UFRPE

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Licenciatura plena em matemática

Sunny Matheus Gomes da Silva

Poliedros de Platão e Arquimedes

Recife - PE
Abril de 2023

Poliedros de Platão e Arquimedes

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Me. Cícero Monteiro

Recife - PE
Abril de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S958p Silva, Sunny Matheus Gomes da Silva
Poliedros de Platão e Arquimedes / Sunny Matheus Gomes da Silva Silva. - 2023.
36 f. : il.

Orientador: Cicero Monteiro de Souza.
Inclui referências e apêndice(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. História da Geometria. 2. Poliedros. 3. Planificação. I. Souza, Cicero Monteiro de, orient. II. Título

CDD 510

Sunny Matheus Gomes da Silva

Poliedros de Platão e Arquimedes

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Aprovado em: 27/04/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Cícero Monteiro (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Severino Barros de Melo
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade
Universidade Federal Rural de Pernambuco- UFRPE

Recife - PE
Abril de 2023

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pela oportunidade da vida e a sabedoria que me proporcionou para conduzi-la.

Á minha família, em especial aos meus pais Joelma Gomes de Oliveira Silva e Sílvio Ferreira da Silva, e à minha irmã, Sandy Beatriz Gomes da Silva, os quais sem eles, nada seria possível.

A minha esposa Gabriele Andrade Soares de Lima, e também minha filha Júlia Beatriz que são pilares importantes desta conquista, e a sua família, que puderam estar ajudando de alguma forma na graduação.

Aos meus amigos de infância Diogo Gomes e Vinícius Nascimento, que sempre me apoiaram e me incentivaram a viver os meus sonhos.

Aos meus amigos de graduação, em especial Anna Clara, Bruno Lourenço, Caio Barbosa, Elizabeth Bispo, João Pedro, José Arthur, Paulo Almeida, Vinícius Tomaz e Yasmin Lopes que estiveram ao meu lado em muitos momentos durante o curso, dividindo os fardos da graduação, e tornando-os mais leve.

Ao meu orientador o professor Me. Cícero Monteiro, que foi meu professor da disciplina de Desenho Geométrico e agora, conduz de forma brilhante este trabalho.

Aos professores de graduação, em especial ao professor Gabriel Guedes, que me trouxe incentivo para a pesquisa. E aos professores Bárbara Costa, Clessius Silva, Edgar Correa, Juliana Martins, Renato Teixeira, Severino Barros, Thamires Santos e Yane Lísley que conduziram o ensino de forma esplêndida, tornando-se verdadeiras referências positivas para mim.

A UFRPE por toda humanização para com os seus estudantes e o empenho em incentivar à pesquisa.

Resumo

Este trabalho é voltado aos poliedros, bem como o desenvolvimento dos primeiros estudos feitos pelos filósofos e matemáticos até os tempos mais modernos, afim de entender a geometria e a sua relação com a natureza e o universo. Desde os primeiros indícios feitos pelos gregos até Euclides que organizou de forma magistral todos esses estudos a respeito da Geometria, assim como as demonstrações dos poliedros. A intenção desse trabalho é compreender toda a construção dos poliedros, planificações e a elaboração de desenhos para formar os poliedros, assim como o cálculo das áreas e volumes dos mesmos. Um ponto a ser considerado é que esse tema é de grande importância para o Ensino Fundamental e Médio, pois os estudantes conseguem visualizar e descrever o mundo através das figuras geométricas, assim como os poliedros.

.

Palavras-Chave: História da Geometria, Poliedros, Planificação.

Abstract

This work is focused on polyhedra, as well as the development of the first studies made by philosophers and mathematicians until the most modern times, in order to understand geometry and its relationship with nature and the universe. From the first indications made by the Greeks to Euclid, who masterfully organized all these studies on Geometry, as well as the demonstrations of polyhedra. The intention of this work is to understand the entire construction of polyhedra, planning and the elaboration of drawings to form the polyhedra, as well as the calculation of their areas and volumes. A point to be considered is that this topic is of great importance for Elementary and High School, as students can visualize and describe the world through geometric figures, as well as polyhedra.
Key-Words: History of Geometry, Polyhedra, Planification.

Sumário

Introdução

A geometria é uma parte da Matemática que estuda formas e espaços, porém o ser humano na busca pela compreensão do mundo onde vivemos, bem como as formas da natureza fez com que fosse despertado essa vontade de entender tudo que acontece ao nosso redor, dar explicações concretas das formas encontradas. Os Babilônios e Egípcios tinham a necessidade de medir as coisas, pois precisavam fazer construções e marcar as terras para plantações, foi nesse momento que nasceu a Geometria. Na Grécia os filósofos usavam esses conhecimentos para entender melhor o nosso mundo.

Algumas ferramentas utilizadas pelo homem ao longo da história já tinham formas geométricas, por exemplo a roda, as construções das casas eram em formatos cilíndricos, porém não tinham uma direção de como isso poderiam ser organizados de maneira que fossem reproduzidos em outros momentos aquela mesma forma. Quando as pirâmides foram construídas já utilizaram ângulos retos, circunferências e outras formas geométricas, inclusive a própria pirâmide já é um sólido geométrico.

A Geometria teve grandes nomes que conseguiram organizar e comprovar os seus estudos através de demonstrações, Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides foram os primeiros a dar essa organização ao estudo das formas e espaço. Euler conseguiu desvendar dois enigmas no século XVIII, fazendo com que fosse atestado alguns poliedros desenvolvidos por Arquimedes. Juntamente com Platão, Kepler e Arquimedes que desenvolveram os estudos dos poliedros, esses foram os mais importantes matemáticos que descreveram tais conhecimentos sobre o espaço e suas formas.

Esse trabalho tem por finalidade falar sobre a parte histórica dos poliedros regulares e semirregulares, bem como sua construção, planificação, e fórmulas de área e volume. Também uma breve explicação sobre o motivo de existir apenas cinco poliedros regulares.

Dessa forma, espera-se que os professores e estudantes que tiverem a curiosidade de pesquisar sobre os poliedros, consigam entender todo o processo histórico, a construção com régua e compasso dos polígonos necessários para a obtenção de tais poliedros e também as fórmulas para conseguir calcular áreas e volumes. Assim, para que fosse possível fazer esse trabalho foi necessário uma pesquisa com base em estudos já feitos em livros e artigos científicos sobre o tema escolhido.

No capítulo 1 apresentamos toda a parte histórica desses estudos, mostrando a importância de saber que não surgiu do nada e todo o processo que hoje é ensinado nas escolas de ensinos fundamental e médio, para que os estudantes que aprendem de maneira prática, possam perceber todo o processo da construção das figuras.

Nos capítulos 2 e 3 apresentamos os poliedros regulares e semirregulares, chamados de Poliedros de Platão e Arquimedes respectivamente, bem como a planificação e a construção feitas com régua e compasso. Também apresentamos as fórmulas para a obtenção dos valores das áreas e volumes desses poliedros.

Capítulo 1

Um pouco de história da Geometria

1.1 Primeiros Indícios

Não se pode afirmar com precisão quando a civilização humana começou a utilizar a geometria como ciência ou mesmo em benefício próprio, de grupos ou de uma população. O homem no período neolítico desenvolveu a técnica de tecer panos, de fabricar cerâmicas e construiu as primeiras moradias constituindo-se os primeiros arquitetos do mundo. Objetos encontrados em sítios históricos por toda a terra mostram o desenvolvimento gradual de uma arte rudimentar com cerâmica, carpintaria e tecelagem, o que demonstra os indícios de uma geometria ainda não sistematizada.

Com o surgimento das grandes civilizações às margens dos grandes rios, pela necessidade de cultivar a terra, criou-se o processo de medição conhecido como agrimensura. No Egito antigo, por exemplo, a demarcação terras, além de estabelecer a quantidade de terra de um agricultor, esse critério também era usado para a cobrança de impostos; ou seja, pagava-se impostos de acordo com as dimensões de cada terreno. O fato de o Egito ser banhado pelo Rio Nilo tinha um aspecto particular, pois, quando o rio transbordava as demarcações feitas em suas margens eram perdidas e os proprietários aproveitavam-se para pedir novas medições e isso era feito com o objetivo de tentar, se possível, pagar cada vez menos impostos. Todavia, o Faraó estava sempre interessado em aperfeiçoar as técnicas de medição. E assim, fazia-se necessário o estudo das diversas formas e os cálculos de suas áreas. Uma das técnicas criadas nesse período foi a usada para o traçado do ângulo reto ou de uma perpendicular. Davam-se doze nós igualmente espaçados em uma corda e, uniam-se as extremidades, fixavam-se os nós de número três e o de número sete, esticava-se a corda nesses três pontos e obtinha-se um triângulo retângulo cujos lados eram proporcionais a 3, 4 e 5. Denominava-se de “esticadores de cordas” os homens que exerciam essa tarefa. Segundo Santos (2006):

> *"Pensa-se usualmente que a motivação geométrica dos "estiradores de corda" no Egito era mais prática do que a dos seus colegas na Índia; mas sugeriu-se que tanto a geometria da Índia como a egípcia podem provir de uma fonte comum — uma proto geometria relacionada com ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia."(SANTOS, 2006, p.7.)*

Na arquitetura os egípcios se destacaram na construção de templos, palácios e pirâmides financiadas e administradas pelos faraós. Esses monumentos eram erguidos com grandes blocos de pedras e necessitavam de um vasto conhecimento de figuras geométricas estudadas até os dias atuais. Entretanto, não só no Egito, mas na Mesopotâmia, Índia e China esses conhecimentos eram tidos como sagrados e, portanto, somente os membros da alta sociedade podiam ter acesso. As pessoas comuns deveriam aceitar que esses conhecimentos eram dados pelos deuses e deveriam se perpetuar nos templos sob os cuidados dos sacerdotes. Por volta do século XVI a.C. a literatura sagrada dos Vedas indicava um conjunto de regras para a construção de altares para sacrifícios seguindo medições precisas. Esses altares exigiam o conhecimento da construção de um quadrado com área igual a de um triângulo ou de um círculo dado.

1.2 A Geometria na Grécia

A civilização grega teve seu início por volta do 800 a.C. A partir desse momento os povos situados em torno do mar mediterrâneo se unem para se protegerem de invasões e criam as cidades-estados. Vale salientar que a literatura grega iniciada por Homero com as obras Ilíada e Odisseia introduz o orgulho e o desejo de luta pela preservação e liberdade contra os invasores. A partir daí os gregos passam a se destacar como um povo guerreiro. Por outro lado, Hesíodo com as obras "Teogonia" e "Os Trabalhos e os dias" além de falar das origens dos deuses e a criação do homem, colocava o homem como responsável pelo seu próprio destino. Isso, de certa forma abre o caminho para o pensamento racional.

Na Grécia o conhecimento passa a ser compartilhado com todos e não ficava restrito apenas a uma elite social, justamente pela necessidade de explicar com a razão todo o pensamento. E assim, curiosos de diversas classes sociais podiam questionar, levantar hipóteses e compartilhar com todos. Com a razão como a base de todo o pensamento os gregos começaram o processo de sistematização do conhecimento. Esse foi o momento propício para o início da criação de modelos matemáticos e em particular para o desenvolvimento da geometria como concebemos até hoje. Segundo Ramos (2013):

> *Gradualmente, a imaginação criadora típica dos gregos passou para segundo plano à sombra do supremo rigor lógico imposto pela escola platônica, cujo elemento mais representativo foi a figura de Euclides. Não hesitando em ocultar a via heurística, Euclides estruturou rigidamente a matemática grega elementar no seu tratado Elementos, com um estilo de exposição sintético e de caráter geométrico-dedutivo.(RAMOS, 2013, p.8)*

No século VII a.C. nasce em Mileto, na Jônia, um dos sete sábios e o mais antigo filósofo grego Tales de Mileto (624 – 548 a. C). Tales foi filosofo, matemático e astrônomo. Fez diversas viagens pela Grécia, Babilônia e Egito afim de estudar astronomia. Seus estudos sobre astronomia possibilitou a realização de um de seus grandes feitos, a previsão do eclipse solar de 585 a. C. Em relação a filosofia escreveu a obra "Teofrasto" que estabelecia os quatro elementos formadores de todo o universo: Ar, Água, Terra e Fogo. Tales de Mileto é considerado o pai da filosofia por ser o primeiro pensador grego. Sua busca primordial era a descoberta de um elemento físico que fosse constante em todas as coisas. Algo que fosse o princípio unificador de todos os seres. Para ele, tudo se originava da água.

Tales é o matemático que inicia o período da matemática formal, sistematizada, na qual há a necessidade da utilização da demonstração. Ele é o precursor e o ponto inicial das primeiras descobertas. Alguns feitos atribuídos a ele são: a afirmação de que um ângulo inscrito em um semicírculo é reto, as cordas de uma circunferência de maior comprimento são as que passam pelo centro e são chamadas de diâmetro, o ponto não tem dimensão, uma reta tem comprimento. Também, atribui-se a ele a demonstração dos seguintes teoremas: os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então eles são iguais; os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; um feixe de paralelas cortadas por transversais determina sobre elas seguimentos proporcionais. A Escola Jônica criada por Tales é considerada a primeira escola da humanidade, se bem que ela ainda não teria o mesmo formato de uma escola nos moldes que posteriormente tenha se definido. É possível que o nome Geometria tenha surgido nesse período; mesmo porque esse nome tem origem grega e é formado pela junção das palavras Geo (terra) e Metria (medida).

O século VI é marcado pelo nascimento de outro matemático conhecido como Pitágoras de Samos (582 - 497 a.C). Pitágoras foi um filósofo e matemático que alavancou os estudos dos números e da geometria, buscando demonstrações de alguns teoremas. O mais famoso é o que leva seu próprio nome "Teorema de Pitágoras". Também é considerado o fundador de um movimento místico que se chamou de Escola Pitagórica. Nessa escola estudaram e desenvolveram várias demonstrações dos números figurados, entre eles o mais famoso é a Tétrada, onde acreditavam ser um número mágico que utilizava os quatro elementos formadores do universo atribuídos a Tales de Mileto. Os pitagóricos adotaram como símbolo o pentagrama – uma estrela formada a partir do pentágono regular no qual está implícita a razão de ouro que dá origem ao número de ouro. Essa razão de ouro passa a representar as formas perfeitas do universo e, por isso, a arquitetura e escultura gregas, a partir de então passam a seguir um padrão de perfeição expressada pela razão de ouro. Posteriormente, veremos que o pentágono é a face de um dodecaedro e isso torna esse poliedro o símbolo do Cosmo. Outro fato, bastante relevante para a geometria foi a descoberta de que a diagonal de um quadrado de lado unitário gera um número irracional $\sqrt{2}$, fato que gerou uma crise na escola pitagórica, uma vez que esse número era até então desconhecido e fugia o padrão da razão geométrica.

1.3 Poliedros de Platão

Platão (427-347 a.C) foi um filósofo que utilizou o pensamento pitagórico unindo a matemática e a mística do universo, onde alguns de seus pensamentos expressavam o seu fascínio pelos números. Através desses seus pensamentos foram obtidos os sólidos platônicos, volumes espaciais construídos com apenas uma figura plana.

Partindo do triângulo equilátero, Platão obteve o tetraedro, octaedro e o icosaedro, com o quadrado obteve o hexaedro, e com o pentágono obteve o dodecaedro. Tais sólidos vieram posteriormente serem conhecidos como os Poliedros de Platão.

Euclides (325-265 a.C.) foi um matemático grego que conseguiu fazer um dos maiores feitos para a matemática dedutiva, estruturou através de cinco postulados, um sistema rígido dedutivo que consistia em: Método de análise, redução ao absurdo, e demonstração.

Os postulados foram os primeiros passos da geometria organizada que temos conhecimento, onde não haviam contestações a respeito da veracidade ou demonstração deles, eram usados para desenvolver a geometria, mas como esses postulados eram usados por muitos estudiosos e cada um desenvolvia um pouco mais, surgiu um homem que decidiu juntar essas ideias geométrica em uma única obra, como se fosse um resumo de tudo o que estava acontecendo sobre a geometria em vários lugares ao redor do mundo.

Em sua obra chamada "Elementos", Euclides reuniu todos os conhecimentos matemáticos de forma lógica e organizada que foi desenvolvida na Grécia antiga, onde nela há 5 postulados, além de algumas considerações para a Matemática num geral, sabe-se pouco sobre o escritor dessa obra, porém, deve-se a ele o título de Pai da Geometria pois foi a partir de sua obra que toda a Geometria foi desenvolvida, bem como as primeiras ideias sobre polígonos e poliedros que despertaram em outros estudiosos da época a necessidade de descobrir e demonstrar toda essa parte geométrica. Segundo Araújo (2005):

> *Vimos também, que as proposições apresentadas e demonstradas por Euclides têm sempre uma base geométrica e que Euclides apresenta definições precisas, teoremas bem estruturados e demonstrações rigorosas, por vezes simples, de conceitos que à partida, nem sempre são evidentes. (ARAÚJO, GARAPA e LUÍS, 2005, P.38.)*

Arquimedes (287-212 a.C.) foi um físico e matemático que realizou seus estudos com os sucessores de Euclides, seus principais estudos são em relação a Geometria e a Mecânica. Suas obras não foram bem conservadas ao longo da história, por esse motivo tem-se poucos textos sobre seus estudos. Os sólidos semirregulares foram chamados de Poliedros de Arquimedes ou Poliedros Arquimedianos e graças as suas contribuições em relação a Geometria e sólidos geométricos esse conhecimento se desenvolveu ao longo do tempo.

Kepler (1751-1630) foi um astrônomo, matemático alemão e professor de Matemática em uma escola na Áustria. Onde desenvolveu alguns trabalhos na área de óptica, sendo um desses trabalhos uma lente melhorada para telescópio refrator e na astronomia ajudou a legitimar algumas das descobertas de Galileu Galilei (1564-1642).

Kepler descreveu dois poliedros estrelados em 1619 e Poinsot (1777-1859) descreveu outros dois, onde alguns anos depois Cauchy (1789-1857) demonstrou a construção desses poliedros que são obtidos através do Dodecaedro e Icosaedro e que são os únicos poliedros estrelados possíveis. Cauchy denominou esses poliedros de grande e pequeno dodecaedro estrelado e grande e pequeno icosaedro estrelado, respectivamente.

Silva Júnior (2022) fala sobre Kepler e seu brilhantismo ao criar esses poliedros e mesmo assim não ter o devido reconhecimento:

> *Foi um dia, ao pé do quadro-negro enquanto dava aula em Graz, que teve uma súbita revelação que significou o começo de uma viagem apaixonante e mudou o rumo de sua vida. Era, a seu ver, a chave secreta para a compreensão do universo. Kepler desenhou no quadro-negro, para a sua turma, um triângulo equilátero dentro de um círculo, e outro círculo dentro de um triângulo. Pareceu-lhe que a razão dos círculos indicaria a razão das órbitas de Saturno e Júpiter. Kepler voltou-se então aos sólidos de Pitágoras, aqueles usados na Antiguidade pelos gregos que haviam descoberto que apenas cinco sólidos podem ser construídos a partir de figuras geométricas regulares.(SILVA JUNIOR, 2022, P.68.)*

O matemático suíço Euler (1707-1783) conseguiu resolver alguns problemas matemáticos, como as famosas pontes de Konigsberg, e também deu a solução de um problema envolvendo os poliedros.

Apesar dos poliedros serem estudados desde a antiguidade, até o século XVII, nenhum matemático havia observado alguma relação entre as faces, vértices e arestas, até que Euler fez uma descoberta que descreveu em uma carta enviada ao seu amigo Christian Goldbach(1690-1764).

Na carta, Euler afirma que havia descoberto uma relação simples de aritmética, que hoje em dia conhecemos como Teorema de Euler ou Relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

Porém, ele não havia feito uma prova ou demonstração dessa sua relação. Por isso, a veracidade dessa fórmula era questionada pelos matemáticos da época; entretanto, conforme o tempo foi passando, matemáticos como, Adrien Legendre (1752-1833), Augustin Cauchy (1789-1857) e Henrí Poincaré (1854-1912) fizeram algumas demonstrações para comprovar a veracidade da fórmula de Euler. Hoje em dia sabe-se que as demonstrações de Euler e Cauchy ainda possuíam algumas falhas, mas ao longo dos anos foram sendo corrigidas por outros matemáticos.

Depois dos estudos de Euler a geometria se desenvolveu e os primeiros estudos referente a Topologia foram iniciados. Na Topologia algumas formas podem ser figuras improváveis, torcidas, empenadas, puxadas e esticadas, figuras que podem ser deformadas de alguma forma.

Gayo (2015) fala sobre a importância de Euler para a matemática e tudo o que foi desenvolvido após seus estudos:

> *Um dos matemáticos que alcançou notoriedade após resolver um problema em aberto foi Leonhard Euler,após encontrar a resposta para o famoso problema da Basileia. Atualmente Euler é reconhecido como um dos mais importantes da História da Matemática, não só por ter resolvido tal problema, mas principalmente por ter contribuído com a Matemática em diversas áreas com mais de 850 trabalhos, muitos de extrema importância.(GAYO, 2015. P 346.)*

Ainda existem indícios de que a fórmula de Euler havia sido descoberta também por René Descartes (1596-1650) por volta de 1630. Após a morte de Descartes em um navio naufragado foi encontrado um manuscrito onde foi copiado pelo matemático Gottfried Leibniz (1646-1716), porém a fórmula descrita por Descartes em seu manuscrito não é a mesma que Euler, mas é equivalente. Por isso atribuem a Descartes o descobrimento da Fórmula de Euler, e alguns chamam Fórmula de Euler-Descartes.

A geometria dos poliedros desde as civilizações antigas tem despertado interesse em muitos matemáticos. Desde Platão e Arquimedes os poliedros têm sido motivo de admiração por todos os que se debruçam sobre eles. No renascimento, os poliedros regulares foram vistos como o modelo pelo qual o Cosmo organizou os planetas no sistema solar. No mundo moderno essas formas geométricas estão presentes na arquitetura, nas construções civis e nas artes.

Capítulo 2

Poliedros Regulares

2.1 Por que apenas cinco poliedros regulares?

Apesar de haver polígonos regulares com qualquer número de lados, a última proposição ou Teorema dos Elementos de Euclides (século III a.C.) trata de demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares, também chamados de poliedros de Platão.

Proposição Os Poliedros regulares, ou platônicos, têm como faces polígonos regulares de um único tipo, e o número de faces que concorrem em cada vértice é sempre o mesmo em todo o poliedro.

Dem.: A demonstração foi feita por Euclides, em seu livro XIII, da seguinte forma:

I) Se as faces são triangulares, cada ângulo interno de uma face mede 60°. Assim, em cada vértice do poliedro podem concorrer três, quatro ou cinco faces triangulares, pois 3 x 60°, + x 60° e 5 x 60° são produtos menores que 360°, mas não 61 60 = 360° e tampouco 7 x 60° = 420°. Nos casos possíveis, teremos o tetraedro regular (com três triângulos em torno de cada vértice), o octaedro (quatro triângulos em torno de cada vértice) e o icosaedro regular (cinco triângulos em torno de cada vértice).

II) Se as faces de um sólido platônico são quadradas, podemos ter apenas três faces adjacentes a cada vértice, pois 3 x 90° = 270° e 4 x 90° = 360° . Assim, o único poliedro regular de faces quadradas é o cubo.

III) Sabendo que cada ângulo interno de um pentágono regular tem medida a, = 108°, se planejarmos usar faces pentagonais, que têm ângulos internos de 108°, poderemos ter, no máximo, três faces adjacentes a cada vértice, já que 3x 108° = 324° $<$ 360° e 4 x 108° = 432° $>$ 360°.

Já os polígonos regulares de seis lados ou mais não podem ser faces de um poliedro de Platão, pois, nesse caso, cada ângulo interno do polígono será, no mínimo, de medida a, = 120° e, como em cada vértice concorrem ao menos três polígonos, os ângulos concorrentes em um vértice não terão soma menor que 360°.

2.2 Tetraedro

O tetraedro foi o primeiro poliedro escrito por Platão, representando o elemento Fogo, ele possui alguns elementos, são eles: 4 faces que são 4 triângulos equiláteros, 4 vértices e 6 arestas.

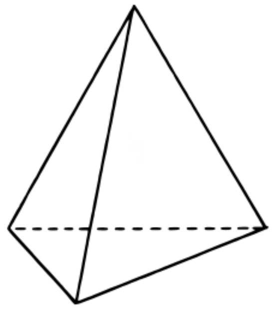

Figura 2.1: Fonte:www.sabermatematica.com.br/wp-content/uploads/2019/06/tetraedro-regular-poliedros-de-platao.png

2.2.1 Construção de um Triângulo Equilátero

I - Considere l uma linha qualquer.

II - Trace uma reta qualquer t e marque A e B sobre t, de modo que a medida do segmento $\overline{AB}$ seja igual a medida da reta l;

III - Trace uma circunferência de raio l com centro em A e depois outra circunferência com centro em B;

IV - Marque o ponto C, intersecção das circunferências. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

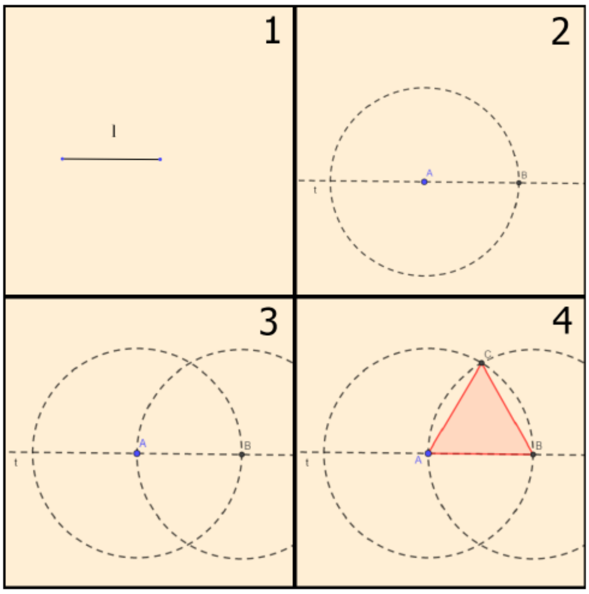

Figura 2.2: Construção de um Triângulo Equilátero

Repetindo essa mesma construção utilizando os vértices do triângulo como vértices dos outros 3 triângulos, podemos desenhar a planificação do tetraedro.

2.2.2 Planificação de um Tetraedro

A planificação do tetraedro é feita com 4 triângulos equiláteros unidos pelos lados formando um triângulo equilátero maior, assim ao dobrarmos cada lado dos triângulos conseguimos formar o tetraedro e identificar as faces, vértices e arestas.

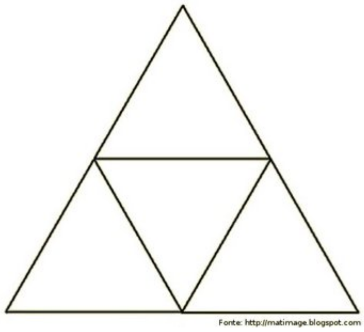

Figura 2.3: Fonte: www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/

Como podemos perceber são 4 triângulos equiláteros e para obtermos o valor da área seria necessário apenas utilizar a mesma fórmula da área de um triângulo equilátero e multiplicarmos por 4, sendo assim:

$A = 4\frac{a\sqrt{3}}{4}$, onde a é a medida da aresta.

O volume de um tetraedro é tratado como um caso particular de uma pirâmide de base triangular, e o resultado é encontrado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3}A_b.h$$

2.3 Hexaedro

O Hexaedro representa o elemento terra, ele possui 6 faces, 8 vértices e 12 arestas, lembrando que o hexaedro é mais conhecido como cubo e é utilizado em nosso cotidiano.

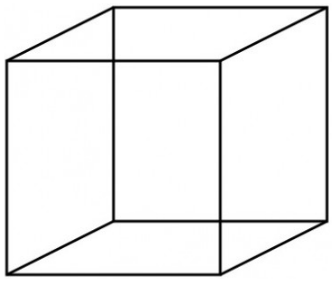

Figura 2.4: Fonte:www.sabermatematica.com.br/wp-content/uploads/2017/03/relacao-de-euler-cubo.png

2.3.1 Construção de um Quadrado

I - Considere o lado AB. Trace a partir de A uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. No mesmo sentido da reta r, trace uma reta s perpendicular a $\overline{AB}$ passando por B;

II - Trace uma circunferência com centro no ponto A e raio com a medida igual ao segmento $\overline{AB}$, em seguida, marque o ponto C de intersecção com a reta r;

III - Trace uma circunferência com centro no ponto B e raio de medida igual ao segmento $\overline{AB}$, em seguida, marque o ponto D de intersecção com a reta s;

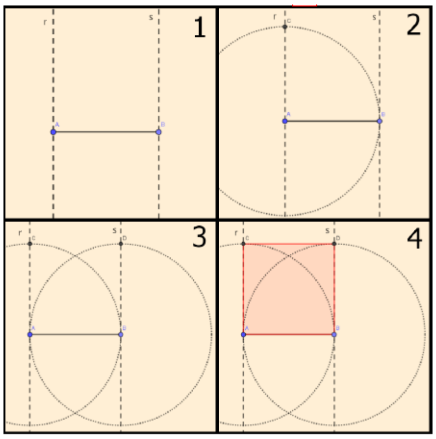

Figura 2.5: Construção de um Quadrado

Utilizando desse quadrado construindo e repetindo o mesmo processo em mais 5 quadrados dispostos na planificação a seguir, conseguimos obter o Hexaedro.

2.3.2 Planificação de um Hexaedro

A planificação do Hexaedro é feita com 6 quadrado formando um T que quando forem dobrados e unidos formarão o Hexaedro.

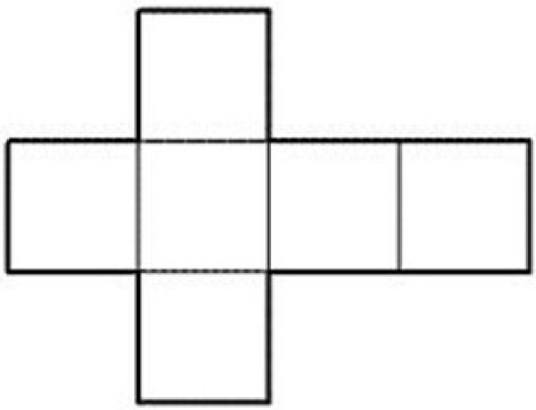

Figura 2.6: Fonte: www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/

Para obtermos o valor da área de um hexaedro, percebemos que são 6 quadrados, ou seja, são 6 áreas de quadrados e pra simplificar podemos escrever a seguinte fórmula:

$A = 6.l^2$, onde l é a medida do lado.

Já para encontrar o valor do volume de um cubo é o mais simples, usado e ensinado nas escolas nos em dia, como todas as medidas de um hexaedro são iguais, podemos escrever a seguinte fórmula que define o volume:

$V = l.l.l = l^3$, onde l é a medida do lado.

2.4 Octaedro

O octaedro é o poliedro de Platão que representa o Ar, sendo formado por 8 faces, 6 vértices e 12 arestas, sendo que as faces são triângulos equiláteros e se encontram nos vértices com mais 4 triângulos retângulos

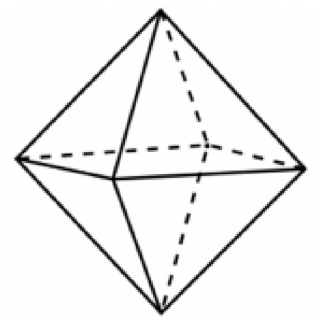

Figura 2.7: Fonte: https://conhecimentocientifico.com/octaedro/

2.4.1 Planificação de um Octaedro

Para planificar o octaedro precisamos desenhar 8 triângulos retângulos sendo que 6 deles em sequência e 2 triângulos desenhados para a parte de cima e outro para a parte de baixo, como mostra a figura abaixo:

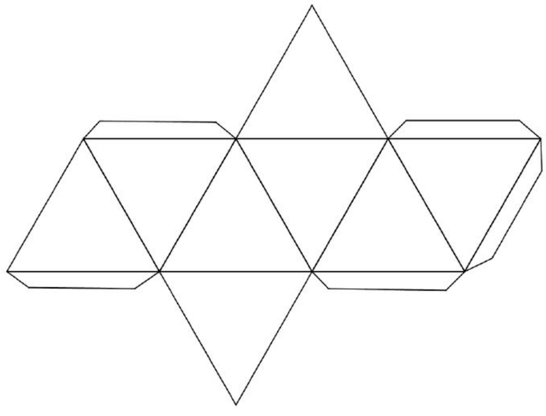

Figura 2.8: Fonte: https://conhecimentocientifico.com/octaedro/

Para obtermos uma fórmula para encontrar o valor da área de um octaedro, sendo que são 8 triângulos equiláteros, logo se multiplicarmos a área de 1 triângulo equilátero por 8, iremos encontrar a fórmula da área de um octaedro, assim:

$A = 2\sqrt{3}.a^2$, onde a é a medida da aresta.

Já para encontrar a fórmula do volume é definida pela seguinte fórmula:

$V = \frac{1}{3}\sqrt{2}.a^3$, onde a é a medida da aresta.

2.5 Dodecaedro

O dodecaedro é um poliedro de Platão que representa o Cosmos, ele é formado por 12 faces, 20 vértices e 30 arestas, onde cada face do dodecaedro é um pentágono.

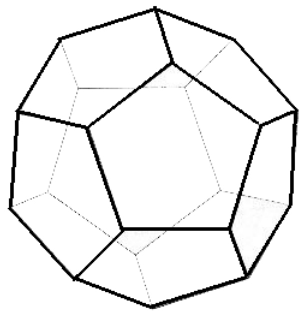

Figura 2.9: Fonte: https://conhecimentocientifico.com/dodecaedro/

2.5.1 Construção de um Pentágono

I - Considere uma circunferência c de centro O e raio qualquer e marque dois diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares entre si;

II - Encontre o ponto médio M do segmento $\overline{AO}$. Com centro no ponto M e raio $\overline{MA}$, trace uma circunferência;

III - Una os pontos M e C e marque o ponto E, intersecção da circunferência com o segmento $\overline{MC}$;

IV - Trace uma circunferência com centro no ponto C e raio $\overline{CE}$, que intercepta a circunferência c nos pontos F e G;

V - O segmento $\overline{FG}$ é o lado do pentágono. Com centro no ponto G e raio de medida igual ao segmento $\overline{FG}$, marque o ponto H sobre a circunferência c. Com centro no ponto H e raio anterior, marque o ponto I. Com centro no ponto I e mesmo raio, marque o ponto J;

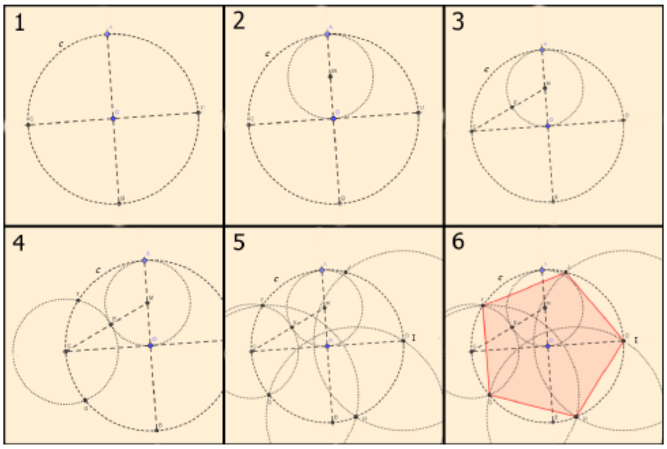

Figura 2.10: Construção de um Pentágono

2.5.2 Planificação de um Dodecaedro

A planificação é interessante pois podemos imaginar 2 pentágonos maiores formados por 6 pentágonos menores cada uma, sendo unidos pelos vértices, como mostra a figura abaixo:

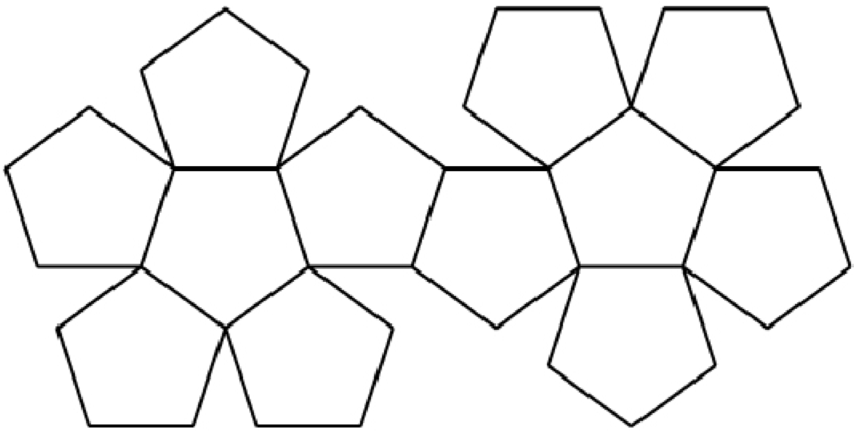

Figura 2.11: Fonte: https://sabermatematica.com.br/dodecaedro.html

Para encontrarmos o valor da área de um Dodecaedro é necessário utilizar a seguinte fórmula:

$$A = 3.a^2\sqrt{25 + 10.\sqrt{5}}, \text{ onde a é a medida da aresta.}$$

Já para encontrarmos o valor do volume de um Dodecaedro precisamos da seguinte fórmula:

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7.\sqrt{5}, \text{ onde a é a medida da aresta.}$$

2.6 Icosaedro

Esse poliedro é o responsável por representar a Água, ele possui 20 faces, 12 vértices e 30 arestas, sendo suas faces triângulos retângulos unidos pelos vértices.

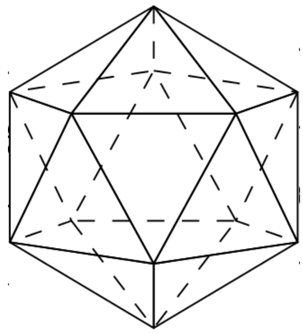

Figura 2.12: Fonte: https://sabermatematica.com.br/icosaedro.html

2.6.1 Construção de um Triângulo Equilátero

De maneira análoga como foi feita na sessão da construção do Tetraedro, utilizamos os mesmos passos para obtermos um triângulo equilátero sendo que nesse caso serão construídos 20 triângulos equiláteros

2.6.2 Planificação de um Icosaedro

Para planificarmos o icosaedro precisamos imaginar 3 sequencias de triângulos equiláteros, a sequência do meio possui 10 triângulos, a sequência que está na parte de cima, e também a que está embaixo, possui 5 triângulos equiláteros ambos, eles são unidos pelos vértices como mostra a imagem abaixo:

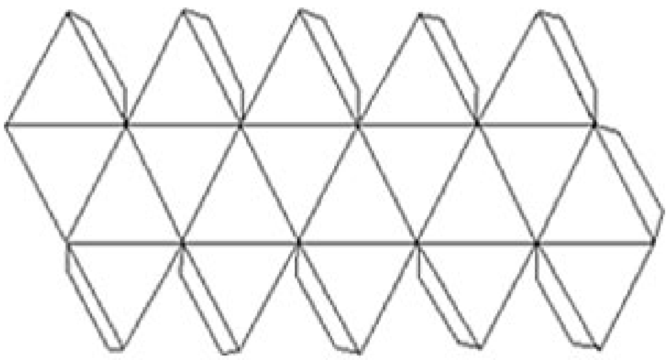

Figura 2.13: Fonte: https://sabermatematica.com.br/icosaedro.html

Para encontrar o resultado que representa a área de um icosaedro, a fórmula a seguir é utilizada para obter esses valores:

$$A = 5.a^3\sqrt{3}, \text{ onde a é a medida da aresta.}$$

Já para o valor do volume de um icosaedro é necessário a utilização da seguinte fórmula:

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5}).a^3, \text{ onde a é a medida da aresta.}$$

Estes são os poliedros regulares, onde foram apresentadas as planificações, construções dos polígonos, áreas e volumes.

Capítulo 3

Poliedros Semirregulares

Para um poliedro ser considerado semirregular é necessário atender a três condições ao mesmo tempo, são elas:

I - O poliedro ser convexo;

II - As faces do poliedro são polígonos regulares, mas não todos de um único tipo, e todas as arestas do poliedro tem o mesmo comprimento;

III - A configuração cíclica de polígonos regulares, em torno de cada vértice, é sempre a mesma para todos os vértices do poliedro, ou seja, todos os vértices são de um único tipo.

Umas das condições para ser semirregular é que não pode ter apenas um único tipo de polígonos regulares, ou seja, um poliedro semirregular pode ter três, quatro ou cinco faces adjacentes a cada vértice, porém não pode ter mais do que isso, assim o poliedro terá os seguintes padrões: (k,l,m) , (k,l,m,n) e (k,l,m,n,p).

Podemos dividir esses padrões da seguinte maneira:

a) Um dos valores de k,l e m é ímpar.

b) Os inteiros k, l e m são todos pares.

Propriedade Simplificadora Generalizada: Se um poliedro semirregular tem padrão (k,l,m) e um dos valores de k,l e m é ímpar, então os outros dois valores são iguais, ou seja, se k é ímpar, $l = m$, se l é ímpar, $k = m$ e se m for ímpar $k = l$.

Dem.: Iremos chamar de A, B e C os três vértices de uma face triangular do poliedro. Como faces adjacentes ao vértice A, temos um triângulo, um l-ágono (polígono de l lados) regular, e um m-ágono (polígono de m lados) regular. Suponhamos que o l-ágono esteja colado ao lado AC (Figura 4.1 (a)). Para caracterizarmos os vértices como sendo do tipo (3,l,m), necessariamente, devemos ter um m-ágono colado à aresta AB.

Isso faz com que o vértice A seja do tipo (3,l,m) e o vértice B seja do tipo (3,m, l), iniciando a "leitura"dos polígonos adjacentes aos vértices pelo triângulo e realizando percursos no sentido anti-horário. Ora, esses dois vértices são equivalentes, do mesmo tipo, mas qual deve ser o tipo do vértice C para que o poliedro tenha todos os seus vértices de um mesmo tipo? Na Figura 4.1 (a), o vértice C é do tipo (3,l,l).Isso significa que a única situação em que os três vértices são equivalentes, em um poliedro de padrão (3,l,m), é aquela na qual os três polígonos vizinhos do triângulo são iguais e, portanto, l = m. Analogamente, chegaremos à mesma conclusão se levarmos em conta que temos um m-ágono colado ao lado AC, conforme ilustra a Figura 4.1 (b). Nesse caso, o vértice C tem o tipo (3,m,m).

De modo semelhante, se l = 3, o poliedro tem padrão (k,3,m), ou seja, (3,m, k). Aplicando o raciocínio usado anteriormente, concluiremos que necessariamente m = k. Ainda, se m = 3, então k = l.

3.1 Tetraedro Truncado

Esse poliedro é obtido apartir do Tetraedro regular, sendo que os cantos do tetraedro são cortados a uma certa distância formando hexágonos, e as partes cortas formam triângulos equiláteros, assim esse poliedros possui 4 hexágonos e 4 triângulos equiláteros.

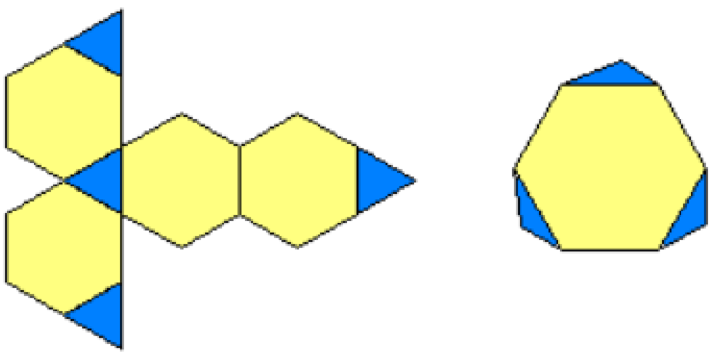

Figura 3.1: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 7.a^2\sqrt{3}$, onde a é a medida da aresta.

$V = \frac{23a^3\sqrt{2}}{12}$, onde a é a medida da aresta.

Sendo um dos poliedros semirregulares mais fáceis de ser construído, pois todos esses poliedros são obtidos através dos regulares.

3.2 Cubo Truncado

Esse poliedro é obtido através do Cubo, onde em suas arestas são feitos cortes formando assim 6 octógonos e 8 triângulos.

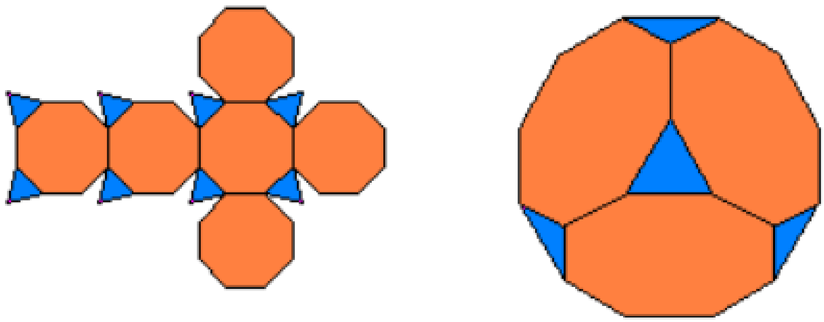

Figura 3.2: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 2.a^2(6 + 6\sqrt{2} + \sqrt{3})$, onde a é a medida da aresta.

$V = \frac{7a^3+(3+2\sqrt{2})}{3}$, onde a é a medida da aresta.

3.3 Cuboctaedro

Esse poliedro é obtido através do cubo, onde os cortes em suas arestas formam 8 triângulos e 6 quadrados.

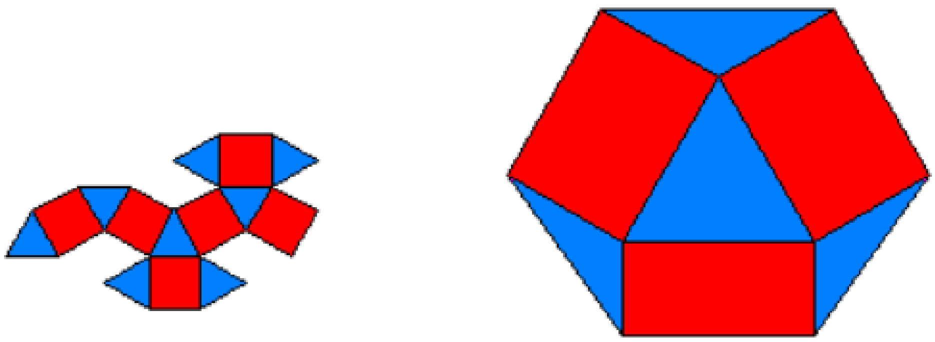

Figura 3.3: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = (6 + 2\sqrt{3})a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = \frac{5\sqrt{2}a^3)}{3}$, onde a é a medida da aresta.

3.4 Octaedro Truncado

Esse poliedro é obtido através de um octaedro, onde os cantos são cortados obtendo 6 quadrados e 8 hexágonos.

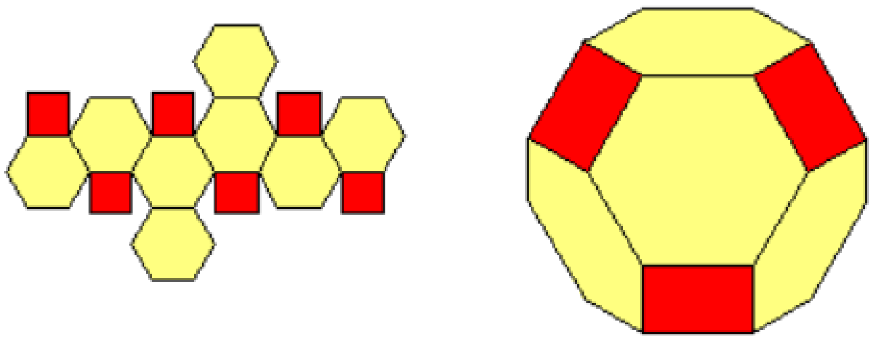

Figura 3.4: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = (6 + 12\sqrt{3}a^3)$, onde a é a medida da aresta.

$V = 8\sqrt{2}a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.5 Cuboctaedro Truncado

Esse poliedro é construído com 12 quadrados, 8 hexágono e 6 octógonos.

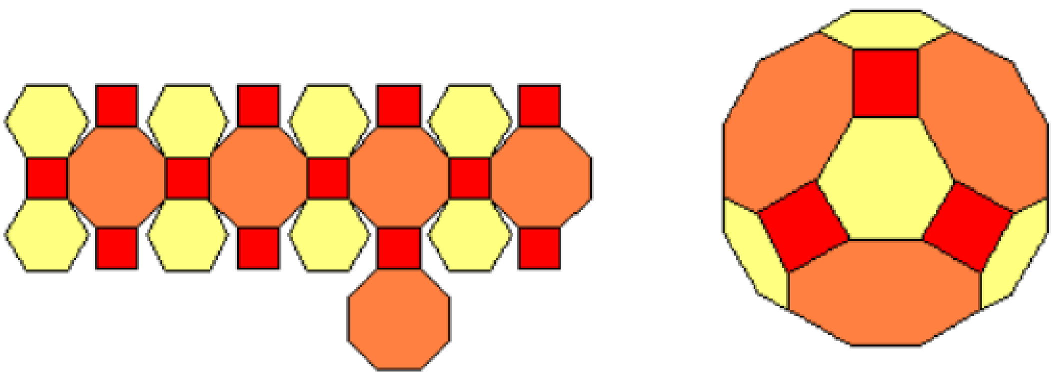

Figura 3.5: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 12(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = (22 + 14\sqrt{2})a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.6 Pequeno Rombicuboctaedro

Esse poliedro é formado por 8 triângulos e 18 quadrados.

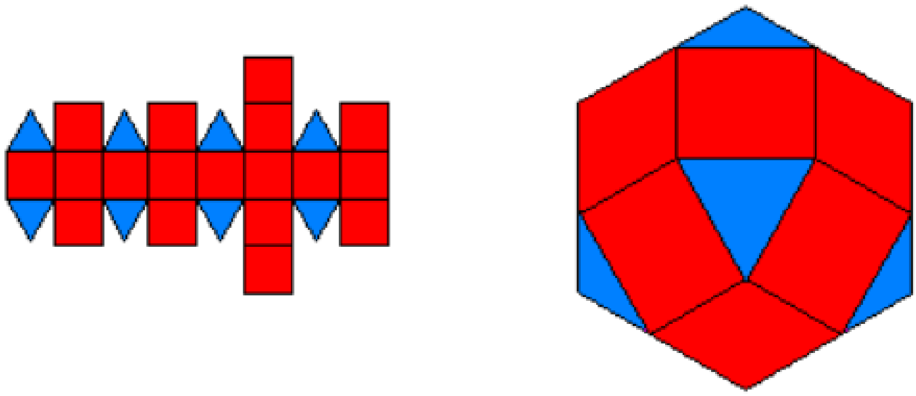

Figura 3.6: Fonte: http://www.uel.br/

3.7 Cubo Achatado

Esse poliedro é composto de 32 triângulos e 6 quadrados.

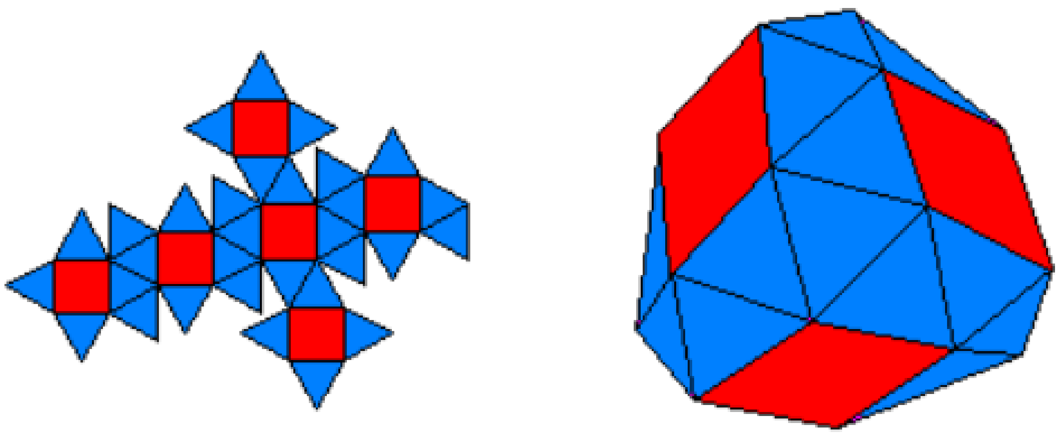

Figura 3.7: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = (6 + 8\sqrt{3})a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = 7,889a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.8 Icosidodecaedro

Esse poliedro é formado por 20 triângulos e 12 pentágonos, é construído cortando os cantos do dodecaedro.

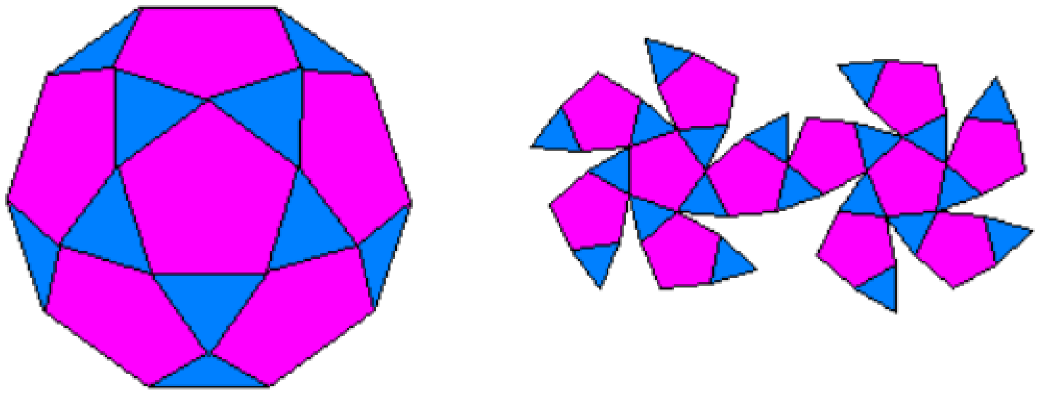

Figura 3.8: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 29,31a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = 13,84a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.9 Dodecaedro Truncado

Esse poliedro é formado por 20 triângulos e 12 decágonos. Se constrói cortando os cantos do dodecaedro.

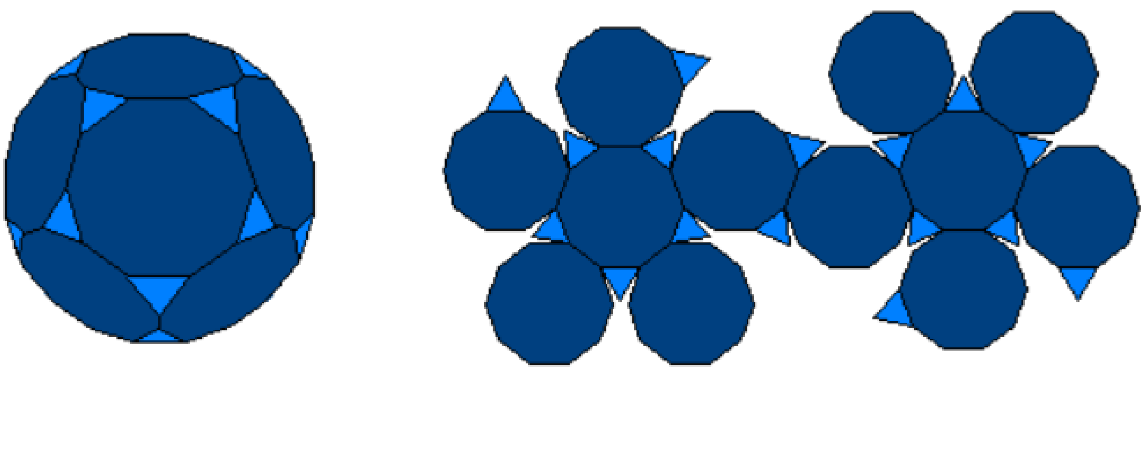

Figura 3.9: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 100,99a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = 85,04a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.10 Icosaedro Truncado

Esse poliedro é formado por 12 pentágonos e 20 hexágonos.

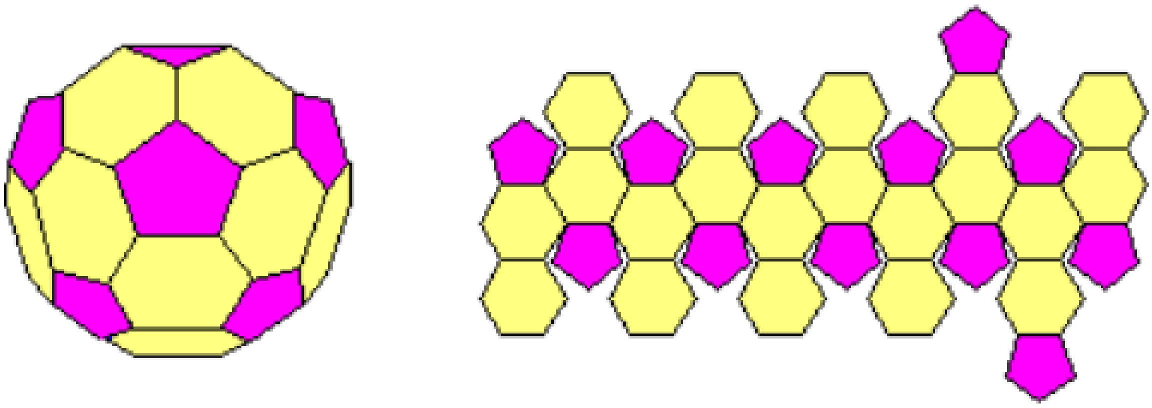

Figura 3.10: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 72,61a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = 55,29a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.11 Pequeno Rombicosidodecaedro

Esse poliedro é composto de 20 triângulos, 30 quadrados e 12 pentágonos.

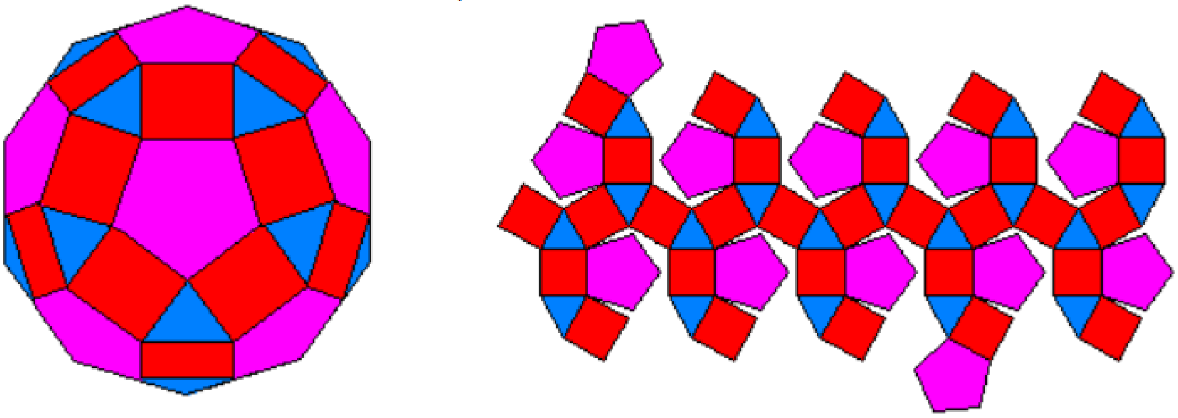

Figura 3.11: Fonte: http://www.uel.br/

3.12 Icosidodecaedro Truncado

Esse poliedro é formado por 30 quadrados, 20 hexágonos e 12 decágonos.

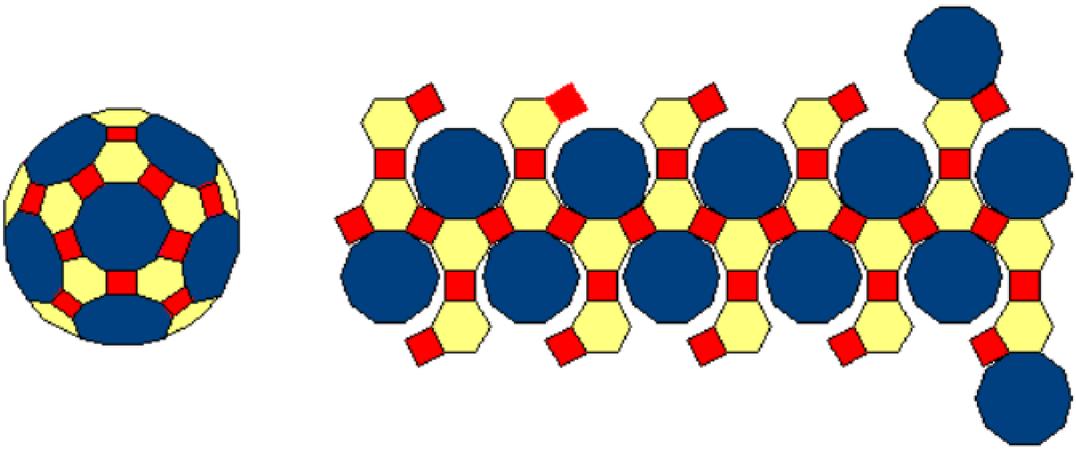

Figura 3.12: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 174,29a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = 206,80a^3$, onde a é a medida da aresta.

3.13 Dodecaedro Achatado

Esse poliedro é formado por 80 triângulos e 12 pentágonos.

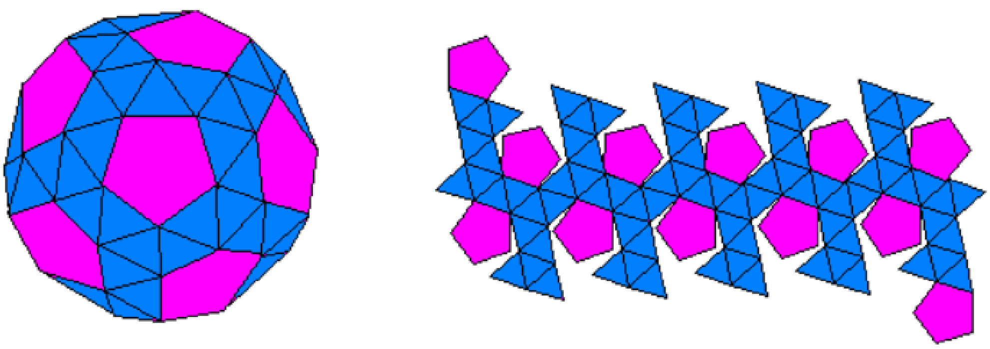

Figura 3.13: Fonte: http://www.uel.br/

A área e volume desse poliedro é encontrado através da seguinte fórmula:

$A = 55,28a^2$, onde a é a medida da aresta.

$V = 37,62a^3$, onde a é a medida da aresta.

Estes são os poliedros semirregulares, onde foram apresentadas as planificações, áreas e volumes.

Considerações Finais

Esperamos que este trabalho possa despertar e incentivar mais pesquisadores a estudarem sobre o assunto. Embora praticamente toda a Geometria já esteja bem definida, existem alguns tópicos que ainda estão em desenvolvimento, visto que a Topologia foi criada a partir de questionamentos após o advento da matemática moderna, e até hoje é possível ver vários estudos a respeito desse tema. A parte histórica serve para mostrar que não foi fácil construir os poliedros, entretanto, atualmente as escolas quando abordam esse conteúdo, não tem levado em consideração todas as suas nuances matemáticas e geométricas envolvidas, porém, quando voltamos as origens, é nítido todo o caminho que foi percorrido na tentativa de demonstrá-los e comprová-los, pois alguns poliedros só foram construídos a partir do século XVII.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Helena; GARAPA, Marco; LUÍS, Rafael. **Elementos de Euclides-Livros VII e IX**.Universidade da Madeira . 2005.

[2] GAYO, Jairo; PROBST, Roy Wilhelm.**O problema que tornou Euler famoso.** Ciência e Natura, v. 37, p. 342-355, 2015.

[3] RAMOS, Maria D. C. Pedrosa. **Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat**. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto-PT. 2013.

[4] SANTOS, Rudinei Alves dos; MANCUSO, Sebastián; SILVA, Francisco Hermes Santos da.**Poliedros de Platão: Abordagem Ancorada no Modelo de Van Hiele e na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud** . Brazilian Journal of Development, v. 7, n. 5, p. 49465-49488, 2021.

[5] SOUZA, C. Monteiro ; SANTOS, Nelcy Magdala Moura ; ARAUJO, M. P. Silva . **História da Matemática**. Recife: EDUFRPE, 2010 (Livro Didático).

[6] SILVA JÚNIOR, Elídio Raimundo da *et al.* **Um estudo sobre os poliedros de Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsot e suas construções no GeoGebra.** Campina Grande - PB. 2022.