



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Heloisa Cardoso Barbosa Gomes

## O Teorema Egregium

Recife-PE  
Fevereiro de 2024

# O Teorema Egregium

por

Heloisa Cardoso Barbosa Gomes

Sob orientação de

**Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Recife-PE  
Fevereiro de 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

G633t

Gomes, Heloisa

O Teorema Egregium / Heloisa Gomes. - 2024.  
71 f. : il.

Orientador: Renato Teixeira Gomes.  
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Licenciatura em Matemática, Recife, 2024.

1. Geometria diferencial. 2. Isometria. 3. Teorema Egregium. I. Gomes, Renato Teixeira, orient. II. Título

CDD 510

---

Heloisa Cardoso Barbosa Gomes

## O Teorema Egregium

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 29/02/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Thiago Araújo de Albuquerque Mendonça  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. José Alan Farias dos Santos  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes (orientador)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Recife-PE  
Fevereiro de 2024

*À minha vó, Lenilda Maria da Silva.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele, eu não teria chegado até aqui. Agradeço também à minha mãe, Shirley Cardoso Barbosa Gomes, por todo o esforço que fez e ainda faz por mim. Sua dedicação, seu amor incondicional e seu apoio constante foram pilares essenciais em minha jornada. Sou eternamente grata por ter uma mãe tão incrível ao meu lado. Ao meu noivo, Reivel Antônio Andrade da Conceição, expresso minha profunda gratidão por todo o apoio e compreensão durante esta caminhada. Seu amor, incentivo e paciência foram fontes de força e conforto em momentos de dificuldade. Ao meu pai, Luciano Gomes da Silva, e à toda minha família, meu mais sincero agradecimento por acreditarem em mim e por torcerem pelo meu sucesso.

Expresso minha gratidão ao meu orientador, Professor Dr. Renato Teixeira Gomes, por toda supervisão, paciência e direcionamento durante o período de estudo, preparando-me para o futuro. Suas orientações foram cruciais não apenas para o meu desenvolvimento acadêmico, mas também para o meu crescimento pessoal. Gostaria também de agradecer ao Prof. Dr. Thiago Araújo de Albuquerque Mendonça e ao Prof. Dr. José Alan Farias dos Santos por aceitarem fazer parte da banca e por todas as contribuições feitas em meu trabalho.

Expresso minha gratidão a todos os meus amigos por todo incentivo e compartilhamento de conhecimento. Em especial, agradeço a Alejandro Loamy, Cleianderson Paz, Dayene Vitória, Gemeson Gama, Jefferson Matheus, Lais Karine, Laryssa Desiree, Lucas Freitas, Pablo Rodrigo, Paulo Almeida, Pedro Borges, Sillas Bernardo, Vinícius Barreto e todos os colegas do departamento. Vocês não apenas tornaram o curso mais leve, mas também enriqueceram minha experiência de aprendizado com suas ideias, discussões e amizade. Sou profundamente grata por ter amigos tão incríveis ao meu lado.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UFRPE, em especial ao Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva, cujo papel foi fundamental no meu desenvolvimento acadêmico. Cada um deles contribuíram de maneira significativa para a minha formação, seja através de suas aulas, orientações ou simplesmente por compartilharem seu vasto conhecimento e paixão pela matemática.

Por fim, agradeço também à Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) por proporcionar um ambiente de aprendizado enriquecedor e propício ao desenvolvimento intelectual.

# Resumo

Durante o desenvolvimento da geometria diferencial, por volta do século XVII, um antigo problema ocupava a mente dos matemáticos da época que era determinar se o chamado 5º postulado de Euclides era de fato um postulado ou um teorema. Tal postulado, que teve uma versão equivalente publicada em 1795, por John Playfair (1748–1819), diz que: "por um ponto fora de uma reta dada, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada". Houveram muitas tentativas de "provar" o quinto postulado, sendo que todas estas fracassaram. A resposta a esta questão foi dada anos mais tarde por Gauss, Lobachevski e Bolyai. Em sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gauss mostra que a curvatura  $K(p)$  de uma superfície no ponto  $p$ , calculada inicialmente através do determinante da diferencial de  $dN_p$  que depende das chamadas primeira e segunda formas fundamentais, depende na verdade apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, e pode ser calculada através de uma fórmula que leva o seu nome, a chamada fórmula de Gauss. Como consequência desta fórmula, temos o Chamado Teorema Egregium que afirma que a curvatura Gaussiana de uma superfície é um invariante intrínseco, isto é, não depende do ambiente a qual a superfície está e, conseqüentemente, é invariante por isometrias locais. Tal descoberta está intimamente relacionada com geometrias não euclidianas, visto que a geometria de uma superfície com curvatura não nula é não euclidiana. Uma consequência desse fato é que o 5º postulado é de fato um postulado e não um teorema.

Neste trabalho, faremos um estudo dos conceitos necessários para a compreensão do teorema Egregium de Gauss e sua demonstração, além de algumas aplicações deste importante resultado.

**Palavras-Chave:** Geometria diferencial; Isometria; Teorema Egregium.

# Abstract

During the development of differential geometry around the 17th century, an old problem occupied the minds of mathematicians at the time, which was determining whether the so-called 5th postulate of Euclid was in fact a postulate or a theorem. This postulate, which had an equivalent version published in 1795 by John Playfair (1748–1819), says that: through a point outside a given straight line it is possible to draw a single straight line parallel to the given straight line". There were many attempts to "prove" the fifth postulate, all of which failed. The answer to this question was given years later by Gauss, Lobachevski and Bolyai. In their work *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gauss shows that the curvature  $K(p)$  of a surface at the point  $p$ , initially calculated through the determinant of the differential of  $dN_p$  which depends on the so-called first and second fundamental forms, actually depends only on the coefficients of the first fundamental form and their derivatives, and can be calculated using a formula that bears his name, the so-called Gauss formula. As a consequence of this formula we have the so-called Egregium Theorem which states that the Gaussian curvature of a surface is an invariant intrinsic, that is, it does not depend on the environment the surface is in and consequently, it is invariant due to local isometries. This discovery is closely related to non-Euclidean geometries, since the geometry of a surface with non-zero curvature is non-Euclidean. A consequence of this fact is that the 5th postulate is in fact a postulate and not a theorem.

In this work, we will study the concepts necessary to understand Gauss's Egregium theorem and its demonstration, as well as some applications of this important result.

**KeyWords:** Differential Geometry; Isometry; Egregium Theorem.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Um Pouco Sobre Superfícies Regulares em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>11</b>
1.1 A diferencial de uma Aplicação Diferenciável . . . . .	11
1.2 Superfícies Regulares . . . . .	13
1.3 Mudança de Parâmetros e Funções Diferenciáveis sobre Superfícies . . . . .	18
1.4 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação . . . . .	22
1.5 Primeira Forma Fundamental . . . . .	25
<b>2 A aplicação Normal de Gauss e a Curvatura Gaussiana</b>	<b>31</b>
2.1 Orientação de Superfícies . . . . .	31
2.2 Aplicação Normal de Gauss . . . . .	36
2.3 Segunda Forma Fundamental . . . . .	39
2.4 A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais . . . . .	45
<b>3 Isometrias e o Teorema Egregium de Gauss</b>	<b>49</b>
3.1 Isometrias . . . . .	49
3.2 O Teorema egregium de Gauss e as Equações de Compatibilidade . . . . .	54
3.3 Aplicações . . . . .	65
<b>Considerações Finais</b>	<b>69</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>70</b>

# Lista de Figuras

1.1	Representação da diferencial de uma aplicação diferenciável. . . . .	11
1.2	Uma parametrização de uma Superfície Regular. . . . .	13
1.3	Curvas coordenadas em $S$ . . . . .	14
1.4	Diagrama da Mudança de Parâmetros. . . . .	18
1.5	Diagrama de uma função diferenciável em um ponto da superfície. . . . .	20
1.6	Aplicação diferenciável entre superfícies regulares. . . . .	21
1.7	Diagrama da construção de $\beta$ . . . . .	22
1.8	Representação de $w$ e $d\phi_p(w)$ nas superfícies regulares $S_1$ e $S_2$ , respectivamente. . . . .	24
1.9	Helicóide. . . . .	27
1.10	Uma superfície de revolução. . . . .	28
2.1	Orientação de $T_pS$ . . . . .	32
2.2	Aplicação Normal de Gauss. . . . .	36
2.3	Variação do vetor normal em uma vizinhança de $p$ . . . . .	37
2.4	Curvatura Normal. . . . .	40
2.5	$II_p(v) > 0$ . . . . .	41
2.6	$II_p(v) < 0$ . . . . .	41
2.7	$II_p(v) > 0$ para umas direções e $II_p(v) < 0$ para outras direções . . . . .	42
2.8	Curvatura da seção normal, Meusnier. . . . .	43
2.9	Seções normais sobre $S^2$ . . . . .	43
2.10	O catenoide. . . . .	48
3.1	Isometria local entre o cilindro e o plano. . . . .	51
3.2	Diagrama da aplicação $\varphi$ . . . . .	52
3.3	O catenoide. . . . .	53

# Introdução

No ano de 1818, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) foi chamado pelo governo do reino de Hanover para supervisionar um levantamento topográfico do reino. Tal tarefa, embora tediosa, teve um importante papel para o desenvolvimento de uma de suas obras mais importantes, a *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publicado em 1828 (GAUSS, (1828)). Nesta obra, Gauss introduz o conceito de geometria diferencial intrínseca, isto é, o estudo das propriedades geométricas de uma superfície que são independentes das maneiras de mergulhá-la em  $\mathbb{R}^3$ . Utilizando a representação paramétrica introduzida por Leonhard Euler (1707–1783), onde as coordenadas  $(x, y, z)$  de um ponto  $p$  de uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  são funções de duas variáveis independentes  $u$  e  $v$ , isto é,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , e  $z = z(u, v)$ , Gauss define uma forma quadrática no espaço tangente  $T_p S$ , chamada primeira forma fundamental, em termos de três funções  $E$ ,  $F$ ,  $G$  de  $u$  e  $v$  que, em sua essência, determinam medidas geométricas em  $S$  como comprimentos, ângulos e áreas em  $S$ . Desta forma, as propriedades intrínsecas da superfície são aquelas que podem ser expressas exclusivamente em termos da primeira forma fundamental e suas derivadas.

Influenciado por seus estudos em astronomia, Gauss define a representação esférica de uma superfície como sendo uma aplicação  $N$  que a cada ponto de  $S$  associa um vetor normal unitário na esfera unitária, a qual chamaremos de aplicação normal de Gauss. Para calcular explicitamente a curvatura  $K$  da superfície em um ponto  $p$ , Gauss fornece uma fórmula em termos do determinante da matriz da diferencial da representação esférica  $N$ , e uma fórmula em termos das funções  $E$ ,  $F$  e  $G$  e suas derivadas. Esta última é chamada Fórmula de Gauss e dela decorre o teorema Egregium de Gauss, que em outras palavras, nos diz que a curvatura Gaussiana é um invariante intrínseco da superfície pois esta depende apenas das funções  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e suas derivadas.

Neste trabalho, demonstraremos o Teorema Egregium de Gauss e apresentaremos algumas aplicações. No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos preliminares necessários a compreensão deste resultado como os conceitos de diferencial de uma função, superfícies regulares e primeira forma fundamental. No segundo capítulo, apresentaremos a aplicação normal de Gauss e como através do estudo da diferencial desta podemos definir a curvatura de uma superfície  $S$  em um ponto  $p$ . Além disso, exploraremos também uma outra forma quadrática, a saber, a segunda forma fundamental e como esta nos da

informação de como a superfície se "encurva" em uma dada direção de  $T_pS$ , além de obter uma expressão para a curvatura gaussiana em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. No capítulo 3, apresentaremos o conceito de isometria, alguns exemplos e uma proposição que garante que sob algumas condições uma certa aplicação será uma isometria. Por fim, investigando as derivadas dos vetores do triedro  $\{N, x_u, x_v\}$ , obteremos a fórmula de Gauss e demonstraremos o teorema egregium de Gauss, apresentando algumas aplicações.

# Capítulo 1

## Um Pouco Sobre Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$

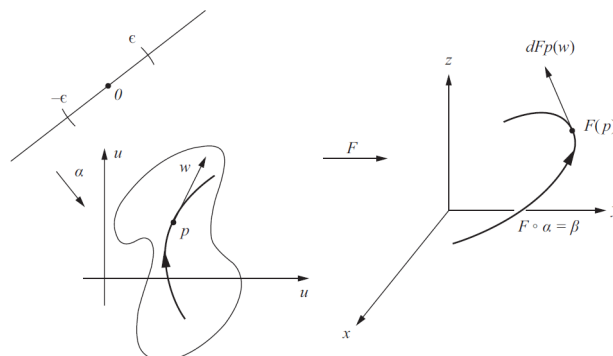
### 1.1 A diferencial de uma Aplicação Diferenciável

Nesta seção, apresentaremos uma das ideias fundamentais para o estudo da geometria de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , a ideia de diferencial de uma aplicação  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é uma transformação linear que contém informações a respeito da taxa de variação desta aplicação.

**Definição 1.1.** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Associamos a cada  $p \in U$  uma aplicação linear  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é chamada a diferencial de  $F$  em  $p$ , e é definida da seguinte maneira: sejam  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$  (Figura 1.1). Pela regra da cadeia, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  também é diferenciável. Então definimos a diferencial de  $F$  em  $p$  aplicada a  $w$  por

$$dF_p w = \beta'(0).$$

Figura 1.1: Representação da diferencial de uma aplicação diferenciável.



Fonte: CARMO (2014, p. 151).

**Proposição 1.2.** *A definição dada acima para  $dF_p$  não depende da escolha da curva que passa por  $p$  com vetor tangente  $w$  e  $dF_p$  é, de fato, uma aplicação linear.*

*Demonstração.* Trabalharemos com o caso  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sejam  $(u, v)$  as coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  e  $(x, y, z)$  as coordenadas em  $\mathbb{R}^3$ . Sejam  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Então, podemos escrever  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$\alpha'(0) = w = u'(0)e_1 + v'(0)e_2.$$

Seja  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , e

$$\beta(t) = F \circ \alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Então, usando a regra da cadeia e considerando derivadas em  $t = 0$ , obtemos

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_1 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_3$$

ou ainda,

$$\beta'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = dF_p(w).$$

Isso mostra que  $dF_p$  é representada nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , por uma matriz que depende apenas das derivadas parciais em  $p$  das funções coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de  $F$  e do vetor  $w$ . Logo,  $dF_p$  é uma aplicação linear e não depende da escolha da curva  $\alpha$ .  $\square$

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em LIMA (2004), p.282.

**Teorema 1.3** (Teorema da Função Inversa). *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in U$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja um isomorfismo. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .*

**Definição 1.4.** Uma aplicação diferenciável  $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  de  $V$  sobre  $W$ , onde  $V$  e  $W$  são conjuntos abertos, é chamada um difeomorfismo de  $V$  sobre  $W$  se  $F$  tem inversa diferenciável.

O teorema da função inversa afirma que se em um ponto  $p \in U$  a diferencial  $dF_p$  é um isomorfismo, então  $F$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $p$ .

**Proposição 1.5** (Regra da Cadeia para Aplicações). *Sejam  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicações diferenciáveis, onde  $U$  e  $V$  são conjuntos abertos tais que  $F(U) \subset V$ . Então  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação diferenciável, e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

## 1.2 Superfícies Regulares

**Definição 1.6.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que (Figura 1.2)

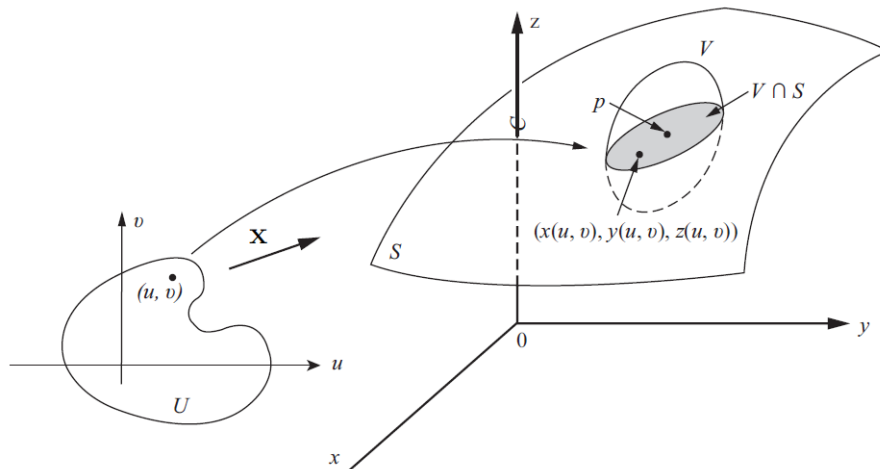
1.  $\mathbf{x}$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .

2.  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  é contínua pela condição 1,  $\mathbf{x}$  tem inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.
3. (**Condição de Regularidade**) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Figura 1.2: Uma parametrização de uma Superfície Regular.



Fonte: CARMO (2014, p. 62).

Chamaremos  $\mathbf{x}$  de uma parametrização local ou um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança  $V \cap S$  de  $p$ , sendo esta vizinhança chamada vizinhança coordenada.

Para entender melhor a condição 3, iremos calcular a matriz da aplicação linear  $dx_q$  nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  dadas por  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , respectivamente. Seja  $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $e_1$  vetor tangente a curva  $\alpha(t) = (u_0 + t, v_0)$ , com  $\alpha(0) = (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(t) = (1, 0) = e_1$ . A imagem de  $\alpha$  por  $x$  é

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \mathbf{x} \circ \alpha(t) = (x(\alpha(t)), y(\alpha(t)), z(\alpha(t))) \\ \beta(t) &= \mathbf{x}(u_0 + t, v_0) = (x(u_0 + t, v_0), y(u_0 + t, v_0), z(u_0 + t, v_0)). \end{aligned}$$

Derivando  $\beta(t)$  com relação a  $t$ , pela regra da cadeia temos

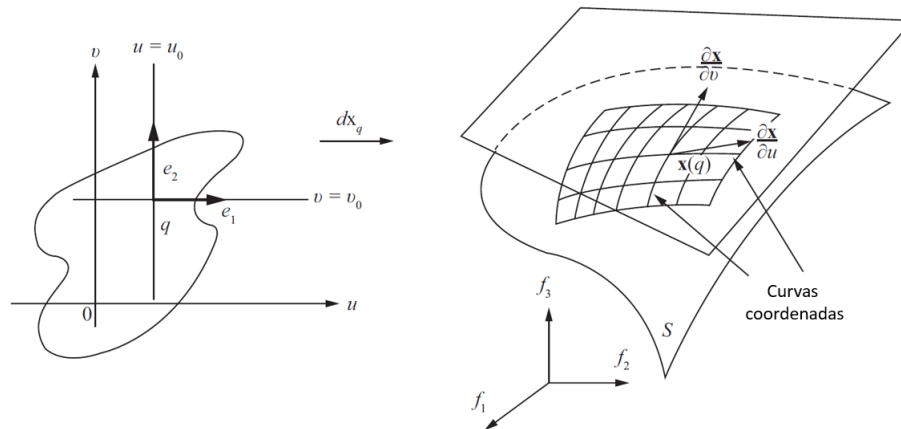
$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

A curva  $\beta$  acima é chamada curva coordenada  $v = v_0$ , seu traço está em  $S$  e tem em  $\mathbf{x}(q)$  o vetor tangente (Figura 1.3)

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \mathbf{x}_u$$

onde as derivadas são calculadas em  $(u_0, v_0)$  e o vetor  $\beta'(0)$  é indicado pelas suas componentes na base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

Figura 1.3: Curvas coordenadas em S.



Fonte: CARMO (2014, p. 63).

Assim, pela definição de diferencial, temos,

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \mathbf{x}_u.$$



De forma análoga, para curva coordenada  $u = u_0$ , temos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \mathbf{x}_v.$$

Desta forma, a matriz de  $d\mathbf{x}_q$ , também chamada de matriz Jacobiana, com relação as bases  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$  será

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix},$$

A condição 3 da Definição 1.6 exige que a diferencial  $d\mathbf{x}_q$  seja injetiva, então os dois vetores coluna desta matriz devem ser linearmente independentes ou de forma equivalente, que o produto vetorial

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0.$$

De outro modo, para saber se a diferencial é injetiva basta verificar se a matriz Jacobiana tem posto 2, ou seja, um dos determinantes

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

seja diferente de zero em  $q = (u, v), \forall q \in U$ . Aqui ressaltamos que na definição 1.6 a injetividade na condição 2 tem como finalidade excluir a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares e a condição 3, garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de  $S$ .

No que segue, enunciaremos duas proposições que garantem que algumas classes de conjuntos são superfícies regulares.

**Proposição 1.7.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  com  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

*Demonstração.* Basta mostrar que a aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad \text{com } (u, v) \in U,$$

é uma parametrização do gráfico de  $f$ . Observe que a condição 1 é facilmente atendida, dado que as derivadas parciais das funções componentes de  $\mathbf{x}$  são contínuas ( $f$  é

diferenciável e, conseqüentemente, é contínua). Além disso, note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial v} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= f_u(u, v), & \frac{\partial z}{\partial v} &= f_v(u, v),\end{aligned}$$

com isso a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_{(x,y)}$  é dada por

$$d\mathbf{x}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{bmatrix},$$

sendo a condição 3 satisfeita, pois  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$ . Por fim, observe que cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $\mathbf{x}$  de um único ponto  $(u, v) \in U$ . Assim,  $\mathbf{x}$  é bijetiva, e como  $\mathbf{x}^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção  $\pi(x, y, z) = (u, v)$  de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$  e assim  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua. Logo,  $\mathbf{x}$  é uma parametrização do gráfico de  $f$  e com isso podemos concluir que todo gráfico de uma função diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $U$  conjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ , é uma superfície regular. □

**Definição 1.8.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ .

**Definição 1.9.** Diremos que  $a$  é valor regular de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se a diferencial  $df_p$  é sobrejetiva  $\forall p \in f^{-1}(a) = \{p \in U; f(p) = a\}$ .

Sendo  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , a diferencial  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear que é sobrejetivo ou nulo. Com efeito, sua matriz é dada por

$$df_p = \left[ \frac{\partial f(p)}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \right]_{1 \times n},$$

e como a dimensão da imagem é no máximo 1, então  $df_p$  ou é sobrejetiva ou é nula. No caso de  $df_p$  não ser sobrejetiva, equivale a dizermos que  $f_x = f_y = f_z = 0$  em  $p$ . Portanto,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f_x, f_y$  e  $f_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}.$$

**Proposição 1.10.** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

A proposição acima não será demonstrada neste trabalho, mas o leitor poderá encontrar a demonstração em CARMO (2014), p. 69.

**Exemplo 1.11.** Vamos mostrar que o Hiperboloide de Uma Folha

$$H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

é uma superfície regular.

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Note que  $f$  é uma função diferenciável, uma vez que as derivadas parciais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = -\frac{2z}{c^2},$$

existem e são contínuas. Além disso, observe que

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou seja,  $f^{-1}(0) = H$ . A matriz da diferencial  $df_{(x,y,z)}$  num ponto  $(x, y, z)$  é dada por:

$$df_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & -\frac{2z}{c^2} \end{bmatrix}.$$

Com isso,

$$df_{(x,y,z)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{a^2} = 0, \quad \frac{2y}{b^2} = 0 \text{ e } -\frac{2z}{c^2} = 0.$$

Portanto,

$$df_{(x,y,z)} = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

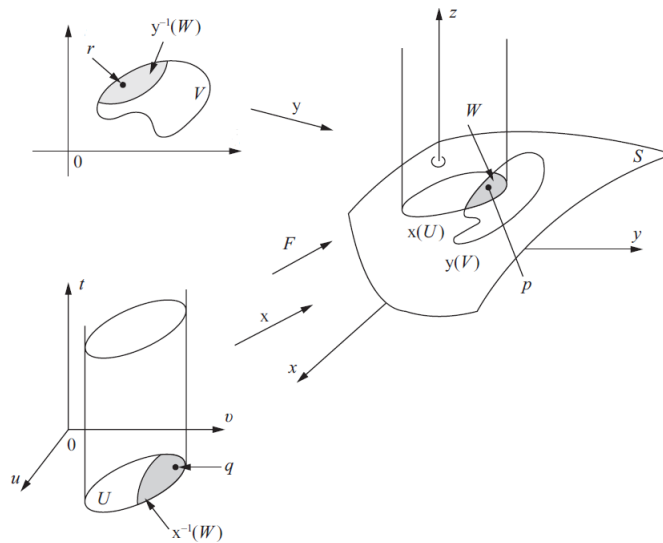
Se  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , então  $df_{(x,y,z)}$  é sobrejetiva. Assim, sobre os pontos de  $H$ ,  $df_{(x,y,z)}$  é sobrejetiva e, conseqüentemente, 0 é o valor regular de  $f$ . Pela proposição anterior,  $H$  é uma superfície regular.

### 1.3 Mudança de Parâmetros e Funções Diferenciáveis sobre Superfícies

Neste momento estamos interessados em definir funções e aplicações diferenciáveis sobre uma superfície regular  $S$ . Como uma superfície regular é "coberta" por imagens de parametrizações, utilizaremos esta estrutura para definir a diferenciabilidade de funções e aplicações em  $S$ . Porém tal definição naturalmente não pode depender do sistema de coordenadas que utilizaremos para tal. Assim, precisaremos do seguinte teorema.

**Proposição 1.12** (Mudança de parâmetros). *Seja  $p$  um ponto da superfície regular  $S$ , e sejam  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Então a mudança de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  é um difeomorfismo, isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$  (Figura 1.4).*

Figura 1.4: Diagrama da Mudança de Parâmetros.



Fonte: CARMO (2014, p. 83).

*Demonstração.* A aplicação  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ , sendo a composição de homeomorfismos, é um homeomorfismo. Não é possível concluir, com argumento análogo, que  $h$  é diferenciável, já que  $\mathbf{x}^{-1}$  está definida em um subconjunto aberto de  $S$ , e não sabemos ainda o que vem a ser uma função diferenciável definida em  $S$ . Iremos proceder da seguinte maneira. Seja  $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$  e defina  $q = h(r)$ . Como  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma parametrização, podemos supor que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Estendemos  $\mathbf{x}$  a uma aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\begin{aligned} F(u, v, t) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t) \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) + (0, 0, t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Geometricamente,  $F$  aplica um cilindro vertical  $C$  sobre  $U$  em um "cilindro vertical" sobre  $\mathbf{x}(U)$ , levando cada seção de  $C$  com altura  $t$  na superfície  $\mathbf{x}(u, v) + te_3$ , onde  $e_3$  é o vetor unitário do eixo  $Oz$ . Observe que  $F$  é diferenciável e que a restrição  $F|_{U \times \{0\}} = \mathbf{x}$ . Calculando o determinante da diferencial  $dF_q$ , obtemos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança  $M$  de  $\mathbf{x}(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $M$ . Pela continuidade de  $\mathbf{y}$ , existe uma vizinhança  $N$  de  $r$  em  $V$  tal que  $\mathbf{y}(N) \subset M$ . Observe que, restrita a  $N$ ,  $h|N = F^{-1} \circ \mathbf{y}|N$  é composição de funções diferenciáveis. Assim sendo, podemos aplicar a regra da cadeia para aplicações e concluir que  $h$  é diferenciável em  $r$ . Por  $r$  ser arbitrário,  $h$  é diferenciável em  $\mathbf{y}^{-1}(W)$ . Aplicando exatamente o mesmo argumento, pode-se mostrar que a aplicação  $h^{-1}$  é diferenciável, e portanto  $h$  é um difeomorfismo.  $\square$

Em outras palavras, se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

$$\mathbf{y}(w, s) = (x(w, s), y(w, s), z(w, s)), \quad (w, s) \in V,$$

então a mudança de coordenadas  $h$  dada por

$$u = u(w, s), \quad v = v(w, s), \quad (w, s) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

é tal que as funções  $u$  e  $v$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além disso, a aplicação  $h$  pode ser invertida, fornecendo

$$w = w(u, v), \quad s = s(u, v), \quad (u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W),$$

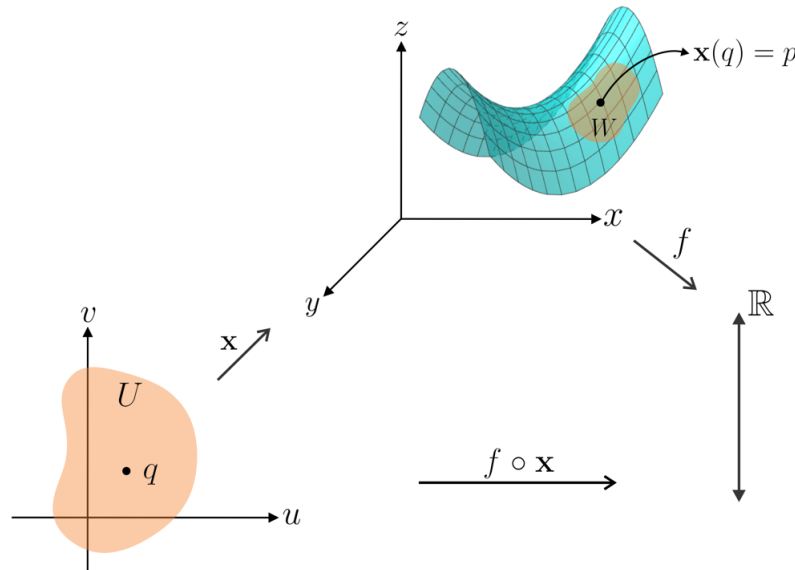
onde as funções  $w$  e  $s$  também possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(w, s)} \cdot \frac{\partial(w, s)}{\partial(u, v)} = 1,$$

isto implica que os determinantes Jacobianos, tanto de  $h$  como de  $h^{-1}$ , são diferentes de zero em todos os pontos.

**Definição 1.13.** Seja  $f : W \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um aberto  $W$  de uma superfície regular  $S$ . Diremos que  $f$  é diferenciável em  $p \in W$  se, para alguma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in \mathbf{x}(U) \subset W$ , a composição  $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$  (Figura 1.5). A função  $f$  é diferenciável em  $W$  se é diferenciável em todos os pontos de  $W$ .

Figura 1.5: Diagrama de uma função diferenciável em um ponto da superfície.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Proposição 1.14.** A definição de uma função diferenciável independe da escolha da parametrização.

*Demonstração.* De fato, sejam  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  outra parametrização de  $S$ , onde  $\mathbf{x}_1(q_1) = p$ , com  $q_1 \in U_1$  e  $\mathbf{x}_1(U_1) \subset W$ . Denote  $\mathbf{x}_1^{-1}(V) \subset U_1$  e  $\mathbf{x}^{-1}(V) \subset U$ , com  $V = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{x}_1(U_1)$ , perceba que  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(V)$  é diferenciável, logo  $f \circ \mathbf{x}_1 = f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}_1 = f \circ \mathbf{x} \circ h$  é diferenciável em  $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ . Daí, a independência afirmada.  $\square$

Agora definiremos o que são aplicações diferenciáveis entre superfícies.

**Definição 1.15.** Uma aplicação contínua  $\phi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ , de um conjunto aberto  $V_1$  de uma superfície regular  $S_1$  em uma superfície regular  $S_2$ , é diferenciável em  $p \in V_1$  se

dadas parametrizações

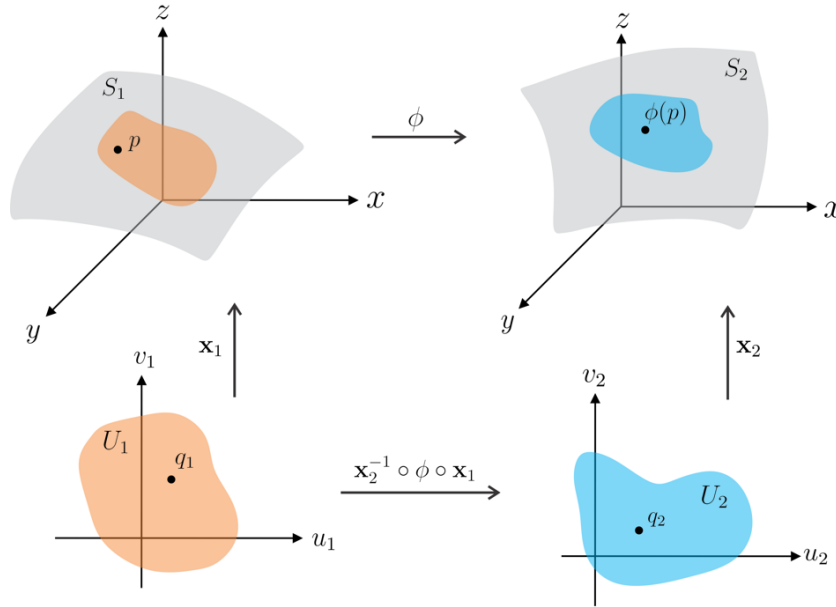
$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  e  $\phi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ , a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2,$$

é diferenciável em  $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ . A aplicação  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1$  é chamada a expressão local de  $\phi$  nas parametrizações  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  (Figura 1.6).  $\phi(p)$

Figura 1.6: Aplicação diferenciável entre superfícies regulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em outras palavras,  $\phi$  é diferenciável se, quando expressa em coordenadas locais como  $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ , as funções  $\phi_1(u, v)$  e  $\phi_2(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Convém demonstrarmos que esta definição não depende da escolha de uma parametrização.

**Proposição 1.16.** *A definição de uma aplicação diferenciável entre superfícies independe da escolha da parametrização.*

*Demonstração.* Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares e  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável em um ponto  $p$  de  $S_1$  e  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente. Suponha agora que  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  sejam também parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Observe que

$$\mathbf{y}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1 = h_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 \circ h_1^{-1},$$

onde  $h_2 = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2$  e  $h_1^{-1} = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1$  são mudanças de parâmetros. Como  $h_1^{-1}$ ,  $h_2$  e  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1$  são diferenciáveis, sua composição também é. Portanto,  $\mathbf{y}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{y}_1$  é diferenciável em  $\mathbf{y}_1^{-1}(p)$ , logo  $\phi$  é diferenciável em  $p$  com relação às parametrizações  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$ .  $\square$

**Definição 1.17.** Duas superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  com uma inversa diferenciável  $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ . Uma tal  $\phi$  é chamada de difeomorfismo de  $S_1$  em  $S_2$ .

### 1.4 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação

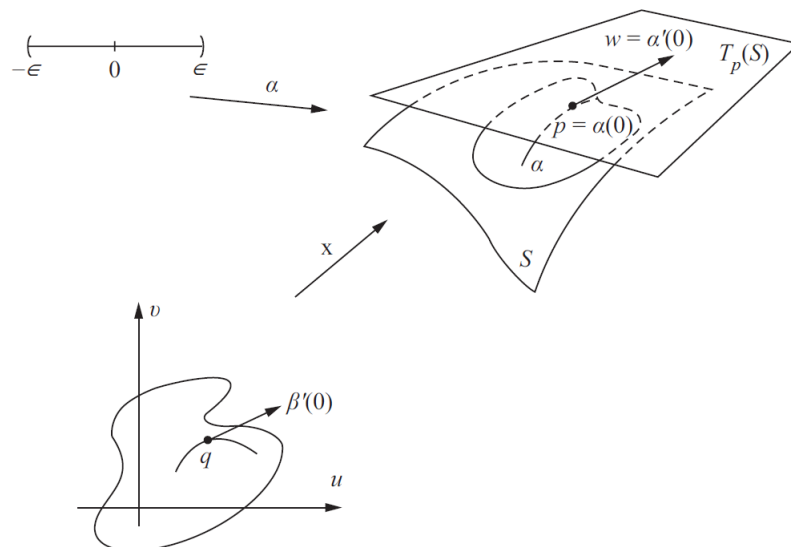
Mostraremos nesta seção que a condição 3 na definição de uma superfície regular  $S$  garante que para  $p \in S$ , o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de  $S$ , passando por  $p$ , constituem um plano. Chamaremos tal plano de plano tangente a  $S$  em  $p$  e denotaremos por  $T_pS$ .

**Definição 1.18.** Um vetor tangente a  $S$  em um ponto  $p \in S$  é o vetor tangente  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$ .

**Proposição 1.19.** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  em  $p$ , tal que  $\mathbf{x}(q) = p$ . Então o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $p$  é um subespaço vetorial  $T_pS = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$  de dimensão 2.

*Demonstração.* Inicialmente, vamos demonstrar que  $T_pS \subset d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ . Seja  $w \in T_pS$  o vetor tangente em  $x(q) = p$ , isto é, seja  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é diferenciável e  $\alpha(0) = p$ . Seja a curva  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , onde  $\beta(0) = q$  e  $\beta'(0) = v$  (Figura 1.7). Pela definição de diferencial de uma aplicação, temos

Figura 1.7: Diagrama da construção de  $\beta$ .



Fonte: Fonte: CARMO (2014, p. 99).



$$d\mathbf{x}_q\beta'(0) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = (\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = w.$$

Portanto,  $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ . Por outro lado, seja  $w = d\mathbf{x}_q(v)$ , onde  $v \in \mathbb{R}^2$  é o vetor velocidade da curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad \text{com } t \in (-\epsilon, \epsilon), \gamma(0) = q \text{ e } \gamma'(0) = v.$$

Considere  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$  e pela definição de diferencial, temos

$$\alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) = d\mathbf{x}_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = d\mathbf{x}_q(v) = w,$$

assim,  $w$  é vetor tangente e  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset T_pS$ . □

Observe que pela proposição anterior, o plano  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ , que passa por  $\mathbf{x}(q) = p$ , independe da parametrização  $\mathbf{x}$ . Contudo, a escolha de uma parametrização  $\mathbf{x}$  determina uma base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$  de  $T_pS$ , chamada base associada a  $\mathbf{x}$ . Portanto, podemos escrever as coordenadas de  $w \in T_pS$  na base associada a uma parametrização  $\mathbf{x}$  da seguinte forma:  $w = \alpha'(0)$  é o vetor velocidade de uma curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ , onde  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é dada por  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\gamma(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Então

$$\begin{aligned} w = \alpha'(0) &= (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(u(t), v(t))) \right|_{t=0} \\ &= \left. \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0). \end{aligned}$$

Assim, na base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ , o vetor  $w$  tem coordenadas  $(u'(0), v'(0))$ .

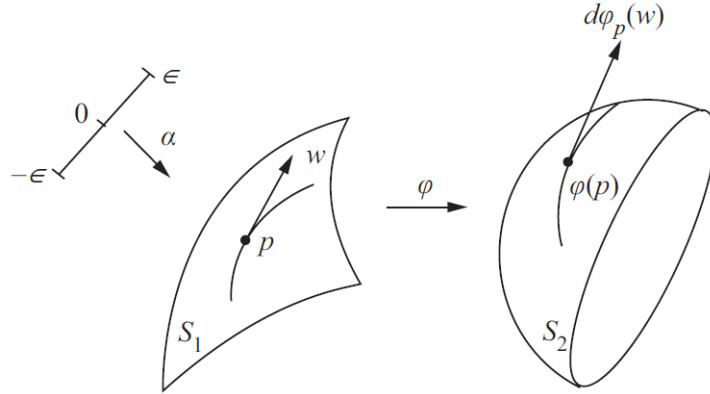
Através da noção de plano tangente, podemos falar na diferencial de aplicações diferenciáveis entre superfícies.

**Definição 1.20.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares,  $\phi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável em  $V$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V \subset S_1$  uma curva diferenciável, com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$  e considere a curva  $\beta(t) = \phi \circ \alpha$ . Para cada ponto  $p \in V$  definimos a aplicação  $d\phi_p : T_pS_1 \rightarrow T_{\phi(p)}S_2$  que atua em um vetor  $w \in T_pS_1$  da seguinte forma

$$d\phi_p(w) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(0) = \beta'(0).$$

Portanto,  $\beta'(0)$  é um vetor de  $T_{\phi(p)}S_2$  (Figura 1.8).

Figura 1.8: Representação de  $w$  e  $d\phi_p(w)$  nas superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente.



Fonte: CARMO (2014, p. 100).

**Proposição 1.21.** *A diferencial  $d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$  é uma aplicação linear e não depende da escolha de  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  com  $\mathbf{x} : U \rightarrow S_1$  e  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \rightarrow S_2$  parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Suponha que  $\phi$  seja expressa nestas coordenadas por:

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)), \quad \text{com } (u, v) \in U \text{ e } (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) \in \bar{U}.$$

Expressando  $\alpha$  na parametrização  $\mathbf{x}$ , obtemos

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad \text{com } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

A expressão local de  $\beta = \phi \circ \alpha$  é dada por  $\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \alpha = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \beta = (\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$ , assim a expressão de  $\beta'(0)$  na base  $\{\bar{x}_u, \bar{x}_v\}$  de  $T_{\phi(p)} S_2$  é

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \phi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} v'(0) \right). \end{aligned}$$

Em forma matricial, temos

$$\beta'(0) = d\phi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Logo,  $d\phi_p(w)$  é representada por uma matriz que depende apenas da aplicação  $\phi$  e das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Dessa forma,  $d\phi_p(w)$  é linear e não depende da escolha de  $\alpha$ .  $\square$

## 1.5 Primeira Forma Fundamental

Nesta seção definiremos uma importante forma quadrática em  $T_p S$  chamada por Gauss de primeira forma fundamental. É através dela que conseguimos calcular comprimentos de curvas, ângulos entre vetores e áreas na superfície, como citamos na introdução desse trabalho.

O produto interno natural do  $\mathbb{R}^3 \supset S$  induz em cada plano tangente  $T_p S$  de uma superfície regular  $S$  um produto interno, que indicaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Se  $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ , então  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  é igual ao produto interno de  $w_1$  e  $w_2$ , como vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.22.** Seja  $S$  uma superfície regular e  $T_p S$  o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ . A forma quadrática  $I_p$  definida por:

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

Na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  associada a uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ , um vetor tangente  $w \in T_p S$  é o vetor tangente a uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , com  $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(u(0), v(0)) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  e  $\alpha'(0) = w$ . Calculando a primeira forma fundamental em  $w$ , isto é, para  $t = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u'(0), \mathbf{x}_u u'(0) \rangle_p + 2\langle \mathbf{x}_u u'(0), \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\ &= (u'(0))^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p + 2u'(0)v'(0) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p + (v'(0))^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ &= (u'(0))^2 E + 2u'(0)v'(0)F + (v'(0))^2 G, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde,

$$\begin{aligned} E(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\ F(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\ G(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p, \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ . Fazendo  $p$  variar na vizinhança coordenada correspondente a  $\mathbf{x}(u, v)$ , obtemos funções  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ , que são diferenciáveis nessa vizinhança. Podemos escrever a equação (1.1) na forma matricial,

$$I_p(\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.23.** Um sistema de coordenadas para um plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$  é dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos determinar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $P$ .

Para calcular a primeira forma fundamental em um ponto arbitrário de  $P$ , observe que  $\mathbf{x}_u = w_1$ ,  $\mathbf{x}_v = w_2$ . Como  $w_1$  e  $w_2$  são ortonormais, temos que

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\|^2 = 1, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.24.** Vamos determinar a primeira forma fundamental em um ponto arbitrário do cilindro reto sobre o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  que admite a parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z), \\ U &= \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty\}. \end{aligned}$$

Para calcular a primeira forma fundamental, observe que

$$\mathbf{x}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \mathbf{x}_z = (0, 0, 1).$$

Logo, as funções  $E, F, G$  são constantes pois

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\ F &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_z \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_z \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = \|(0, 0, 1)\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Consequentemente a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que embora o cilindro e o plano sejam superfícies distintas, os resultados obtidos nos dois casos são os mesmos.

**Exemplo 1.25.** Considere a hélice de passo  $2\pi a$  sobre o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  dada por  $\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, a\theta)$ . Por cada ponto da hélice, traçamos uma reta paralela ao plano  $xy$  e que intersecta o eixo  $Oz$ . A superfície gerada por essas retas é chamada um helicóide (Figura 1.9). Uma parametrização do helicóide é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Observe que,

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, a),$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0).$$

Portanto,

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (-v \sin u, v \cos u, a) \rangle = v^2 + a^2,$$

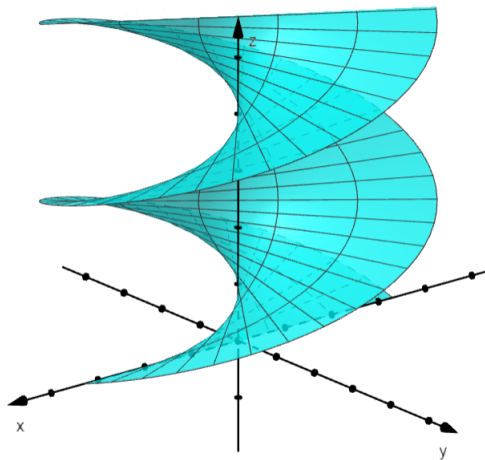
$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 1.$$

Com isso, a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I = \begin{bmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Figura 1.9: Helicóide.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 1.26.** Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície de revolução.

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana e conexa  $C$  em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Vamos considerar o plano  $xz$  como o plano da curva e o eixo  $Oz$  como eixo de rotação. Seja

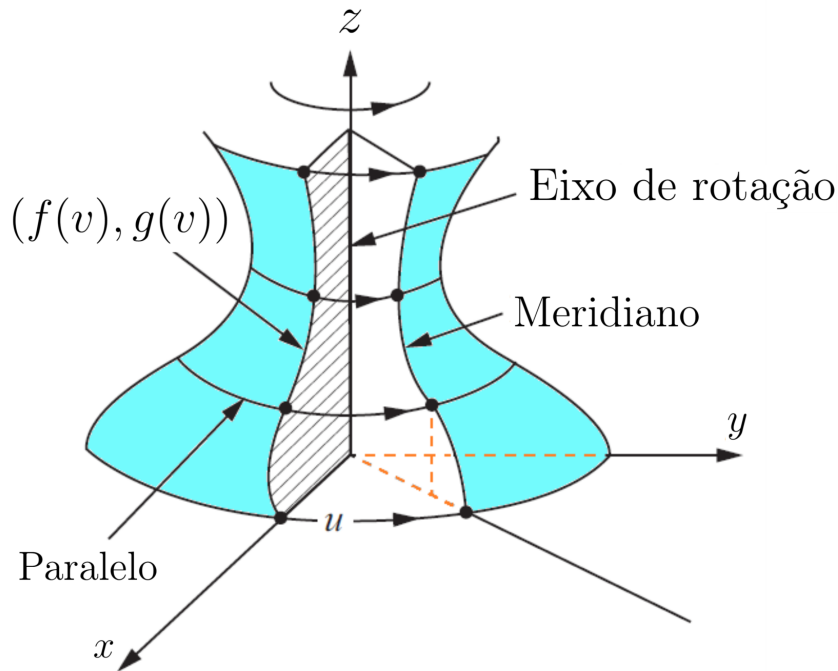
$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para  $C$  e denotamos por  $u$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $Oz$  (Figura 1.10). A curva  $C$  é chamada curva geratriz de  $S$ , o eixo  $Oz$  é o eixo de rotação de  $S$ , os círculos descritos pelos pontos de  $C$  são chamados de paralelos de  $S$  e as várias posições de  $C$  sobre  $S$  são chamados meridianos de  $S$ . Com isso, obtemos a aplicação

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  em  $S$ .

Figura 1.10: Uma superfície de revolução.



Fonte: CARMO (2014, p. 90).

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0) \rangle = (f(v))^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)) \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)), (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)) \rangle \\ &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2. \end{aligned}$$

Com isso, a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I = \begin{bmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & (f(v))^2 + (g(v))^2 \end{bmatrix}.$$

Através da primeira forma fundamental, podemos calcular comprimentos, ângulos e áreas na superfície sem fazer referência ao espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$  como veremos a seguir.

O comprimento de arco  $s$  de uma curva parametrizada  $\alpha : V \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ , temos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(u'(t))^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 G(u(t), v(t))} dt.$$

O ângulo  $\theta$  de duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\beta : I \rightarrow S$  que se intersectam em  $t = t_0$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, o ângulo  $\varphi$  das curvas coordenadas de uma parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Com isso, as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se,  $F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , para todo  $(u, v) \in U$ . Uma tal parametrização é chamada uma parametrização ortogonal.

Para falar do cálculo de áreas de regiões em uma superfície regular, precisaremos de algumas definições

**Definição 1.27.** Um domínio (regular) de  $S$  é um subconjunto aberto e conexo de  $S$ , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (isto é, sua diferencial não se anula) exceto em um número finito de pontos.

**Definição 1.28.** Uma região de  $S$  é a união de um domínio com a sua fronteira.

**Definição 1.29.** Uma região de  $S \subset \mathbb{R}^3$  é limitada se está contida em alguma bola de  $S \subset \mathbb{R}^3$ .

Vamos considerar  $Q$  uma região compacta contida em  $U$  e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ . Então  $\mathbf{x}(Q) = R$  é uma região limitada em  $S$ .

**Definição 1.30.** Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número positivo

$$\int \int_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| dudv = A(R), \quad \text{onde } Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

é chamado área de  $R$ .

A integral dupla da Definição 1.30 independe da parametrização  $\mathbf{x}$ . A demonstração deste fato pode ser encontrado em CARMO (2014), p. 115.

Convém observarmos que

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2 \theta + \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \cos^2 \theta = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2,$$

o que mostra que o integrando de  $A(R)$  pode ser escrito como

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Sendo assim, obtemos

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R).$$



## Capítulo 2

# A aplicação Normal de Gauss e a Curvatura Gaussiana

### 2.1 Orientação de Superfícies

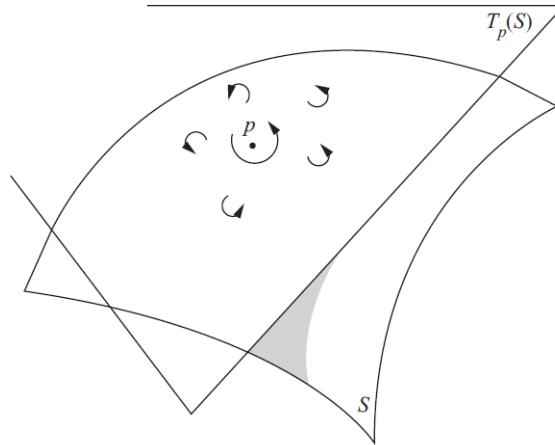
Para compreender a ideia de orientação em superfícies vamos primeiramente lembrar da noção de orientação de um espaço vetorial.

Duas bases ordenadas  $e = \{e_i\}$  e  $f = \{f_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de um espaço vetorial  $V$ ,  $n$ -dimensional, têm a mesma orientação se a matriz de mudança de base possui um determinante positivo. Denotamos esta relação por  $e \sim f$ , onde  $\sim$  determina uma relação de equivalência. Segue das propriedades sobre determinantes que esta relação define uma relação de equivalência.

Portanto, podemos organizar o conjunto das bases ordenadas de  $V$  em classes de equivalência, na qual os elementos de uma dada classe estão relacionados por  $\sim$ . Como o determinante de mudança de base ou é positivo ou é negativo, existem apenas duas classes e cada classe determinada por esta relação é chamada uma orientação de  $V$ . Assim,  $V$  tem duas orientações e se fixarmos uma das duas de maneira arbitrária, a outra é chamada de orientação oposta.

Intuitivamente, como cada ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$  tem um plano tangente  $T_p S$ , a escolha de uma orientação de  $T_p S$  induz uma orientação em uma vizinhança de  $p$ , isto é, a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto da vizinhança (Figura 2.1).

Figura 2.1: Orientação de  $T_p S$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 123).

Caso seja possível fazer essa escolha para cada  $p \in S$  de forma que na interseção de quaisquer duas vizinhanças as orientações coincidam, então dizemos que  $S$  é orientável. Caso contrário, dizemos que  $S$  é não-orientável.

De forma mais precisa, sejam  $S$  uma superfície regular e uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  de uma vizinhança de um ponto  $p \in S$ , determinamos uma orientação do plano tangente  $T_p S$ , a saber, a orientação associada à base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Se  $p$  pertence a uma vizinhança coordenada de uma outra parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , a nova base  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  é expressa em termos da primeira por

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}},$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},$$

onde  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$  e  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$  são expressões da mudança de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$ . Observe que a matriz de mudança de base é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix},$$

sendo a matriz Jacobiana de  $h$ . Logo, as bases  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  e  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  determinam a mesma orientação de  $T_p S$  se, e somente se, o determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0.$$

**Definição 2.1.** Uma superfície regular  $S$  é orientável se for possível cobrir a mesma com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto  $p \in S$  pertence

a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem determinante Jacobiano positivo em  $p$ . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de  $S$ , e  $S$ , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se  $S$  é orientada, uma parametrização (local)  $\mathbf{x}$  é compatível com a orientação de  $S$ , se juntando  $\mathbf{x}$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de  $S$ .

**Exemplo 2.2.** Uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. De fato, pela Proposição 1.7, tal superfície que é gráfico de uma função diferenciável é coberta por uma única vizinhança coordenada. Logo, é orientável.

**Exemplo 2.3.** A esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície orientável.

De fato, a esfera pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, utilizando por exemplo a projeção estereográfica, de tal modo que a interseção  $W$  dessas vizinhanças seja um conjunto conexo, isto é, sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$  e  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  tais que  $\mathbb{S}^2 = \mathbf{x}(U) \cup \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$ ,  $W = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  conexo e  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$  a mudança de coordenadas. Fixe um ponto  $p \in W$ . Se o Jacobiano da mudança de coordenadas em  $p$  for negativo, intercambiamos  $u$  e  $v$  no primeiro sistema, e assim teremos Jacobiano positivo. Se o Jacobiano da mudança de coordenadas em  $p$  for positivo, e como o Jacobiano é diferente de zero em  $W$  por ser conexo, segue pela conexidade de  $W$  que o Jacobiano é positivo em todos os pontos de  $W$ . Sendo assim, existe uma família de vizinhanças coordenadas satisfazendo a Definição 2.1, o que mostra que  $\mathbb{S}^2$  é orientável. O exemplo anterior é suficiente para concluirmos a próxima proposição.

**Proposição 2.4.** *Se uma superfície regular pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.*

Daremos agora uma interpretação geométrica da ideia de orientabilidade de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Uma vez fixada uma parametrização,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p \in S$ , podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto  $p \in \mathbf{x}(U)$ , com  $p = \mathbf{x}(q)$  e  $q \in U$ , por

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q).$$

Observe que se escolhermos um outro sistema de coordenadas locais  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  em  $p$ ,  $N$  se conserva ou muda o sinal. De fato, seja  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma outra parametrização de  $S$  e  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ , onde  $W = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e  $p = \bar{\mathbf{x}}(\bar{q})$ , uma mudança de parâmetros, temos

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}(\bar{q}) = \frac{(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|}.$$

Assim,  $N$  se conserva ou muda de sinal, conforme o jacobiano da mudança de parâmetros  $h$  seja positivo ou negativo.

**Definição 2.5.** Um campo diferenciável de vetores normais em um aberto  $V \subset S$  é uma aplicação  $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in V$  um vetor normal unitário  $N(q) \in \mathbb{R}^3$  a  $S$  em  $q$ .

**Proposição 2.6.** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ .

*Demonstração.* Supondo que  $S$  é orientável, então é possível cobrir  $S$  com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na intersecção de duas quaisquer delas, a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo. Nos pontos  $p = \mathbf{x}(u, v)$  de cada vizinhança coordenada, definimos

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v).$$

$N(p)$  está bem definido e a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável. De fato, seja  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma outra parametrização de  $S$  e  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ , onde  $W = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e  $p = \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , uma mudança de parâmetros. Como o jacobiano da mudança de parâmetros  $h$  é positivo, obtemos

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v).$$

Além disso,  $I^{-1} \circ N \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma função diferenciável, pois é formado por funções diferenciáveis. Logo, a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável.

Reciprocamente, seja  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo de vetores normais em  $S$  e considere uma família de vizinhanças coordenadas conexas cobrindo  $S$ . Para os pontos  $p = \mathbf{x}(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $\mathbf{x}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , é possível pela continuidade de  $N$  e, se necessário, intercambiando  $u$  e  $v$ , fazer com que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v).$$

Com efeito, seja  $p \in S$  e  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  tal que  $\mathbf{x}(U)$  é conexo. Considere o produto interno definido pela função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(p) = \left\langle N(p), \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \right\rangle.$$

Como  $\mathbf{x}(U)$  é conexo, o sinal de  $f$  é constante. Se  $f(p) = -1$  (os vetores estão apontando

em direções opostas), intercambiamos  $u$  e  $v$  na parametrização, obtendo o afirmado. Procedendo deste modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na interseção de duas quaisquer delas, digamos,  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , o jacobiano da mudança de coordenadas é positivo; caso contrário, teríamos

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}(\bar{u}, \bar{v}) = -\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v) = -N(p),$$

o que é uma contradição. Concluimos então que dada a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de  $u$  e  $v$ , satisfaz às condições da Definição 37, mostrando que  $S$  é orientável.  $\square$

**Proposição 2.7.** *Se uma superfície regular é dada por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$ , onde  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $a$  é um valor regular de  $f$ , então  $S$  é orientável.*

*Demonstração.* Dado um ponto  $(x_0, y_0, z_0) = p \in S$ , considere a curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  tal que  $\alpha(t_0) = p$  e  $\alpha'(t_0) = w$ . Considere a composição  $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é,

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Derivando ambos os membros desta expressão acima em relação a  $t$ , temos que em  $t = t_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \frac{dy}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p) \frac{dz}{dt}(t_0) &= 0 \\ \Rightarrow f_x(p)x'(t_0) + f_y(p)y'(t_0) + f_z(p)z'(t_0) &= 0 \\ \Rightarrow \langle (f_x(p), f_y(p), f_z(p)), (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle \nabla f, w \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que o vetor tangente à curva em  $t = t_0$  é perpendicular ao vetor gradiente de  $f$  em  $p$ . Como a curva e o ponto são arbitrários, concluimos que  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$\begin{aligned} N(x, y, z) &= \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} \\ &= \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \\ &= \left( \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right), \end{aligned}$$

é um campo diferenciável de vetores unitários em  $S$ . Pela proposição 14, isto implica que  $S$  é orientável.  $\square$

## 2.2 Aplicação Normal de Gauss

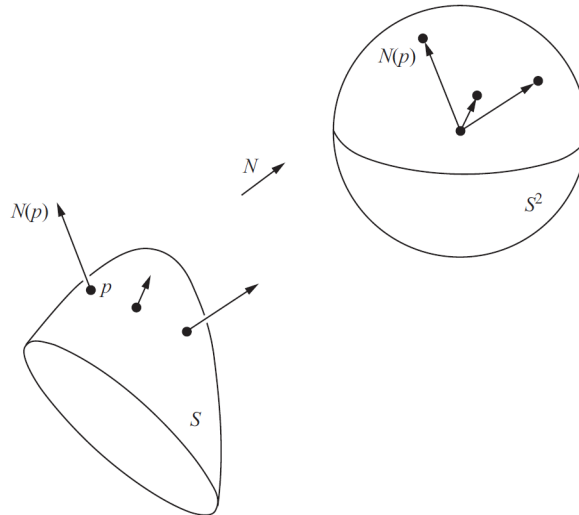
Em seu artigo GAUSS (1828) Gauss definiu uma noção de curvatura para superfícies que mede o quanto  $S$  se afasta em cada ponto  $p$  de seu plano tangente  $T_p S$ . Para dar essa medida de afastamento Gauss usou uma aplicação diferenciável de  $S$  na esfera unitária. No tempo de Gauss a noção de orientação de superfície não estava clara de forma que esta medida era dada em partes de  $S$ . A seguir estudaremos tal aplicação e como através dela podemos obter a curvatura de uma superfície em um ponto  $p$ . Ao longo deste tópico,  $S$  denotará uma superfície regular orientável e orientada e diremos simplesmente que  $S$  é uma superfície com uma orientação  $N$ .

**Definição 2.8.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  toma seus valores na esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  assim definida, é chamada a aplicação normal de Gauss de  $S$  (Figura 2.2).

Figura 2.2: Aplicação Normal de Gauss.



Fonte: CARMO (2014, p. 161).

Como  $S$  é uma superfície orientável, a aplicação normal de Gauss é diferenciável. Portanto, para todo  $p \in S$  a diferencial  $dN_p$  é uma aplicação linear de  $T_p S$  em  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ . Como os vetores normais de  $S$  e  $\mathbb{S}^2$  são paralelos, então via identificação  $T_p S \cong T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ ,  $dN_p$  pode ser vista como um operador linear em  $T_p S$ , isto é,  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ .

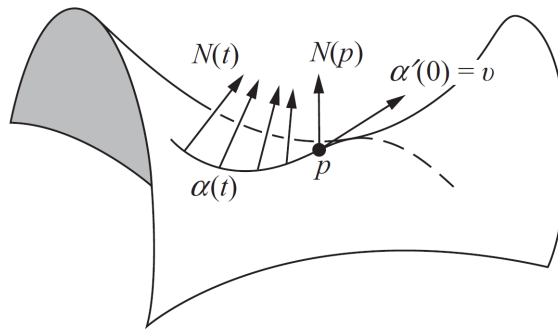
O operador  $dN_p$  opera da seguinte maneira: para cada curva parametrizada  $\alpha(t)$  em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , consideramos a curva parametrizada  $N \circ \alpha(t) = N(t)$  na esfera  $\mathbb{S}^2$ ,

que é equivalente a restringir o vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(t)$ . Segue que, o vetor tangente a  $N(t)$  em  $N(p)$  dado por

$$N'(0) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = dN_p(\alpha'(0)),$$

é um vetor de  $T_p S$ . Ele mede a taxa de variação do vetor normal  $N$  restrito à curva  $\alpha(t)$ , em  $t = 0$ . Assim,  $dN_p$  mede quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$  (Figura 2.3).

Figura 2.3: Variação do vetor normal em uma vizinhança de  $p$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 162).

**Exemplo 2.9.** Seja  $P$  um plano dado por  $ax + by + cz + d = 0$  temos como vetor normal ao plano  $P$  o vetor  $(a, b, c)$ . Logo, o campo diferenciável de vetores normais unitários para todo  $p \in P$  é dado por

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

que é constante. Portanto,  $dN_p \equiv 0$ .

**Exemplo 2.10.** Considere a esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é uma curva parametrizada em  $S^2$ , então derivando  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  obtemos,

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,$$

que podemos escrever como

$$2\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 0.$$

Assim, temos que  $(x, y, z)$  é ortogonal a  $(x', y', z')$ , e, conseqüentemente, é normal à esfera no ponto  $(x, y, z)$ . Desta forma,

$$N = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z)$$

e.

$$\bar{N} = \frac{(-x, -y, -z)}{\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2}} = (-x, -y, -z),$$

são campos de vetores normais e unitários em  $S^2$ , e definem portanto orientações em  $S^2$ . Escolhendo  $\bar{N} = (-x, -y, -z)$  como um campo normal, podemos notar que  $\bar{N}$  aponta para o centro da esfera. Restringindo  $\bar{N}$  à curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , obtemos

$$\bar{N} = (-x(t), -y(t), -z(t)),$$

onde  $\bar{N}$  é uma função vetorial de  $t$ . Derivando  $\bar{N}$  temos que,

$$d\bar{N}_{(x(t), y(t), z(t))}(x'(t), y'(t), z'(t)) = \bar{N}'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)),$$

ou seja,  $d\bar{N}_p(v) = -v$ , para todo  $p \in S^2$  e todo  $v \in T_p S^2$ . De modo análogo, escolhendo  $N$  como campo normal e unitário, e restringindo à curva  $\alpha(t)$  obteríamos  $dN_p(v) = v$ .

**Definição 2.11.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que a aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  é auto-adjunta se  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$  para todo  $v, w \in V$ .

**Proposição 2.12.** A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação normal de Gauss é um operador linear auto-adjunto.

*Demonstração.* Basta mostrar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

para uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_p S$ . Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  a base associada de  $T_p S$ . Se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial N}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial N}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0), \end{aligned}$$

e em particular,  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ . Portanto, para provar que  $dN_p$  é autoadjunto, é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle.$$



Observe que  $N$  é normal à  $T_p S$ . Em particular,  $N$  é ortogonal aos vetores da base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , isto é

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \quad \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Derivando as equações acima com relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial v}(\langle N, \mathbf{x}_u \rangle) = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\langle N, \mathbf{x}_v \rangle) = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle,$$

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle.$$

Portanto,  $\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle$  e  $dN_p$  é auto-adjunto.  $\square$

O fato de  $dN_p$  ser um operador linear auto-adjunto nos permite definir uma forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} B : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle dN_p(v), w \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, a cada forma bilinear e simétrica em  $T_p S$ , podemos corresponder uma forma quadrática  $Q$  dada por

$$\begin{aligned} Q : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle. \end{aligned}$$

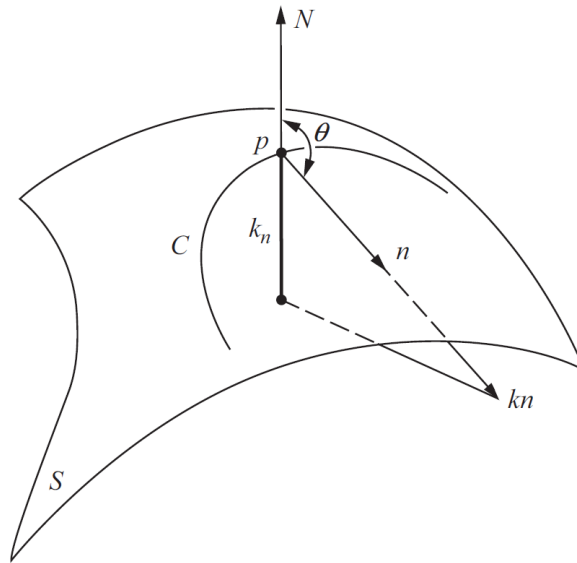
Para obtermos uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisaremos de algumas definições. Por convenção usaremos a forma quadrática  $-Q$ .

## 2.3 Segunda Forma Fundamental

**Definição 2.13.** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.14.** Seja  $C$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ . (Figura 2.4)

Figura 2.4: Curvatura Normal.



Fonte: CARMO (2014, p. 167).

Observe que  $k_n$  é o comprimento da projeção do vetor  $kn$  sobre o vetor normal à superfície em  $p$ , com um sinal dado pela orientação  $N$  de  $S$  em  $p$ . Além disso, a curvatura normal de  $C$  em  $p$  não depende da orientação de  $C$ , pois  $k$  e  $n$  não se alteram quando mudamos a orientação de  $C$ , mas troca de sinal com uma mudança de orientação da superfície, ou seja, a curvatura normal depende apenas da orientação da superfície.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental  $II_p$ , considere uma curva regular  $C \subset S$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco de  $C$  com  $\alpha(0) = p$ . Se indicarmos  $N(s)$  a restrição do vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(s)$ , teremos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Derivando em ambos os lados, obtemos

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \implies \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle.$$

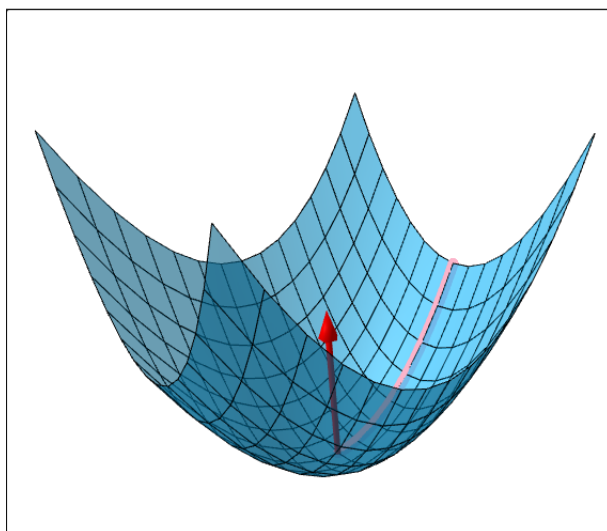
Portanto,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Na penúltima linha da equação acima temos que  $II_p(\alpha'(0)) = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle$ , desta forma, a segunda forma fundamental pode ser interpretada como uma medida do quanto

a superfície se encurva na direção de  $N$  no ponto  $p = \alpha(0)$ . Assim, se na superfície da figura 2.5 tomarmos a orientação  $N$  de  $S$  apontando para cima, temos que  $II_p(v) = -\langle dN_p v, v \rangle > 0$  para todo  $v \in T_p S$  com  $|v| = 1$ , visto que todas as curvas que passam por  $p$  se encurvam na direção de  $N$ .

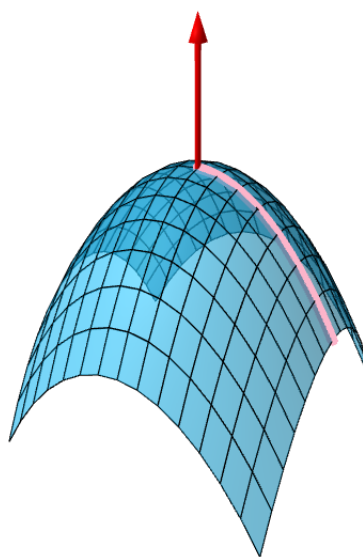
Figura 2.5:  $II_p(v) > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma análoga na figura 2.6 tomando a orientação de  $N$  como sendo a que aponta para cima, observamos que  $II_p(v) = -\langle dN_p v, v \rangle < 0$  para todo  $v \in T_p S$  com  $|v| = 1$ , visto que todas as curvas que passam por  $p$  se encurvam na direção oposta de  $N$ .

Figura 2.6:  $II_p(v) < 0$

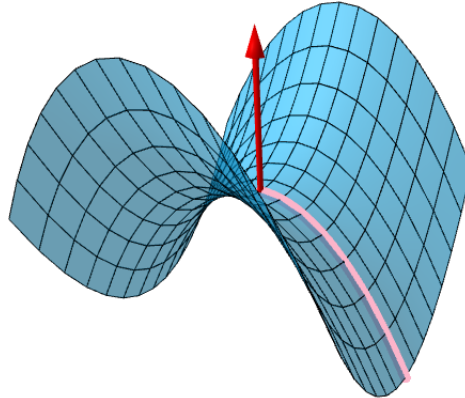


Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, na figura 2.7 novamente considerando a orientação  $N$  de  $S$  como a que

aponta para cima, temos que  $II_p(v) = -\langle dN_p v, v \rangle < 0$  para alguns vetores  $v \in T_p S$  com  $|v| = 1$  enquanto que  $II_p(v) = -\langle dN_p v, v \rangle > 0$  para outros vetores  $v \in T_p S$  com  $|v| = 1$ , visto que em algumas direções as curvas que passam por  $p$  se encurvam na direção de  $N$ , enquanto que em outras direções as curvas se encurvam na direção oposta.

Figura 2.7:  $II_p(v) > 0$  para umas direções e  $II_p(v) < 0$  para outras direções



Fonte: Elaborado pelo autor.

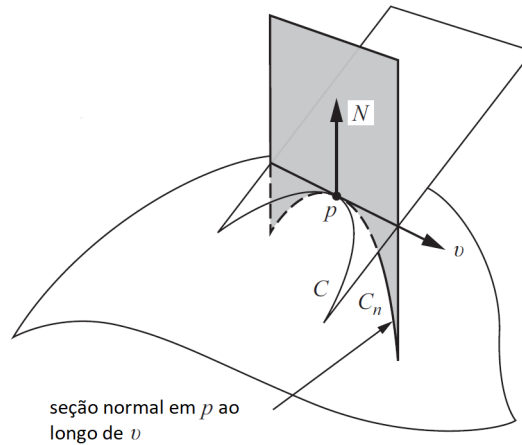
Observamos também na equação 2.1 que o valor da segunda forma fundamental  $II_p$ , em um vetor unitário  $v \in T_p S$ , é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $v$ .

Ainda como consequência de 2.1, temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.15** (Meusnier). *Todas as curvas de uma superfície  $S$  que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A proposição acima nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em  $p$ . Dado um vetor unitário  $v \in T_p S$  a interseção de  $S$  com o plano contendo  $v$  e  $N(p)$  é chamada seção normal de  $S$  em  $p$  segundo  $v$  (Figura 2.8). Em uma vizinhança de  $p$ , uma seção normal de  $S$  em  $p$  é a curva regular plana em  $S$ , cujo vetor normal  $n$  em  $p$  é  $\pm N(p)$  ou zero. Assim, a curvatura da seção normal é igual a  $|k_n|$  segundo  $v$  em  $p$ . Com isso, o valor absoluto da curvatura normal em  $p$  de uma curva  $\alpha(s)$  é igual à curvatura da seção normal de  $S$  em  $p$ , segundo  $\alpha'(0)$ .

Figura 2.8: Curvatura da seção normal, Meusnier.



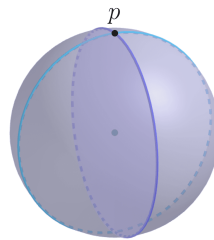
seção normal em  $p$  ao longo de  $v$

Fonte: CARMO (2014, p. 168).

**Exemplo 2.16.** Em um plano, todas as seções normais são retas. Logo, as curvaturas normais são nulas e a segunda forma fundamental é identicamente nula em todos os pontos.

**Exemplo 2.17.** Na esfera unitária  $S^2$  com  $\bar{N} = (-x, -y, -z)$  como orientação, as seções normais passando por um ponto  $p \in S^2$  são círculos de raio 1 (Figura 2.9). Assim, todas as curvaturas normais são iguais a 1 e a segunda forma fundamental é  $II_p(v) = 1$  para todo  $p \in S^2$  e todo  $v \in T_p S^2$  com  $|v| = 1$ .

Figura 2.9: Seções normais sobre  $S^2$ .



Fonte: Lira (2022).

O teorema abaixo não será demonstrado neste trabalho, mas o leitor poderá encontrar a demonstração em CARMO (2014), p. 258.

**Teorema 2.18.** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$  (isto é,  $e_1$  e  $e_2$  são autovetores, e  $\lambda_1, \lambda_2$  são autovalores de  $A$ ). Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , com  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle A(v), v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ .*

Como  $dN_p$  é um operador autoadjunto, podemos utilizar o teorema acima para concluir que existe uma base ortonormal de autovetores associados aos autovalores de

$dN_p$  tal que os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $dN_p$  são o máximo e mínimo da forma quadrática  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $T_pS$ . Com isso, escrevendo  $k_1 = -\lambda_1$  e  $k_2 = -\lambda_2$ , observamos que  $k_1$  e  $k_2$  são o mínimo e o máximo, respectivamente, da segunda forma fundamental  $II_p = -Q$  restrita ao círculo unitário de  $T_pS$ .

**Definição 2.19.** O mínimo da curvatura normal  $k_1$  e o máximo da curvatura normal  $k_2$  são chamados curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, dadas pelos autovetores de  $dN_p$  são chamadas direções principais em  $p$ .

Agora definiremos a curvatura Gaussiana e a curvatura Média de uma superfície regular.

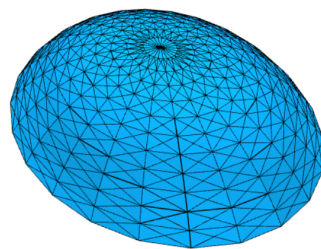
**Definição 2.20.** Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média de  $S$  em  $p$ . Em termos de  $k_1$  e  $k_2$ , podemos escrever

$$K = k_1k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

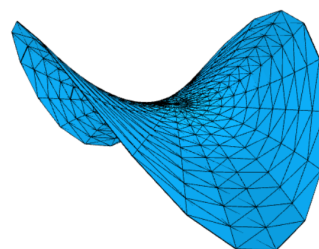
**Definição 2.21.** Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado

1. Elíptico, se  $K > 0$  ( $k_1$  e  $k_2$  possuem o mesmo sinal);
2. Hiperbólico, se  $K < 0$  ( $k_1$  e  $k_2$  possuem sinais opostos);
3. Parabólico, se  $K = 0$  e  $H \neq 0$  (exatamente uma das curvaturas principais é nula);
4. Planar, se  $K = 0$  e  $H = 0$  (as curvaturas principais são nulas).

Como a curvatura Gaussiana é o produto de duas curvaturas (de curvas planas) associadas a direções de  $T_pS$  tais que uma delas é a direção onde a curvatura da seção normal é máxima e a outra onde a curvatura da seção normal é mínima, se  $p$  é um ponto elíptico ou parabólico, a superfície se encontra ou acima ou abaixo de  $T_pS$  numa vizinhança de  $p$ . Se  $p$  for hiperbólico existem pontos de  $S$  acima e abaixo de  $T_pS$  numa vizinhança de  $p$ . Além disso, olhando para os sinais das curvaturas principais, na vizinhança de um ponto elíptico e de um ponto hiperbólico, a superfície parece com uma das formas a seguir:



Vizinhança de um ponto elíptico



Vizinhança de um ponto hiperbólico

Fonte: Autoria própria.

## 2.4 A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais

Nesta seção, obteremos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais. Seja  $S$  uma superfície regular orientável tal que todas as parametrizações  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  são compatíveis com a orientação  $N$  de  $S$ , isto é, em  $\mathbf{x}(U)$

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização em um ponto  $p \in S$  de uma superfície, e seja  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto  $p$ . O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  e

$$dN_p(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \quad (2.2)$$

Como  $\langle N, N \rangle = 1$ , derivando com relação a  $u$ , obtemos

$$\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0 \implies 2\langle N_u, N \rangle = 0.$$

Logo,  $N_u \in T_p S$ . De forma análoga, concluímos que  $N_v \in T_p S$ . Com isso, podemos escrever

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \quad (2.3)$$

Portanto, substituindo as equações de (2.2) em (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha') &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Em forma matricial,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ , com  $i, j = 1, 2$ . Note que a matriz acima não é necessariamente simétrica, a menos que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  seja uma base ortonormal. Escrevendo a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$

obtemos

$$\begin{aligned}
 II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\
 &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\
 &= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle \\
 &= -(u')^2 \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle - 2u'v' \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle - (v')^2 \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle \\
 &= e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2,
 \end{aligned}$$

onde,

$$e = -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle,$$

$$f = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle,$$

$$g = -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Como  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , temos que

$$\begin{aligned}
 e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\
 f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle \\
 g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle.
 \end{aligned}$$

Vamos agora obter os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes  $e, f, g$ . A partir das equações (2.3) temos

$$\begin{aligned}
 -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\
 -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\
 -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\
 -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G,
 \end{aligned}$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . As relações acima podem ser expressas em forma matricial por,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$



Assim, as expressões para os coeficientes  $(a_{ij})$  da matriz de  $dN$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Convém mencionar que as equações (2.4) são conhecidas como as equações de Weingarten. A partir delas, obtemos novas expressões para a curvatura Gaussiana e a curvatura média, dadas pelo determinante de  $(a_{ij})$  e pelo negativo da metade do traços, respectivamente. Portanto

$$k = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

**Exemplo 2.22.** Vamos calcular a curvatura Gaussiana do catenoide, coberto pela parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Para o cálculo dos coeficientes  $e, f, g$ , será necessário primeiramente o cálculo de  $N$ , além de  $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}$  e  $\mathbf{x}_{vv}$ . Com efeito, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0). \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = a^2 \cosh^2 v \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a^2 \cosh^2 v. \end{aligned}$$

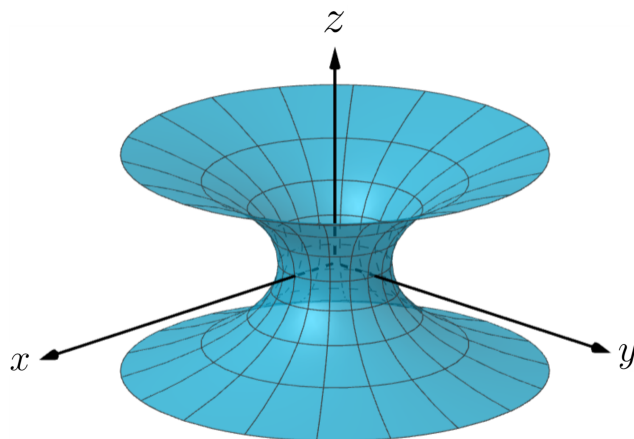
Além disso, temos que

$$\begin{aligned}e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uu} \right\rangle = -a \\f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uv} \right\rangle = 0 \\g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{vv} \right\rangle = a.\end{aligned}$$

Concluimos que a curvatura Gaussiana e média são dadas respectivamente por

$$K = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}, \quad H = 0.$$

Figura 2.10: O catenoide.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## Capítulo 3

# Isometrias e o Teorema Egregium de Gauss

### 3.1 Isometrias

Veremos neste capítulo que algumas propriedades locais importantes de uma superfície podem ser expressas apenas em termos da primeira forma fundamental. O estudo de tais propriedades é chamado o estudo da geometria intrínseca das superfícies.

**Definição 3.1.** A aplicação  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se  $\phi$  é um difeomorfismo e para todo  $p \in S$  e todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$ , temos

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}.$$

Quando existe uma isometria  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ , dizemos então que as superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  são isométricas.

Observe que um difeomorfismo  $\phi$  é uma isometria se a diferencial  $d\phi$  preserva o produto interno. Se  $\phi$  é uma isometria, segue que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\phi_p(w), d\phi_p(w) \rangle_{\phi(p)} = I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)),$$

para todo  $w \in T_p S$ , isto é,  $\phi$  preserva a primeira forma fundamental. Reciprocamente, se um difeomorfismo  $\phi$  preserva a primeira forma fundamental, então para todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$ , temos

$$\begin{aligned} I_p(w_1 + w_2) &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle_p \\ &= \langle w_1, w_1 \rangle_p + \langle w_1, w_2 \rangle_p + \langle w_2, w_1 \rangle_p + \langle w_2, w_2 \rangle_p \\ &= I_p(w_1) + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + I_p(w_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 2\langle w_1, w_2 \rangle_p &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\
 &= I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_1 + w_2)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_1)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_2)) \\
 &= \langle d\phi_p(w_1 + w_2), d\phi_p(w_1 + w_2) \rangle_{\phi(p)} \\
 &\quad - \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_1) \rangle_{\phi(p)} - \langle d\phi_p(w_2), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)} \\
 &= 2\langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\phi$  é uma isometria.

**Definição 3.2.** Uma aplicação  $\phi : V \rightarrow \bar{S}$  de uma vizinhança  $V$  de  $p \in S$  é uma isometria local em  $p$  se existe uma vizinhança  $\bar{V}$  de  $\phi(p) \in \bar{S}$  tal que  $\phi : V \rightarrow \bar{V}$  é uma isometria. Se existir uma isometria local em  $\bar{S}$  para todo ponto  $p \in S$ , diz-se que a superfície  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$ . Além disso, dizemos que  $S$  e  $\bar{S}$  são localmente isométricas se  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$  e  $\bar{S}$  é localmente isométrica a  $S$ .

Se  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$  é um difeomorfismo e uma isometria local para todo  $p \in S$ , então  $\phi$  é uma isometria (globalmente). Por outro lado, pode acontecer que duas superfícies sejam localmente isométricas mas não sejam globalmente isométricas, como no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.3.** Considere o cilindro reto com parametrização  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}}(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z), \\
 U &= \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty\},
 \end{aligned}$$

e o plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$  com parametrização dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja  $\varphi = \mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \rightarrow \mathbf{x}(U)$ . Vamos mostrar que  $\varphi$  é uma isometria local.

Com efeito, seja  $w$  um vetor tangente ao cilindro reto em um ponto  $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$  e uma curva  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Observe que  $w \in T_p(\bar{\mathbf{x}}(U))$ , logo  $w$  é vetor tangente a curva  $\bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))$ . Portanto, podemos escrever  $w$  como uma combinação linear da base associada a parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ , ou seja,

$$w = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Como  $d\varphi_p(w)$  é o vetor tangente a curva  $\varphi(\bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , então podemos escrever  $d\varphi_p(w)$  como

$$d\varphi_p(w) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização dada para o cilindro temos

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_\theta, \bar{\mathbf{x}}_\theta \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\ \bar{F} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_\theta, \bar{\mathbf{x}}_z \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ \bar{G} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_z, \bar{\mathbf{x}}_z \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = \|(0, 0, 1)\|^2 = 1.\end{aligned}$$

Seguimos então para o cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização dada para o plano, obtendo

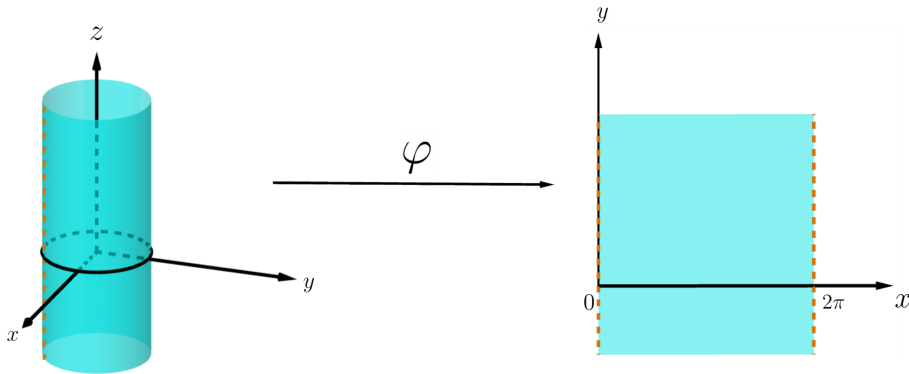
$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\|^2 = 1, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\|^2 = 1.\end{aligned}$$

Como  $\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G$ , temos que

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Portanto, o cilindro é localmente isométrico ao plano (Figura 3.1). A isometria global não ocorre devido ao fato de não existir um homeomorfismo entre plano e cilindro.

Figura 3.1: Isometria local entre o cilindro e o plano.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos generalizar o argumento dado no exemplo anterior para obter um critério de isometria local em termos de coordenadas locais.

Neste exemplo, temos que o cilindro é simplesmente desarqueado (tirado a forma de arco), tendo tal superfície somente modificado a sua relação com o espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Este fato é descrito pelo seguinte: a primeira forma fundamental não foi alterada, mas a segunda forma foi alterada.

Como as definições de ponto elíptico e de ponto hiperbólico só dependem da curvatura de Gauss, uma isometria transforma pontos elípticos em pontos elípticos e pontos

hiperbólicos em pontos hiperbólicos. O mesmo não acontece com os pontos planares e parabólicos. com efeito, as noções de ponto planar e ponto parabólico não são invariantes por isometria: dependem não só da primeira forma fundamental da superfície, mas também da segunda forma fundamental. Por exemplo, o exemplo acima transforma pontos parabólicos em pontos planares.

**Proposição 3.4.** *Suponha a existência de parametrizações  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  e  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$  tais que  $\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G$  em  $U$ . Então a aplicação  $\varphi : \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria local.*

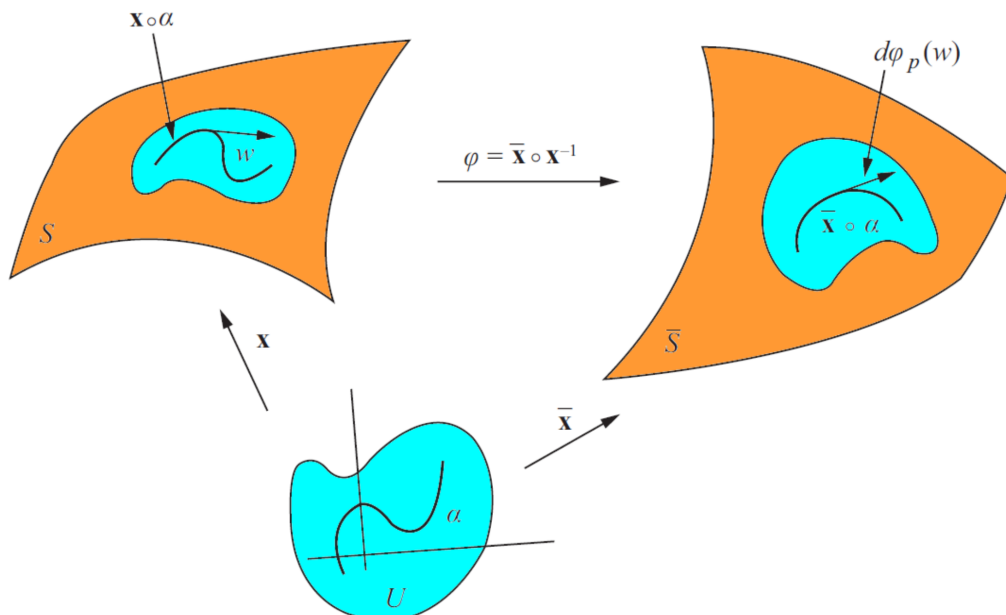
*Demonstração.* Seja  $p \in \mathbf{x}(U)$  e  $w \in T_p S$ . Então  $w$  é tangente a uma curva  $\mathbf{x}(\alpha(t))$  em  $t = 0$ , onde  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  é uma curva em  $U$ . Assim,  $w$  pode ser escrito, em  $t = 0$ , como

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Por definição, o vetor  $d\varphi_p(w)$  é o vetor tangente à curva  $\varphi \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha(t))$  em  $t = 0$  (Figura 3.2). Portanto,

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Figura 3.2: Diagrama da aplicação  $\varphi$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 264).

Como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2, \end{aligned}$$

e por hipótese temos  $\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G$ , concluímos que  $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$  para todo  $p \in \mathbf{x}(U)$  e todo  $w \in T_pS$ . Logo,  $\varphi$  é um isometria local.  $\square$

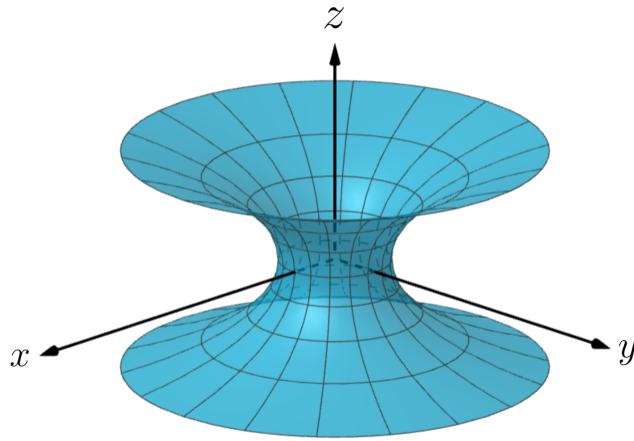
**Exemplo 3.5.** A superfície de revolução obtida pela rotação da catenária que é dada por

$$x = a \cosh v, \quad z = av, \quad -\infty < v < \infty,$$

é chamada de catenoide (Figura 3.3) e tem a seguinte parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Figura 3.3: O catenoide.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os coeficientes da primeira forma fundamental do catenoide são

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 + \sinh^2 v = a^2 \cosh^2 v.$$

Uma parametrização para o helicoidé é dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Para mostrar que o catenoide é localmente isométrico ao helicoidé, basta provar que os coeficientes da primeira forma fundamental de alguma parametrização do helicoidé e do catenoide são iguais. Portanto, considere a mudança de parâmetros

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

obtendo a nova parametrização do helicoidé dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

que é diferenciável e um homeomorfismo. Além disso, o determinante jacobiano

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{vmatrix} = a \cosh v,$$

nunca se anula. Por fim, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$  do helicóide obtemos

$$\bar{E} = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = a^2 \cosh^2 v.$$

Logo, pela Proposição 3.4, o catenoide é localmente isométrico ao helicóide.

Essa isometria local é menos óbvia do que a que acontece entre o cilindro e o plano. Aqui mostramos que um catenoide é localmente isométrico a um helicóide: a isometria manda um catenoide em "uma volta" do helicóide. A consequência desta isometria é que é possível "cortar" o catenoide em uma geratriz e executar uma deformação transformando-o em uma parte do helicóide sem modificar as distâncias de dois pontos fixos quaisquer. Um outro fato interessante é que o catenoide é localmente isométrico à superfície obtida em cada fase desta deformação, visto que os comprimentos, consequentemente a primeira forma é sempre preservada.

## 3.2 O Teorema egregium de Gauss e as Equações de Compatibilidade

Neste capítulo, vamos associar a cada ponto da superfície um triedro  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  e estudaremos as derivadas desses vetores. Iremos denotar por  $S$  uma superfície regular orientável e orientada.

Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização na orientação de  $S$ . É possível associar a cada ponto de  $\mathbf{x}(U)$  um triedro natural dado pelos vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$ . Expressando as derivadas dos vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ , obtemos

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + L_1N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + L_2N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v + \bar{L}_2N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v + L_3N, \end{aligned} \tag{3.1}$$



onde os  $a_{ij}$  com  $i, j = 1, 2$  são dados por

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \quad (3.2)$$

e os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , são chamados de símbolos de Christoffel de  $S$  na parametrização  $\mathbf{x}$ . Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , concluímos que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ , isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos com relação aos índices inferiores. Tomando o produto interno das relações anteriores de  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$ ,  $\mathbf{x}_{vu}$ ,  $\mathbf{x}_{vv}$  com  $N$ , obtemos

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \langle N, \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_1 \langle N, N \rangle = L_1, \\ f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_2 \langle N, N \rangle = L_2, \\ f &= \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = \langle N, \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N \rangle = \Gamma_{21}^1 \langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle N, \mathbf{x}_v \rangle + \bar{L}_2 \langle N, N \rangle = \bar{L}_2, \\ g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \langle N, \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_3 \langle N, N \rangle = L_3, \end{aligned}$$

onde  $e, f, g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $S$ . Note que

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \implies E_u = 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle.$$

Com isso,

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F.$$

Logo,

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2}.$$

Procedendo de forma análoga para determinar os símbolos de Christoffel, tomando o produto interno das expressões de  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$ ,  $\mathbf{x}_{vu}$ ,  $\mathbf{x}_{vv}$  em (3.1) com  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ , obtemos

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{E_u}{2}, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{E_v}{2}, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_v}{2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Observe que as equações acima foram agrupadas em três pares de equações e que

para cada par, o determinante do sistema é  $EG - F^2 \neq 0$ . Logo, é possível resolver o sistema acima e calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas. Não vamos obter expressões explícitas para os  $\Gamma_{ij}^k$ , já que é mais simples trabalharmos com o sistema acima em cada caso particular. Um fato importante que segue da solução do sistema acima, é que todos os conceitos e propriedades geométricas expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias.

**Exemplo 3.6.** Vamos calcular os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução (Exemplo 1.26) parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) > 0,$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  em  $S$ . Como

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2,$$

temos que

$$\begin{aligned} E_u &= 0, \\ E_v &= 2f(v).f'(v), \\ F_u &= 0, \\ F_v &= 0, \\ G_u &= 0, \\ G_v &= 2(f'(v).f''(v) + g'(v).g''(v)). \end{aligned}$$

Substituindo os valores acima no primeiro par de equações em (3.3), temos

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2},$$

fazendo o mesmo em (3.4), obtemos

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{f(v)f'(v)}{(f(v))^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0,$$

e por fim, em (3.5), concluímos que

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}.$$

Observe que as expressões das derivadas de  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  dependem apenas do conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais

de  $S$ . Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as expressões

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u &= 0, \\ (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo os valores de (3.1) nas equações acima, podemos reescrevê-las na forma

$$\begin{aligned} A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1N &= 0, \\ A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2N &= 0, \\ A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3N &= 0, \end{aligned}$$

onde  $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$ , são funções de  $E, F, G, e, f, g$  e suas derivadas. Como os vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  são linearmente independentes, temos que  $A_i = B_i = C_i = 0, i = 1, 2, 3$ , o que nos dá nove relações. Utilizando as expressões de (3.1), a relação  $(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0$ , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0 \\ \implies &(\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + fN)_u = 0, \end{aligned}$$

com isso, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v\mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v\mathbf{x}_v + e_vN &= \\ \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{x}_v + f_vN. & \end{aligned} \tag{3.7}$$

Utilizando as equações (3.1) novamente na equação (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + fN) + \Gamma_{11}^2((\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v + gN) + \\ e(a_{11}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v) + (\Gamma_{11}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v\mathbf{x}_v + e_vN = \\ \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + eN) + \Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + fN) + \\ f(a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v) + (\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{x}_v + f_vN. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Que podemos reescrever na forma

$$\begin{aligned} [(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ea_{12} + (\Gamma_{11}^1)_v) - (\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + fa_{11} + (\Gamma_{12}^1)_u)] \mathbf{x}_u + \\ [(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v) - (\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u)] \mathbf{x}_v + \\ [(\Gamma_{11}^1f + \Gamma_{11}^2g + e_v) - (\Gamma_{12}^1e + \Gamma_{12}^2f + f_v)] N = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, obtemos uma combinação linear de  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ , e  $N$  dando zero, e consequentemente os coeficiente de  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  são nulos. Olhando para o coeficiente de  $\mathbf{x}_v$ , ( $B_1 = 0$ )

temos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u \quad (3.10)$$

Introduzindo os valores de  $a_{21}$  e  $a_{22}$  dados em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= ea_{22} - fa_{21} \\ &= e \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \left( \frac{efF - efF - egE + f^2E}{EG - F^2} \right) \\ &= -E \left( \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \\ &= -EK. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Convém neste momento interromper nossos cálculos para chamar a atenção para o fato de que a equação acima prova o seguinte teorema.

**Teorema 3.7** (Teorema Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície é invariante por isometria locais.*

*Demonstração.* De fato, se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma parametrização de  $S$  em  $p$  e se  $\phi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$ , onde  $V \subset \mathbf{x}(U)$  é uma vizinhança de  $p$ , é isometria local em  $p$ , então  $\mathbf{y} = \phi \circ \mathbf{x}$  é uma parametrização de  $\bar{S}$  em  $\phi(p)$ . Como  $\phi$  é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  coincidem em pontos correspondentes  $q$  e  $\phi(q)$ ,  $q \in V$  e, conseqüentemente, os símbolos de Christoffel correspondentes também coincidem. Observe que em (3.11) expressamos  $K$  em um ponto como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização dada no ponto. Segue-se que  $K(q) = K(\phi(q))$ ,  $\forall q \in V$ .  $\square$

A expressão acima que produz o valor da curvatura  $K$  em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas, é conhecida como fórmula de Gauss. O teorema de Gauss é considerado um dos fatos mais importantes da geometria diferencial.

Como demonstrado no Exemplo 3.5, o catenoide é localmente isométrico ao heli-coide. Segue do teorema de Gauss que as curvaturas Gaussianas são iguais em pontos correspondentes pela isometria. Em outras palavras, isso nos mostra que o conceito de curvatura Gaussiana, cuja definição utiliza de maneira essencial a posição da superfície no espaço, não depende desta posição mas apenas da estrutura métrica da superfície, isto é, da primeira forma fundamental.

Procurando por mais alguns resultados geométricos, utilizando a equação (3.9) e olhando para o coeficiente de  $\mathbf{x}_u$ , vemos que a relação  $A_1 = 0$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12} + (\Gamma_{11}^1)_v &= \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11} + (\Gamma_{12}^1)_u \\ \implies (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= ea_{12} - fa_{11} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

Introduzindo os valores de  $a_{11}$  e  $a_{12}$  dados em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= ea_{12} - fa_{11} \\ &= e \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \\ &= FK. \end{aligned}$$

Por fim, repetindo o mesmo procedimento e, desta vez, olhando o coeficiente de  $N$  em (3.9), vemos que a relação  $C_1 = 0$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f\Gamma_{11}^1 + g\Gamma_{11}^2 + e_v &= e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2 + f_u \\ \implies e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando a segunda expressão de (3.6), podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v &= 0 \\ \implies (\Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN)_u - (\Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + fN)_v &= 0. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_{vu} + gN_u + (\Gamma_{22}^1)_u \mathbf{x}_u + (\Gamma_{22}^1)_u \mathbf{x}_v + g_u N &= \\ \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_{vv} + fN_v + (\Gamma_{21}^1)_v \mathbf{x}_u + (\Gamma_{21}^2)_v \mathbf{x}_v + f_v N. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Utilizando as equações (3.1) novamente na equação (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN) + \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + fN) + \\ g(a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v) + (\Gamma_{22}^1)_u \mathbf{x}_u + (\Gamma_{22}^1)_u \mathbf{x}_v + g_u N = \\ \Gamma_{21}^1 (\Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + fN) + \Gamma_{21}^2 (\Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN) + \\ f(a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v) + (\Gamma_{21}^1)_v \mathbf{x}_u + (\Gamma_{21}^2)_v \mathbf{x}_v + f_v N. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Que podemos reescrever como

$$\begin{aligned} [(\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + ga_{11} + (\Gamma_{22}^1)_u) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + fa_{12} + (\Gamma_{21}^1)_v)] \mathbf{x}_u + \\ [(\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + ga_{21} + (\Gamma_{22}^1)_u) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 + fa_{22} + (\Gamma_{21}^2)_v)] \mathbf{x}_v + \\ [(\Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f + g_u) - (\Gamma_{21}^1 f + \Gamma_{21}^2 g + f_v)] N = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como antes temos uma combinação linear de vetores L.I. dando zero. Assim, os coeficientes de  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  são nulos. Olhando para o coeficiente de  $\mathbf{x}_v$  e igualando a zero ( $B_2 = 0$ ), podemos escrever

$$\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2 + ga_{21} + (\Gamma_{22}^1)_u = \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + fa_{22} + (\Gamma_{22}^2)_v. \quad (3.18)$$

Introduzindo os valores de  $a_{21}$  e  $a_{22}$  obtidos em 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 &= fa_{22} - ga_{21} \\ &= f \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - g \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \left( \frac{f^2 F - fgE - egF + fgF}{EG - F^2} \right) \\ &= -F \left( \frac{eg - f^2 E}{EG - F^2} \right) \\ &= -FK. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando a equação (3.17) e igualando o coeficiente de  $\mathbf{x}_u$  a zero, vemos que a relação  $A_2 = 0$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^1 + ga_{11} + (\Gamma_{22}^1)_u &= \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + fa_{12} + (\Gamma_{21}^1)_v \\ \implies (\Gamma_{21}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^1 &= ga_{11} - fa_{12} \end{aligned}$$

Introduzindo os valores de  $a_{11}$  e  $a_{12}$  obtidos em 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{21}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^1 &= ga_{11} - fa_{12} \\ &= g \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \\ &= \left( \frac{f^2 G - fgF - egG + fgF}{EG - F^2} \right) \\ &= -G \left( \frac{eg - f^2 E}{EG - F^2} \right) \\ &= -GK. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Repetindo o mesmo procedimento e, desta vez, igualando o coeficiente de  $N$  a 0 em 3.17, ( $C_2 = 0$ ) podemos escrever

$$\begin{aligned} e\Gamma_{22}^1 + f\Gamma_{22}^2 + g_u &= f\Gamma_{21}^1 + g\Gamma_{21}^2 + f_v \\ \implies f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^1) - g\Gamma_{21}^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agora vamos observar o que acontece com a equação terceira equação em 3.6.

Temos que

$$\begin{aligned} N_{uv} &= N_{vu} \\ \implies (a_{11})_v \mathbf{x}_u + a_{11} \mathbf{x}_{uv} + (a_{12})_v \mathbf{x}_v + a_{21} \mathbf{x}_{vv} &= (a_{12})_u \mathbf{x}_u + a_{12} \mathbf{x}_{uu} + (a_{22})_u \mathbf{x}_v + a_{22} \mathbf{x}_{vu}, \end{aligned}$$

e introduzindo os valores de  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{vv}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$ ,  $\mathbf{x}_{vu}$  na expressão acima, obteremos uma combinação linear de  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$  e  $N$  dando 0 e como são L.I, obteremos as seguintes equações  $A_3 = 0$ ,  $B_3 = 0$  e  $C_3 = 0$  respectivamente, dadas por

$$(a_{11})_v + a_{11} \Gamma_{12}^1 + a_{21} \Gamma_{22}^1 - (a_{12})_u - a_{12} \Gamma_{11}^1 - a_{22} \Gamma_{12}^1 = 0, \quad (3.22)$$

$$(a_{21})_v + a_{11} \Gamma_{12}^2 + a_{21} \Gamma_{22}^2 - (a_{22})_u - a_{21} \Gamma_{11}^2 - a_{22} \Gamma_{12}^2 = 0, \quad (3.23)$$

$$(a_{11})f + (a_{21})g - (a_{12})e - (a_{22})f = 0 \quad (3.24)$$

Substituindo os valores de  $a_{ij}$ , encontrados na equação 2.4, na equação 3.22, obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right)_v + \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \Gamma_{12}^1 + \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{22}^1 &= \\ = \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right)_u + \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \Gamma_{11}^1 + \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{12}^1. \end{aligned}$$

Expandindo as derivadas temos

$$\begin{aligned} \frac{(f_v F + f F_v - e_v G - e G_v)(EG - F^2) - (fF - eG)(EG - F^2)_v}{EG - F^2} &= \\ \frac{(g_u F + g F_u - f_u G - f G_u)(EG - F^2) - (gF - fG)(EG - F^2)_u}{EG - F^2} + \\ \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \Gamma_{11}^1 + \left( \frac{eG - gE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{12}^1 - \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{22}^1. \end{aligned}$$

Isolando as derivadas de  $(f_u - e_v)$  na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} (f_u - g_v) \left( \frac{G}{EG - F^2} \right) &= \frac{(eG_v - f_v F - f F_v)}{EG - F^2} + \frac{(fF - eG)(EG - F^2)_v}{EG - F^2} \\ &+ \frac{(g_u F + g F_u - f_u G)}{EG - F^2} - \frac{(gF - fG)(EG - F^2)_u}{EG - F^2} \\ &+ \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \Gamma_{11}^1 + \left( \frac{eG - gE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{12}^1 - \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{22}^1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_u - e_v &= \frac{(eG_v - f_vF - fF_v)}{G} + \frac{(fF - eG)(EG - F^2)_v}{G(EG - F^2)} \\ &+ \frac{(g_uF + gF_u - fG_u)}{G} - \frac{(gF - fG)(EG - F^2)_u}{G(EG - F^2)} \\ &+ \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \Gamma_{11}^1 + \left( \frac{eG - gE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{12}^1 - \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \Gamma_{22}^1. \end{aligned}$$

Colecionando os termos com  $e, f, g$  do lado direito e calculando as derivadas remanescentes, obtemos

$$\begin{aligned} f_u - e_v &= \left( \frac{G_v}{G} - \frac{E_vG + EG_v - 2FF_v}{EG - F^2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} \right) e + \\ &\left( -\frac{F_v}{G} + \frac{F(E_vG + EG_u - 2FF_v)}{G(EG - F^2)} - \frac{G_u}{G} + \frac{E_uG + EG_u - 2FF_u}{EG - F^2} - \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \frac{E}{G} \right) f \\ &+ \left( \frac{F_u}{G} - F \left( \frac{E_uG + EG_u - 2FF_u}{G(EG - F^2)} \right) + \Gamma_{11}^1 \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1 \frac{E}{G} \right) g - \frac{f_vF}{G} + \frac{g_uF}{G}. \end{aligned}$$

Agora, observe que  $\frac{G_v}{G} - \frac{E_vG + EG_v - 2FF_v}{EG - F^2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(\Gamma_{22}^1F + \Gamma_{22}^2G)}{G} - \left( \frac{2G(\Gamma_{12}^1E + \Gamma_{12}^2F) + 2E(\Gamma_{22}^1F + \Gamma_{22}^2G)}{EG - F^2} \right) \\ &+ \left( \frac{2F(\Gamma_{22}^1E + \Gamma_{22}^2F + \Gamma_{12}^1F + \Gamma_{12}^2G)}{EG - F^2} \right) + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} \\ &= 2\Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} + 2\Gamma_{22}^2 + \frac{(-2\Gamma_{12}^1EG - 2\Gamma_{12}^2FG - 2\Gamma_{22}^1EF - 2\Gamma_{22}^2EG)}{EG - F^2} \\ &+ \frac{(2\Gamma_{22}^1EF + 2\Gamma_{22}^2F^2 + 2\Gamma_{22}^1F^2 + 2\Gamma_{12}^2FG)}{EG - F^2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} \\ &= \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} + 2\Gamma_{22}^2 + \frac{EG(-2\Gamma_{12}^1 - 2\Gamma_{22}^2) - F^2(-2\Gamma_{12}^1 - 2\Gamma_{22}^2)}{EG - F^2} + \Gamma_{12}^1 \\ &= \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} + 2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 + \frac{(-2\Gamma_{12}^1 - 2\Gamma_{22}^2)(EG - F^2)}{EG - F^2} \\ &= \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} + 2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 - 2\Gamma_{12}^1 - 2\Gamma_{22}^2 \\ &= \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1. \end{aligned} \tag{3.25}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{Além disso, } -\frac{F_v}{G} + \frac{F(E_v G + E G_u - 2FF_v)}{G(EG - F^2)} - \frac{G_u}{G} + \frac{E_u G + E G_u - 2FF_u}{EG - F^2} - \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \frac{E}{G} \\
 &= \frac{F}{G} \left[ \frac{2G(\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F) + 2E(\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G) - 2F(\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F + \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G)}{EG - F^2} \right] \\
 & - \frac{(2\Gamma_{12}^1 F + 2\Gamma_{12}^2 G)}{G} - \frac{(\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F + \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G)}{G} - \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \frac{E}{G} \\
 & + \frac{2G(\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F) + 2E(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) - 2F(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F)}{EG - F^2} \\
 &= \frac{F}{G} (-\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - \Gamma_{12}^2 + \frac{2\Gamma_{12}^1 EF + 2\Gamma_{12}^2 F^2}{EG - F^2} + \frac{2\Gamma_{22}^1 EF^2}{G(EG - F^2)} + \frac{2\Gamma_{22}^2 FE}{EG - F^2} \\
 & - \frac{2\Gamma_{22}^1 EF^2 - 2\Gamma_{22}^2 F^3 - 2\Gamma_{12}^1 F^3}{G(EG - F^2)} - \frac{2\Gamma_{12}^2 F^2}{EG - F^2} - \frac{2\Gamma_{12}^1 F}{G} - 2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \\
 & + \frac{2\Gamma_{11}^1 EG + 2\Gamma_{11}^2 FG + 2\Gamma_{12}^1 EF + 2\Gamma_{12}^2 EG - 2\Gamma_{11}^1 F^2 - 2\Gamma_{11}^2 FG - 2\Gamma_{12}^1 EF - 2\Gamma_{12}^2 F^2}{EG - F^2} \\
 &= EG \left( \frac{2\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2}{EG - F^2} \right) - F^2 \left( \frac{2\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2}{EG - F^2} \right) - \Gamma_{22}^2 \frac{F}{G} - 3\Gamma_{12}^1 \frac{F}{G} - 3\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \\
 & + \frac{2EFG}{(EG - F^2)G} (\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) - \frac{2F^3}{G(EG - F^2)} (\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) \\
 &= 2(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + \frac{2F}{G} (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) - \Gamma_{22}^2 \frac{F}{G} - 3\Gamma_{12}^1 \frac{F}{G} - 3\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \\
 &= \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^2 \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1 \frac{F}{G} = \frac{F}{G} (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) + \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2. \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

$$\text{Por fim, temos que } \frac{F_u}{G} - \frac{F(E_u G + E G_u - 2FF_u)}{G(EG - F^2)} + \Gamma_{11}^1 \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1 \frac{E}{G}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F}{G} \\
 & - \frac{F}{G} \left[ \frac{2G(\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F) + 2E(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) - 2F(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F)}{EG - F^2} \right] \\
 & + \Gamma_{11}^1 \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1 \frac{E}{G} \\
 &= \frac{F}{G} (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2 + \frac{(-2\Gamma_{11}^1 FE - 2\Gamma_{11}^2 F^2)}{EG - F^2} - \frac{2\Gamma_{12}^1 EF^2}{G(EG - F^2)} - \frac{2\Gamma_{12}^2 EF}{EG - F^2} \\
 & + \frac{2\Gamma_{11}^1 F^3}{G(EG - F^2)} + \frac{2\Gamma_{11}^2 F^2}{EG - F^2} + \frac{2\Gamma_{12}^1 EF^2}{G(EG - F^2)} + \frac{2\Gamma_{12}^2 F^3}{G(EG - F^2)} \\
 &= \frac{2F^3}{G(EG - F^2)} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) - \frac{2EFG}{(EG - F^2)G} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2 + \frac{F}{G} (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
 &= \frac{-2F(EG - F^2)}{G(EG - F^2)} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2 + 2\Gamma_{11}^1 \frac{F}{G} + \Gamma_{12}^2 \frac{F}{G} \\
 &= \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \frac{F}{G}. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Logo, realizando a distributividade e usando 3.21 obtemos

$$\begin{aligned}
 f_u - e_v &= e \left( \Gamma_{22}^1 \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1 \right) + f \left( \frac{F}{G} (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) + \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \right) \\
 &\quad + g \left( \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \frac{F}{G} \right) - \frac{F}{G} (f_v - g_u) \\
 &= -e\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 e \frac{F}{G} + \Gamma_{22}^2 f \frac{F}{G} - \Gamma_{12}^1 f \frac{F}{G} + \Gamma_{11}^1 f - \Gamma_{12}^2 f + g\Gamma_{11}^2 \\
 &\quad - \frac{F}{G} g\Gamma_{12}^2 - \frac{F}{G} e\Gamma_{22}^1 - \frac{F}{G} f\Gamma_{22}^2 + \frac{F}{G} f\Gamma_{12}^1 + \frac{F}{G} g\Gamma_{12}^2 \\
 &= -e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + g\Gamma_{11}^2
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Assim, obtemos novamente a equação 3.14

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \tag{3.29}$$

Agora, substituindo os valores de  $a_{ij}$  encontrados em 2.4 podemos escrever a equação 3.24, na forma

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) f + \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) g = \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) e + \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) f \\
 \Rightarrow &f^2 F - eGf + eFg - fEg = gFe - fGe + f^2 F - gEf \\
 \Rightarrow &0 = 0.
 \end{aligned}$$

E  $B_3 = 0$  (através de cálculos semelhantes aos feitos para  $A_3 = 0$ ) nos dará novamente a equação (3.21). As equações (3.14) e (3.21) são chamadas equações de Mainardi-Codazzi. A fórmula de Gauss e as equações de Mainardi-Codazzi são conhecidas como as equações de compatibilidade da teoria das superfícies.

Neste ponto, uma pergunta natural a ser feita é se existem outras relações de compatibilidade entre a primeira e a segunda formas fundamentais, além das já obtidas. O teorema a seguir, que não será demonstrado neste trabalho, mostra que a resposta é não. Em outras palavras, por derivações sucessivas ou qualquer outro processo não se obtém novas relações entre os coeficientes  $E, F, G, e, f, g$  e suas derivadas. Em verdade, o teorema é mais explícito e afirma que o conhecimento da primeira e segunda formas fundamentais determina a superfície localmente.

**Teorema 3.8** (Bonnet). *Sejam  $E, F, G, e, f, g$  funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , com  $E > 0, G > 0$ . Suponha que as funções satisfazem formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Cadazzi e que  $EG - F^2 > 0$ . Então, para todo  $q \in V$  existe uma vizinhança  $U \subset V$  de  $q$  e um difeomorfismo  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  tal que a superfície regular  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  tem  $e, f, g$  e  $E, F, G$ , como coeficientes da segunda e*

primeira formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se  $U$  for conexo e se

$$\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3,$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação  $T$  e uma transformação ortogonal própria  $\rho$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$ .

### 3.3 Aplicações

A seguinte proposição, nos dá através da formula de Gauss, uma expressão para o cálculo da curvatura em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

**Proposição 3.9.** *Se  $\mathbf{x}$  é uma parametrização ortogonal, isto é,  $F = 0$ , então a curvatura Gaussiana é dada por*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}. \quad (3.30)$$

*Demonstração.* Para demonstrar a proposição acima, iremos utilizar a fórmula de Gauss (3.11)

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2.$$

Como  $F = 0$ , pelos sistemas de equações (3.3),(3.4) e (3.5), temos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Substituindo as equações acima na fórmula de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} -KE &= \left( \frac{G_u}{2G} \right)_u - \left( -\frac{E_v}{2G} \right)_v + \left( \frac{E_v}{2E} \right) \left( -\frac{E_v}{2G} \right) + \frac{G_u}{2G} \frac{G_u}{2G} - \frac{E_u}{2E} \frac{G_u}{2G} - \left( -\frac{E_v}{2G} \right) \left( \frac{G_v}{2G} \right) \\ &= \left( \frac{G_u}{2G} \right)_u + \left( \frac{E_v}{2G} \right)_v - \frac{E_v^2}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{E_v G_v}{4G^2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{GG_{uu} - G_u^2}{G^2} + \frac{GE_{vv} - E_v G_v}{G^2} - \frac{E_v^2}{2EG} + \frac{G_u^2}{2G^2} - \frac{E_u G_u}{2EG} + \frac{E_v G_v}{2G^2} \right) \\ &= \frac{1}{2EG^2} \left( EGG_{uu} - EG_u^2 + EGE_{vv} - EE_v G_v - \frac{GE_v^2}{2} + \frac{EG_u^2}{2} - \frac{GE_u G_u}{2} + \frac{EE_v G_v}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim,

$$K = -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u). \quad (3.32)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\
 = & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\sqrt{EG}E_{vv} - \frac{E_v(E_vG + G_vE)}{2\sqrt{EG}}}{EG} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu} - \frac{G_u(E_uG + EG_u)}{2\sqrt{EG}}}{EG} \right\} \\
 = & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\sqrt{EG}E_{vv}}{EG} - \frac{E_v^2G + E_vG_vE}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu}}{EG} - \frac{G_uE_uG + EG_u^2}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
 = & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{1}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} (2EGE_{vv} - E_v^2G - E_vG_vE + 2EGG_{uu} - E_uG_uG - EG_u^2) \\
 = & -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_vG_v - GE_v^2 - GE_uG_u) = K.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.10.** Vamos mostrar que nenhuma vizinhança de um ponto em uma esfera pode ser aplicada isometricamente em um plano.

Sejam  $S^2$  uma esfera e  $P$  um plano em  $\mathbb{R}^3$ . Suponha que exista uma vizinhança  $V$  de  $p \in S^2$  que possa ser aplicada isometricamente sobre  $P$ , isto é, existe uma isometria  $\Phi : V \subset S^2 \rightarrow W \subset P$ , onde  $V$  e  $W$  são abertos contendo  $p$  e  $\Phi(p)$ , respectivamente. Pelo Teorema Egregium de Gauss, temos que:

$$K(p) = \bar{K}(\Phi(p)), \quad \forall p \in V, \quad (3.33)$$

onde  $K$  e  $\bar{K}$  são as curvaturas gaussianas de  $S^2$  e  $P$ , respectivamente. Por outro lado, sabemos que  $K(p) = 1$  e  $\bar{K}(\Phi(p)) = 0$ , o que é uma contradição. Portanto, nenhuma vizinhança de um ponto da esfera pode ser aplicada isometricamente em um plano  $S$ .

**Exemplo 3.11.** Mostraremos que não existe superfície  $S$  tal que  $E = G = 1$ ,  $F = 0$ ,  $e = 1$ ,  $g = -1$  e  $f = 0$ .

Suponha que existe  $\mathbf{x}(u, v)$  tal que  $E = G = 1$  e  $F = 0$ ,  $e = 1$ ,  $g = -1$ ,  $f = 0$ . então,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -1. \quad (3.34)$$

Por outro lado, como  $\mathbf{x}$  é ortogonal ( $F = 0$ ), então:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_u \right\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.35}$$

isto é, não satisfaz a equação de Gauss. Portanto, não existe tal superfície.

**Exemplo 3.12.** Mostraremos que as superfícies abaixo não são localmente isométricas duas a duas:

- (a) Esfera
- (b) Cilindro
- (c) Catenoide

(a) Uma parametrização para a esfera é

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sen u \cos v, \sen u \sen v, \cos u), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi$$

Temos que  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = \sen^2 u$ . Logo,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sen u} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \sen u \end{pmatrix}_v + \begin{pmatrix} 2\sen u \cos u \\ \sen u \end{pmatrix}_u \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sen u} \cdot (-2\sen u) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.36}$$

(b) Uma parametrização para o cilindro é

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sen u, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

Temos que  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Daí,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_u \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

(c) Como já visto, uma parametrização para o catenoide é

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Logo,  $E = a^2 \cosh^2 v$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2 \cosh^2 v$ . Além disso, vimos no exemplo 2.22 que

$$K = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}, \quad \forall (u, v).$$

Pelo Teorema Egregium de Gauss, temos que a curvatura gaussiana é invariante por isometria local. Como as curvaturas da esfera, do cilindro e do catenoide são diferentes, então essas superfícies não são localmente isométricas duas a duas.

## Considerações Finais

Neste trabalho, fizemos um breve estudo sobre isometria e o teorema Egregium de Gauss, além de obter as equações de compatibilidade. No capítulo 1 apresentamos a definição de superfície regular, algumas proposições e exemplos que garantem que conjuntos como gráficos de funções e imagem inversa de valores regulares, são superfícies regulares além de uma categoria especial de superfícies, as superfícies de revolução. Além disso, definimos com a ajuda do teorema de mudança de parâmetros, o que são funções e aplicações diferenciáveis entre superfícies, a diferencial de uma aplicação entre superfícies e a primeira forma fundamental. No capítulo 2 fizemos uma breve abordagem sobre orientação de superfícies e estudamos a aplicação normal de Gauss, a segunda forma fundamental e definimos curvaturas Gaussiana e Média, exibindo as características que uma superfície deve ter numa vizinhança de um ponto elíptico e de um ponto hiperbólico, além da forma que a superfície deve ter na vizinhança de um ponto em que a segunda forma é estritamente positiva, e estritamente negativa para todo  $v$  de  $T_pS$  com  $|v| = 1$ , e da vizinhança de um ponto de uma superfície cuja segunda forma assume valores positivos e negativos no disco unitário de  $T_pS$ . Calculamos também os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais e as curvaturas gaussiana e média em termos de coordenadas locais.

No capítulo 3 fizemos um breve estudo sobre isometrias e demonstramos o teorema Egregium de Gauss, obtendo a fórmula de Gauss e as equações de Mainardi-Codazzi. Obtivemos tais fórmulas através de um longo processo computacional. tais equações são chamadas equações de compatibilidade e tratam de condições de existência de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . além disso, enunciamos o teorema de Bonnet concluindo o capítulo com algumas aplicações.

Este trabalho é uma extensão do que foi apresentado em um minicurso oferecido na XV-SEMAT da UFRPE intitulado "Um convite a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ ", onde falamos sobre a aplicação normal de Gauss, a segunda forma fundamental e as curvaturas Gaussiana e Média. Acreditamos que tal estudo serve como uma boa base para futuros estudos na área de geometria diferencial, em uma futura pós graduação.

## Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**, 6<sup>a</sup>.ed, SBM, Rio de Janeiro, 2014.
- [2] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. **Geometria Diferencial I**, 2003 - 2009, Notas de Aula, Rio de Janeiro.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton I. **Um curso de Cálculo vol.2**, 5<sup>a</sup>.ed, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A, 2001.
- [4] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2014.
- [5] SANTOS, Túlio José de Souza. **Um breve estudo sobre a geometria Diferencial de Superfícies em  $\mathbb{R}^3$** . Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, 2021.
- [6] SOTOMAYOR, J.M. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1979.
- [7] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno**. Rio de Janeiro. LCT, 2010.
- [8] O'NEILL, B. **Elementary Differential Geometry**, 2<sup>a</sup>.ed, Elsevier Science, 2006.
- [9] BOLDRINI, Luis José, et al. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986. Matemática Universitária, 2016.
- [10] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 1**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.
- [11] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 2**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [12] GAUSS, Carl Friedrich. **Disquisitiones generales circa superficies curvas**. Typis Dieterichianis, 1828.