal resultado, utilizaremos o seguinte lema.

Lema 4.6.1. *Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right), & -L \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Então, a série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Lk$, com k inteiro.

Demonstração. Dado $x \in (0, L]$, note que

$$\psi(-x) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{-x}{L}\right) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = -\psi(x),$$

logo, ψ é uma função ímpar. Calculando os coeficientes de Fourier de ψ , temos que a_n é nulo, pois, ψ é ímpar e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2L} \int_{-L}^0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{2L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Usando a paridade da função seno, temos que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left[-\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L \\ &= \frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier de ψ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Se garantirmos a convergência uniforme desta série, o lema estará provado. Não mostraremos tal resultado, mas este pode ser encontrado em 2, p. 74. ■

Teorema 4.7 (Segundo Teorema de Convergência Uniforme). *Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua por partes tal que f' é \mathcal{L}^2 . Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidades de f .*

Demonstração. Sejam x_1, \dots, x_k os pontos do intervalo $(-L, L)$ onde f é descontínua e sejam w_1, \dots, w_k os saltos de f nesses pontos, isto é, $w_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$, com $j = 1, \dots, k$.

Utilizando a função ψ do [Lema 4.6.1](#) para pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, com $n = 0, 1, 2, \dots$, temos que $\psi(x_j \pm 2Ln - x_j) = \psi(2Ln)$, por definição, nestes pontos ψ é descontínua e

$$\begin{aligned} \psi(2Ln + 0) - \psi(2Ln - 0) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Ln}{L}\right) - \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2Ln}{L}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2n) + \frac{1}{2}(1 + 2n) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, a função $w_j\psi(x - x_j)$ é descontínua nos pontos da forma $x_j \pm 2Ln$ e o salto nesses pontos é w_j . Desse modo, a função $g_j(x) = f(x) - w_j\psi(x - x_j)$ é contínua em cada um destes pontos, pois, os saltos nestes são iguais a zero. Além disso, g_j é contínua em todos os pontos onde f é contínua.

Desse modo, a função

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j)$$

é contínua em todo ponto x . Assim, pelo [Teorema 4.6](#), a série de Fourier de g converge uniformemente para g . Desse modo, a série de Fourier de f converge para f nos pontos onde a série de Fourier de $\psi(x - x_j)$ converge para a mesma.

Portanto, pelo, [Lema 4.6.1](#) a série de Fourier de f converge uniformemente para f nos intervalos fechados que não contenham pontos da forma $x_j + 2Ln$ com n inteiro. ■

Em posse dos teoremas sobre convergência das séries de Fourier, voltaremos ao problema da condução do calor em uma barra finita, definindo o sentido de solução que buscamos bem como condições para a sua existência.

5 Equação do Calor

Nesta seção, com o auxílio da teoria das séries de Fourier, estudaremos condições para que a equação do calor tenha solução.

5.1 Barra com extremidades a 0°C

Voltaremos a abordar o seguinte tipo de problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t), & 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.1)$$

Vimos que a função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (5.2)$$

satisfaz as condições do PVIF (5.1), no entanto, isso não é o suficiente para determinar se (5.2) é solução do PVIF. Por exemplo, considere a função

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x), & t = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq L, \\ 0, & t > 0 \text{ e } x = 0 \text{ ou } x = L, \\ 1817, & t > 0 \text{ e } 0 < x < L. \end{cases}$$

Note que para $t > 0$, u não se comporta bem, pois, nas extremidades a temperatura é 0°C e no interior da barra a temperatura salta para 1817°C . Em outras palavras, a função $u(x, t)$ não tem relação alguma com $f(x)$. Assim, precisamos definir o que se entende por solução do PVIF (5.1).

Além dessas considerações físicas, estenderemos o domínio de f de forma que esta função seja ímpar e periódica de período $2L$, uma vez que a expressão (5.2) é a série de Fourier de uma função nessas condições. Assim, os coeficientes de Fourier em (5.2) são dados por

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Definição 5.1. Além das regiões \mathcal{R} e $\widehat{\mathcal{R}}$ definidas anteriormente. Definiremos outra região $\widehat{\mathcal{R}} \subset \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$\widehat{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, t > 0\}.$$

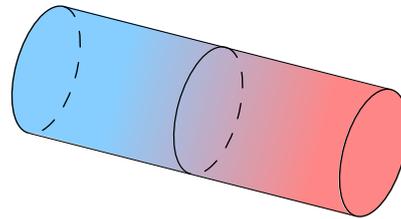
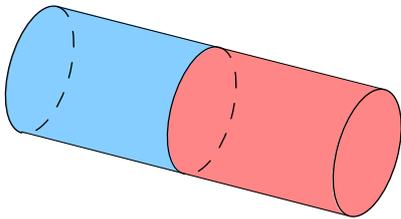
Definição 5.2 (Solução do Tipo I). Uma função $u : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do PVIF (5.1) se o satisfizer, for contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, e u_t e u_{xx} existirem em \mathcal{R} .

Note que se u for solução do Tipo I do PVIF (5.1), então u é contínua, que implica $u(x, 0) = f(x)$ contínua. Isto é razoável, mas há certas situações físicas em que não podemos garantir essa propriedade.

Por exemplo, considere a situação em que duas barras com temperaturas diferente são fundidas imediatamente e formam uma única barra, então a função $f(x)$, que modela a temperatura no instante $t = 0$, não pode ser contínua no ponto onde as barras foram fundidas.

Figura 27 – Barras fundidas com $t = 0$

Figura 28 – Barras fundidas com $t > 0$



Fonte: próprio autor.

Nesse sentido, definiremos outro tipo de solução para o PVIF (5.1).

Definição 5.3 (Solução do Tipo II). Dada φ uma função contínua por partes em $[0, L]$. Uma função contínua $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do PVIF (5.1), se

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx \end{cases}$$

Dada essas definições, segue o teorema que dá condições para que haja uma solução para o PVIF (5.1).

Teorema 5.1. *Se f for uma função \mathcal{L}^2 em $[0, L]$, então*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

define uma solução do Tipo II do PIVF (5.1).

Demonstração. Sejam $F_n(x) = \operatorname{sen}((n\pi x)/L)$ e $G_n(t) = e^{-K(n\pi/L)^2 t}$, então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n G_n(t) F_n(x),$$

i) Inicialmente, vamos verificar se a igualdade $u_t = K u_{xx}$ ocorre, assim

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n G_n(t) F_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial}{\partial t} [G_n(t) F_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n G'_n(t) F_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(x) \left(-\frac{K n^2 \pi^2}{L^2} e^{-K(n\pi/L)^2 t} \right) = -\frac{K \pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n G_n(t) F_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial}{\partial x} [G_n(t) F_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n G_n(t) F'_n(x) \\ &= \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n G_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \implies u_{xx}(x, t) &= -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n G_n(t) F_n(x). \end{aligned}$$

Assim, de fato, a relação $u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t)$ é satisfeita.

As operações realizadas nas somas infinitas acima só são possíveis se tais somas forem convergentes. Assim, precisamos garantir a convergência uniforme das séries nas funções u , u_t e u_{xx} .

Note que

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \right|. \end{aligned}$$

Fixado $t > 0$, desconsiderando as constantes c_n e aplicando o Teste da Razão para séries, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-K[(n+1)\pi/L]^2 t}}{e^{-K(n\pi/L)^2 t}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{-K t \pi^2 [(n+1)^2 - n^2]/L^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{e^{(2n+1)K t \pi^2/L^2}} \right| = 0.$$

Como u_t e u_{xx} diferem a menos de constantes da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t),$$

mostraremos que esta é convergente. Note que $|F_n(x)| \leq 1$, logo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |F_n(x) G_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |G_n(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-K\pi^2 n^2 t / L^2}.$$

Novamente, fixado $t > 0$, pelo Teste da Razão para séries, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)^2 K\pi^2 t / L^2}}{n^2 e^{-n^2 K\pi^2 t / L^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2 e^{(2n+1)K\pi^2 t / L^2}} \right| = 0.$$

Assim, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 K\pi^2 t / L^2}$$

é convergente. Note que

$$|u_t(x, t)| = \left| -\frac{K\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t) \right| = \frac{K\pi^2}{L^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t) \right| \leq \frac{K\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\omega(t)n^2}$$

e

$$|u_{xx}(x, t)| = \left| -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t) \right| = \frac{\pi^2}{L^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(x) G_n(t) \right| \leq \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\omega(t)n^2}.$$

Assim, fixado $t > 0$, as funções u , u_t e u_{xx} são majoradas por séries numéricas convergentes, portanto, pelo [Teste M de Weierstrass](#), u , u_t e u_{xx} convergem uniformemente.

ii) Agora, analisaremos se as igualdades $u(0, t) = u(L, t) = 0$ se verificam. Note que,

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(0) G_n(t) \quad \text{e} \quad u(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(L) G_n(t).$$

Logo, avaliando $F_n(0)$ e $F_n(L)$, temos que

$$F_n(0) = \text{sen}\left(\frac{n\pi \cdot 0}{L}\right) = \text{sen}(0) = 0, \quad F_n(L) = \text{sen}\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = \text{sen}(n\pi) = 0.$$

Assim, de fato, $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

iii) Por último, precisamos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx.$$

Assim, sejam

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \varphi(x) dx &= \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L b_k c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Usando a relação (3.19), temos que

$$\int_0^L f(x)\varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n. \quad (5.3)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\varphi(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n b_k e^{-K(n\pi/L)^2 t} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Usando, novamente, a relação (3.19), temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\varphi(x) dx = \frac{L}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-K(n\pi/L)^2 t}.$$

Note que a função $g_n(t) = c_n b_n e^{-K(n\pi/L)^2 t}$ é contínua para $t > 0$. Para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ também seja contínua, precisamos garantir sua convergência, para isso, note que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n b_n|.$$

Usando a desigualdade $|c_n b_n| \leq |c_n^2 + b_n^2|/2$ (obtida da relação $(|b_n| - |c_n|)^2 \geq 0$), temos que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n b_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^2 + b_n^2| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + b_n^2),$$

onde o último membro da expressão acima converge pela [Desigualdade de Bessel](#). Logo, $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-K(n\pi/L)^2 t}$ é uma função contínua, daí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\varphi(x) dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \lim_{t \rightarrow 0} e^{-K(n\pi/L)^2 t} = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n. \quad (5.4)$$

Assim, usando (5.3) e (5.4), segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\varphi(x) dx = \int_0^L f(x)\varphi(x) dx.$$

Portanto, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}((n\pi x)/L)$ é uma solução, do Tipo II, do PVIF (5.1). ■

Para garantir resultados sobre soluções do Tipo I, usaremos o seguinte teorema.

Teorema 5.2. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ e que f' exista em $[0, L]$ e $f' \in \mathcal{L}^2$, então a função $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}((n\pi x)/L)$ é contínua e define uma solução do PVIF (5.1) do Tipo I.*

Demonstração. Como f é contínua, então $|f|^2$ também é contínua, daí $f \in \mathcal{L}^2$. Assim, pelo [Teorema 5.1](#), temos que a função u em (5.2) define uma solução do Tipo II do PVIF (5.1). Com isso, basta mostrarmos que a série em (5.2) é uniformemente convergente

Note que

$$|u(x, t)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \right|.$$

Além disso, como $-K(n\pi/L)^2 \leq 0$, então $e^{-K(n\pi/L)^2 t} \leq 1$, daí

$$|u(x, t)| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \right|$$

A ideia é mostrarmos que última série acima é convergente e aplicarmos o [Teste M de Weierstrass](#).

Aplicando o método de integração por partes na definição dos coeficientes c_n , temos que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2}{n\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L + \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Note que se f' for uma função par e periódica de período $2L$, então a última parcela acima pode ser expressa por meio dos coeficientes de Fourier de f' . Assim, estenderemos f' desta forma para relacionar os coeficientes c_n com os coeficientes d_n de f' . Assim, segue que $c_n = Ld_n/n\pi$.

Note que

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{n\pi} - d_n\right)^2 \geq 0 &\implies \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 - 2\frac{L}{n\pi}d_n + d_n^2 \geq 0 \\ &\implies \frac{L}{n\pi}d_n = c_n \leq \frac{L^2}{2\pi^2 n^2} + \frac{1}{2}d_n^2. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Logo, pelo critério das p -séries e pela [Desigualdade de Bessel](#), a série dos coeficientes c_n converge e, portanto, a série em (5.2) converge absolutamente. ■

As séries de Fourier nascem na tentativa de solucionar a Equação do Calor e, sob algumas hipóteses, podemos garantir a convergência das séries de Fourier, nesse sentido, até o presente momento, realizamos apenas uma aplicação direta das séries de Fourier. No capítulo a seguir, implementaremos as séries de Fourier em Python e abordaremos uma aplicação das séries de Fourier na geração de figuras.

6 Séries de Fourier em Python e Aplicações

Note que para obter o gráfico da soma parcial de Fourier no [Exemplo 3.6](#), utilizamos a expressão

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\text{sen}([2k-1]x)}{2k-1}.$$

No entanto, com esta abordagem, se a função f mudar, precisaremos calcular manualmente a nova série e se quisermos obter o gráfico dessa série, precisaremos escrever sua soma parcial em Python. Perceba que este processo não parece nada prático computacionalmente. Assim, implementaremos um algoritmo que calcula a soma parcial de Fourier de uma função dada de forma computacional.

6.1 Séries de Fourier em Python

Quando buscamos determinar a série de Fourier de uma função periódica de período $2L$, começamos pelo cálculo dos seus coeficientes

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{com } n = 1, 2, \dots$$

Assim, um algoritmo que pretende determinar a soma parcial de Fourier deve inicialmente calcular estes coeficientes.

Para obter os coeficientes de Fourier, precisamos calcular uma integral definida que pode ser estimada por um algoritmo de Soma de Riemann. Assim, computacionalmente, calcularemos as somas:

$$a_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^K f(x_i) \cos\left(\frac{k\pi x_i}{L}\right) \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^K f(x_i) \text{sen}\left(\frac{k\pi x_i}{L}\right) \Delta x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Note que $\Delta x = [L - (-L)]/N = 2L/N$.

Assim, definiremos a função `fourier_coefs` que calcula uma lista com os coeficientes a_k e b_k . Os argumentos necessários para esta função são: a função f , o número L , a quantidade K de coeficientes e a quantidade N de pontos do intervalo $[-L, L]$.

```

1 def fourier_coefs(f, L, K, N):
2     A = []
3     B = []
4
5     for k in range(K + 1):
6         ak = 0
7         bk = 0
8
9         DX = 2*L / N
10        xi = -L
11
12        for _ in range(N):
13            ak += (f(xi) * np.cos(k * np.pi * xi / L)) * DX
14            bk += (f(xi) * np.sin(k * np.pi * xi / L)) * DX
15
16            xi += DX
17
18        if k == 0:
19            A.extend([ak / (2 * L)])
20        else:
21            A.extend([ak / L])
22            B.extend([bk / L])
23
24    return A, B

```

A soma parcial de Fourier

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right],$$

é calculada com o algoritmo

```

1 def fourier_sn(f, L, K, N):
2     a, b = fourier_coefs(f, L, K, N)
3
4     def sum_sn(x):
5         S = 0
6         for k in range(K + 1):
7             S += a[k]*np.cos(k * np.pi * x / L) + b[k]*np.sin(k * np.pi *
8             x / L)
9         return S
10    return np.vectorize(sum_sn)

```

Com essas duas funções, conseguimos obter a soma parcial de Fourier de uma dada função f . No exemplo a seguir, veremos como.

Exemplo 6.1. *Seja f uma função periódica de período 2π definida por*

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2, & -\pi \leq x < 0 \\ (x - \pi)^2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Plote o gráfico da soma parcial de Fourier de f .

Começamos por definir a função f em Python

```
1 def f(x):
2     if -np.pi <= x < 0:
3         return (x + np.pi) ** 2
4
5     return (x - np.pi) ** 2
```

Em seguida, calculamos a soma parcial de Fourier de K termos utilizando a função `fourier_sn` da seguinte forma

```
1 sn = fourier_sn(f, np.pi, K, 10 ** 3)
```

Por fim, definimos nosso domínio e plotamos o gráfico com o algoritmo

```
1 X = np.linspace(-3 * np.pi, 3 * np.pi, 10 ** 3)
2 Y = sn(X)
3
4 plt.plot(X, Y)
5 plt.show()
```

Figura 29 – Soma parcial com $K = 1$

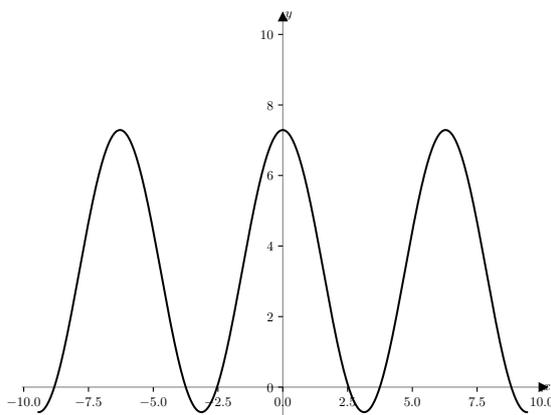
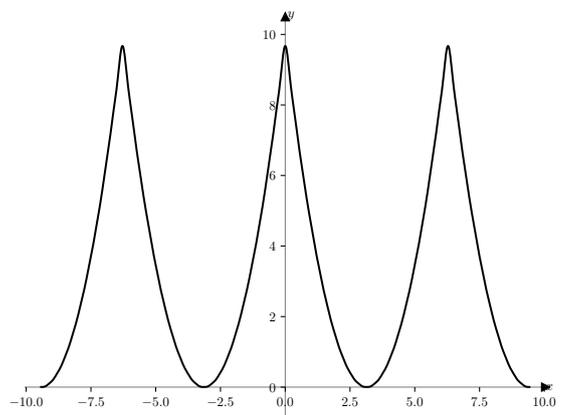


Figura 30 – Soma parcial com $K = 20$



Fonte: próprio autor.

Exemplo 6.2. *Seja f uma função periódica de período 4π definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & -2\pi \leq x < 0 \\ -\text{sen}(x), & 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Plote a soma parcial de Fourier de f .

No algoritmo abaixo, definimos a função f e plotamos o gráfico da soma parcial de Fourier com K termos.

```

1 def f(x):
2     if -2 * np.pi <= x < 0:
3         return np.sin(x)
4
5     return -np.sin(x)
6
7 sn = fourier_sn(f, 2 * np.pi, K, 10 ** 3)
8
9 X = np.linspace(-4 * np.pi, 4 * np.pi, 10 ** 3)
10 Y = sn(X)
11
12 plt.plot(X, Y)
13 plt.show()

```

Figura 31 – Soma parcial com $K = 2$

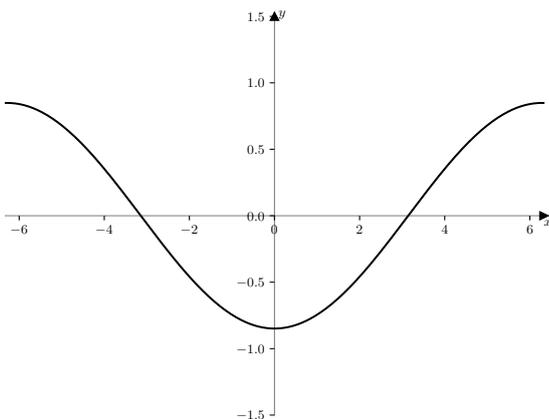
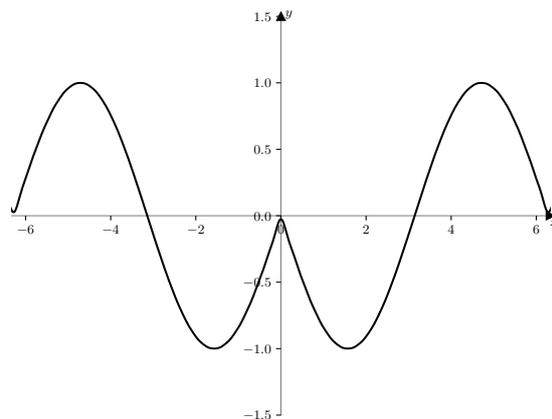


Figura 32 – Soma parcial com $K = 50$



Fonte: próprio autor.

A série de Fourier nasce com o propósito de representar uma função, sob certas condições, por meio de uma soma infinita de senos e cossenos. Desse modo, esta seção é apenas uma aplicação direta das séries de Fourier em Python. No entanto, as aplicações desta ferramenta são muito diversas, indo desde a compressão de vídeos e áudios até filtros de imagens utilizados em diversas redes sociais.

Dessa gama de aplicações, destacamos a geração de figuras por meio de epiciclos que será melhor explicada na próxima seção.

Um passo central para a geração de figuras utilizando série de Fourier é enxergarmos esta série sob a seguinte perspectiva:

6.1.1 Formulação complexa da série de Fourier

Considere a soma parcial de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right].$$

Até o presente momento, esta soma é uma função da seguinte forma $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Buscando uma formulação complexa para s_n , utilizaremos a identidade de Euler para obtermos uma função da forma $\tilde{s}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Assim, considere um número real θ , então pela identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta).$$

Com esta relação, conseguimos as seguintes expressões para as funções cosseno e seno

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Assim, considerando os coeficientes de Fourier a_n e b_n , temos que

$$a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = a_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}.$$

Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-i\frac{k\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^1 \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}}. \end{aligned}$$

Fazendo $c_n = (a_n - ib_n)/2$, segue que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx. \end{aligned}$$

Definição 6.1. Seja f uma função periódica de período $2L$, então a série complexa de Fourier de f é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

onde c_n é o coeficiente complexo de Fourier dado por

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Esta formulação será necessária para a relação entre a série de Fourier e a construção de epiciclos que veremos na próxima seção.

6.2 Epiciclos e séries de Fourier

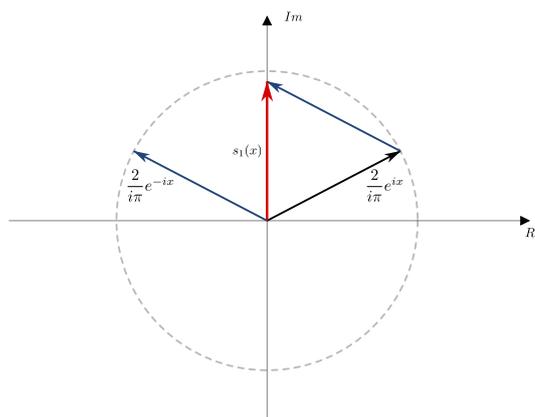
Nesta seção iremos gerar figuras, de forma computacional, utilizando a teoria das séries de Fourier. Para tal, retornaremos inicialmente ao [Exemplo 3.6](#) e verificar a relação entre a sua série de Fourier e a sua formulação complexa; A referência [10](#) serviu como inspiração para a ideia que se segue e [11](#) desenvolve esta ideia em *JavaScript*.

Na [Figura 16](#), temos o gráfico da função $s_1(x) = 4 \operatorname{sen}(x)/\pi$. Utilizando a formulação complexa da série de Fourier, obtemos a relação

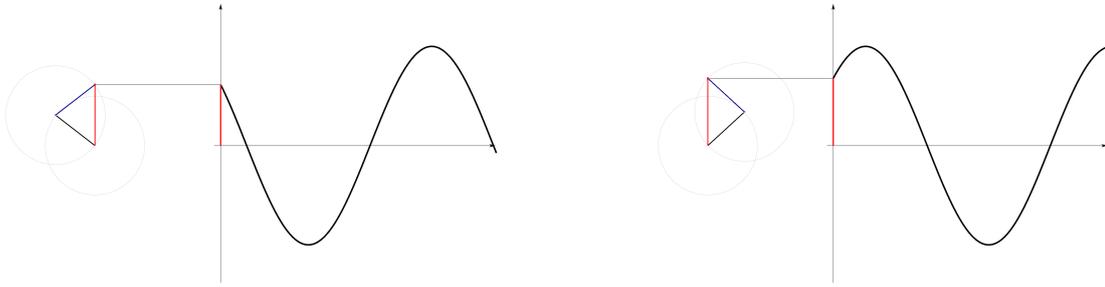
$$s_1(x) = \frac{2}{i\pi} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Dessa forma, intuitivamente, o gráfico da expressão acima deve estar relacionado com o gráfico na [Figura 16](#). Mas como podemos obter o gráfico de uma função real a partir de uma soma de funções complexas? Para responder essa pergunta, observe a figura a seguir, que ilustra a relação dada pela igualdade acima.

Figura 33 – Relação entre s_1 , $2e^{ix}/i\pi$ e $2e^{-ix}/i\pi$ no plano complexo.



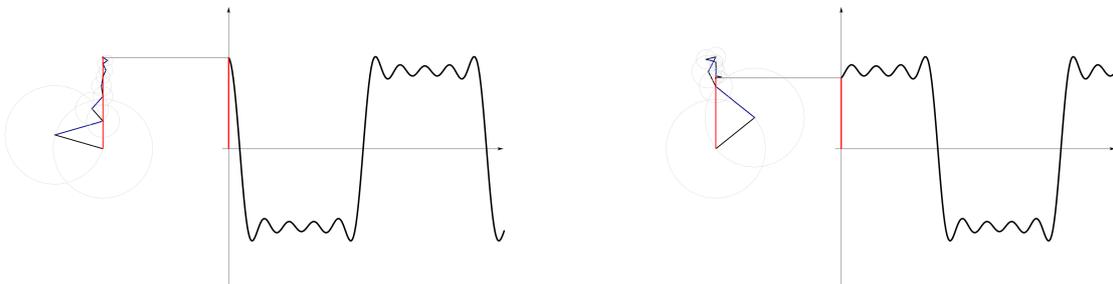
Dessa forma, conseguimos obter o gráfico da função s_1 a partir da soma e rotação dos vetores $2e^{ix}/i\pi$ e $2e^{-ix}/i\pi$ no plano complexo.

Figura 34 – Relação entre s_1 e o vetor $4e^{ix}/\pi$.

Fonte: próprio autor.

Analogamente, o gráfico de s_5 na Figura 17 é obtido a partir da rotação do vetor

$$\frac{2}{i\pi} \sum_{k=-5}^5 \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k} e^{ikx}.$$

Figura 35 – Relação entre s_5 e o vetor $2 \sum_{k=-5}^5 [1 + (-1)^{k+1}] e^{ikx} / ik\pi$.

Fonte: próprio autor.

A esses círculos centrados em outros círculos, ambos em movimento, damos o nome *epícciclos*. A dinâmica da geração desses gráficos pode ser vista no *link* abaixo.



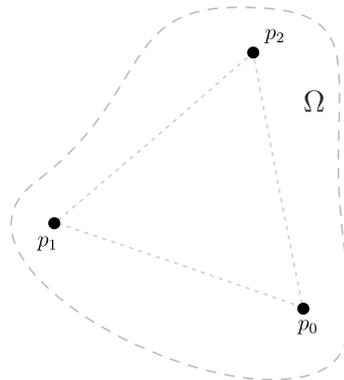
<<https://youtu.be/5MBfyngtVSc>>

Com isso, percebemos a relação entre epícciclos e a série de Fourier de uma função real.

A geração de figuras por meio de epiciclos usa esta mesma relação em uma ordem inversa, considerando um gráfico, e mais geralmente, uma figura no plano, obtendo epiciclos que ao serem rotacionados geram a figura original.

Suponha que tenhamos um conjunto finito Ω de pontos do plano que formam uma figura.

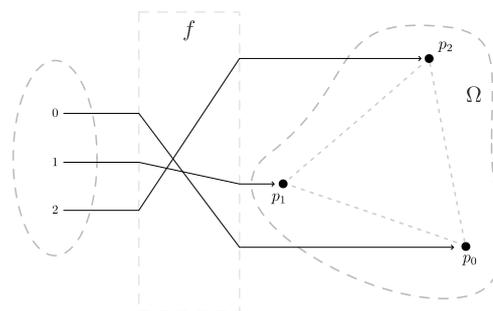
Figura 36 – Conjunto Ω



Fonte: próprio autor.

Além disso, suponha que Ω tenha N elementos, isto é, $\#\Omega = N$. Sendo Ω um conjunto finito, então existe uma função f que associa os números $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ aos pontos de Ω , para ilustrar esta função, observe a figura abaixo.

Figura 37 – Diagrama da função f com $N = 3$



Fonte: próprio autor.

Assim, aparentemente, podemos calcular a série de Fourier de f , entretanto, isto não é possível uma vez que f não assume valor numérico e não é periódica, para contornar esses problemas, iremos considerar que $\Omega \subset \mathbb{C}$ e f é periódica de período N , assim, $f(0 + N) = f(0)$, $f(1 + N) = f(1)$, \dots , $f(2N - 1) = f(N - 1)$.

Além disso, precisamos adaptar a série de Fourier complexa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad (6.1)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx. \quad (6.2)$$

Note que $N = 2L$, pois, a nossa função f tem período N . Além disso, na expressão (6.1), iremos considerar apenas os N primeiros termos, assim,

$$f(n) \sim \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ik\pi n/(N/2)} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2ik\pi n/N}.$$

Utilizando a Soma de Riemann em (6.2) e adaptando para esta soma, temos que

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2ik\pi n/N} \Delta n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2ik\pi n/N}.$$

Portanto, obtemos a série discreta de Fourier

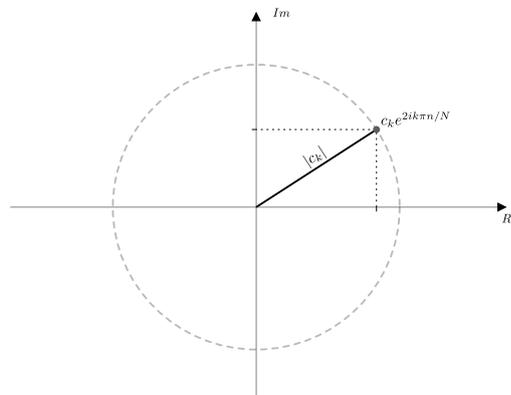
$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2ik\pi n/N}, \quad (6.1')$$

com

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2ik\pi n/N} \quad (6.2')$$

Assim, para $k = 0, \dots, N - 1$, teremos o número complexo $c_k e^{2ik\pi n/N}$ que pode ser representado por um vetor da seguinte forma

Figura 38 – Vetor $c_k e^{2ik\pi n/N}$ no plano complexo

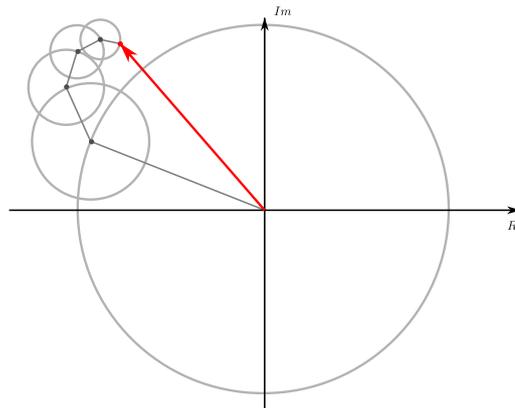


Fonte: próprio autor.

Para construir os epiciclos utilizaremos a fase (posição inicial) e comprimento dos vetores complexos. Além disso, utilizaremos o número $2k\pi/N$, que chamaremos de frequência, nas expressões (6.1') e (6.2').

Dessa forma, a série discreta de Fourier de um conjunto Ω de pontos complexos pode ser interpretada como uma soma de vetores complexos. Assim, a figura a seguir representa a série de Fourier de um conjunto Ω .

Figura 39 – Série discreta de Fourier com 5 termos



Fonte: próprio autor.

Partiremos agora para o nosso objetivo, esboçar uma dada figura por meio de um algoritmo que construa epiciclos via coeficientes de Fourier. Para tal começaremos por implementar a expressão (6.2') em Python. Iremos considerar que $\Omega = X$ e $f(n) = X[n]$, assim

```

1 def fourier_coefs(X):
2     COEFS = []
3     N = len(X)
4     for k in range(N):
5         S = 0
6         for n in range(N):
7             S += X[n] * e ** (-2j * k * pi * n / N) # de (6.1')
8         S = S / N
9
10        re, im = S.real, S.imag
11        angle = arctan2(-im, re)
12        amplitude = sqrt(re**2 + im**2)
13        frequency = 2 * k * pi / N
14
15        COEFS.extend([(angle, amplitude, frequency)])
16    return COEFS

```

A função `fourier_coef` calcula cada coeficiente c_k do conjunto de pontos X e armazena

o ângulo e amplitude do vetor complexo c_k . Além disso, armazena a frequência (expoente) da exponencial em (6.1'). Estas três informações serão utilizadas para gerar a série discreta de Fourier do conjunto X .

Para gerar a série de Fourier no plano complexo, usaremos a biblioteca arcade a fim de criarmos uma figura parecida com a [Figura 39](#).

Inicialmente, iremos começar definindo uma classe `ComplexPlane` que estende a classe `Window`.

```

1 import arcade
2
3 # definindo o plano em que os epiciclos serão inseridos
4 class ComplexPlane(arcade.Window):
5     def __init__(self, fourier_coefs):
6         super().__init__(fullscreen=True)
7
8         self.n = 0 # iniciando a variável n usada em (6.1') e (6.2')
9         self.track = [] # lista que armazenará o rastro do último vetor
10        self.f_coefs = fourier_coefs # armazenando os coeficientes de
11        Fourier
12
13    def on_draw(self):
14        pass

```

O método `__init__` é responsável por instanciar nossa classe `ComplexPlane` e iniciar as variáveis `n`, `track` e `f_coefs`. A variável `n` será o n da expressão (6.1'), a `f_coefs` armazenará todos os coeficientes de Fourier calculados utilizando a função `fourier_coefs` e a variável `track` guardará a posição do ponto final do último vetor complexo c_{N-1} a cada iteração de `n`.

O método `on_draw` é responsável por executar todos os comandos que geram os elementos gráficos, isto é, renderiza os vetores e epiciclos da série discreta de Fourier. A parte principal do nosso algoritmo será este método, assim, apresentaremos a implementação completa com os principais detalhes explicados.

```

1 class ComplexPlane(arcade.Window):
2     :
3     def on_draw(self):
4         # ponto inicial do primeiro vetor
5         x0, y0 = self.width / 2, self.height / 2
6
7         # definindo o último coeficiente
8         cN_1 = self.f_coefs
9
10        # iniciando renderização
11        arcade.start_render()

```

```

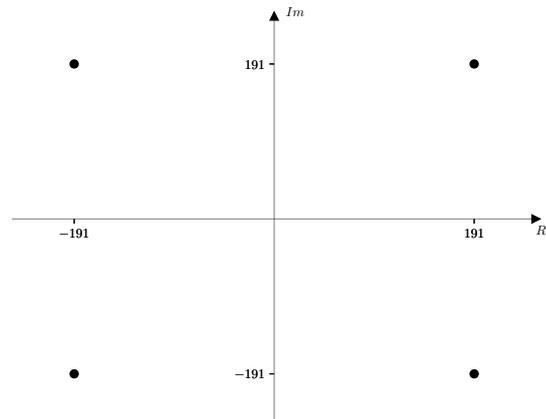
12
13     for coef in self.f_coefs:
14         angle, amplitude, frequency = coef
15
16         # renderizando epiciclo
17         arcade.draw_circle_outline(x0, y0, amplitude)
18
19         # calculando o ponto final do vetor
20         wn = frequency * self.n + angle
21         x1 = amplitude * cos(wn) + x0
22         y1 = amplitude * sin(wn) + y0
23
24         # renderizando vetor
25         arcade.draw_line(x1, y1, x0, y0)
26
27         # verificando se coef é cN_1
28         if coef is cN_1:
29             # adicionando ponto final do vetor ao rastro
30             self.track.extend([(x1, y1)])
31
32         # remove pontos repetidos
33         if len(self.track) > len(self.f_coefs):
34             self.track.pop(0)
35
36         # renderiza o rastro do ultimo vetor
37         arcade.draw_line_strip(self.track)
38
39         # definindo o ponto inicial do próximo vetor
40         x0, y0 = x1, y1
41
42         # finalizando renderização
43         arcade.finish_render()
44         self.n += 1

```

Com isso, a classe `ComplexPlane` está finalizada e pode ser consultada por completo no [Algoritmo A.1](#).

Veremos, com o exemplo a seguir, como utilizar a função `fourier_coefs` e a classe `ComplexPlane` para visualizar a série discreta de Fourier de um conjunto de pontos no plano complexo.

Exemplo 6.3. *Seja $X = \{-191 - 191i, -191 + 191i, 191 + 191i, 191 - 191i\}$. No plano complexo, este conjunto é representado pela figura a seguir*

Figura 40 – Conjunto X no plano complexo.

Fonte: próprio autor.

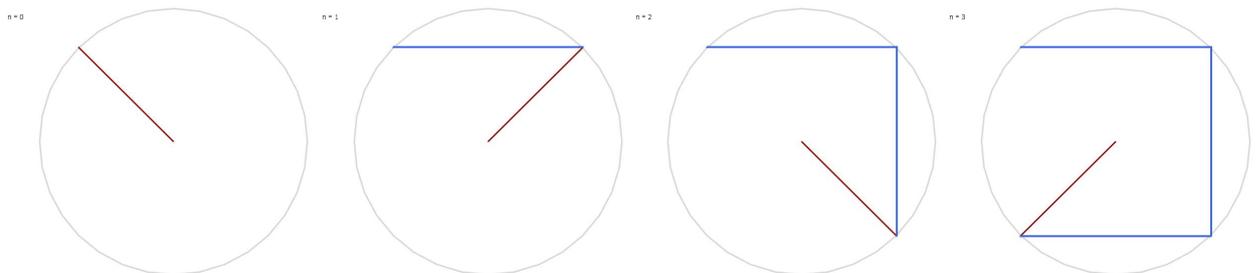
Para visualizar a série discreta de Fourier de X , fazemos

```

1 X = [-191 - 191j, -191 + 191j, 191 + 191j, 191 - 191j]
2
3 coefs = fourier_coefs(X)
4
5 complex_plane = ComplexPlane(coefs)
6 complex_plane.run()

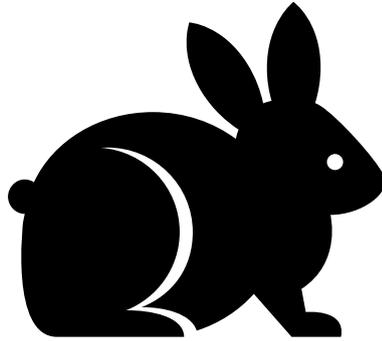
```

Ao executar o método `run` da variável `complex_plane`, obtemos

Figura 41 – Soma discreta de Fourier de X com $n=0, 1, 2, 3$ 

Fonte: próprio autor.

Na internet, existem vários tipos de arquivos de imagens. Um dos tipos mais comuns é o *Scalable Vector Graphics (SVG)*. Uma das vantagens desse tipo de arquivo é a capacidade de redimensionar imagens sem perda de qualidade, isso se deve à forma vetorial que o *SVG* guarda seus elementos gráficos. Um exemplo de imagem *SVG* é dado a seguir.

Figura 42 – Imagem *SVG* de um coelho

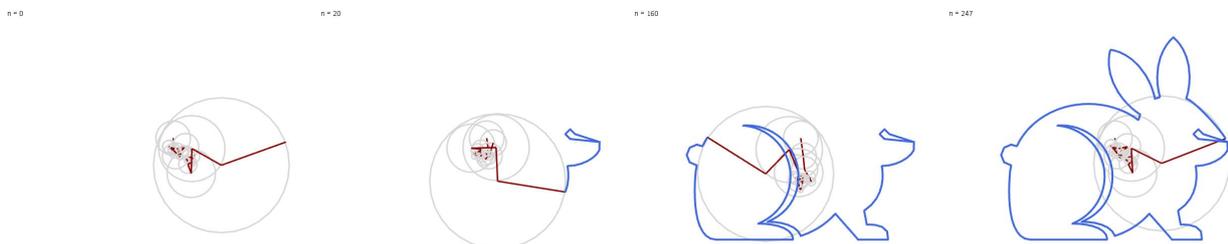
Fonte: [GitHub Spotify](#)

A função `parse_file` no [Algoritmo A.2](#) transforma um arquivo *SVG* em um conjunto de pontos no plano complexo, assim, poderemos calcular a série discreta deste arquivo e obter a sua imagem por meio de epiciclos.

Supondo que `caminho` é a localização do arquivo *SVG* na [Figura 42](#), então o algoritmo abaixo gera a imagem do arquivo por meio de epiciclos.

```
1 points = parse_file(caminho)
2 coefs = fourier_coefs(points)
3
4 complex_plane = ComplexPlane(coefs)
5 complex_plane.run()
```

Com isso, obtemos

Figura 43 – Soma discreta de Fourier com $n=0, 20, 160, 247$ 

Fonte: próprio autor.

Abaixo disponibilizamos um vídeo que mostra a dinâmica da geração desta figura.



<https://youtu.be/5MBfyngtVSc>

Os algoritmos desta seção estão disponíveis no *link* a seguir.



<https://github.com/Cle Anderson/drawing-with-fourier>

7 Conclusão

A dedução da Equação do Calor e a abordagem inovadora para tentá-la resolver, já é o bastante para consagrar Fourier como um grande físico e matemático do século XIX. No entanto, os frutos do trabalho de Fourier, vão muito mais além do que ele pôde realizar em vida.

A ideia de Fourier de que qualquer função pudesse ser representada por meio de uma série de funções trigonométricas se mostrou equivocada. Contudo, os esforços para provar este resultado, culminou em uma definição mais abstrata sobre funções e possibilitou que a Análise se desenvolvesse de forma mais rigorosa.

Na Computação e no mundo digital, a série de Fourier é indispensável devido a sua vasta aplicação em filtros, compressão de arquivos e processamento de sinais digitais. Assim, a série de Fourier é utilizada para comprimir mensagens de voz enviadas pelo *WhatsApp* e nos filtros de imagens do *Instagram*.

Na Matemática, a partir das séries de Fourier pode-se obter uma importante ferramenta na solução de EDPs: a Transformada de Fourier. Com esta ferramenta, os matemáticos conseguem transformar um EDP em um sistema de EDOs, assim, o processo nada simples de solucionar uma EDP é dividido em vários processos, relativamente simples, de solucionar uma EDO.

Assim, percebemos que, ao desenvolver a série que leva o seu nome, Fourier cria um novo ramo da Análise e uma das ferramentas mais versáteis das ciências exatas. Portanto, é interessante pensar que uma ferramenta criada há 217 anos pode ter aplicações tão vastas no mundo atual.

Referências

- 1 BOYER, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2015.
- 2 FIGUEIREDO, D. G. d. *Análise de Fourier e equações diferenciais Parciais*. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2018.
- 3 BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C.; CASTRO, H. *Historia da Matematica*. São Paulo, SP: Blucher, 2012.
- 4 GONZALES-VELASCO, E. A. *Fourier analysis and boundary value problems*. San Diego, California: Academic Press, 1995.
- 5 GONZALEZ-VELASCO, E. A. Connections in mathematical analysis: The case of fourier series. *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 99, n. 5, p. 427–441, 1992. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2325087>.
- 6 ORG, P. *History and License*. 2024. <https://docs.python.org/3/license.html> [Acessado em: 2 de fevereiro de 2024].
- 7 LUTZ, M.; ASCHER, D. *Aprendendo Python*. 2. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2007.
- 8 LIMA, E. L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2019.
- 9 BRAUN, M. *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*. 4. ed. Nova Iorque, New York: Springer, 1993.
- 10 3BLUE1BROWN. *Mas o que é uma série de Fourier? Do fluxo de calor ao desenho com círculos | DE4*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k>. Acessado em 8 de março de 2024.
- 11 TRAIN, T. C. *Coding Challenge # 130.1: Drawing with Fourier Transform and Epicycles*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MY4luNgGfms&t=1614s>. Acessado em 8 de março de 2024.

A Códigos

Algoritmo A.1 – classe ComplexPlane

```

1 import arcade
2 from arcade.csscolor import WHITE_SMOKE, DARK_RED, ROYAL_BLUE
3 from numpy import pi, e, sqrt, arctan2, cos, sin
4
5 class ComplexPlane(arcade.Window):
6     def __init__(self, fourier_coefs):
7         super().__init__(fullscreen=True)
8         arcade.set_background_color(WHITE_SMOKE)
9
10        self.n = 0
11        self.track = []
12        self.f_coefs = fourier_coefs
13
14    def on_draw(self):
15        x0, y0 = self.width / 2, self.height / 2
16        cN_1 = self.f_coefs[-1]
17        arcade.start_render()
18        for coef in self.f_coefs:
19            angle, amplitude, frequence = coef
20
21            wn = frequence * self.n + angle
22            x1 = amplitude * cos(wn) + x0
23            y1 = amplitude * sin(wn) + y0
24
25            arcade.draw_circle_outline(x0, y0, amplitude, (215, 215, 215))
26            arcade.draw_line(x1, y1, x0, y0, DARK_RED)
27
28            if coef is cN_1:
29                self.track.extend([(x1, y1)])
30
31            if len(self.track) > len(self.f_coefs):
32                self.track.pop(0)
33
34            arcade.draw_line_strip(self.track, ROYAL_BLUE, 2.5)
35
36        x0, y0 = x1, y1

```

```

37
38     arcade.finish_render()
39     self.n += 1

```

Algoritmo A.2 – código para transformar arquivos SVG em um conjunto de pontos complexos

```

1 # code by Gulbu
2 # https://stackoverflow.com/questions/69313876/how-to-get-points-of-the-svg-paths
3
4 from svg.path import parse_path
5 from xml.dom import minidom
6
7 SCALE = 5
8 TRANS_X = 25
9 TRANS_Y = 0
10
11 from svg.path import parse_path
12
13 def get_point_at(path, distance, scale, offset):
14     pos = path.point(distance)
15     pos += offset
16     pos *= scale
17     return pos.real, pos.imag
18
19
20 def points_from_path(path, density, scale, offset):
21     step = int(path.length() * density)
22     last_step = step - 1
23
24     if last_step == 0:
25         yield get_point_at(path, 0, scale, offset)
26         return
27
28     for distance in range(step):
29         yield get_point_at(
30             path, distance / last_step, scale, offset)
31
32
33 def points_from_doc(doc, density=5, scale=1, offset=0):
34     offset = offset[0] + offset[1] * 1j
35     points = []
36     for element in doc.getElementsByTagName("path"):
37         for path in parse_path(element.getAttribute("d")):
38             points.extend(points_from_path(
39                 path, density, scale, offset))
40

```

```
41 return points
42
43
44 def parse_file(file_str: str):
45     _file = open(file_str)
46     file_content = _file.read()
47
48     doc = minidom.parseString(file_content)
49     path = points_from_doc(doc, density=0.5, scale=SCALE, offset=(TRANS_X,
50         TRANS_Y))
51
52     points = []
53     for coord in path:
54         x = coord[0]
55         y = coord[1]
56
57         points.extend([x + y * 1j])
58
59     doc.unlink()
60     return points
```