



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Matheus Rabelo Viana da Costa

# Um breve estudo sobre o Transporte Paralelo, Geodésicas e a Aplicação Exponencial

Recife-PE  
Setembro de 2023

# Um breve estudo sobre o Transporte Paralelo, Geodésicas e a Aplicação Exponencial

por

Matheus Rabelo Viana da Costa

Sob orientação de

**Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Recife-PE  
Setembro de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- C838b Costa, Matheus Rabelo Viana  
Um breve estudo sobre o Transporte Paralelo, Geodésicas e a Aplicação Exponencial / Matheus Rabelo Viana Costa.  
- 2023.  
116 f. : il.
- Orientador: Renato Teixeira Gomes.  
Inclui referências.
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em  
Matemática, Recife, 2024.
1. Aplicação exponencial. 2. Geometria diferencial. 3. Transporte paralelo. I. Gomes, Renato Teixeira, orient. II. Título

Matheus Rabelo Viana da Costa

# Um breve estudo sobre o Transporte Paralelo, Geodésicas e a Aplicação Exponencial

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à  
Coordenação do Curso de Licenciatura plena  
em Matemática da Universidade Federal Ru-  
ral de Pernambuco - Sede, como parte dos  
requisitos para a obtenção do grau de Licen-  
ciada em Matemática.

Aprovado em: 15/09/2023.

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. José Alan Farias dos Santos  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes (orientador)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Recife-PE  
Setembro de 2023

*À minha esposa, Debora Ranne Teixeira Barbosa*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha esposa, Debora Teixeira Ranne Barbosa. Através do seu apoio incondicional, foi possível superar todos os obstáculos. Agradeço a toda minha família. Meu pai Fernando Antônio Rabelo Cavalcanti, minha irmã Ananda Rabelo Viana da Costa e meu irmão Thiago Rabelo Viana da Costa. Em particular, queria agradecer a minha mãe, Ana Glória Rabelo Viana da Costa, pelo suporte durante toda a minha vida. Foi o amor dela que me fez entender a importância dos estudos.

Agradeço a meu professor e orientador Dr. Renato Teixeira Gomes. Foram quase três anos de muito trabalho e dedicação. Renato me formou como profissional e como pessoa. Também agradeço aos professores Dr. Marcelo Pedro dos Santos e Dr. José Alan Farias dos Santos, pelo suporte nas correções e orientações das iniciações científicas e, agora, no trabalho de conclusão de curso.

Agradeço aos meus grandes amigos durante o curso: Túlio Santos, Yasmim Lira, Hellen Souza e Karla Suzana. Foram dias incansáveis de estudos, trabalhos, provas e muito esforço em conjunto.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFRPE e a Universidade Federal Rural de Pernambuco como um todo.

# Resumo

Geodésicas são curvas em uma superfície regular que possuem a propriedade de localmente minimizarem o comprimento, isto é, se dois pontos estão próximos, a curva que possui o menor comprimento ligando estes dois pontos é uma geodésica. Elas são a grosso modo as "retas" da superfície, pois possuem a norma do vetor velocidade constante, e são curvas de aceleração nula. Podemos chegar a estas curvas através da solução de um problema variacional, ou trilhando o "caminho da Geometria" no qual definimos geodésicas como uma curva cujo campo de vetores tangentes é paralelo. O estudo destas curvas em uma superfície nos leva ao conhecimento de varias propriedades geométricas importantes, além do desenvolvimento de novos maquinários, como sistemas de coordenadas especiais, por exemplo, que facilitam o estudo das superfícies e auxiliam no cálculo de estruturas geométricas importantes desta.

Neste trabalho faremos um breve estudo sobre transporte paralelo, geodésicas, a aplicação exponencial e suas propriedades. Estudaremos a noção de derivada covariante, e como transportamos paralelamente vetores ao longo de curvas. Com essa ideia de paralelismo, definiremos geodésicas como uma curva que possui campo de vetores tangentes paralelo. Faremos um estudo sobre algumas propriedades destas curvas e da curvatura geodésica de curvas em superfícies. Por fim, estudaremos a aplicação exponencial, o sistema de coordenadas normais e o sistema de coordenadas polares geodésicas e utilizaremos este, para entre outras coisas mostrar que geodésicas possuem a propriedade de localmente minimizarem o comprimento.

**Palavras-Chave:** Geometria diferencial; transporte paralelo; aplicação exponencial.

# Abstract

Geodesics are curves on a regular surface that have the property of locally minimizing length, that is, if two points are close together, the curve that has the shortest length connecting these two points is a geodesic. They are roughly the "straight lines" of the surface, as they have a constant velocity vector norm, and are zero acceleration curves. We can arrive at these curves through the solution of a variational problem, or following the "path of Geometry" in which we define geodesics as a curve whose field of tangent vectors is parallel. The study of these curves on a surface leads us to the knowledge of several important geometric properties, in addition to the development of new machinery, such as special coordinate systems, for example, which facilitate the study of surfaces and help in the calculation of their important geometric structures.

In this work we will make a brief study about parallel transport, Geodesics and the exponential map and its properties. We will study the notion of a covariant derivative, and how we parallel transport vectors along curves. With this idea of parallelism, we will define geodesics as a curve that has a field of parallel tangent vectors, we will study some properties of these curves and the geodesic curvature of curves on surfaces. Finally, we will study the exponential map, the normal coordinate system and the geodesic polar coordinate system and we will use this one to, among other things, show that geodesics have the property of locally minimizing the length

**KeyWords:** Differential Geometry; parallel transport; exponential map.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Definições e Resultados de Topologia de Espaços Métricos . . . . .	14
1.2 Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	18
<b>2 Um Pouco de Geometria Diferencial de Superfícies</b>	<b>25</b>
2.1 Alguns Resultados Sobre Análise no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
2.2 Superfícies Regulares . . . . .	27
2.3 Mudança de Parâmetros e Funções Diferenciáveis sobre Superfícies . . . . .	34
2.4 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação . . . . .	38
2.5 Primeira Forma Fundamental . . . . .	41
2.6 Orientação de Superfícies . . . . .	47
2.7 Aplicação Normal de Gauss . . . . .	51
2.8 Segunda Forma Fundamental . . . . .	54
2.9 A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais . . . . .	57
<b>3 Isometrias e o Teorema Egregium de Gauss</b>	<b>61</b>
3.1 Isometrias . . . . .	61
3.2 Teorema de Gauss e Equações de Compatibilidade . . . . .	66
<b>4 Transporte Paralelo e Geodésicas</b>	<b>72</b>
4.1 A Derivada Covariante . . . . .	72
4.2 Transporte Paralelo . . . . .	75
4.3 Geodésicas . . . . .	80
4.4 A curvatura geodésica . . . . .	82
<b>5 Aplicação Exponencial</b>	<b>95</b>
5.1 Aplicações geométricas das coordenadas normais e das coordenadas polares geodésicas . . . . .	101

5.2	Comportamento das geodésicas com relação ao sinal da curvatura . . . . .	108
5.3	Uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana . . . . .	109
5.4	Geodésicas Minimizantes . . . . .	111
<b>Considerações Finais</b>		<b>114</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>116</b>

# Lista de Figuras

1.1	Distância entre $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ em $\beta(X; \mathbb{R})$ . . . . .	15
2.1	Representação da diferencial de uma aplicação diferenciável. . . . .	25
2.2	Uma parametrização de uma Superfície Regular. . . . .	27
2.3	Curvas coordenadas em $S$ . . . . .	28
2.4	Parametrizações locais da esfera. . . . .	31
2.5	Diagrama da Mudança de Parâmetros. . . . .	34
2.6	Diagrama de uma função diferenciável em um ponto da superfície. . . . .	36
2.7	Aplicação diferenciável entre superfícies regulares. . . . .	37
2.8	Diagrama da construção de $\beta$ . . . . .	39
2.9	Representação de $w$ e $d\phi_p(w)$ nas superfícies regulares $S_1$ e $S_2$ , respectivamente. . . . .	40
2.10	Helicóide. . . . .	44
2.11	Uma superfície de revolução. . . . .	45
2.12	Orientação de $T_p S$ . . . . .	47
2.13	Aplicação Normal de Gauss. . . . .	52
2.14	Variação do vetor normal em uma vizinhança de $p$ . . . . .	53
2.15	Curvatura Normal. . . . .	55
2.16	Curvatura da seção normal, Meusnier. . . . .	56
3.1	Isometria local entre o cilindro e o plano. . . . .	63
3.2	Diagrama da aplicação $\varphi$ . . . . .	64
3.3	O catenoide. . . . .	65
4.1	A Derivada Covariante. . . . .	73
4.2	Campo de vetores tangentes ao longo de uma curva. . . . .	74
4.3	Campo constante ao longo de uma curva no plano. . . . .	75
4.4	Uma campo paralelo sobre a esfera. . . . .	76
4.5	Transporte paralelo em um plano. . . . .	77
4.6	Cone tangente à esfera ao longo de $C$ . . . . .	78
4.7	Ângulo central $\theta$ . . . . .	79

---

4.8	Grande Círculo $C = \mathbb{S}^2 \cap \pi$ .	81
4.9	Geodésicas em um cilindro.	82
4.10	$ k_g $ é o valor absoluto da componente tangencial $\alpha''(s)$	84
4.11	Curvatura de $C$ .	85
4.12	A função $\varphi$ .	86
4.13	As curvas $\gamma_1$ e $\gamma_2$ .	92
4.14	$\gamma : J \rightarrow S$ na parametrização $\mathbf{x}$ .	94
5.1	$\exp_p(v)$ definida sobre a esfera unitária $\mathbb{S}$ .	96
5.2	$\exp_p(v)$ definida sobre $S$ onde $S$ é formada pelo cone de uma folha menos o vértice.	96
5.3	Coordenadas polares em $T_p S$ .	99
5.4	Comportamento de $L(\rho)$ se $K < 0$ e mantém seu sinal.	108
5.5	Comportamento de $L(\rho)$ se $K > 0$ e manter seu sinal.	109
5.6	Comportamento de duas geodésicas na esfera.	109
5.7	O caso em que $\alpha([0, t_1]) \subset \bar{W}$ .	112
5.8	O caso em que $\alpha([0, t_1])$ não esteja inteiramente contida em $W$ .	113

# Introdução

Sabemos que na geometria euclidiana plana, isto é,  $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$  munido do produto interno canônico, a menor distância entre dois pontos é dada por uma reta. Em outras palavras, uma reta é a curva de menor comprimento que liga dois pontos quaisquer nesta geometria. Surge então a seguinte questão: Se agora considerarmos dois pontos quaisquer em uma superfície regular, qual curva ligando estes dois pontos tem o menor comprimento na superfície? Colocando o problema de outra forma, se nosso mundo é bidimensional porém não é necessariamente plano, qual a curva que liga estes dois pontos, terá o menor comprimento neste mundo? Quais tipos de curvas realizam essa condição? As curvas que respondem a estas questões são as chamadas geodésicas que são curvas que possuem seu campo de vetores tangentes paralelo, isto é, possui derivada covariante nula, conceitos estes que tornaremos claro em breve. Neste trabalho faremos um breve estudo de tais curvas e de parte da teoria relacionada a elas com foco no transporte paralelo, geodésicas, curvatura geodésica e na aplicação exponencial.

Alguns conceitos importantes que iremos estudar, estão diretamente relacionados com a existência e unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares e por esse motivo, no capítulo 1 demonstraremos alguns resultados importantes como o teorema de Picard e o Teorema de Peano que sob certas condições, garantem a existência e unicidade de soluções destes tipos de equações (Teorema de Picard) ou apenas a existência (Teorema de Peano).

O capítulo 2 é dedicado a desenvolver parte da teoria da Geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , necessária a compreensão dos capítulos 3,4 e 5 que é o foco de nosso trabalho. No capítulo 3 estudaremos o conceito de isometria entre duas superfícies regulares, e mostraremos que duas superfícies são localmente isométricas se elas possuem a mesma primeira forma fundamental. Neste dedicamos uma atenção especial ao Teorema Egregium de Gauss, um dos teoremas mais importantes da Geometria diferencial, que nos diz que a curvatura Gaussiana é invariante por isometrias locais.

No capítulo 4 introduziremos o conceito de campo de vetores em uma superfície e de campo de vetores ao longo de uma curva nesta superfície. Desenvolveremos a noção de derivada covariante de um campo de vetores ao longo de uma curva e mostraremos que este é um conceito intrínseco. Daí passaremos a noção de campo paralelo (derivada covariante nula), e de transporte paralelo de campos ao longo de curvas. Definiremos geodésicas como

curvas que possuem seu campo de vetores velocidade paralelo. Exibiremos as equações das geodésicas, e estudaremos a curvatura geodésica de curvas na superfície que equivale a noção de curvatura de curvas planas.

No capítulo 5 faremos um estudo da aplicação exponencial e de dois sistemas de coordenadas a ela relacionada que são as coordenadas normais e as coordenadas polares geodésicas. Faremos algumas aplicações interessantes destes sistemas de coordenadas como novas expressões em termos das coordenadas polares geodésicas para o cálculo da curvatura Gaussiana, demonstraremos o teorema de Minding, que diz que quaisquer duas superfícies que possuem a mesma curvatura Gaussiana constante, são localmente isométricas, observaremos como geodésicas se comportam em superfícies que preservam o sinal da curvatura Gaussiana, daremos uma outra interpretação geométrica desta e por fim, mostraremos que a menor distância entre dois pontos em uma superfície é realizada por uma geodésica minimizante.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

### 1.1 Definições e Resultados de Topologia de Espaços Métricos

Estudaremos inicialmente alguns conteúdos preliminares de Análise e Topologia de Espaços Métricos necessários para demonstração do Teorema de Picard que garante, sob certas condições, a existência e unicidade da solução de uma EDO.

**Definição 1.1.** Uma métrica num conjunto  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado de distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

1.  $d(x, x) = 0$ ;
2. Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (desigualdade triangular).

**Definição 1.2.** Um espaço métrico é um par  $(M, d)$ , onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $M$ .

**Exemplo 1.3.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são listas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  onde  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, n$ . As funções  $d_1, d_2, d_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

1.  $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ ,
2.  $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ ,
3.  $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$ ,

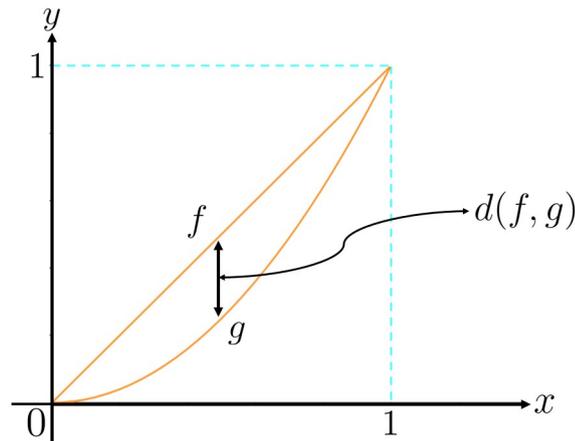
são métricas pois satisfazem as condições da definição 1.1. A métrica  $d_1$  é chamada métrica euclidiana, a  $d_2$  métrica da soma e a  $d_3$  é chamada métrica do máximo.

**Exemplo 1.4.** Seja  $X$  um conjunto arbitrário. Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada se  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in X$ . Indicaremos por  $\beta(X; \mathbb{R})$  o conjunto das funções limitadas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Podemos definir uma métrica em  $\beta(X; \mathbb{R})$  da seguinte forma: se  $f, g \in \beta(X; \mathbb{R})$  são funções arbitrárias, definimos

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Esta é chamada métrica de convergência uniforme, ou métrica do sup. Observe que a distância  $d(f, g)$  é o comprimento do maior segmento vertical que se pode traçar ligando o gráfico de  $f$  ao gráfico de  $g$ . Por exemplo, no espaço métrico  $\beta([0, 1]; \mathbb{R})$ , a distância da função  $f(x) = x$  à função  $g(x) = x^2$  é  $d(f, g) = \frac{1}{4}$  (Figura 1.1).

Figura 1.1: Distância entre  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  em  $\beta(X; \mathbb{R})$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 1.5.** Uma sequência  $(x_n)$  de pontos de um espaço métrico  $(X, d)$  é convergente se existe  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Em outras palavras, dizemos que  $(x_n)$  converge para  $x$  e denotamos  $(x_n) \rightarrow x$ , quando dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se

$$n > n_0 \implies d(x_n, x) < \epsilon.$$

Nestas condições,  $x$  é dito o limite da sequência  $(x_n)$ .

**Definição 1.6.** Uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$  chama-se sequência de Cauchy quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $m, n > n_0$  então  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ . Em outras palavras, a fim que uma sequência  $(x_n)$  seja de Cauchy, é necessário e suficiente

que, para cada  $\epsilon > 0$  dado, exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$  qualquer que seja  $p \in \mathbb{N}$ . Observe que os termos de uma sequência de Cauchy com índices suficientemente grandes estão arbitrariamente próximos. É natural intuirmos que toda sequência convergente é de Cauchy, o que será comprovado pelo teorema a seguir.

**Teorema 1.7.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente no espaço métrico  $M$ , isto é  $(x_n) \longrightarrow x$ . Então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pela desigualdade triangular, tomando  $m, n > n_0$ , temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. □

A recíproca do teorema acima não é verdadeira em geral. Existem sequências de Cauchy que não são convergentes. Para darmos um contraexemplo, precisamos da seguinte proposição.

**Proposição 1.8** (Propriedade Arquimediana dos Números Reais). *Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $na > b$ .*

**Exemplo 1.9.** Sejam  $X = (0, 1]$  e  $(X, d)$  um espaço métrico. Tome a sequência  $(x_n) = (\frac{1}{n})$  em  $(X, d)$ .  $(x_n)$  é de Cauchy, pois dado  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ , tomamos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_0 \frac{\epsilon}{2} > 1 \implies \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2},$$

o que é possível pela propriedade Arquimediana dos números reais. Dados  $m, n > n_0$ , temos

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Note que

$$m, n > n_0 \implies \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} \quad e \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}.$$

Segue que

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Portanto,  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy mas  $(x_n)$  não converge em  $X$  pois  $0 \notin X$ .

**Definição 1.10.** Um espaço métrico  $M$  é completo quando toda sequência de Cauchy em  $M$  converge para um elemento de  $M$ .

O lema a seguir é de extrema importância para a teoria dos espaços métricos e será utilizado para demonstrar o teorema de existência e unicidade de soluções para EDO's de primeira ordem.

**Lema 1.11** (Lema de Contração). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração, isto é,  $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$ ,  $0 \leq K < 1$  para todo  $x, y \in X$ . Então existe um único ponto fixo  $p$  por  $F$ , isto é,  $F(p) = p$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ , isto é,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in X$ , onde  $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos a unicidade de  $p$ . Sejam  $p, p_1 \in X$  dois pontos fixos. Por  $F$  ser uma contração, temos

$$d(p, p_1) = d(F(p), F(p_1)) \leq Kd(p, p_1).$$

O que implica que  $d(p, p_1) = 0$ . Logo,  $p = p_1$ .

Para mostrar a existência de  $p$ , sejam  $x \in X$  e  $x_n = F^n(x)$ . Nosso objetivo é provar que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. Sendo  $r \in \mathbb{N}$ , temos

$$d(x_{n+r}, x_n) = d(F^{n+r}(x), F^n(x)) \leq Kd(F^{n+r-1}(x), F^{n-1}(x))$$

ou ainda,

$$d(F^{n+r}(x), F^n(x)) \leq Kd(F^{n+r-1}(x), F^{n-1}(x)) \leq K^2d(F^{n+r-2}(x), F^{n-2}(x)) \leq \dots \leq K^r d(x_r, x).$$

Assim,  $d(x_{n+r}, x_n) \leq K^r d(x_r, x)$ . Pela desigualdade triângular, temos

$$d(x, x_r) \leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \dots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)).$$

Logo,

$$d(x, x_r) \leq d(x, F(x)) + Kd(x, F(x)) + \dots + K^{r-1}d(x, F(x)).$$

Agora observe que a igualdade a seguir segue da soma dos termos de uma progressão geométrica

$$d(x, x_r) \leq (1 + K + \dots + K^{r-1})d(x, F(x)) = \left( \frac{1 - K^r}{1 - K} \right) d(x, F(x)),$$

e como  $0 \leq K < 1$ , então  $1 - K^r < 1$ , logo, vale a desigualdade

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq K^n d(x_r, x) \leq K^n \left( \frac{1 - K^r}{1 - K} \right) d(x, F(x)) \leq \left( \frac{K^n}{1 - K} \right) d(x, F(x)),$$

ou ainda,

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq \left( \frac{K^n}{1 - K} \right) d(x, F(x)).$$

Tomando  $n$  suficientemente grande, podemos tornar a expressão acima menor que qualquer  $\epsilon > 0$  dado. Portanto, a sequência  $(x_n)$  é de Cauchy. Por hipótese,  $X$  é completo, então  $(x_n)$  converge, digamos, para  $p$ . Para provar que  $p$  é ponto fixo,

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

□

**Corolário 1.12.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $F^m$  é contração, então existe um único ponto  $p$  fixo por  $F$ . Mais ainda,  $p$  é atrator de  $F$ .*

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto fixo atrator de  $F^m$  dado pelo Lema de Contração e  $n = mk + l$  com  $0 \leq l < m$ . Dado  $x \in X$  então  $F^l(x) \in X$ . Como  $p$  é atrator de  $F^m(x)$ , temos  $[F^m]^k(F^l(x)) \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Como  $F^n = [F^m]^k(F^l(x))$  e quando  $n \rightarrow \infty$  têm-se  $k \rightarrow \infty$ , segue que  $F^n \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,  $p$  é atrator de  $F$ . □

**Definição 1.13.** Uma família  $\mathcal{F}$  de funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , é dita equicontínua se  $\forall \epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}$ .

**Definição 1.14.** Uma família  $\mathcal{F}$  de funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , é dita uniformemente limitada, se existe  $M > 0$  tal que  $|f| < M$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}$ .

Na próxima seção demonstraremos alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que definiremos em breve. Para isto precisaremos de um importante resultado chamado Teorema de Arzela-Ascoli, cuja demonstração pode ser encontrada em LIMA (2014), p. 256.

**Teorema 1.15** (Teorema de Arzela-Ascoli). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Seja  $\mathcal{F}$  uma família de funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , equicontínua e uniformemente limitada. Então toda sequência  $f_n$  de elementos de  $\mathcal{F}$  tem uma sequência  $f_{n_k}$  uniformemente convergente em  $X$ .*

## 1.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Partiremos agora para algumas definições e resultados importantes sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's).

Seja  $\Omega$  um subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times E$  na qual  $\mathbb{R}$  é a reta real e  $E = \mathbb{R}^n$  o espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Um ponto pertencente a  $\mathbb{R} \times E$  será denotado por  $(x, y)$  com  $x \in \mathbb{R}$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow E$  uma aplicação contínua e seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo não degenerado da reta.

**Definição 1.16.** Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$ , é uma equação da forma

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (1.1)$$

**Definição 1.17.** A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

**Definição 1.18.** Uma equação diferencial ordinária é de primeira ordem quando tem forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ou} \quad f(x, y, y') = 0. \quad (1.2)$$

**Definição 1.19.** Se a função  $f$  em (1.2) depender linearmente de  $y$ , então a EDO em (1.2) é chamada de equação diferencial linear de primeira ordem e pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x), \quad (1.3)$$

onde  $p$  e  $g$  são funções dadas na variável independente.

**Definição 1.20.** Uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow E$  chama-se solução da equação (1.2) no intervalo  $I$  se:

1. O gráfico de  $\varphi$ ,  $\text{Graf}\varphi = \{(x, \varphi(x)); x \in I\}$ , está contido em  $\Omega$ ;
2.  $\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x, \varphi(x))$  para todo  $x \in I$ .

**Definição 1.21.** Uma função  $\varphi : I \rightarrow E$  será chamada de solução do problema com dados iniciais  $(x_0, y_0) \in \Omega$  ou solução do Problema de Cauchy para equação (1.2) quando

1.  $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ , para todo  $x \in I$ ;
2.  $\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x, \varphi(x))$  para todo  $x \in I$ ;
3.  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Definição 1.22.** Uma aplicação  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se Lipschitziana em  $\Omega$  relativamente à segunda variável ou Lipschitziana, se existe uma constante  $K$  tal que

$$|f(x, y) - f(x, t)| \leq K|y - t|,$$

para todos  $(x, y), (x, t) \in \Omega$ .  $K$  chama-se constante de Lipschitz de  $f$ .

O teorema a seguir garante, sob certas condições a existência e a unicidade da solução de uma EDO de primeira ordem.

**Teorema 1.23** (Teorema de Picard). *Seja  $f$  uma função contínua e Lipschitziana em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{x; |x - x_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{y; |y - y_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , existe uma única solução de*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ .

*Demonstração.* Seja  $X = C(I_\alpha, B_b)$  o espaço métrico completo das funções contínuas  $\phi : I_\alpha \rightarrow B_b$ , com a métrica uniforme, isto é, sejam  $\phi_1, \phi_2 \in X$  temos

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{x \in I_\alpha} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

Para  $\phi \in X$ , definimos  $F(\phi) : I_\alpha \rightarrow E$  por

$$F(\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds.$$

Observe que:

1.  $F(X) \subseteq X$ .

Com efeito, para todo  $x \in I_\alpha$  temos

$$|F(\phi)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \phi(s))| ds,$$

e como por hipótese  $f$  é contínua em  $\Omega$ , então  $f$  é integrável. Além disso,  $f$  é limitada. Portanto

$$\int_{x_0}^x |f(s, \phi(s))| ds \leq M \int_{x_0}^x ds \leq M|x - x_0|.$$

Como  $x \in I_\alpha$ , obtemos

$$|F(\phi)(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Ou seja, a imagem de  $F$  está contida numa bola de raio  $b$  e centro  $y_0$ .

2.  $F^n$  é uma contração, para  $n$  suficientemente grande.

Com efeito sejam  $\phi_1, \phi_2 \in X$ ,  $n \geq 0$  e  $x \in I_\alpha$  temos

$$|F^n(\phi_1)(x) - F^n(\phi_2)(x)| \leq \frac{K^n |x - x_0|^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2),$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz. Vamos provar a desigualdade acima por indução em  $n$ . Para  $n = 0$ , é válida pela métrica uniforme. Supondo que a desigualdade acima é válida para  $n = t$ , temos

$$|F^t(\phi_1)(x) - F^t(\phi_2)(x)| \leq \frac{K^t |x - x_0|^t}{t!} d(\phi_1, \phi_2).$$

Vamos verificar se a desigualdade é válida para  $n = t + 1$ . Como

$$|F^{t+1}(\phi_1)(x) - F^{t+1}(\phi_2)(x)| = |F(F^t)(\phi_1)(x) - F(F^t)(\phi_2)(x)|,$$

pela definição de  $F$ , temos

$$|F(F^t)(\phi_1)(x) - F(F^t)(\phi_2)(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, F^t(\phi_1)(s)) - f(s, F^t(\phi_2)(s))| ds \right|,$$

e por  $f$  ser contínua e Lipschitziana, obtemos

$$\left| \int_{x_0}^x |f(s, F^t(\phi_1)(s)) - f(s, F^t(\phi_2)(s))| ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x K |F^t(\phi_1)(x) - F^t(\phi_2)(x)| ds \right|.$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x K |F^t(\phi_1)(x) - F^t(\phi_2)(x)| ds \right| &\leq k \left| \int_{x_0}^x \frac{K^t |s - x_0|^t}{t!} d(\phi_1, \phi_2) ds \right| \\ &= \frac{K^{t+1} |x - x_0|^{t+1}}{t + 1!} d(\phi_1, \phi_2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(F^n(\phi_1), F^n(\phi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2),$$

e para algum  $n$  suficientemente grande, temos

$$\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1.$$

Logo,  $F^n$  é uma contração em  $X$ . Pelo colorário do Lema da Contração, existe uma única  $\phi$  tal que  $F(\phi) = \phi$ , provando o Teorema de Picard.

□

**Teorema 1.24** (Teorema de Peano). *Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_a \times B_b$ , como no Teorema 1.23. Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ ,  $y' = f(x, y)$  tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência  $f_n$  de funções, cujas componentes são polinômios, que converge para  $f$ , uniformemente em  $\Omega$ .

Para  $n$  grande,  $f_n$  satisfaz as hipóteses do Teorema 1.23. Seja  $\varphi_n$  solução de  $y' = f_n(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  em  $I_\alpha$ , cuja existência e unicidade decorrem do Teorema 1.23. A família  $\{\varphi_n\}$  é equicontínua e uniformemente limitada, pois

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x')| = \left| \int_x^{x'} f_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq M \int_x^{x'} ds \leq M|x - x'|$$

e  $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b$ , para todo  $n$  suficientemente grande. Pelo Teorema 1.15 (Arzela-Ascoli) existe uma subsequência, que denotaremos também por  $\varphi_n$ , tal que  $\varphi_n$  converge uniformemente em  $I_\alpha$  para uma função  $\varphi$ .

**Afirmção:**  $f_n(s, \varphi_n(s))$  converge uniformemente em  $I_\alpha$  para  $f(s, \varphi(s))$ .

De fato,

$$\begin{aligned} |f_n(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))| &\leq |f_n(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_n(s))| + |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os membros de  $\int_{x_0}^x f_n(s, \varphi_n(s)) ds$ , temos, para todo  $t \in I_\alpha$ , que  $\int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$ .

□

Partiremos agora para algumas definições importantes sobre sistemas de equações diferenciais. Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_m$  espaços euclidianos e seja  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{R} \times E$  onde  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ . Sejam  $f_i : \Omega \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , funções contínuas.

**Definição 1.25.** Uma família  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ , onde cada  $\varphi_i : I \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  é uma função diferenciável de um intervalo  $I$  em  $E_i$ , chama-se solução do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases} \quad (1.4)$$

no intervalo  $I$ , se:

1. Para todo  $x \in I$ ,  $(x, \varphi(x)) = (x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in \Omega$ ;
2. Para todo  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\frac{d\varphi_i}{dx}(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)),$$

para todo  $x \in I$ .

O sistema (1.4), será denotado por

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m), i = 1, \dots, m \quad (1.5)$$

é equivalente à equação diferencial ordinária

$$y' = f(x, y) \quad (1.6)$$

onde  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ . Isto é, uma família  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  de funções é solução de (1.4) em  $I$  se, e somente se,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : I \rightarrow E$  é solução de (1.5) em  $I$ .

Em particular, a equação  $y' = f(x, y)$  é equivalente a um sistema de equações do tipo (1.4), em que  $f_i$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $f$  em  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ .

O problema de Cauchy para o sistema de equações da forma (1.4) formula-se do seguinte modo: dados  $x_0, y_{1,0}, \dots, y_{m,0}$  tais que  $(x_0, y_{1,0}, \dots, y_{m,0}) \in \Omega$ . devemos encontrar uma solução  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  de (1.4) um intervalo  $I$  que contém  $x_0$  tal que  $\varphi_i(x_0) = y_{i,0}$  para todo  $i$ . Abreviadamente, escrevemos

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m), y(x_0) = y_0 \quad (1.7)$$

Para a equação (1.7), onde  $y_0 = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , tendo em conta que a função  $f$  em (1.7) é respectivamente contínua, lipschitziana com constante Lipschitz  $K$ , diferenciável em relação à segunda variável, terceira variável, etc, se, e somente se, cada uma das  $f_i$  também é do mesmo tipo. Temos que todos os teoremas de existência e unicidade são válidos para soluções de (1.4).

Seja agora  $\Omega$  um aberto de  $E \times E^m$ , onde  $E$  é um espaço euclidiano e  $f : \Omega \rightarrow E$  uma função contínua. Uma função  $\varphi : I \rightarrow E$ , de classe  $C^m$ , definida num intervalo, chama-se solução da equação diferencial ordinária de ordem  $m$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{m-1}) \quad (1.8)$$

em  $I$ , se

1. Para todo  $x \in I$ ,  $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{m-1}(x)) \in \Omega$ ;
2. Para todo  $x \in I$ ,

$$\frac{d^m \varphi}{dx^m}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{m-1}(x)).$$

A equação (1.8) também é denotada por

$$y^m = f(x, y, y', y'', \dots, y^{m-1}) \quad (1.9)$$

e é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} y'_r = y_{r+1}, r = 1, 2, \dots, m-1 \\ y'_m = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m). \end{cases} \quad (1.10)$$

Isto é, se uma função  $\varphi$  é uma solução de (1.9), então  $\{\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{m-1}\}$  é uma solução de (1.10). E se  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  uma solução de (1.10) então  $\varphi = \varphi_1$  é uma solução de (1.9), isto é,  $\varphi$  é de classe  $C^m$  e satisfaz as condições 1 e 2.

O Problema de Cauchy para a equação (1.9) é formulado da maneira a seguir. Dado um ponto  $(x_0, y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{m-1}) \in \Omega$  encontrar uma solução  $\varphi$  de (1.9) definida num intervalo  $I$  que contém o ponto  $x_0$  e satisfaz

$$\varphi(x_0) = y_0^0, \quad \varphi'(x_0) = y_0^1, \quad \dots \quad \varphi^{m-1}(x_0) = y_0^{m-1}.$$

Abreviadamente, escrevemos

$$y^m = f(x, y, y', y'', \dots, y^{m-1}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.11)$$

Este problema é equivalente ao seguinte problema de Cauchy para sistemas de equações

$$\begin{cases} y'_r = y_{r+1}, & y_i(x_0) = y_0^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m \\ y'_m = f(x, y_1, \dots, y_m), & r = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Dessa forma, questões relativas à existência e unicidade de solução de (1.9) são reduzidos a questões similares para sistemas (1.10) e, portanto, equações (1.2). Em particular, todos os resultados relativos à existência e unicidade de solução são válidos para equações de ordem  $m$  qualquer.

## Capítulo 2

# Um Pouco de Geometria Diferencial de Superfícies

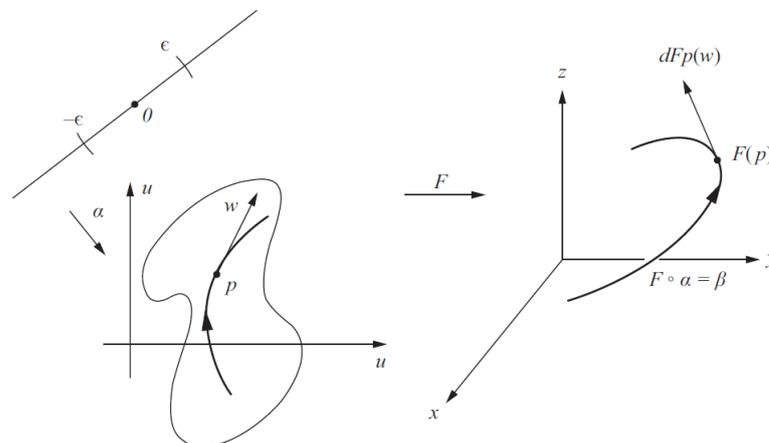
### 2.1 Alguns Resultados Sobre Análise no $\mathbb{R}^n$

Aqui enunciaremos algumas definições e resultados que serão úteis no desenvolvimento da teoria.

**Definição 2.1.** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Associamos a cada  $p \in U$  uma aplicação linear  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é chamada a diferencial de  $F$  em  $p$ , e é definida da seguinte maneira: sejam  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$  (Figura 2.1). Pela regra da cadeia, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  também é diferenciável. Então definimos a diferencial de  $F$  em  $p$  aplicada a  $w$  por

$$dF_p w = \beta'(0).$$

Figura 2.1: Representação da diferencial de uma aplicação diferenciável.



Fonte: CARMO (2014, p. 151).

**Proposição 2.2.** *A definição dada acima para  $dF_p$  não depende da escolha da curva que passa por  $p$  com vetor tangente  $w$  e  $dF_p$  é, de fato, uma aplicação linear.*

*Demonstração.* Trabalharemos com o caso  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sejam  $(u, v)$  as coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  e  $(x, y, z)$  as coordenadas em  $\mathbb{R}^3$ . Sejam  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Então, podemos escrever  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$\alpha'(0) = w = u'(0)e_1 + v'(0)e_2.$$

Seja  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , e

$$\beta(t) = F \circ \alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Então, usando a regra da cadeia e considerando derivadas em  $t = 0$ , obtemos

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_1 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_3$$

ou ainda,

$$\beta'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = dF_p(w).$$

Isso mostra que  $dF_p$  é representada nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , por uma matriz que depende apenas das derivadas parciais em  $p$  das funções coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de  $F$  e do vetor  $w$ . Logo,  $dF_p$  é uma aplicação linear e não depende da escolha da curva  $\alpha$ .  $\square$

**Teorema 2.3** (Teorema da Função Inversa). *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in U$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja um isomorfismo. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .*

**Definição 2.4.** Uma aplicação diferenciável  $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  de  $V$  sobre  $W$ , onde  $V$  e  $W$  são conjuntos abertos, é chamada um difeomorfismo de  $V$  sobre  $W$  se  $F$  tem inversa diferenciável.

O teorema da função inversa afirma que se em um ponto  $p \in U$  a diferencial  $dF_p$  é um isomorfismo, então  $F$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $p$ .

**Proposição 2.5** (Regra da Cadeia para Aplicações). *Sejam  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicações diferenciáveis, onde  $U$  e  $V$  são conjuntos abertos tais*

que  $F(U) \subset V$ . Então  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação diferenciável, e

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

## 2.2 Superfícies Regulares

**Definição 2.6.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que (Figura 2.2)

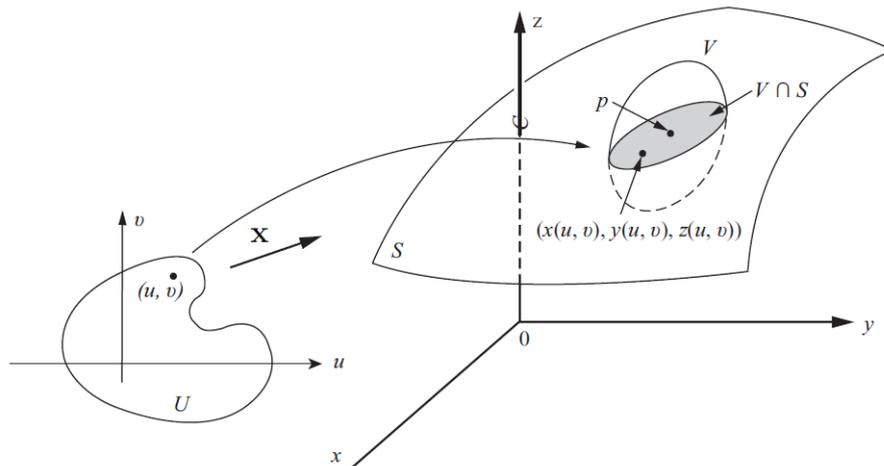
1.  $\mathbf{x}$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .

2.  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  é contínua pela condição 1,  $\mathbf{x}$  tem inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.
3. (**Condição de Regularidade**) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Figura 2.2: Uma parametrização de uma Superfície Regular.



Fonte: CARMO (2014, p. 62).

A aplicação  $\mathbf{x}$  é chamada de uma parametrização local ou um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança  $V \cap S$  de  $p$ , sendo esta vizinhança chamada vizinhança coordenada. Com o intuito de expressar a condição 3 de forma mais clara, iremos calcular a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_q$  nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  dadas por

$\{e_1, e_2\}$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , respectivamente. Seja  $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $e_1$  vetor tangente a curva  $\alpha(t) = (u_0 + t, v_0)$ , com  $\alpha(0) = (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(t) = (1, 0) = e_1$ . A imagem de  $\alpha$  por  $x$  é

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \mathbf{x} \circ \alpha(t) = (x(\alpha(t)), y(\alpha(t)), z(\alpha(t))) \\ \beta(t) &= \mathbf{x}(u_0 + t, v_0) = (x(u_0 + t, v_0), y(u_0 + t, v_0), z(u_0 + t, v_0)). \end{aligned}$$

Derivando  $\beta(t)$  com relação a  $t$ , obtemos

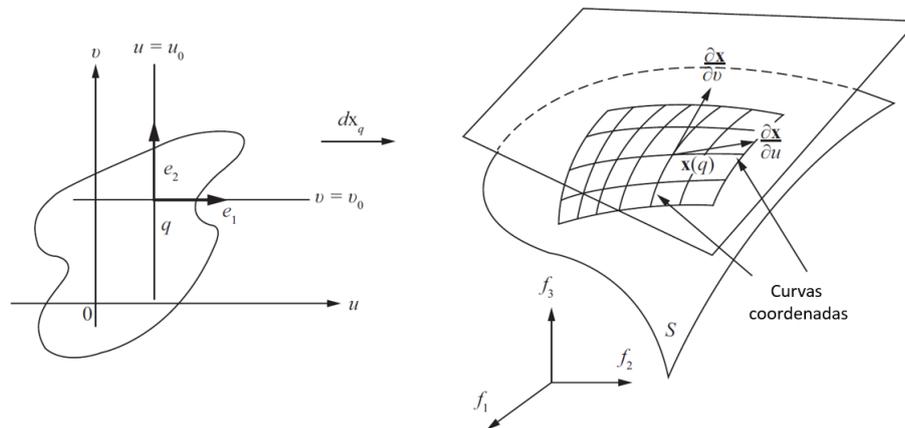
$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

A curva  $\beta$  acima é chamada curva coordenada  $v = v_0$ , seu traço está em  $S$  e tem em  $\mathbf{x}(q)$  o vetor tangente (Figura 2.3)

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$$

onde as derivadas são calculadas em  $(u_0, v_0)$  e o vetor  $\beta'(0)$  é indicado pelas suas componentes na base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

Figura 2.3: Curvas coordenadas em S.



Fonte: CARMO (2014, p. 63).

Assim, pela definição de diferencial, temos,

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

De forma análoga, para curva coordenada  $u = u_0$ , temos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Por fim, a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_q$ , também chamada de matriz Jacobiana, com relação a essas bases será

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix},$$

e por comodidade, denotaremos  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$  por  $\mathbf{x}_u$  e  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$  por  $\mathbf{x}_v$ .

A condição 3 da Definição 2.6 exige que a diferencial  $d\mathbf{x}_q$  seja injetiva, então os dois vetores coluna desta matriz devem ser linearmente independentes ou de forma equivalente, que o produto vetorial

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0.$$

De outro modo, para saber se a diferencial é injetiva basta verificar se a matriz Jacobiana tem posto 2, ou seja, um dos determinantes

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

seja diferente de zero em  $q = (u, v), \forall q \in U$ . Na definição 2.6 podemos observar que:

- A injetividade na condição 2 tem como objetivo excluir a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares.
- A condição 3 garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de  $S$ .

**Exemplo 2.7.** A esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

De fato, seja  $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}_1 = \left( x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right), \quad (x, y) \in U,$$

onde  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$  e  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ . Iremos mostrar que  $\mathbf{x}_1$  é uma parametrização de  $\mathbb{S}^2$  que cobre o hemisfério norte da esfera unitária (menos o

equador). Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial y}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}. \end{aligned}$$

Como que  $x^2 + y^2 < 1$ , então a função  $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$  tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Logo,  $\mathbf{x}_1$  é diferenciável e assim a condição 1 é satisfeita. Além disso, note que a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_{(x,y)}$  é dada por

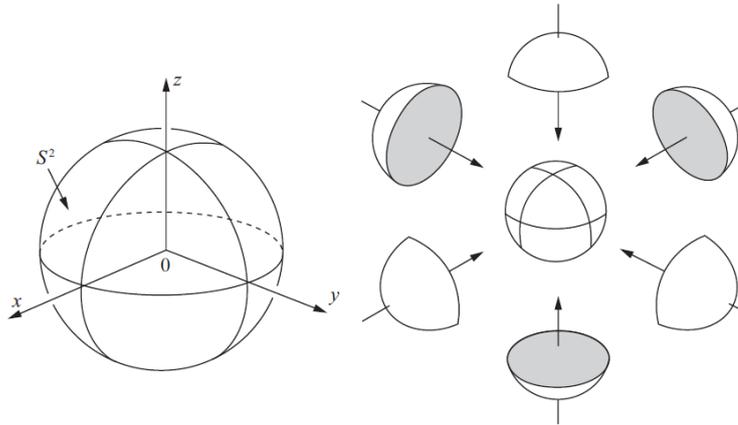
$$d\mathbf{x}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} & \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}.$$

Observe que  $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \right| = 1$  e com isso concluímos que a matriz  $d\mathbf{x}_{(x,y)}$  tem posto 2, satisfazendo também a condição 3. Por fim, para verificar a condição 2, perceba que  $\mathbf{x}_1 : U \rightarrow \mathbf{x}_1(U)$  é bijetiva, pois um ponto  $(x,y) \in U$ , tem como imagem um ponto em  $\mathbb{R}^3$ , acima do plano  $xy$  de mesma abscissa e ordenada, a uma altura  $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ . Assim, concluímos que  $\mathbf{x}_1^{-1}$  é a restrição da projeção  $\pi(x,y,z) = (x,y)$  ao conjunto  $\mathbf{x}_1(U)$ . Logo,  $\mathbf{x}_1^{-1}$  é contínua em  $\mathbf{x}_1(U)$ .

Agora, cobriremos a esfera utilizando parametrizações similares que juntamente com  $\mathbf{x}_1$  cobrem inteiramente  $\mathbb{S}^2$  (Figura 2.4). Observe que precisaremos de 6 parametrizações desse tipo para cobrir toda a esfera. Inicialmente, definimos  $\mathbf{x}_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}_2(x,y) = \left( x, y, -\sqrt{1-(x^2+y^2)} \right), \quad (x,y) \in U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1\},$$

Figura 2.4: Parametrizações locais da esfera.



Fonte: CARMO (2014, p. 66).

Note que  $\mathbf{x}_1(U) \cup \mathbf{x}_2(U)$  cobre a esfera menos o equador, isto é,  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ . De forma análoga e utilizando os planos  $xz$  e  $zy$ , cobriremos toda a esfera usando as seguintes parametrizações

$$\mathbf{x}_3(x, z) = \left( x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right), \quad (x, z) \in U_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_4(x, z) = \left( x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right), \quad (x, z) \in U_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_5(y, z) = \left( \sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right), \quad (y, z) \in U_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_6(y, z) = \left( -\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right), \quad (y, z) \in U_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 < 1\},$$

mostramos assim que  $\mathbb{S}^2$  é uma superfície regular.

O exemplo anterior nos mostra que decidir se um dado conjunto é uma superfície regular a partir da definição, pode ser um trabalho árduo. No que segue, enunciaremos duas proposições que garantem que algumas classes de conjuntos são superfícies regulares.

**Proposição 2.8.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  com  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

*Demonstração.* Basta mostrar que a aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad \text{com } (u, v) \in U,$$

é uma parametrização do gráfico de  $f$ . Observe que a condição 1 é facilmente atendida, dado que as derivadas parciais das funções componentes de  $\mathbf{x}$  são contínuas ( $f$  é

diferenciável e, conseqüentemente, é contínua). Além disso, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial v} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= f_u(u, v), & \frac{\partial z}{\partial v} &= f_v(u, v), \end{aligned}$$

com isso a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_{(x,y)}$  é dada por

$$d\mathbf{x}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{bmatrix},$$

sendo a condição 3 satisfeita, pois  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$ . Por fim, observe que cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $\mathbf{x}$  de um único ponto  $(u, v) \in U$ . Assim,  $\mathbf{x}$  é bijetiva, e como  $\mathbf{x}^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção  $\pi(x, y, z) = (u, v)$  de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$  e assim  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua. Logo,  $\mathbf{x}$  é uma parametrização do gráfico de  $f$  e com isso podemos concluir que todo gráfico de uma função diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $U$  conjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ , é uma superfície regular. □

**Definição 2.9.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ .

**Definição 2.10.** Diremos que  $a$  é valor regular de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se a diferencial  $df_p$  é sobrejetiva  $\forall p \in f^{-1}(a)$ , a imagem inversa de  $a$  por  $f$ , isto é o conjunto

$$f^{-1}(a) = \{p \in U; f(p) = a\}.$$

Sendo  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , a diferencial  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear que é sobrejetivo ou nulo (o que pode ser verificado utilizando o Teorema do Núcleo e da Imagem). Com efeito, sua matriz é dada por

$$df_p = \left[ \frac{\partial f(p)}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \right]_{1 \times n},$$

e como a dimensão da imagem é no máximo 1, então  $df_p$  ou é sobrejetiva ou é nula. No caso de  $df_p$  não ser sobrejetiva, concluímos que  $f_x = f_y = f_z = 0$  em  $p$ . Portanto,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f_x, f_y$  e  $f_z$  não se

anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}.$$

**Proposição 2.11.** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

A proposição acima não será demonstrada neste trabalho, mas o leitor poderá encontrar a demonstração em CARMO (2014), p. 69.

**Exemplo 2.12.** Vamos mostrar que o elipsóide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

é uma superfície regular.

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Note que  $f$  é uma função diferenciável, uma vez que as derivadas parciais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2},$$

existem e são contínuas. Além disso, observe que

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou seja,  $f^{-1}(0) = E$ . A matriz da diferencial  $df_{(x,y,z)}$  num ponto  $(x, y, z)$  é dada por:

$$df_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{bmatrix}.$$

Com isso,

$$df_{(x,y,z)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{a^2} = 0, \quad \frac{2y}{b^2} = 0 \text{ e } \frac{2z}{c^2} = 0.$$

Portanto,

$$df_{(x,y,z)} = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Se  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , então  $df_{(x,y,z)}$  é sobrejetiva. Assim, sobre os pontos de  $E$ ,  $df_{(x,y,z)}$  é sobrejetiva e conseqüentemente 0 é o valor regular de  $f$ . Pela proposição anterior,  $E$  é uma superfície regular.

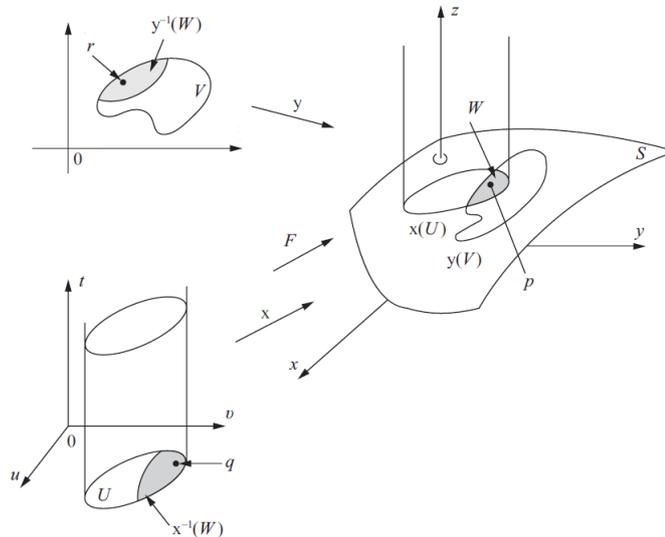
## 2.3 Mudança de Parâmetros e Funções Diferenciáveis sobre Superfícies

Estamos interessados em definir o que significa uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  ser diferenciável em um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$ . Uma maneira natural de dar sentido a este conceito seria escolher uma vizinhança coordenada de  $p$ , digamos com coordenadas  $u, v$ , e dizer que  $f$  é diferenciável em  $p$  se a sua expressão com coordenadas  $u, v$  possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Contudo, como no Exemplo 2.7, um ponto  $p$  de  $S$  pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas. Além disso, outros sistemas de coordenadas poderiam ser escolhidos em uma vizinhança de  $p$ . Então, para que essa definição acima tenha sentido, é necessário que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido. Para mostrar este fato, precisaremos da seguinte proposição.

**Proposição 2.13** (Mudança de parâmetros). *Seja  $p$  um ponto da superfície regular  $S$ , e sejam  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Então a mudança de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  é um difeomorfismo, isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$  (Figura 2.5).*

Figura 2.5: Diagrama da Mudança de Parâmetros.



Fonte: CARMO (2014, p. 83).

*Demonstração.* A aplicação  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ , sendo a composição de homeomorfismos, é um homeomorfismo. Não é possível concluir, com argumento análogo, que  $h$  é diferenciável, já que  $\mathbf{x}^{-1}$  está definida em um subconjunto aberto de  $S$ , e não sabemos ainda o que vem a ser uma função diferenciável definida em  $S$ . Iremos proceder da seguinte maneira.

Seja  $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$  e defina  $q = h(r)$ . Como  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma parametrização, podemos supor que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Estendemos  $\mathbf{x}$  a uma aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\begin{aligned} F(u, v, t) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t) \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) + (0, 0, t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Geometricamente,  $F$  aplica um cilindro vertical  $C$  sobre  $U$  em um "cilindro vertical" sobre  $\mathbf{x}(U)$ , levando cada seção de  $C$  com altura  $t$  na superfície  $\mathbf{x}(u, v) + te_3$ , onde  $e_3$  é o vetor unitário do eixo  $Oz$ . Observe que  $F$  é diferenciável e que a restrição  $F|_{U \times \{0\}} = \mathbf{x}$ . Calculando o determinante da diferencial  $dF_q$ , obtemos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança  $M$  de  $\mathbf{x}(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $M$ . Pela continuidade de  $\mathbf{y}$ , existe uma vizinhança  $N$  de  $r$  em  $V$  tal que  $\mathbf{y}(N) \subset M$ . Observe que, restrita a  $N$ ,  $h|_N = F^{-1} \circ \mathbf{y}|_N$  é composição de funções diferenciáveis. Assim sendo, podemos aplicar a regra da cadeia para aplicações e concluir que  $h$  é diferenciável em  $r$ . Por  $r$  ser arbitrário,  $h$  é diferenciável em  $\mathbf{y}^{-1}(W)$ . Aplicando exatamente o mesmo argumento, pode-se mostrar que a aplicação  $h^{-1}$  é diferenciável, e portanto  $h$  é um difeomorfismo.  $\square$

Em outras palavras, se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

$$\mathbf{y}(w, s) = (x(w, s), y(w, s), z(w, s)), \quad (w, s) \in V,$$

então a mudança de coordenadas  $h$  dada por

$$u = u(w, s), \quad v = v(w, s), \quad (w, s) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

é tal que as funções  $u$  e  $v$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além

disso, a aplicação  $h$  pode ser invertida, fornecendo

$$w = w(u, v), \quad s = s(u, v), \quad (u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W),$$

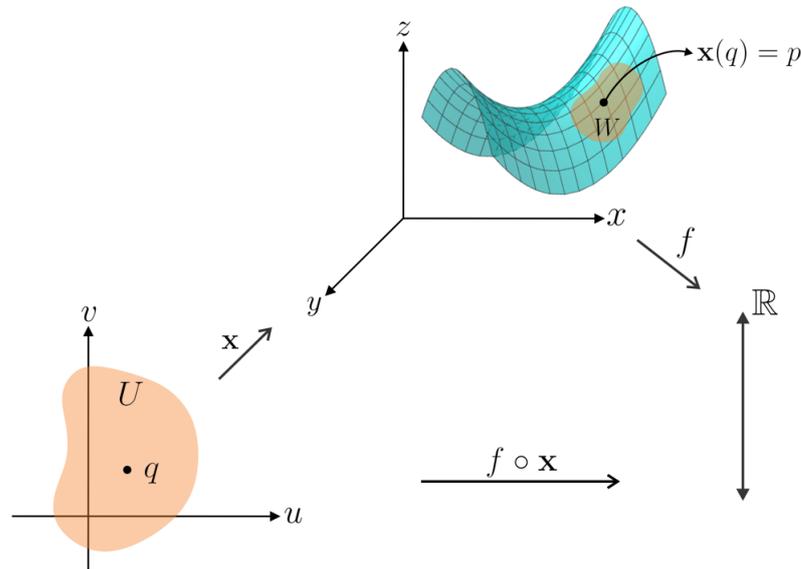
onde as funções  $w$  e  $s$  também possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(w, s)} \cdot \frac{\partial(w, s)}{\partial(u, v)} = 1,$$

isto implica que os determinantes Jacobianos, tanto de  $h$  como de  $h^{-1}$ , são diferentes de zero em todos os pontos.

**Definição 2.14.** Seja  $f : W \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um aberto  $W$  de uma superfície regular  $S$ . Diremos que  $f$  é diferenciável em  $p \in W$  se, para alguma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in \mathbf{x}(U) \subset W$ , a composição  $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$  (Figura 2.6). A função  $f$  é diferenciável em  $W$  se é diferenciável em todos os pontos de  $W$ .

Figura 2.6: Diagrama de uma função diferenciável em um ponto da superfície.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Proposição 2.15.** A definição de uma função diferenciável independe da escolha da parametrização.

*Demonstração.* De fato, sejam  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  outra parametrização de  $S$ , onde  $\mathbf{x}_1(q_1) = p$ , com  $q_1 \in U_1$  e  $\mathbf{x}_1(U_1) \subset W$ . Denote  $\mathbf{x}_1^{-1}(V) \subset U_1$  e  $\mathbf{x}^{-1}(V) \subset U$ , com  $V = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{x}_1(U_1)$ , perceba que  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(V)$  é diferenciável, logo  $f \circ \mathbf{x}_1 = f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}_1 = f \circ \mathbf{x} \circ h$  é diferenciável em  $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ . Daí, a independência afirmada.  $\square$

Agora definiremos o que são aplicações diferenciáveis entre superfícies.

**Definição 2.16.** Uma aplicação contínua  $\phi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ , de um conjunto aberto  $V_1$  de uma superfície regular  $S_1$  em uma superfície regular  $S_2$ , é diferenciável em  $p \in V_1$  se dadas parametrizações

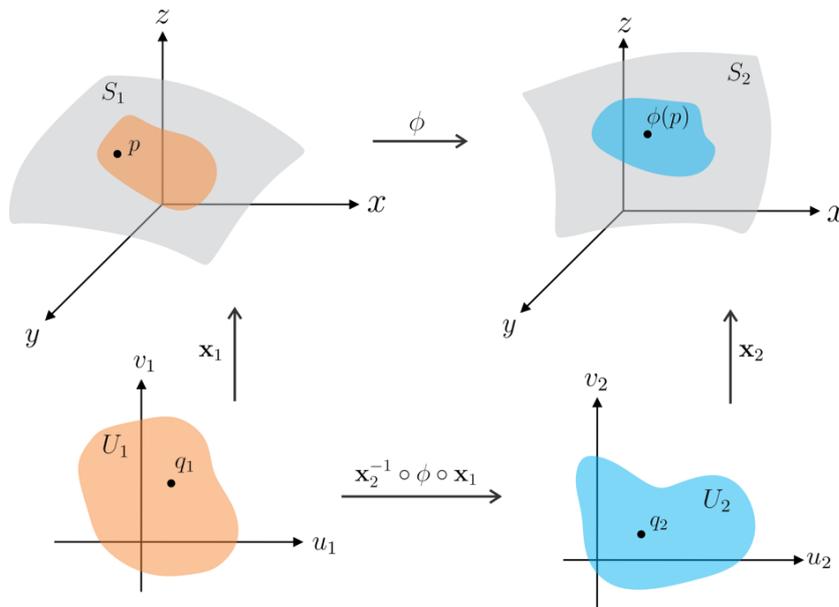
$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  e  $\phi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ , a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2,$$

é diferenciável em  $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ . A aplicação  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1$  é chamada a expressão local de  $\phi$  nas parametrizações  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  (Figura 2.7).  $\phi(p)$

Figura 2.7: Aplicação diferenciável entre superfícies regulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em outras palavras,  $\phi$  é diferenciável se, quando expressa em coordenadas locais como  $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ , as funções  $\phi_1(u, v)$  e  $\phi_2(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Convém demonstrarmos que esta definição não depende da escolha de uma parametrização.

**Proposição 2.17.** A definição de uma aplicação diferenciável entre superfícies independe da escolha da parametrização.

*Demonstração.* Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares e  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável em um ponto  $p$  de  $S_1$  e  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente. Suponha

agora que  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  sejam também parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Observe que

$$\mathbf{y}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1 = h_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 \circ h_1^{-1},$$

onde  $h_2 = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2$  e  $h_1^{-1} = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1$  são mudanças de parâmetros. Como  $h_1^{-1}, h_2$  e  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1$  são diferenciáveis, sua composição também é. Portanto,  $\mathbf{y}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{y}_1$  é diferenciável em  $\mathbf{y}_1^{-1}(p)$ , logo  $\phi$  é diferenciável em  $p$  com relação às parametrizações  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$ .  $\square$

**Definição 2.18.** Duas superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  com uma inversa diferenciável  $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ . Uma tal  $\phi$  é chamada de difeomorfismo de  $S_1$  em  $S_2$ .

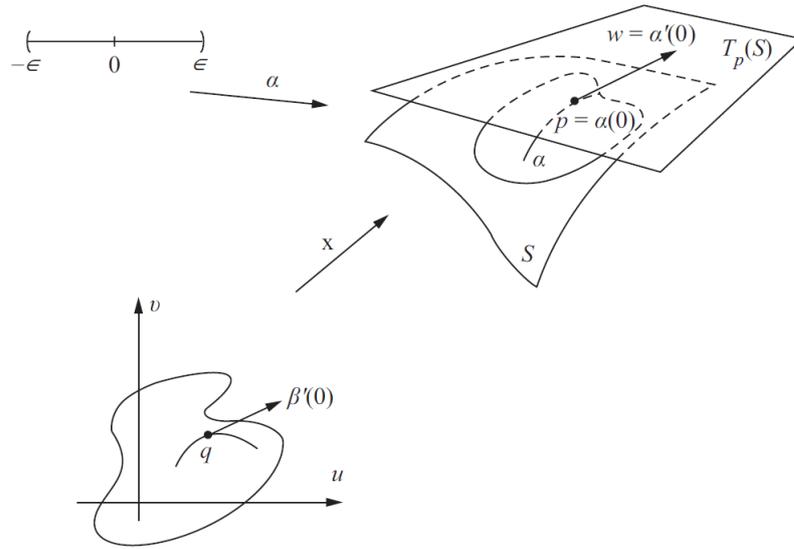
## 2.4 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação

Mostraremos nesta seção que a condição 3 na definição de uma superfície regular  $S$  garante que para  $p \in S$  o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de  $S$ , passando por  $p$ , constituem um plano. Chamaremos tal plano de plano tangente a  $S$  em  $p$  e denotaremos por  $T_p S$ .

**Definição 2.19.** Um vetor tangente a  $S$  em um ponto  $p \in S$  é o vetor tangente  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$ .

**Proposição 2.20.** *Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  em  $p$ , tal que  $x(q) = p$ . Então o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $p$  é um subespaço vetorial  $T_p S = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$  de dimensão 2.*

*Demonstração.* Inicialmente, vamos demonstrar que  $T_p S \subset d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ . Seja  $w \in T_p S$  o vetor tangente em  $x(q) = p$ , isto é, seja  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é diferenciável e  $\alpha(0) = p$ . Observe que a curva  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , onde  $\beta(0) = q$  e  $\beta'(0) = v$  (Figura 2.8). Pela definição de diferencial de uma aplicação, temos

Figura 2.8: Diagrama da construção de  $\beta$ .


Fonte: Fonte: CARMO (2014, p. 99).

$$d\mathbf{x}_q\beta'(0) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = (\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = w.$$

Portanto,  $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ . Por outro lado, seja  $w = d\mathbf{x}_q(v)$ , onde  $v \in \mathbb{R}^2$  é o vetor velocidade da curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad \text{com } t \in (-\epsilon, \epsilon), \gamma(0) = q \text{ e } \gamma'(0) = v.$$

Considere  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$  e pela definição de diferencial, temos

$$\alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) = d\mathbf{x}_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = d\mathbf{x}_q(v) = w,$$

assim,  $w$  é vetor tangente e  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset T_pS$ .  $\square$

Observe que pela proposição anterior, o plano  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ , que passa por  $\mathbf{x}(q) = p$ , independe da parametrização  $\mathbf{x}$ . Contudo, a escolha de uma parametrização  $\mathbf{x}$  determina uma base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$  de  $T_pS$ , chamada base associada a  $\mathbf{x}$ . Portanto, podemos escrever as coordenadas de  $w \in T_pS$  na base associada a uma parametrização  $\mathbf{x}$  da seguinte forma:  $w = \alpha'(0)$  é o vetor velocidade de uma curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ , onde  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é dada por  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\gamma(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Então

$$\begin{aligned} w = \alpha'(0) &= (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(u(t), v(t))) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0). \end{aligned}$$

Assim, na base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ , o vetor  $w$  tem coordenadas  $(u'(0), v'(0))$ .

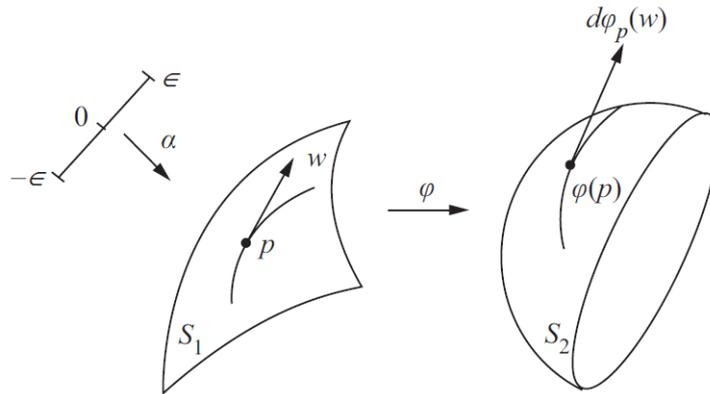
Através da noção de plano tangente, podemos falar na diferencial de aplicações diferenciáveis entre superfícies.

**Definição 2.21.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares,  $\phi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável em  $V$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V \subset S_1$  uma curva diferenciável, com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$  e considere a curva  $\beta(t) = \phi \circ \alpha$ . Para cada ponto  $p \in V$  definimos a aplicação  $d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$  que atua em um vetor  $w \in T_p S_1$  da seguinte forma

$$d\phi_p(w) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(0) = \beta'(0).$$

Portanto,  $\beta'(0)$  é um vetor de  $T_{\phi(p)} S_2$  (Figura 2.9).

Figura 2.9: Representação de  $w$  e  $d\phi_p(w)$  nas superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente.



Fonte: CARMO (2014, p. 100).

**Proposição 2.22.** A diferencial  $d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$  é uma aplicação linear e não depende da escolha de  $\alpha$ .

*Demonstração.* A demonstração é análoga à demonstração dada para espaços euclidianos (Proposição 2.2). Sejam  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  com  $\mathbf{x} : U \rightarrow S_1$  e  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \rightarrow S_2$  parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Suponha que  $\phi$  seja expressa nestas coordenadas por:

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)), \quad \text{com } (u, v) \in U \text{ e } (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) \in \bar{U}.$$

Expressando  $\alpha$  na parametrização  $\mathbf{x}$ , obtemos

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad \text{com } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

A expressão local de  $\beta = \phi \circ \alpha$  é dada por  $\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \alpha = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \beta =$

$(\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$ , assim a expressão de  $\beta'(0)$  na base  $\{\bar{x}_u, \bar{x}_v\}$  de  $T_{\phi(p)}S_2$  é

$$\begin{aligned}\beta'(0) &= \left( \frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial\phi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial\phi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} v'(0) \right).\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos

$$\beta'(0) = d\phi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Logo,  $d\phi_p(w)$  é representada por uma matriz que depende apenas da aplicação  $\phi$  e das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Dessa forma,  $d\phi_p(w)$  é linear e não depende da escolha de  $\alpha$ .  $\square$

## 2.5 Primeira Forma Fundamental

Nesta seção, apresentaremos a primeira fundamental de  $S$  que nos permite estudar estruturas geométricas associadas à superfície, tais como o cálculo do comprimento de curvas, ângulos entre vetores tangentes e áreas de regiões na superfície.

O produto interno natural do  $\mathbb{R}^3 \supset S$  induz em cada plano tangente  $T_pS$  de uma superfície regular  $S$  um produto interno, que indicaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Se  $w_1, w_2 \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$ , então  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  é igual ao produto interno de  $w_1$  e  $w_2$ , como vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.23.** Seja  $S$  uma superfície regular e  $T_pS$  o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ . A forma quadrática  $I_p$  definida por:

$$\begin{aligned}I_p : T_pS &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

Observe que a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície  $S$  herda o produto interno natural do  $\mathbb{R}^3$ .

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  associada a uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ . Como o vetor tangente  $w \in T_pS$  é o vetor tangente a uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , com  $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(u(0), v(0)) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  e  $\alpha'(0) = w$ , calculando a primeira forma fundamental em  $w$ ,

isto é, para  $t = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
 &= \langle \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\
 &= \langle \mathbf{x}_u u'(0), \mathbf{x}_u u'(0) \rangle_p + 2\langle \mathbf{x}_u u'(0), \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\
 &= (u'(0))^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p + 2u'(0)v'(0) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p + (v'(0))^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \\
 &= (u'(0))^2 E + 2u'(0)v'(0)F + (v'(0))^2 G,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 E(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\
 F(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\
 G(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p,
 \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ . Fazendo  $p$  variar na vizinhança coordenada correspondente a  $\mathbf{x}(u, v)$ , obtemos funções  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ , que são diferenciáveis nessa vizinhança. Podemos escrever a equação (2.1) na forma matricial,

$$I_p(\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 2.24.** Um sistema de coordenadas para um plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$  é dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos determinar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $P$ .

Para calcular a primeira forma fundamental em um ponto arbitrário de  $P$ , observe que  $\mathbf{x}_u = w_1$ ,  $\mathbf{x}_v = w_2$ . Como  $w_1$  e  $w_2$  são ortonormais, temos que

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\|^2 = 1, \\
 F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\
 G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\|^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 2.25.** Vamos determinar a primeira forma fundamental em um ponto arbitrário do cilindro reto sobre o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  que admite a parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z), \\ U &= \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty\}. \end{aligned}$$

Para calcular a primeira forma fundamental, observe que

$$\mathbf{x}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \mathbf{x}_z = (0, 0, 1).$$

Logo, as funções  $E, F, G$  são constantes pois

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\ F &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_z \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_z \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = \|(0, 0, 1)\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Consequentemente a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que embora o cilindro e o plano sejam superfícies distintas, os resultados obtidos nos dois casos são os mesmos.

**Exemplo 2.26.** Considere a hélice de passo  $2\pi a$  sobre o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  dada por  $\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, a\theta)$ . Por cada ponto da hélice, traçamos uma reta paralela ao plano  $xy$  e que intersecta o eixo  $Oz$ . A superfície gerada por essas retas é chamada um helicóide (Figura 2.10). Uma parametrização do helicóide é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (-v \sin u, v \cos u, a), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (\cos u, \sin u, 0). \end{aligned}$$

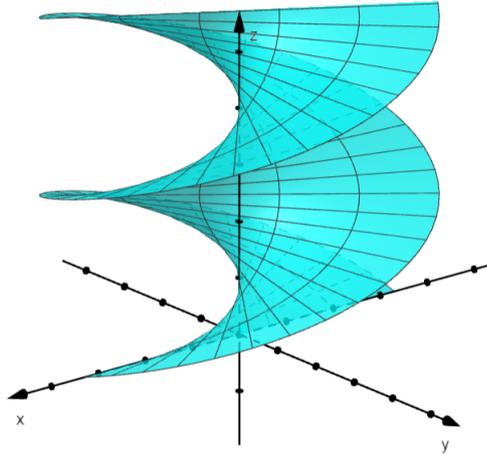
Portanto,

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (-v \sin u, v \cos u, a) \rangle = v^2 + a^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Com isso, a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I = \begin{bmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Figura 2.10: Helicóide.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 2.27.** Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície de revolução.

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana e conexa  $C$  em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Vamos considerar o plano  $xz$  como o plano da curva e o eixo  $Oz$  como eixo de rotação. Seja

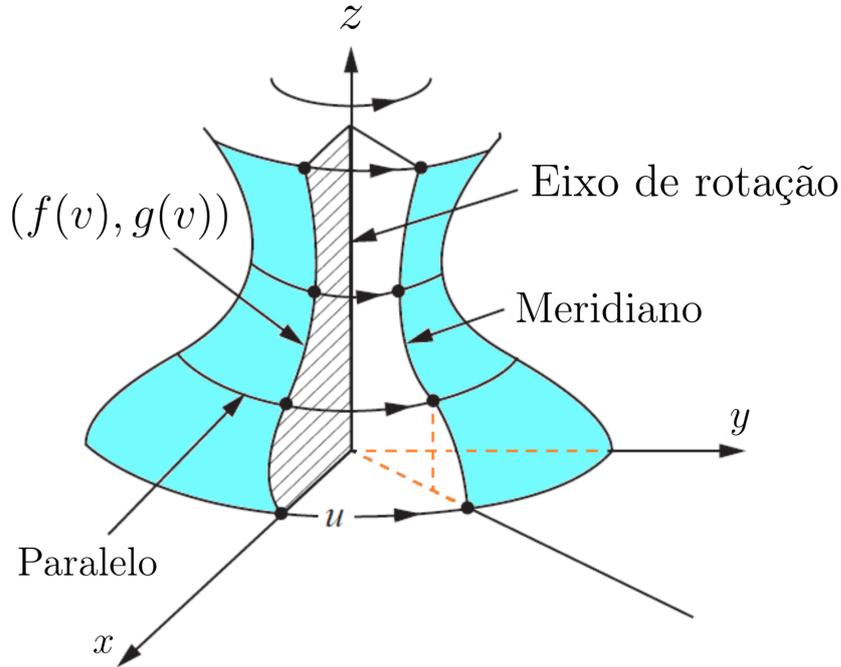
$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para  $C$  e denotamos por  $u$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $Oz$  (Figura 2.11). A curva  $C$  é chamada curva geratriz de  $S$ , o eixo  $Oz$  é o eixo de rotação de  $S$ , os círculos descritos pelos pontos de  $C$  são chamados de paralelos de  $S$  e as várias posições de  $C$  sobre  $S$  são chamados meridianos de  $S$ . Com isso, obtemos a aplicação

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  em  $S$ .

Figura 2.11: Uma superfície de revolução.



Fonte: CARMO (2014, p. 90).

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle (-f(v) \sen u, f(v) \cos u, 0), (-f(v) \sen u, f(v) \cos u, 0) \rangle = (f(v))^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (-f(v) \sen u, f(v) \cos u, 0), (f'(v) \cos u, f'(v) \sen u, g'(v)) \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (f'(v) \cos u, f'(v) \sen u, g'(v)), (f'(v) \cos u, f'(v) \sen u, g'(v)) \rangle \\ &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2. \end{aligned}$$

Com isso, a matriz da primeira forma fundamental é dada por

$$I = \begin{bmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{bmatrix}.$$

Como mencionado anteriormente, a importância da primeira forma fundamental  $I$  vem do fato que, conhecendo  $I$ , podemos tratar questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Assim, o comprimento de arco  $s$  de uma curva parametrizada  $\alpha : V \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ , temos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(u'(t))^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 G(u(t), v(t))} dt.$$

O ângulo  $\theta$  de duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\beta : I \rightarrow S$  que se intersectam em  $t = t_0$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, o ângulo  $\varphi$  das curvas coordenadas de uma parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Com isso, as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se,  $F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , para todo  $(u, v) \in U$ . Uma tal parametrização é chamada uma parametrização ortogonal.

Uma outra questão métrica que pode ser tratada através da primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada por uma superfície regular. Neste trabalho nos limitaremos apenas a apresentar a expressão para tal cálculo.  $S$ .

**Definição 2.28.** Um domínio (regular) de  $S$  é um subconjunto aberto e conexo de  $S$ , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (isto é, sua diferencial não se anula) exceto em um número finito de pontos.

**Definição 2.29.** Uma região de  $S$  é a união de um domínio com a sua fronteira.

**Definição 2.30.** Uma região de  $S \subset \mathbb{R}^3$  é limitada se está contida em alguma bola de  $S \subset \mathbb{R}^3$ .

Vamos considerar  $Q$  uma região compacta contida em  $U$  e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ . Então  $\mathbf{x}(Q) = R$  é uma região limitada em  $S$ .

**Definição 2.31.** Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número positivo

$$\int \int_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| dudv = A(R), \quad \text{onde } Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

é chamado área de  $R$ .

A integral dupla da Definição 2.31 independe da parametrização  $\mathbf{x}$ . A demonstração deste fato pode ser encontrado em CARMO (2014), p. 115.

Convém observarmos que

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2 \theta + \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \cos^2 \theta = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2,$$

o que mostra que o integrando de  $A(R)$  pode ser escrito como

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Sendo assim, obtemos

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R).$$

## 2.6 Orientação de Superfícies

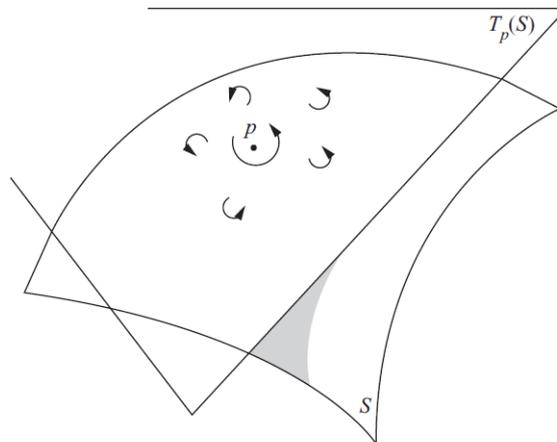
Neste tópico, apresentaremos o conceito de orientação de superfícies. Para isso, trataremos inicialmente a noção de orientação de um espaço vetorial.

Duas bases ordenadas  $e = \{e_i\}$  e  $f = \{f_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de um espaço vetorial  $V$ ,  $n$ -dimensional, têm a mesma orientação se a matriz de mudança de base possui um determinante positivo. Denotamos esta relação por  $e \sim f$ . Segue das propriedades sobre determinantes que esta relação define uma relação de equivalência.

Portanto, podemos organizar o conjunto das bases ordenadas de  $V$  em classes de equivalência, na qual os elementos de uma dada classe estão relacionados por  $\sim$ . Como o determinante de mudança de base ou é positivo ou é negativo, existem apenas duas classes e cada classe determinada por esta relação é chamada uma orientação de  $V$ . Assim,  $V$  tem duas orientações e se fixarmos uma das duas de maneira arbitrária, a outra é chamada de orientação oposta.

Intuitivamente, como cada ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$  tem um plano tangente  $T_p S$ , a escolha de uma orientação de  $T_p S$  induz uma orientação em uma vizinhança de  $p$ , isto é, a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto da vizinhança (Figura 2.12).

Figura 2.12: Orientação de  $T_p S$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 123).

Caso seja possível fazer essa escolha para cada  $p \in S$  de forma que na interseção de quaisquer duas vizinhanças as orientações coincidam, então dizemos que  $S$  é orientável. Caso contrário, dizemos que  $S$  é não-orientável.

De forma mais precisa, sejam  $S$  uma superfície regular e uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  de uma vizinhança de um ponto  $p \in S$ , determinamos uma orientação do plano tangente  $T_p S$ , a saber, a orientação associada à base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Se  $p$  pertence a uma vizinhança coordenada de uma outra parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , a nova base  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  é expressa em termos da primeira por

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}},$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},$$

onde  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$  e  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$  são expressões da mudança de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$ . Observe que a matriz de mudança de base é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix},$$

sendo a matriz Jacobiana de  $h$ . Logo, as bases  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  e  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  determinam a mesma orientação de  $T_p S$  se, e somente se, o determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0.$$

**Definição 2.32.** Uma superfície regular  $S$  é orientável se for possível cobrir a mesma com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto  $p \in S$  pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem determinante Jacobiano positivo em  $p$ . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de  $S$ , e  $S$ , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se  $S$  é orientada, uma parametrização (local)  $\mathbf{x}$  é compatível com a orientação de  $S$ , se juntando  $\mathbf{x}$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de  $S$ .

**Exemplo 2.33.** Uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. De fato, pela Proposição 2.8, tal superfície que é gráfico de uma função diferenciável é coberta por uma única vizinhança coordenada. Logo, é orientável.

**Exemplo 2.34.** A esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície orientável.

De fato, a esfera pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, utilizando por exemplo a projeção estereográfica, de tal modo que a interseção  $W$  dessas vizinhanças

seja um conjunto conexo, isto é, sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$  e  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  tais que  $S^2 = \mathbf{x}(U) \cup \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$ ,  $W = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  conexo e  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$  a mudança de coordenadas. Fixe um ponto  $p \in W$ . Se o Jacobiano da mudança de coordenadas em  $p$  for negativo, intercambiamos  $u$  e  $v$  no primeiro sistema, e assim teremos Jacobiano positivo. Se o Jacobiano da mudança de coordenadas em  $p$  for positivo, e como o Jacobiano é diferente de zero em  $W$  por ser conexo, segue pela conexidade de  $W$  que o Jacobiano é positivo em todos os pontos de  $W$ . Sendo assim, existe uma família de vizinhanças coordenadas satisfazendo a Definição 2.32, o que mostra que  $S^2$  é orientável. O exemplo anterior é suficiente para concluirmos a próxima proposição.

**Proposição 2.35.** *Se uma superfície regular pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.*

Daremos agora uma interpretação geométrica da ideia de orientabilidade de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Uma vez fixada uma parametrização,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p \in S$ , podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto  $p \in \mathbf{x}(U)$ , com  $p = \mathbf{x}(q)$  e  $q \in U$ , por

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q).$$

Observe que se escolhermos um outro sistema de coordenadas locais  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  em  $p$ ,  $N$  se conserva ou muda o sinal. De fato, seja  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma outra parametrização de  $S$  e  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ , onde  $W = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e  $p = \bar{\mathbf{x}}(\bar{q})$ , uma mudança de parâmetros, temos

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}(\bar{q}) = \frac{(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|}.$$

Assim,  $N$  se conserva ou muda de sinal, conforme o jacobiano da mudança de parâmetros  $h$  seja positivo ou negativo.

**Definição 2.36.** Um campo diferenciável de vetores normais em um aberto  $V \subset S$  é uma aplicação  $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in V$  um vetor normal unitário  $N(q) \in \mathbb{R}^3$  a  $S$  em  $q$ .

**Proposição 2.37.** *Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ .*

*Demonstração.* Supondo que  $S$  é orientável, então é possível cobrir  $S$  com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na intersecção de duas quaisquer delas, a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo. Nos pontos  $p = \mathbf{x}(u, v)$  de cada

vizinhança coordenada, definimos

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v).$$

$N(p)$  está bem definido e a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável. De fato, seja  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma outra parametrização de  $S$  e  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ , onde  $W = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e  $p = \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , uma mudança de parâmetros. Como o jacobiano da mudança de parâmetros  $h$  é positivo, obtemos

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v).$$

Além disso,  $I^{-1} \circ N \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma função diferenciável, pois é formado por funções diferenciáveis. Logo, a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável.

Reciprocamente, seja  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo de vetores normais em  $S$  e considere uma família de vizinhanças coordenadas conexas cobrindo  $S$ . Para os pontos  $p = \mathbf{x}(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $\mathbf{x}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , é possível pela continuidade de  $N$  e, se necessário, intercambiando  $u$  e  $v$ , fazer com que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v).$$

Com efeito, seja  $p \in S$  e  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  tal que  $\mathbf{x}(U)$  é conexo. Considere o produto interno definido pela função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(p) = \left\langle N(p), \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \right\rangle.$$

Como  $\mathbf{x}(U)$  é conexo, o sinal de  $f$  é constante. Se  $f(p) = -1$ , intercambiamos  $u$  e  $v$  na parametrização, obtendo o afirmado. Procedendo deste modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na interseção de duas quaisquer delas, digamos,  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , o jacobiano da mudança de coordenadas é positivo; caso contrário, teríamos

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}(\bar{u}, \bar{v}) = -\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(u, v) = -N(p),$$

o que é uma contradição. Concluímos então que dada a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de  $u$  e  $v$ , satisfaz às condições da Definição 37, mostrando que  $S$  é orientável.  $\square$

No Exemplo 2.33, mostramos que uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. A próxima proposição, demonstra que uma

superfície que é imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável também é orientável.

**Proposição 2.38.** *Se uma superfície regular é dada por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$ , onde  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $a$  é um valor regular de  $f$ , então  $S$  é orientável.*

*Demonstração.* Dado um ponto  $(x_0, y_0, z_0) = p \in S$ , considere a curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  tal que  $\alpha(t_0) = p$  e  $\alpha'(t_0) = w$ . Considere a composição  $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é,

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Derivando ambos os membros desta expressão acima em relação a  $t$ , temos que em  $t = t_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \frac{dy}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p) \frac{dz}{dt}(t_0) &= 0 \\ \Rightarrow f_x(p)x'(t_0) + f_y(p)y'(t_0) + f_z(p)z'(t_0) &= 0 \\ \Rightarrow \langle (f_x(p), f_y(p), f_z(p)), (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle \nabla f, w \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que o vetor tangente à curva em  $t = t_0$  é perpendicular ao vetor gradiente de  $f$  em  $p$ . Como a curva e o ponto são arbitrários, concluímos que  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$\begin{aligned} N(x, y, z) &= \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} \\ &= \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \\ &= \left( \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right), \end{aligned}$$

é um campo diferenciável de vetores unitários em  $S$ . Pela proposição 14, isto implica que  $S$  é orientável.  $\square$

## 2.7 Aplicação Normal de Gauss

Sabemos que a taxa de variação da reta tangente a uma curva  $C$  nos dá informações sobre a curvatura de  $C$ . Neste tópico, estenderemos essa ideia para superfícies regulares, isto é, tentaremos medir o quão rapidamente uma superfície  $S$  se afasta do plano tangente  $T_p S$ , em uma vizinhança de  $p \in S$ . Isto é equivalente a medir a taxa de variação em  $p$  de um campo diferenciável de vetores normais unitários  $N$  em uma vizinhança de  $p$ . Veremos em breve que essa taxa de variação é dada por uma aplicação linear em  $T_p S$ , que é auto-adjunta. Ao longo deste tópico,  $S$  denotará uma superfície regular orientável e diremos

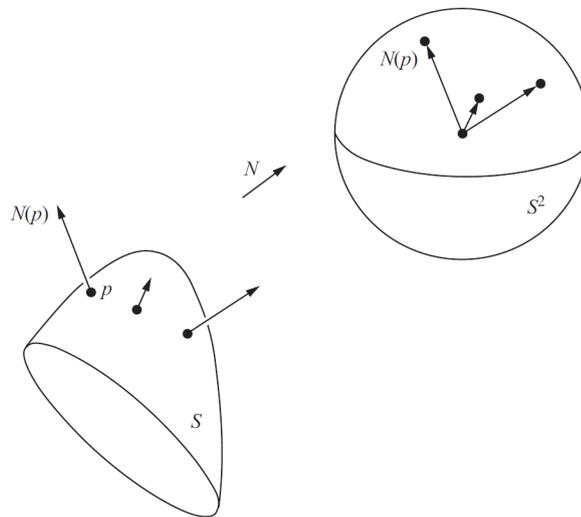
simplesmente que  $S$  é uma superfície com uma orientação  $N$ .

**Definição 2.39.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  assim definida, é chamada a aplicação normal de Gauss de  $S$  (Figura 2.13).

Figura 2.13: Aplicação Normal de Gauss.



Fonte: CARMO (2014, p. 161).

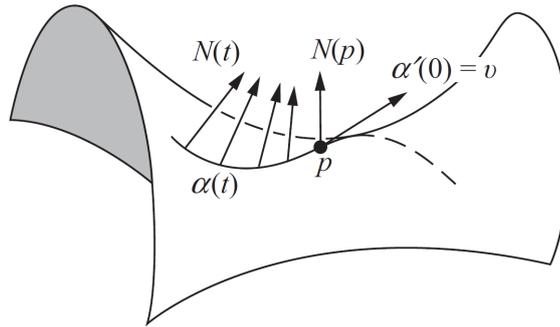
Como  $S$  é uma superfície orientável, a aplicação normal de Gauss é diferenciável. Portanto, para todo  $p \in S$  a diferencial  $dN_p$  é uma aplicação linear de  $T_pS$  em  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ . Como os vetores normais de  $S$  e  $\mathbb{S}^2$  são paralelos, então via identificação  $T_pS \cong T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ ,  $dN_p$  pode ser vista como um operador linear em  $T_pS$ , isto é,  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ .

O operador  $dN_p$  opera da seguinte maneira: para cada curva parametrizada  $\alpha(t)$  em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , consideramos a curva parametrizada  $N \circ \alpha(t) = N(t)$  na esfera  $\mathbb{S}^2$ , que é equivalente a restringir o vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(t)$ . Segue que, o vetor tangente a  $N(t)$  em  $N(p)$  dado por

$$N'(0) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = dN_p(\alpha'(0)),$$

é um vetor de  $T_pS$ . Ele mede a taxa de variação do vetor normal  $N$  restrito à curva  $\alpha(t)$ , em  $t = 0$ . Assim,  $dN_p$  mede quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$  (Figura 2.14).

Figura 2.14: Variação do vetor normal em uma vizinhança de  $p$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 162).

**Exemplo 2.40.** Seja  $P$  um plano dado por  $ax + by + cz + d = 0$  temos como vetor normal ao plano  $P$  o vetor  $(a, b, c)$ . Logo, o campo diferenciável de vetores normais unitários para todo  $p \in P$  é dado por

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

que é constante. Portanto,  $dN_p \equiv 0$ .

**Definição 2.41.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que a aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  é auto-adjunta se  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$  para todo  $v, w \in V$ .

**Proposição 2.42.** A diferencial  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  da aplicação normal de Gauss é um operador linear auto-adjunto.

*Demonstração.* Basta mostrar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

para uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_pS$ . Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  a base associada de  $T_pS$ . Se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial N}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial N}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0), \end{aligned}$$

e em particular,  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ . Portanto, para provar que  $dN_p$  é

autoadjunto, é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle.$$

Observe que  $N$  é normal à  $T_p S$ . Em particular,  $N$  é ortogonal aos vetores da base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , isto é

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \quad \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Derivando as equações acima com relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial v}(\langle N, \mathbf{x}_u \rangle) = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\langle N, \mathbf{x}_v \rangle) = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle,$$

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle.$$

Portanto,  $\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle$  e  $dN_p$  é auto-adjunto.  $\square$

O fato de  $dN_p$  ser um operador linear auto-adjunto nos permite definir uma forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} B : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle dN_p(v), w \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, a cada forma bilinear e simétrica em  $T_p S$ , podemos corresponder uma forma quadrática  $Q$  dada por

$$\begin{aligned} Q : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle. \end{aligned}$$

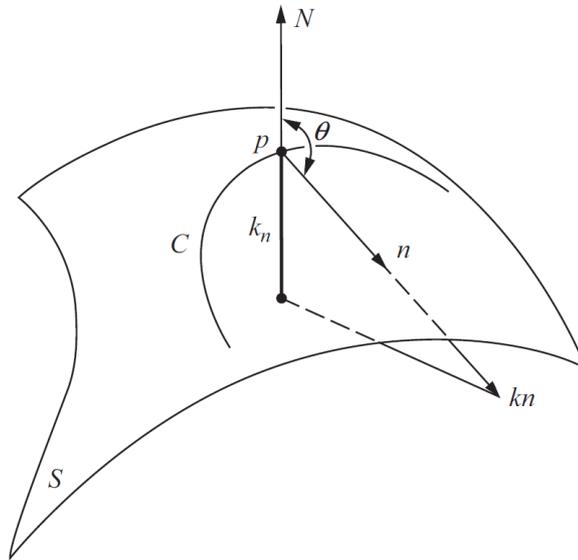
Para obtermos uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisaremos de algumas definições. Por convenção usaremos a forma quadrática  $-Q$ .

## 2.8 Segunda Forma Fundamental

**Definição 2.43.** Uma forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.44.** Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ . (Figura 2.15)

Figura 2.15: Curvatura Normal.



Fonte: CARMO (2014, p. 167).

Observe que  $k_n$  é o comprimento da projeção do vetor  $kn$  sobre o vetor normal à superfície em  $p$ , com um sinal dado pela orientação  $N$  de  $S$  em  $p$ . Além disso, a curvatura normal de  $C$  em  $p$  não depende da orientação de  $C$ , pois  $k$  e  $n$  não se alteram quando mudamos a orientação de  $C$ , mas troca de sinal com uma mudança de orientação da superfície.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental  $II_p$ , considere uma curva regular  $C \subset S$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco de  $C$  com  $\alpha(0) = p$ . Se indicarmos  $N(s)$  a restrição do vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(s)$ , teremos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Derivando em ambos os lados, obtemos

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \implies \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle.$$

Portanto,

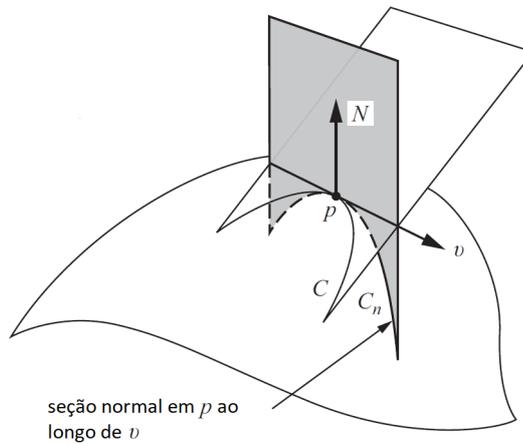
$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Com isso, o valor da segunda forma fundamental  $II_p$ , em um vetor unitário  $v \in T_p S$ , é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $v$ . Isso é suficiente para demonstrar a proposição a seguir que nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em  $p$ .

**Proposição 2.45** (Meusnier). *Todas as curvas de uma superfície  $S$  que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

Dado um vetor unitário  $v \in T_p S$  a interseção de  $S$  com o plano contendo  $v$  e  $N(p)$  é chamada seção normal de  $S$  em  $p$  segundo  $v$  (Figura 2.16). Em uma vizinhança de  $p$ , uma seção normal de  $S$  em  $p$  é a curva regular plana em  $S$ , cujo vetor normal  $n$  em  $p$  é  $\pm N(p)$  ou zero. Assim, a curvatura da seção normal é igual a  $|k_n|$  segundo  $v$  em  $p$ . Com isso o valor absoluto da curvatura normal em  $p$  de uma curva  $\alpha(s)$  é igual à curvatura da seção normal de  $S$  em  $p$ , segundo  $\alpha'(0)$ .

Figura 2.16: Curvatura da seção normal, Meusnier.



seção normal em  $p$  ao longo de  $v$

Fonte: CARMO (2014, p. 168).

O teorema abaixo não será demonstrado neste trabalho, mas o leitor poderá encontrar a demonstração em CARMO (2014), p. 258.

**Teorema 2.46.** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$  (isto é,  $e_1$  e  $e_2$  são autovetores, e  $\lambda_1, \lambda_2$  são autovalores de  $A$ ). Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , com  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle A(v), v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ .*

Como  $dN_p$  é um operador autoadjunto, podemos utilizar o teorema acima para concluir que existe uma base ortonormal de autovetores associados aos autovalores de  $dN_p$  tal que os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $dN_p$  são o máximo e mínimo da forma quadrática  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $T_p S$ . Com isso, escrevendo  $k_1 = -\lambda_1$  e  $k_2 = -\lambda_2$ , observamos que  $k_1$  e  $k_2$  são o mínimo e o máximo, respectivamente, da segunda forma fundamental  $II_p = -Q$  restrita ao círculo unitário de  $T_p S$ .

**Definição 2.47.** O mínimo da curvatura normal  $k_1$  e o máximo da curvatura normal  $k_2$  são chamados curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, dadas pelos autovetores de  $dN_p$  são chamadas direções principais em  $p$ .

Neste momento, estamos prontos para definir a curvatura Gaussiana e a curvatura Média de uma superfície regular.

**Definição 2.48.** Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média de  $S$  em  $p$ . Os números,  $k_i = -\lambda_i$ , são chamados curvaturas principais de  $S$  em  $p$ , onde  $\lambda_i$ , com  $i = 1, 2$ , são os autovalores de  $dN_p$ . Em termos de  $k_1$  e  $k_2$ , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

## 2.9 A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais

Nesta seção, obteremos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais. Seja  $S$  uma superfície regular orientável tal que todas as parametrizações  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  são compatíveis com a orientação  $N$  de  $S$ , isto é, em  $\mathbf{x}(U)$

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização em um ponto  $p \in S$  de uma superfície, e seja  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto  $p$ . O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  e

$$dN_p(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \quad (2.2)$$

Como  $\langle N, N \rangle = 1$ , derivando com relação a  $u$ , obtemos

$$\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0 \implies 2\langle N_u, N \rangle = 0.$$

Logo,  $N_u \in T_p S$ . De forma análoga, concluímos que  $N_v \in T_p S$ . Com isso, podemos escrever

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \quad (2.3)$$

Portanto, substituindo as equações de (2.2) em (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha') &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Em forma matricial,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ , com  $i, j = 1, 2$ . Note que a matriz acima não é necessariamente simétrica, a menos que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  seja uma base ortonormal. Escrevendo a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  obtemos

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -(u')^2 \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle - 2u'v' \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle - (v')^2 \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde,

$$e = -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle,$$

$$f = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle,$$

$$g = -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Como  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Vamos agora obter os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes  $e, f, g$ . A partir das equações (2.3) temos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . As relações acima podem ser expressas em forma matricial por,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Assim, as expressões para os coeficientes  $(a_{ij})$  da matriz de  $dN$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Convém mencionar que as equações (2.4) são conhecidas como as equações de Weingarten. A partir delas, obtemos novas expressões para a curvatura Gaussiana e a curvatura média, dadas pelo determinante de  $(a_{ij})$  e pelo negativo da metade do traços, respectivamente. Portanto

$$k = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

**Exemplo 2.49.** Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos do toro, coberto pela parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Para o cálculo dos coeficientes  $e, f, g$ , será necessário primeiramente o cálculo de  $N$ , além de  $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}$  e  $\mathbf{x}_{vv}$ . Com efeito, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ \mathbf{x}_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2 \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uu} \right\rangle = r \\ f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uv} \right\rangle = 0 \\ g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{vv} \right\rangle = \cos u(a + r \cos u). \end{aligned}$$

Concluimos que a curvatura Gaussiana é dada por

$$K = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Da expressão acima, concluimos que  $K = 0$  quando  $\cos u = 0$ , ou seja, quando  $u = \frac{\pi}{2}$  ou  $u = \frac{3\pi}{2}$ . Na região do toro dada por  $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ ,  $K$  é negativa. Por fim, na região dada por  $0 < u < \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$ , a curvatura é positiva.

## Capítulo 3

# Isometrias e o Teorema Egregium de Gauss

### 3.1 Isometrias

Veremos neste tópico que muitas propriedades locais importantes de uma superfície podem ser expressas apenas em termos da primeira forma fundamental. O estudo de tais propriedades é chamado de geometria intrínseca da superfície.

**Definição 3.1.** A aplicação  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se  $\phi$  é um difeomorfismo e para todo  $p \in S$  e todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$ , temos

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}.$$

Quando existe uma isometria  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ , dizemos então que as superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  são isométricas.

Observe que um difeomorfismo  $\phi$  é uma isometria se a diferencial  $d\phi$  preserva o produto interno. Se  $\phi$  é uma isometria, segue que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\phi_p(w), d\phi_p(w) \rangle_{\phi(p)} = I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)),$$

para todo  $w \in T_p S$ , isto é,  $\phi$  preserva a primeira forma fundamental. Reciprocamente, se um difeomorfismo  $\phi$  preserva a primeira forma fundamental, então para todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$ , temos

$$\begin{aligned} I_p(w_1 + w_2) &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle_p \\ &= \langle w_1, w_1 \rangle_p + \langle w_1, w_2 \rangle_p + \langle w_2, w_1 \rangle_p + \langle w_2, w_2 \rangle_p \\ &= I_p(w_1) + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + I_p(w_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 2\langle w_1, w_2 \rangle_p &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\
 &= I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_1 + w_2)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_1)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_2)) \\
 &= \langle d\phi_p(w_1 + w_2), d\phi_p(w_1 + w_2) \rangle_{\phi(p)} \\
 &\quad - \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_1) \rangle_{\phi(p)} - \langle d\phi_p(w_2), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)} \\
 &= 2\langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\phi$  é uma isometria.

**Definição 3.2.** Uma aplicação  $\phi : V \rightarrow \bar{S}$  de uma vizinhança  $V$  de  $p \in S$  é uma isometria local em  $p$  se existe uma vizinhança  $\bar{V}$  de  $\phi(p) \in \bar{S}$  tal que  $\phi : V \rightarrow \bar{V}$  é uma isometria. Se existir uma isometria local em  $\bar{S}$  para todo ponto  $p \in S$ , diz-se que a superfície  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$ . Além disso, dizemos que  $S$  e  $\bar{S}$  são localmente isométricas se  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$  e  $\bar{S}$  é localmente isométrica a  $S$ .

Se  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$  é um difeomorfismo e uma isometria local para todo  $p \in S$ , então  $\phi$  é uma isometria (globalmente). Por outro lado, pode acontecer que duas superfícies sejam localmente isométricas mas não sejam globalmente isométricas, como no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.3.** Considere o cilindro reto com parametrização  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}}(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z), \\
 U &= \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty\},
 \end{aligned}$$

e o plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$  com parametrização dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja  $\varphi = \mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \rightarrow \mathbf{x}(U)$ . Vamos mostrar que  $\varphi$  é uma isometria local.

Com efeito, seja  $w$  um vetor tangente ao cilindro reto em um ponto  $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$  e uma curva  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Observe que  $w \in T_p(\bar{\mathbf{x}}(U))$ , logo  $w$  é vetor tangente a curva  $\bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))$ . Portanto, podemos escrever  $w$  como uma combinação linear da base associada a parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ , ou seja,

$$w = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Como  $d\varphi_p(w)$  é o vetor tangente a curva  $\varphi(\bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , então podemos escrever  $d\varphi_p(w)$  como

$$d\varphi_p(w) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização dada para o cilindro temos

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_\theta, \bar{\mathbf{x}}_\theta \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\ \bar{F} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_\theta, \bar{\mathbf{x}}_z \rangle = \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ \bar{G} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_z, \bar{\mathbf{x}}_z \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = \|(0, 0, 1)\|^2 = 1.\end{aligned}$$

Seguimos então para o cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização dada para o plano, obtendo

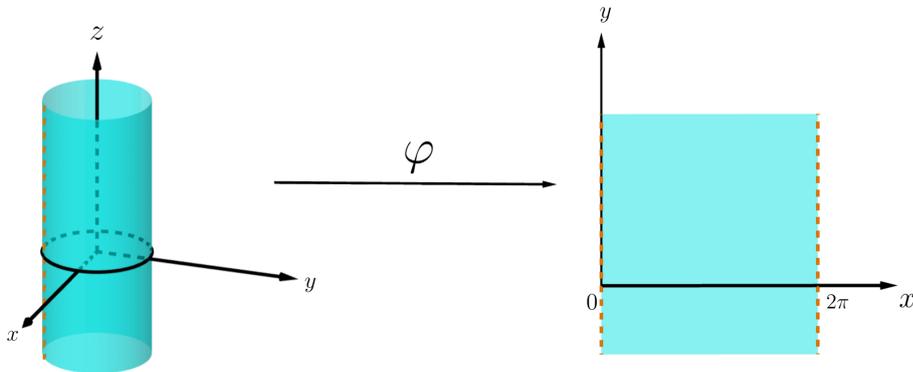
$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\|^2 = 1, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\|^2 = 1.\end{aligned}$$

Como  $\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G$ , temos que

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Portanto, o cilindro é localmente isométrico ao plano (Figura 3.1). A isometria global não ocorre devido ao fato de não existir um homeomorfismo entre plano e cilindro.

Figura 3.1: Isometria local entre o cilindro e o plano.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos generalizar o argumento dado no exemplo anterior para obter um critério de isometria local em termos de coordenadas locais.

**Proposição 3.4.** *Suponha a existência de parametrizações  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  e  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$  tais que  $\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G$  em  $U$ . Então a aplicação  $\varphi : \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria local.*

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathbf{x}(U)$  e  $w \in T_p S$ . Então  $w$  é tangente a uma curva  $\mathbf{x}(\alpha(t))$  em  $t = 0$ , onde  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  é uma curva em  $U$ . Assim,  $w$  pode ser escrito, em  $t = 0$ ,

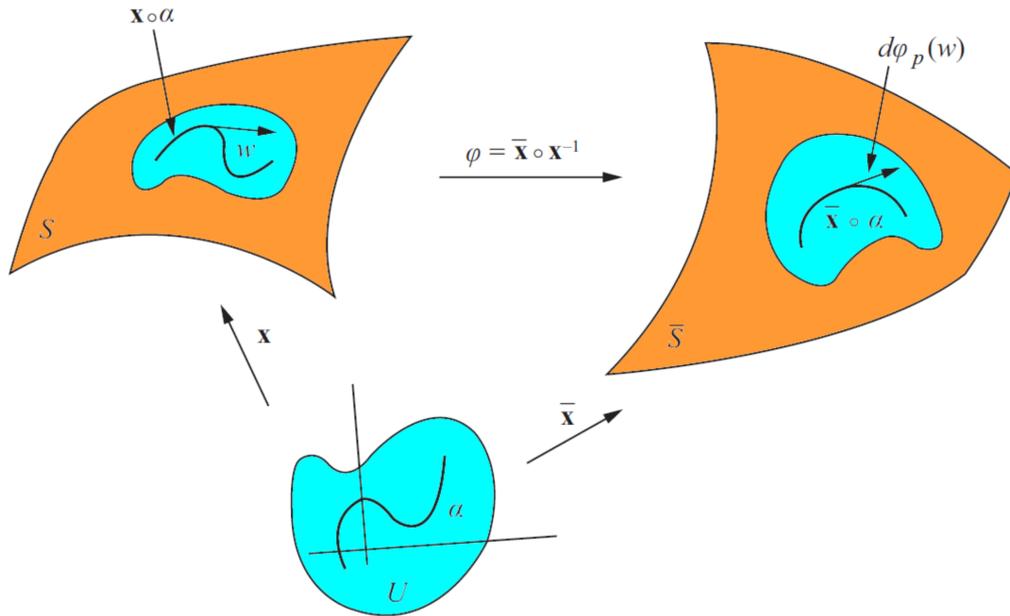
como

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Por definição, o vetor  $d\varphi_p(w)$  é o vetor tangente à curva  $\varphi \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha(t))$  em  $t = 0$  (Figura 3.2). Portanto,

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Figura 3.2: Diagrama da aplicação  $\varphi$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 264).

Como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2, \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u'v' + \bar{G}(v')^2, \end{aligned}$$

e por hipótese temos  $\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G$ , concluímos que  $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$  para todo  $p \in \mathbf{x}(U)$  e todo  $w \in T_p S$ . Logo,  $\varphi$  é um isometria local.  $\square$

**Exemplo 3.5.** Neste exemplo, vamos mostrar que o catenoide é localmente isométrico ao helicóide.

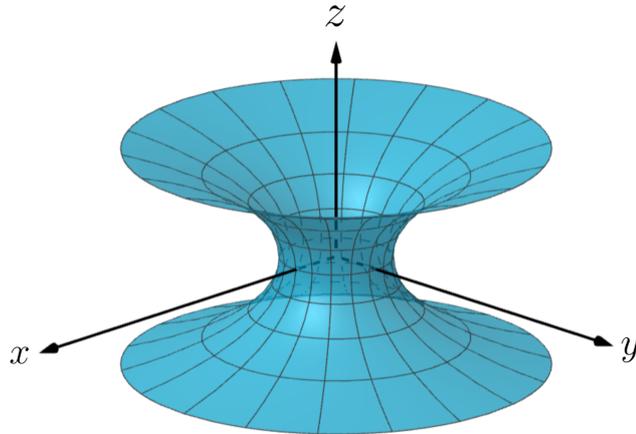
A superfície de revolução obtida pela rotação da catenária que é dada por

$$x = a \cosh v, \quad z = av, \quad -\infty < v < \infty,$$

é chamada de catenoide (Figura 3.3) e tem a seguinte parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Figura 3.3: O catenoide.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os coeficientes da primeira forma fundamental do catenoide são

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 + \sinh^2 v = a^2 \cosh^2 v.$$

Uma parametrização para o helicóide é dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Para mostrar que o catenoide é localmente isométrico ao helicóide, basta provar que os coeficientes da primeira forma fundamental de alguma parametrização do helicóide e do catenoide são iguais. Portanto, considere a mudança de parâmetros

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

obtendo a nova parametrização do helicóide dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

que é diferenciável e um homeomorfismo. Além disso, o determinante jacobiano

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{vmatrix} = a \cosh v,$$

nunca se anula. Por fim, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$  do helicóide obtemos

$$\bar{E} = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = a^2 \cosh^2 v.$$

Logo, pela Proposição 3.4, o catenoide é localmente isométrico ao helicóide.

## 3.2 Teorema de Gauss e Equações de Compatibilidade

Procedendo de forma análoga ao estudo de curvas, vamos associar a cada ponto da superfície um triedro  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  e estudaremos as derivadas desses vetores. Iremos denotar por  $S$  uma superfície regular orientável e orientada. Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização na orientação de  $S$ . É possível associar a cada ponto de  $\mathbf{x}(U)$  um triedro natural dado pelos vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$ . Expressando as derivadas dos vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\
 N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \\
 \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + L_1N, \\
 \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + L_2N, \\
 \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v + \bar{L}_2N, \\
 \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v + L_3N,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde os  $a_{ij}$  com  $i, j = 1, 2$  são dados por

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \tag{3.2}$$

e os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , são chamados de símbolos de Christoffel de  $S$  na parametrização  $\mathbf{x}$ . Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , concluímos que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ , isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos com relação aos índices inferiores. Tomando o produto interno das relações anteriores de  $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_{vv}$  com  $N$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \langle N, \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + L_1N \rangle = \Gamma_{11}^1\langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{11}^2\langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_1\langle N, N \rangle = L_1, \\
 f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + L_2N \rangle = \Gamma_{12}^1\langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{12}^2\langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_2\langle N, N \rangle = L_2, \\
 f &= \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = \langle N, \Gamma_{21}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v + L_2N \rangle = \Gamma_{21}^1\langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{21}^2\langle N, \mathbf{x}_v \rangle + \bar{L}_2\langle N, N \rangle = \bar{L}_2, \\
 g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \langle N, \Gamma_{22}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v + L_3N \rangle = \Gamma_{22}^1\langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{22}^2\langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_3\langle N, N \rangle = L_3,
 \end{aligned}$$

onde  $e, f, g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $S$ . Note que

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \implies E_u = 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle.$$

Com isso,

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + L_1N, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{11}^1\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{11}^2\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{11}^1E + \Gamma_{11}^2F.$$

Logo,

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2}.$$

Procedendo de forma análoga para determinar os símbolos de Christoffel, tomando o produto interno das expressões de  $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_{vv}$  em (3.1) com  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ , obtemos

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{E_u}{2}, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{E_v}{2}, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_v}{2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Observe que as equações acima foram agrupadas em três pares de equações e que para cada par, o determinante do sistema é  $EG - F^2 \neq 0$ . Logo, é possível resolver o sistema acima e calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas. Não vamos obter expressões explícitas para os  $\Gamma_{ij}^k$ , já que é mais simples trabalharmos com o sistema acima em cada caso particular. Um fato importante que segue da solução do sistema acima, é que todos os conceitos e propriedades geométricas expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias.

**Exemplo 3.6.** Vamos calcular os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução (Exemplo 3.5) parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) > 0,$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  em  $S$ .

Como

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2,$$

temos que

$$\begin{aligned} E_u &= 0, \\ E_v &= 2f(v) \cdot f'(v), \\ F_u &= 0, \\ F_v &= 0, \\ G_u &= 0, \\ G_v &= 2(f'(v) \cdot f''(v) + g'(v) \cdot g''(v)). \end{aligned}$$

Substituindo os valores acima no primeiro par de equações em (3.3), temos

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2},$$

fazendo o mesmo em (3.4), obtemos

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0,$$

e por fim, em (3.5), concluímos que

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}.$$

Observe que as expressões das derivadas de  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  dependem apenas do conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de  $S$ . Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as expressões

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u &= 0, \\ (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo os valores de (3.1) nas equações acima, podemos reescrevê-las na forma

$$\begin{aligned} A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1N &= 0, \\ A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2N &= 0, \\ A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3N &= 0, \end{aligned}$$

onde  $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$ , são funções de  $E, F, G, e, f, g$  e suas derivadas. Como os vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  são linearmente independentes, temos que  $A_i = B_i = C_i = 0, i = 1, 2, 3$ , o que nos dá nove relações. Utilizando as expressões de (3.1), a relação  $(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0$ , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0 \\ \implies &(\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + fN)_u = 0, \end{aligned}$$

com isso, temos que

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v\mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v\mathbf{x}_v + e_vN = \\ &\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{x}_v + f_vN. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Utilizando as equações (3.1) novamente e igualando os coeficientes de  $\mathbf{x}_v$  na equa-

ção (3.7), obtemos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Introduzindo os valores de  $a_{21}$  e  $a_{22}$  dados em (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= ea_{22} - fa_{21} \\ &= e \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \left( \frac{efF - efF - egE + f^2E}{EG - F^2} \right) \\ &= -E \left( \frac{eg - f^2E}{EG - F^2} \right) \\ &= -EK. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Convém neste momento interromper nossos cálculos para chamar a atenção para o fato de que a equação acima prova o seguinte teorema.

**Teorema 3.7** (Teorema Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície é invariante por isometria locais.*

*Demonstração.* De fato, se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma parametrização de  $S$  em  $p$  e se  $\phi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$ , onde  $V \subset \mathbf{x}(U)$  é uma vizinhança de  $p$ , é isometria local em  $p$ , então  $\mathbf{y} = \phi \circ \mathbf{x}$  é uma parametrização de  $\bar{S}$  em  $\phi(p)$ . Como  $\phi$  é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  coincidem em pontos correspondentes  $q$  e  $\phi(q)$ ,  $q \in V$  e, conseqüentemente, os símbolos de Christoffel correspondentes também coincidem. Observe que em (3.8) expressamos  $K$  em um ponto como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização dada no ponto. Segue-se que  $K(q) = K(\phi(q))$ ,  $\forall q \in V$ .  $\square$

A expressão acima que produz o valor da curvatura  $K$  em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas, é conhecida como fórmula de Gauss. O teorema de Gauss é considerado um dos fatos mais importantes da geometria diferencial.

Como demonstrado no Exemplo 3.5, o catenoide é localmente isométrico ao helicoide. Segue do teorema de Gauss que as curvaturas Gaussianas são iguais em pontos correspondentes pela isometria. Em outras palavras, isso nos mostra que o conceito de curvatura Gaussiana, cuja definição utiliza de maneira essencial a posição da superfície no espaço, não depende desta posição mas apenas da estrutura métrica da superfície, isto é, da primeira forma fundamental.

Procurando por mais alguns resultados geométricos, utilizando as equações (3.1) em (3.7) mais uma vez e igualando os coeficientes de  $\mathbf{x}_u$ , vemos que a relação  $A_1 = 0$  pode

ser escrita como

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12} + (\Gamma_{11}^1)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11} + (\Gamma_{12}^1)_u \\ \implies & (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = ea_{12} - fa_{11} \\ \implies & (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = ea_{12} - fa_{11}. \end{aligned}$$

Introduzindo os valores de  $a_{11}$  e  $a_{12}$  dados em (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= ea_{12} - fa_{11} \\ &= e \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \\ &= FK. \end{aligned}$$

Por fim, repetindo o mesmo procedimento e, desta vez, igualando os coeficientes de  $N$  em (3.7), obtemos  $C_1 = 0$  e podemos escrever como

$$\begin{aligned} f\Gamma_{11}^1 + g\Gamma_{11}^2 + e_v &= e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2 + f_u \\ \implies e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aplicando o mesmo processo na segunda expressão de (3.6), obtemos que ambas as equações  $A_2 = 0$  e  $B_2 = 0$  nos dão novamente a fórmula de Gauss. Além disto,  $C_2 = 0$  é dada por

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (3.10)$$

Finalmente, este mesmo procedimento pode ser aplicado à última expressão de (3.6), obtemos então para a equação  $C_3 = 0$  uma identidade, isto é,

$$\begin{aligned} N_{uv} &= N_{vu} \\ \implies (a_{11})_v \mathbf{x}_u + a_{11} \mathbf{x}_{uv} + (a_{12})_v \mathbf{x}_v + a_{21} \mathbf{x}_{vv} &= (a_{12})_u \mathbf{x}_u + a_{12} \mathbf{x}_{uu} + (a_{22})_u \mathbf{x}_v + a_{22} \mathbf{x}_{vu}, \end{aligned}$$

e introduzindo os valores de  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{vv}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$ ,  $\mathbf{x}_{vu}$  na expressão acima, igualando os coeficientes de  $N$  e introduzindo os valores  $(a_{ij})$ , temos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) f + \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) g = \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) e + \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) f \\ \implies & f^2 F - eGf + eFg - fEg = gFe - fGe + f^2 F - gEf \\ \implies & 0 = 0. \end{aligned}$$

Além disso,  $A_3 = 0$  e  $B_3 = 0$  são novamente (3.9) e (3.10), respectivamente. As equações (3.9) e (3.10) são chamadas equações de Mainardi-Codazzi. A fórmula de Gauss e as equações de Mainardi-Codazzi são conhecidas como as equações de compatibilidade da teoria das superfícies.

Neste ponto, uma pergunta natural a ser feita é se existem outras relações de compatibilidade entre a primeira e a segunda formas fundamentais, além das já obtidas. O teorema a seguir, que não será demonstrado neste trabalho, mostra que a resposta é não. Em outras palavras, por derivações sucessivas ou qualquer outro processo não se obtém novas relações entre os coeficientes  $E, F, G, e, f, g$  e suas derivadas. Em verdade, o teorema é mais explícito e afirma que o conhecimento da primeira e segunda formas fundamentais determina a superfície localmente.

**Teorema 3.8** (Bonnet). *Sejam  $E, F, G, e, f, g$  funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , com  $E > 0, G > 0$ . Suponha que as funções satisfazem formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Cadazzi e que  $EG - F^2 > 0$ . Então, para todo  $q \in V$  existe uma vizinhança  $U \subset V$  de  $q$  e um difeomorfismo  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  tal que a superfície regular  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  tem  $e, f, g$  e  $E, F, G$ , como coeficientes da segunda e primeira formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se  $U$  for conexo e se*

$$\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3,$$

*é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação  $T$  e uma transformação ortogonal própria  $\rho$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$ .*

## Capítulo 4

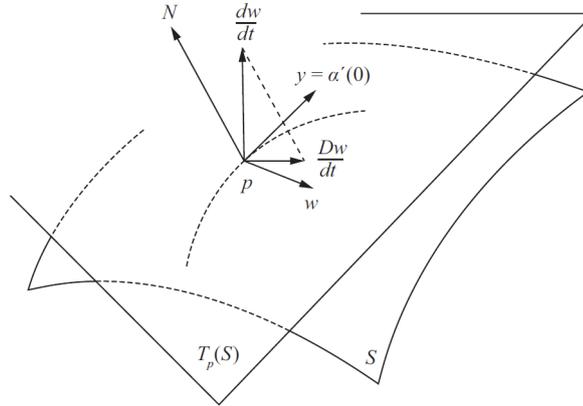
# Transporte Paralelo e Geodésicas

Neste tópico, faremos uma exposição sistemática da geometria intrínseca começando com definição de derivada covariante de um campo de vetores. Um campo de vetores tangentes em um conjunto aberto  $U \subset S$  de uma superfície regular  $S$ , é uma correspondência  $w$  que associa a cada  $p \in U$  um vetor  $w(p) \in T_p S$ . O campo de vetores é diferenciável em  $p$  se, para alguma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ , as componentes  $a$  e  $b$  de  $w = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  são funções diferenciáveis em  $p$ . O campo de vetores  $w$  é diferenciável em  $U$  se é diferenciável para todo  $p \in U$ .

### 4.1 A Derivada Covariante

**Definição 4.1.** Seja  $w$  um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto  $U \subset S$  e  $p \in U$ . Seja  $y \in T_p S$ . Considere a curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = y$ , e seja  $w(t), t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , a restrição do campo de vetores  $w$  à curva  $\alpha$ . O vetor obtido pela projeção de  $\left(\frac{dw}{dt}\right)(0)$  sobre o plano  $T_p S$  é chamado a derivada covariante em  $p$  do campo de vetores  $w$  em relação ao vetor  $y$ . Esta derivada covariante é denotada por  $\frac{Dw}{dt}(0)$  ou  $(D_y w)(p)$  (Figura 4.1).

Figura 4.1: A Derivada Covariante.



Fonte: CARMO (2014, p. 286).

Note que a definição acima faz uso do vetor normal de  $S$  e de uma curva particular  $\alpha$ , tangente a  $y$  em  $p$ .

**Proposição 4.2.** A derivada covariante  $\frac{Dw}{dt}$  não depende da escolha da curva  $\alpha$ .

*Demonstração.* Considere  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  e seja

$$\begin{aligned} w(t) = w \circ \alpha(t) &= a(u(t), v(t))\mathbf{x}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{x}_v \\ &= a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

a expressão de  $w(t)$  na parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$ . Com isso,

$$\frac{dw}{dt} = a'(t)\mathbf{x}_u + a(t)(\mathbf{x}_{uu}u'(t) + \mathbf{x}_{uv}v'(t)) + b'(t)\mathbf{x}_v + b(t)(\mathbf{x}_{vu}u'(t) + \mathbf{x}_{vv}v'(t)).$$

Como  $\frac{Dw}{dt}$  é a componente tangente de  $\frac{dw}{dt}$ , utilizando as expressões em (3.1) para  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$ ,  $\mathbf{x}_{vv}$  e desprezando a componente normal, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= a'\mathbf{x}_u + a[(\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v)u' + (\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v)v'] + \\ &\quad b'\mathbf{x}_v + b[(\Gamma_{21}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v)u' + (\Gamma_{22}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v)v'] \\ &= \mathbf{x}_u(a' + \Gamma_{11}^1au' + \Gamma_{12}^1av' + \Gamma_{21}^1bu' + \Gamma_{22}^1bv') + \\ &\quad \mathbf{x}_v(b' + \Gamma_{11}^2au' + \Gamma_{12}^2av' + \Gamma_{21}^2bu' + \Gamma_{22}^2bv'). \end{aligned} \tag{4.1}$$

A expressão acima mostra que  $\frac{Dw}{dt}$  depende apenas do vetor  $(u'(0), v'(0)) = y$  e não da curva  $\alpha$ . Além disso,  $\frac{Dw}{dt}$  está escrita em termos dos símbolos de Christoffel, isto é, através da primeira forma fundamental e suas derivadas, o que conclui nossa demonstração.  $\square$

**Exemplo 4.3.** Se considerarmos a superfície  $S$  como um plano, já mostramos no exemplo (2.24) que é possível encontrar uma parametrização tal que  $E = G = 1$  e  $F = 0$ . Com isso, obtemos  $\Gamma_{ij}^k = 0, i, j, k = 1, 2$ , e substituindo estes valores na equação (4.1), observamos que a derivada covariante coincide com a derivada usual de campos de vetores no plano, isto é,

$$\frac{Dw}{dt} = a'(t)\mathbf{x}_u + b'(t)\mathbf{x}_v.$$

Assim, a derivada covariante é uma generalização da derivada usual de vetores no plano.

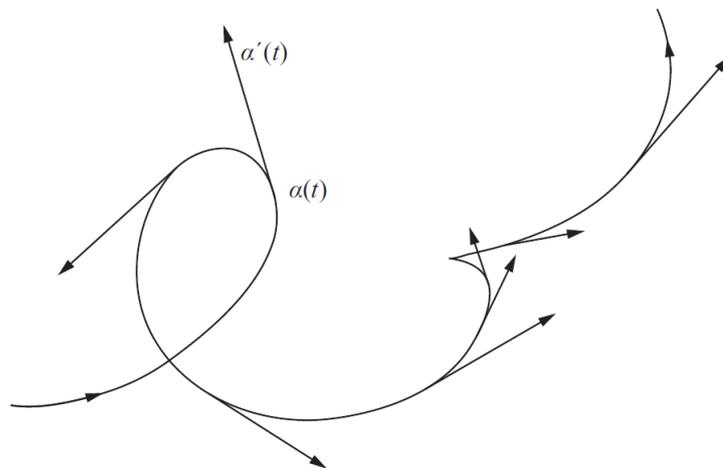
**Definição 4.4.** Uma curva parametrizada  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  é a restrição a  $[0, l]$  de uma aplicação diferenciável de  $(0 - \epsilon, l + \epsilon), \epsilon > 0$ , em  $S$ . Se  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(l) = q$ , dizemos que  $\alpha$  liga  $p$  a  $q$ . A curva  $\alpha$  é regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [0, l]$ .

A partir de agora, utilizaremos a notação  $[0, l] = I$  sempre que a especificação do ponto final  $l$  for desnecessária.

**Definição 4.5** (Campos ao longo de curvas). Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$ . Um campo de vetores  $w$  ao longo de  $\alpha$  é uma correspondência que associa a cada  $t \in I$  um vetor  $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$ . Tal campo é diferenciável em  $t_0 \in I$  se para alguma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $\alpha(t_0)$  as funções componentes  $a(t), b(t)$  de  $w(t) = a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v$  são funções diferenciáveis de  $t$  em  $t_0$ . O campo  $w$  é diferenciável em  $I$  se é diferenciável para todo  $t \in I$ .

Um exemplo de campo de vetores diferenciável ao longo de  $\alpha$  é dado pelo campo  $\alpha'(t)$  dos vetores tangentes de  $\alpha$  (Figura 4.2).

Figura 4.2: Campo de vetores tangentes ao longo de uma curva.



Fonte: CARMO (2014, p. 287).

**Definição 4.6.** Seja  $w$  um campo diferenciável de vetores ao longo de  $\alpha : I \rightarrow S$ . A expressão obtida anteriormente para a derivada covariante  $\left(\frac{Dw}{dt}\right)(t), t \in I$ , está bem definida e é chamada derivada covariante de  $w$  em  $t$ .

Do ponto de vista externo à superfície, para obtermos a derivada covariante de um campo  $w$  ao longo de  $\alpha : I \rightarrow S$  em  $t \in I$  consideramos a derivada usual  $(dw/dt)(t)$  de  $w$  em  $t$  e projetamos este vetor ortogonalmente sobre o plano tangente  $T_{\alpha(t)}S$ . Portanto, quando duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha$  a derivada covariante de um campo  $w$  ao longo de  $\alpha$  é a mesma para ambas as superfícies.

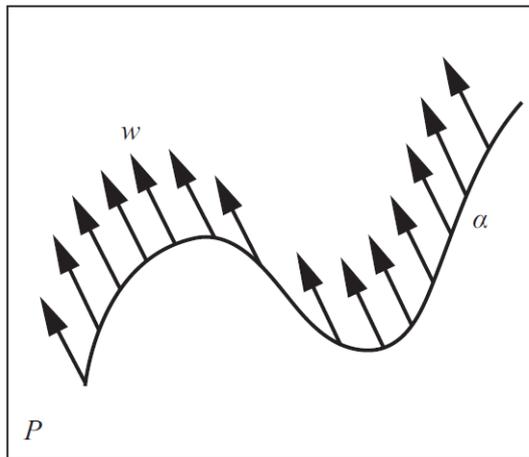
Sendo  $\alpha(t)$  uma curva em  $S$  podemos entender a mesma como a trajetória de um ponto que se move sobre a superfície. Com isso,  $\alpha'(t)$  é então a velocidade e  $\alpha''(t)$  a aceleração de  $\alpha$ . A derivada covariante  $D\alpha'/dt$  do campo  $\alpha'(t)$  é a componente tangencial da aceleração  $\alpha''(t)$ . De forma mais intuitiva,  $D\alpha'/dt$  é a aceleração do ponto  $\alpha(t)$  visto de  $S$ .

## 4.2 Transporte Paralelo

**Definição 4.7.** Um campo de vetores  $w$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  é chamado paralelo se  $(Dw/dt)(t) = 0$  para todo  $t \in I$ .

Em particular, sendo a superfície um plano, a noção de campo paralelo ao longo de uma curva parametrizada reduz-se a noção de campo constante ao longo da curva, isto é, o comprimento do vetor e o ângulo que ele faz com uma direção fixa são constantes (Figura 4.3).

Figura 4.3: Campo constante ao longo de uma curva no plano.



Fonte: CARMO (2014, p. 288).

**Proposição 4.8.** *Sejam  $v$  e  $w$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\alpha : I \rightarrow S$ . Então  $\langle v(t), w(t) \rangle$  é constante. Em particular,  $|w(t)|$  e  $|v(t)|$  são constantes, e o ângulo entre  $v(t)$  e  $w(t)$  é constante.*

*Demonstração.* Note que se o campo  $w$  é paralelo ao longo de  $\alpha$ , então  $dw/dt$  é normal a  $T_{\alpha(t)}S$ , isto é,

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

De forma análoga,  $v'(t)$  também é normal ao plano tangente em  $\alpha(t)$ . Assim,

$$\langle v'(t), w(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Com isso, temos

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

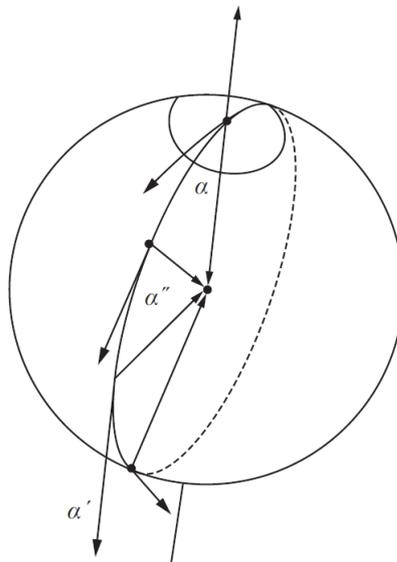
Assim, o produto interno entre  $v(t)$  e  $w(t)$  é constante. Para mostrar que  $|v(t)|$  é constante, basta considerar  $w(t) = v(t)$  e repetir o processo acima (analogamente para  $|w(t)|$ ), isto é, se  $w(t) = v(t)$  obtemos

$$(\langle v(t), v(t) \rangle)' = \langle v'(t), v(t) \rangle + \langle v(t), v'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Assim,  $\langle v(t), v(t) \rangle = c \geq 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Como  $|v(t)|^2 = \langle v(t), v(t) \rangle$ , segue que  $|v(t)|$  é constante. Portanto, como o produto interno  $\langle v(t), w(t) \rangle$  é constante, a norma e o ângulo entre os dois campos também é.  $\square$

**Exemplo 4.9.** O campo de vetores tangente a um meridiano (parametrizado pelo comprimento de arco) de uma esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  é um campo paralelo em  $\mathbb{S}^2$  (Figura 4.4).

Figura 4.4: Uma campo paralelo sobre a esfera.



Fonte: CARMO (2014, p. 289).

De fato, seja  $\alpha(t)$  um meridiano parametrizado pelo comprimento de arco. Então,  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$  e derivando ambos os lados desta equação com relação a  $t$ , obtemos  $2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ . Logo,  $\alpha''(t)$  é ortogonal a  $\alpha'(t)$  e com isso sua derivada covariante é zero.

A proposição a seguir nos mostra que existem campos paralelos ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha(t)$  e que eles são completamente determinados por seus valores em um ponto  $t_0$ .

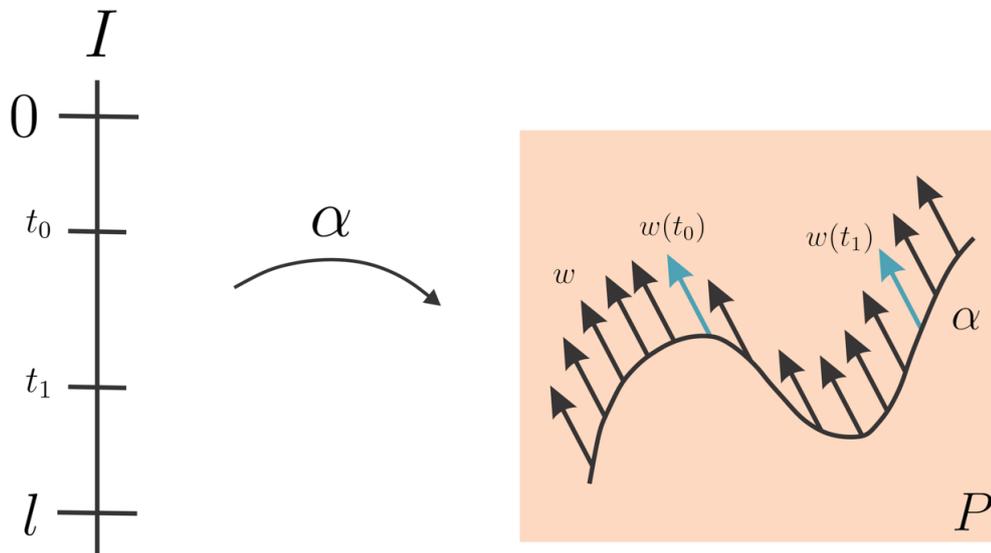
**Proposição 4.10.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$  e seja  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ , com  $t_0 \in I$ . Então existe um único campo de vetores paralelo  $w(t)$  ao longo de  $\alpha(t)$ , com  $w(t_0) = w_0$ .*

A Proposição 4.10 nos permite definir transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva parametrizada e será demonstrada mais adiante nesta seção.

**Definição 4.11.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada e  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ , com  $t_0 \in I$ . Seja  $w$  o campo de vetores paralelo ao longo de  $\alpha$ , com  $w(t_0) = w_0$ . O vetor  $w(t_1)$ ,  $t_1 \in I$  é chamado transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $\alpha$  no ponto  $t_1$ .*

Ou seja, o transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $\alpha$  é o valor do campo paralelo  $w$  no ponto  $t_1$ . Em particular, se  $\alpha : I \rightarrow P$  é uma curva parametrizada, e  $P$  é um plano, mostramos anteriormente que o campo paralelo ao longo de  $\alpha$  reduz-se a noção de campo constante. Daí, o transporte paralelo reduz-se a calcularmos o valor do campo constante nos pontos determinados (Figura 4.5), neste caso  $t_0$  e  $t_1$ .

Figura 4.5: Transporte paralelo em um plano.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que se  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $t \in I$ , é regular, então o transporte paralelo não depende da parametrização de  $\alpha(I)$ . De fato, se  $\beta : J \rightarrow S$ ,  $\sigma \in J$  é outra parametrização regular para  $\alpha(I)$  e  $t : J \rightarrow I$  é tal que  $dt/d\sigma \neq 0, \forall t \in I$ , então, pela regra da cadeia, temos

$$\frac{Dw}{d\sigma} = \frac{Dw}{dt} \frac{dt}{d\sigma}, \quad t \in I, \sigma \in J.$$

Logo,  $w(t)$  é paralelo se, e somente se,  $w(\sigma)$  é paralelo.

**Observação 4.12.** Neste ponto são válidas algumas observações com relação a Proposição 4.8.

- Fixados os pontos  $p, q \in S$  e uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ , com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha(l) = q$ . Denote por  $P_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$  a aplicação que atribui a cada  $v \in T_p S$  seu transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  em  $q$ . A Proposição 4.8 afirma que esta aplicação é uma isometria linear. De fato, sejam  $v_0, w_0 \in T_p S$  e  $v, w$  os campos paralelos ao longo de  $\alpha$  tais que  $v(0) = v_0$  e  $w(0) = w_0$ . Pela Proposição 4.8, temos que  $\langle v(t), w(t) \rangle$  é constante em  $I$ . Em particular

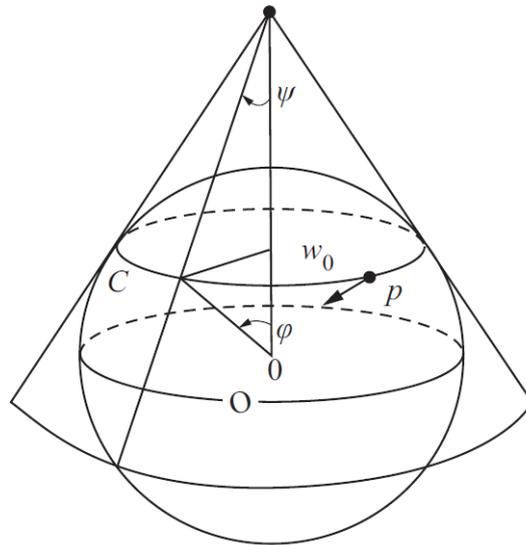
$$\langle v_0, w_0 \rangle = \langle v(0), w(0) \rangle = \langle v(l), w(l) \rangle = \langle P_\alpha(v_0), P_\alpha(w_0) \rangle.$$

Observe que o produto interno é preservado, sendo portanto uma isometria linear.

- Se duas superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  são tangentes ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha$  e  $w_0$  é um vetor de  $T_{\alpha(t_0)} S = T_{\alpha(t_0)} \bar{S}$ , então  $w(t)$  é o transporte paralelo de  $w_0$  relativo à superfície  $S$  se, e somente se,  $w(t)$  é o transporte paralelo de  $w_0$  relativo à superfície  $\bar{S}$ . De fato, a derivada covariante  $Dw/dt$  de  $w$  é a mesma para ambas as superfícies.

**Exemplo 4.13.** Seja  $C$  um paralelo de colatitude  $\varphi$  de uma esfera unitária e seja  $w_0$  um vetor unitário, tangente a  $C$  em um ponto  $p$  de  $C$ . Vamos determinar o transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $C$ , parametrizado pelo comprimento de arco  $s$ , com  $s = 0$  em  $p$ . Considere o cone que é tangente à esfera ao longo de  $C$  (Figura 4.6).

Figura 4.6: Cone tangente à esfera ao longo de  $C$ .



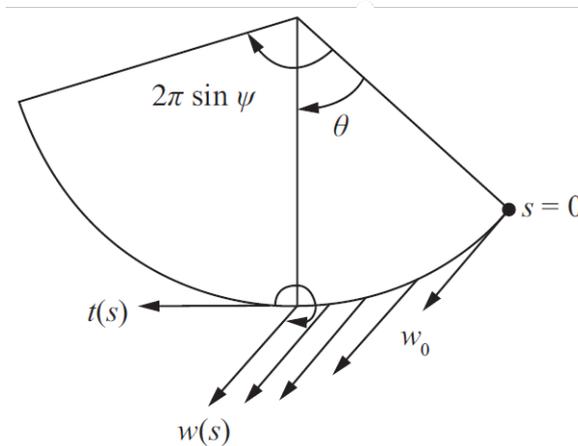
Fonte: CARMO (2014, p. 291).

O ângulo  $\psi$  no vértice deste cone é dado por  $\psi = (\pi/2) - \varphi$ . Pelo segundo ponto da Observação 1, o problema se reduz à determinação do transporte paralelo de  $w_0$ , ao longo de  $C$ , em relação ao cone tangente. Assim, como um cone menos uma geratriz é isométrico a um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  dado em coordenadas polares por

$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \sin \psi,$$

e no plano, o transporte paralelo coincide com a noção usual, obtemos para um deslocamento  $s$  de  $p$ , correspondendo ao ângulo central  $\theta$  (Figura 4.7), que o ângulo orientado formado pelo vetor tangente  $t(s)$  com o transporte paralelo  $w(s)$  é dado por  $2\pi - \theta$ .

Figura 4.7: Ângulo central  $\theta$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 292).

**Definição 4.14.** Uma aplicação  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  é uma curva parametrizada regular por partes se  $\alpha$  é contínua e se existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

no intervalo  $[0, l]$  tal que a restrição  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}, i = 0, \dots, k$  é uma curva parametrizada regular. Cada  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é chamada um arco regular de  $\alpha$ .

A noção de transporte paralelo pode ser facilmente estendida a curvas parametrizadas regulares por partes. Suponha que o valor inicial  $w_0$  está no intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , realizamos o transporte paralelo ao longo do arco regular  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  de maneira usual. Se  $t_{i+1} \neq l$ , tomamos  $w(t_{i+1})$  como valor inicial para o transporte paralelo no próximo arco  $\alpha|_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}$  e assim por diante.

### 4.3 Geodésicas

**Definição 4.15.** Uma curva parametrizada, não constante,  $\gamma : I \rightarrow S$  é chamada geodésica em  $t \in I$  se o seu campo de vetores tangentes  $\gamma'(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  em  $t$ , isto é,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

$\gamma$  é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo  $t \in I$ .

Obtemos de imediato pela proposição 4.8 que  $|\gamma'(t)| = c \neq 0$ . Portanto, podemos introduzir o comprimento de arco  $s = ct$  como um parâmetro, e concluir que o parâmetro  $t$  de uma geodésica parametrizada  $\gamma$  é proporcional ao comprimento de arco de  $\gamma$ . Além disso, uma geodésica parametrizada pode admitir auto interseções, contudo o seu vetor tangente nunca se anula e conseqüentemente a parametrização é regular.

**Definição 4.16.** Uma curva regular conexa  $C$  em  $S$  é chamada geodésica se, para cada  $p \in C$ , a parametrização  $\alpha(s)$  de uma vizinhança coordenada de  $p$  pelo comprimento de arco  $s$  é uma geodésica parametrizada, isto é,  $\alpha'(s)$  é um campo de vetores paralelo ao longo de  $\alpha(s)$ .

**Exemplo 4.17.** Toda linha reta contida em uma superfície é o geodésica.

De fato, suponha que  $r$  seja uma reta contida em uma superfície  $S$  parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,

$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0, cs + z_0), \quad s \in I \subset \mathbb{R},$$

onde  $(x_0, y_0, z_0)$  é um ponto pertencente a reta e a superfície,  $(a, b, c)$  é o vetor diretor desta reta com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Como  $\alpha'(s)$  é constante, temos que  $\alpha''(s) = 0$ . Portanto,

$$\frac{D\alpha'(s)}{ds} = 0, \quad \forall s \in I.$$

De um ponto de vista exterior à superfície, a definição 4.16 é equivalente a dizer que  $\alpha''(s) = k(s)n(s)$  é normal ao plano tangente, isto é, paralela à normal da superfície. Em outras palavras, uma curva regular  $C \subset S$  com  $k(p) \neq 0, \forall p \in C$ , é uma geodésica se e só se sua normal principal em cada  $p \in C$  é paralela à normal de  $S$  em  $p$ , isto é, paralela a  $N(p)$ . Esta propriedade pode ser utilizada para identificar geometricamente algumas geodésicas, como será mostrado nos exemplos a seguir.

**Exemplo 4.18.** Os grandes círculos são as únicas geodésicas da esfera de centro  $O$  e raio  $R > 0$ .

De fato, os grandes círculos  $C$  da esfera são obtidos através da interseção da esfera com um plano que passa pelo seu centro. Note que a normal  $n(p)$  a  $C$  em  $p$  está na direção

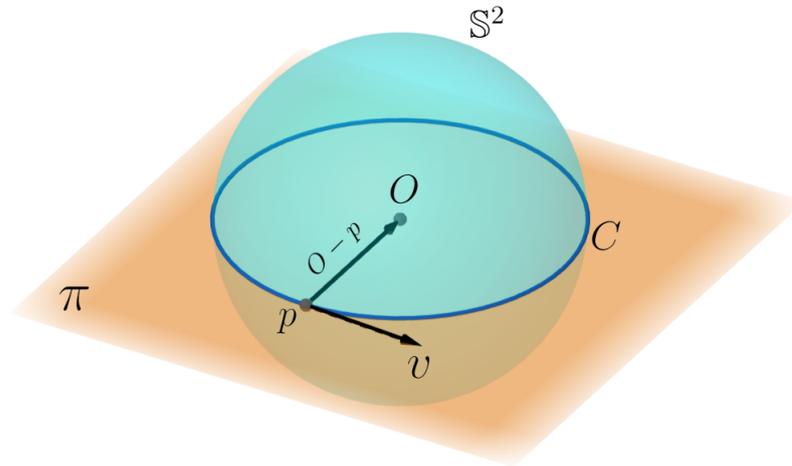
da reta que liga o ponto  $p$  ao centro  $O$ , pois  $C$  é círculo. Por outro lado, como estamos falando de uma esfera, a normal  $N(p)$  à esfera em  $p$  está nesta mesma direção. Provando, portanto, que  $C$  é uma geodésica.

Neste ponto, é importante salientarmos que para cada ponto  $p \in \mathbb{S}^2$  e cada  $v \in T_p\mathbb{S}^2$ , existe um grande círculo que passa por  $p$  e é tangente a  $v$  neste ponto. Para verificarmos tal fato, basta tomarmos o grande círculo  $C = \mathbb{S}^2 \cap \pi$ , onde

$$\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X - O, v \wedge (O - p) \rangle = 0\},$$

isto é,  $\pi$  é o plano que passa por  $O$ , por  $p$  e é paralelo os vetores  $v$  e  $O - p$  (Figura 4.8).

Figura 4.8: Grande Círculo  $C = \mathbb{S}^2 \cap \pi$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto,  $C$  é um grande círculo que passa por  $p$  e é tangente a  $v$  em  $p$ . Para o caso da esfera, por cada ponto e tangente a cada direção passa um único grande círculo, isto é, uma geodésica. Pela unicidade, que será demonstrada mais adiante neste tópico, os grandes círculos são as únicas geodésicas de uma esfera.

**Exemplo 4.19.** Para um cilindro circular reto sobre o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , os círculos obtidos pela intersecção do cilindro com planos normais ao eixo do cilindro são geodésicas.

Com efeito, as geratrizes do cilindro (retas paralelas ao eixo  $z$ ) são geodésicas, pois toda reta contida numa superfície é uma geodésica. Por outro lado, seja  $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, z_0)$  uma parametrização pelo comprimento de arco do paralelo  $C \cap \pi$ , onde  $\pi : z = z_0$  é um plano paralelo ao plano  $xy$ . Considerando que  $\alpha$  está contida no cilindro,  $\alpha''(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$  é paralelo ao vetor normal  $N(x, y, 0) = (x, y, 0)$  ao cilindro em  $\alpha(s)$ . Portanto,  $\alpha$  é uma geodésica.

Para verificarmos a existência de outras geodésicas  $C$  sobre o cilindro, consideramos a parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

do cilindro em um ponto  $p \in C$ , com  $\mathbf{x}(0, 0) = p$ . Nesta parametrização, uma vizinhança de  $p$  em  $C$  é expressa por  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ , onde  $s$  é o comprimento de arco de  $C$ . Como vimos no Exemplo 3.3,  $\mathbf{x}$  é uma isometria local que aplica uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$  do plano  $uv$  sobre o cilindro. Como a condição de ser geodésica é local e invariante por isometrias, a curva  $(u(s), v(s))$  deve ser uma geodésica em  $U$  passando por  $(0, 0)$ . Mas as geodésicas dos planos são as retas. Logo, excluindo os casos já considerados,

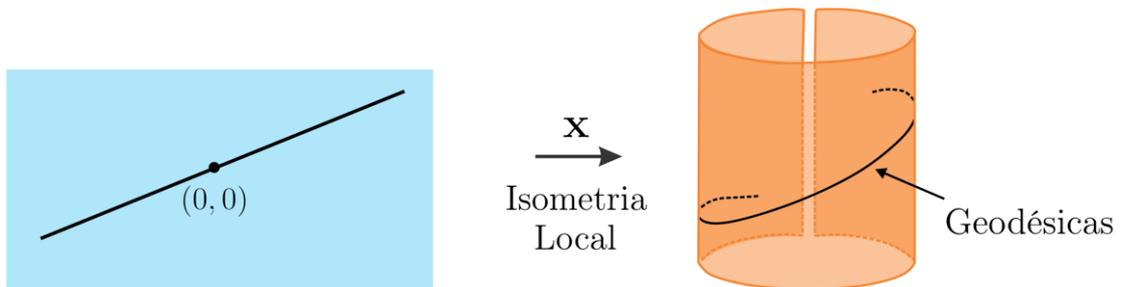
$$u(s) = as, \quad v(s) = bs, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Segue-se que se uma curva regular  $C$  (que não é nem uma reta nem uma circunferência) é uma geodésica do cilindro, então ela tem localmente a forma

$$\alpha(s) = (\cos as, \sin bs, bs),$$

sendo, portanto, uma hélice (Figura 4.9).

Figura 4.9: Geodésicas em um cilindro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que dados dois pontos sobre um cilindro, que não estão sobre uma circunferência paralela ao plano  $xy$ , é possível conectá-los por uma infinidade de hélices. Tal fato significa que dois pontos de um cilindro podem em geral ser conectados por uma infinidade de geodésicas, em contraste com a situação no plano. O mesmo acontece com os polos de uma esfera. Tais pontos podem ser conectados por uma infinidade de geodésicas.

## 4.4 A curvatura geodésica

**Definição 4.20.** Seja  $w$  um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre uma superfície orientada  $S$ . Como  $w(t), t \in I$  é um campo de vetores unitário,  $(dw/dt)(t)$  é normal a  $w(t)$ , isto é, como  $|w(t)| = 1$  para todo  $t \in I$ , temos que

$$\langle w(t), w(t) \rangle = 1 \implies \langle w'(t), w(t) \rangle + \langle w'(t), w(t) \rangle = 0 \implies 2\langle w'(t), w(t) \rangle = 0,$$

e portanto  $\langle w'(t), w(t) \rangle = 0$ , para todo  $t \in I$ . Assim,

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

O número real  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado por  $[Dw/dt]$ , é chamado valor algébrico da derivada covariante de  $w$  em  $t$ .

Observe que o sinal de  $[Dw/dt]$  depende da orientação de  $S$ . Além disso, tomando o produto interno com  $N \wedge w$  em ambos os lados na equação anterior e como  $|N \wedge w| = 1$ , obtemos

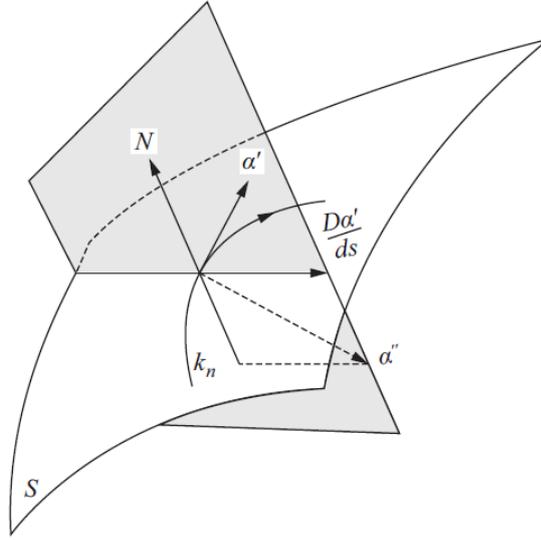
$$\langle w'(t), N \wedge w(t) \rangle = \lambda \langle N \wedge w(t), N \wedge w(t) \rangle \implies \lambda = \left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \wedge w \right\rangle.$$

A partir de agora, a orientação de  $S$  terá um papel essencial nos conceitos que serão introduzidos a seguir. Primeiramente, vamos definir, para uma curva em uma superfície, um conceito que é análogo da curvatura de curvas planas.

**Definição 4.21.** Seja  $C$  uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada  $S$ , e seja  $\alpha(s)$  uma parametrização de  $C$  em uma vizinhança de  $p \in S$ , pelo comprimento de arco  $s$ . O valor algébrico  $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$  da derivada covariante de  $\alpha'(s)$  é chamado curvatura geodésica de  $C$  em  $p$ .

Segue diretamente da definição que se  $\alpha$  é geodésica em  $S$ , então  $\alpha$  possui curvatura geodésica nula. De um ponto de vista externo à superfície, o valor absoluto da curvatura geodésica  $k_g$  de  $C$  em  $p$  é o valor absoluto da componente tangencial do vetor  $\alpha''(s) = kn$ , onde  $k$  é a curvatura de  $C$  em  $p$  e  $n$  é o vetor normal de  $C$  em  $p$ . Além disso, o valor absoluto da componente normal do vetor  $kn$  é o valor absoluto da curvatura normal  $k_n$  de  $C \subset S$  em  $p$  (Figura 4.10).

Figura 4.10:  $|k_g|$  é o valor absoluto da componente tangencial  $\alpha''(s)$



Fonte: CARMO (2014, p. 298).

Dessa forma, temos que

$$\alpha''(s) = \frac{D\alpha'}{ds}(s) + k_n(s)N(s) = k_g(s)(N(s) \wedge \alpha'(s)) + k_n(s)N(s).$$

Tomando a norma ao quadrado em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

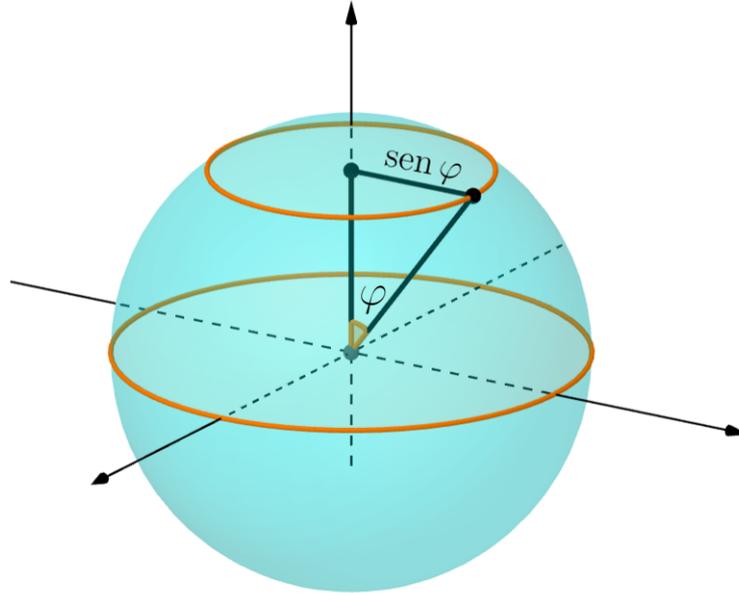
$$\begin{aligned} |\alpha''(s)|^2 &= |k_g(s)(N(s) \wedge \alpha'(s)) + k_n(s)N(s)|^2 \\ &= |k_g(s)(N(s) \wedge \alpha'(s))|^2 + 2\langle k_g(s)(N(s) \wedge \alpha'(s)), k_n(s)N(s) \rangle + |k_n(s)N(s)|^2 \\ &= k_g(s)^2 |N(s) \wedge \alpha'(s)|^2 + k_n(s)^2 |N(s)|^2 \\ &= k_g(s)^2 + k_n(s)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\alpha''(s)|^2 = k(s)^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2.$$

**Exemplo 4.22.** Seja  $C$  o paralelo de colatitude  $\varphi$ , com  $0 < \varphi < \pi$ , na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  centrada na origem. Vamos calcular a curvatura geodésica de  $C$  em um ponto arbitrário  $p$ . Inicialmente, temos como campo de vetores normais unitários diferenciáveis na esfera  $N(x, y, z) = (x, y, z)$  ou  $\bar{N}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ . Dessa forma, temos que as curvaturas principais  $k_1 = k_2 = 1$  para todo  $p \in \mathbb{S}^2$  na orientação  $N(x, y, z)$ , logo  $|k_n| = 1$ . Além disso, a curvatura de  $C$  é dada por  $k = \frac{1}{\sin \varphi}$  (Figura 4.11). Assim, temos que

Figura 4.11: Curvatura de  $C$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\left(\frac{1}{\text{sen } \varphi}\right)^2 = 1 + k_g^2.$$

e conseqüentemente,

$$k_g^2 = \left(\frac{1}{\text{sen } \varphi}\right)^2 - 1 = \frac{1 - \text{sen}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} = \frac{\text{cos}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} = \text{cotg}^2 \varphi.$$

Portanto, os paralelos têm curvaturas geodésicas constantes. Em particular, se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $C$  é um grande círculo com  $k_g = 0$ , sendo portanto uma geodésica.

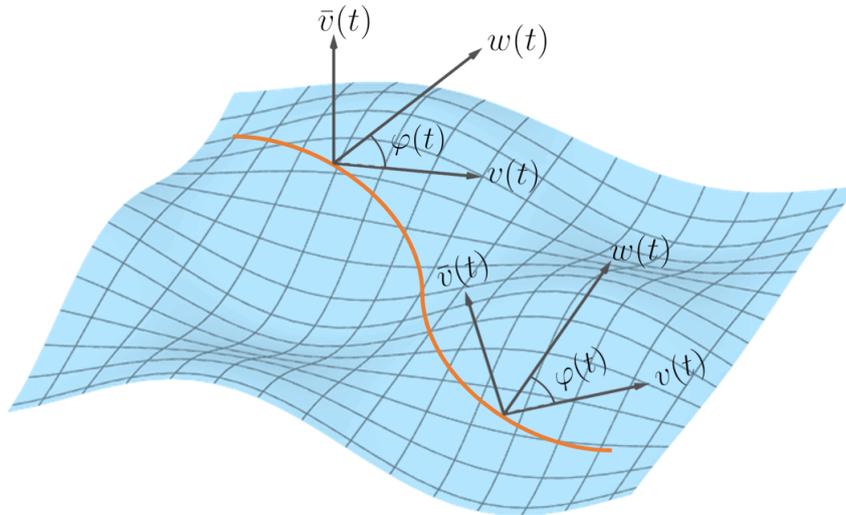
Vamos agora obter uma expressão para o valor algébrico da derivada covariante. Para isto, precisamos de alguns resultados preliminares.

Sejam  $v$  e  $w$  dois campos de vetores diferenciáveis ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ , com  $|v(t)| = |w(t)| = 1$ ,  $t \in I$ . Queremos definir uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , seja uma determinação diferenciável do ângulo de  $v(t)$  a  $w(t)$  na orientação de  $S$ . Para isto, consideramos o campo de vetores diferenciável  $\bar{v}$  ao longo de  $\alpha$  definido pela condição de que  $\{v(t), \bar{v}(t)\}$  é uma base ortonormal positiva para cada  $t \in I$ . Assim,  $w(t)$  pode ser expressa como

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t),$$

onde  $a$  e  $b$  são funções diferenciáveis em  $I$  e  $a^2 + b^2 = 1$  (Figura 4.12).

Figura 4.12: A função  $\varphi$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

O lema a seguir mostra que fixando uma determinação  $\varphi_0$  do ângulo de  $v(t_0)$  a  $w(t_0)$  é possível estendê-lo diferenciavelmente em  $I$ , e isto fornece a função desejada. Ou seja, fixada uma determinação  $\varphi_0$  existe uma única função ângulo  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  e  $a(t) = \cos \varphi(t)$ ,  $b(t) = \sin \varphi(t)$  para todo  $t \in I$ .

**Lema 4.23.** *Sejam  $a$  e  $b$  funções diferenciáveis em  $I$  com  $a^2 + b^2 = 1$  e  $\varphi_0$  tal que  $a(t_0) = \cos \varphi(t_0)$  e  $b(t_0) = \sin \varphi(t_0)$ . Então a função diferenciável*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt$$

é tal que  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  e  $a(t) = \cos \varphi(t)$ ,  $b(t) = \sin \varphi(t)$  para todo  $t \in I$ .

*Demonstração.* Nosso objetivo é mostrar que a soma de quadrados  $(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = 0$ , isto é, que  $a = \cos \varphi$  e  $b = \sin \varphi$ . Observe que

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = a^2 - 2a \cos \varphi + \cos^2 \varphi + b^2 - 2b \sin \varphi + \sin^2 \varphi.$$

Por hipótese, temos que  $a^2 + b^2 = 1$  e pela identidade trigonométrica fundamental, obtemos

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = 2 - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi).$$

Para provarmos o lema, basta mostrar que a expressão acima é identicamente nula, ou equivalentemente, mostrar que  $A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$ . Derivando  $A$  com relação a  $t$ , obtemos

$$A' = -a(\sin \varphi)\varphi' + b(\cos \varphi)\varphi' + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi. \tag{4.2}$$

Além disso, se derivarmos ambos os lados da equação  $a^2 + b^2 = 1$  com relação a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)' = (1)' &\implies 2aa' + 2bb' = 0 \\ &\implies 2aa' = -2bb' \\ &\implies aa' = -bb'. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Utilizando as equações (4.2), (4.3) e a definição de  $\varphi$ , obtemos

$$\begin{aligned} A' &= -a(\sin \varphi)(ab' - ba') + b(\cos \varphi)(ab' - ba') + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ &= (\sin \varphi)(ba'a - a^2b') + (\cos \varphi)(ab'b - b^2a') + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ &= (\sin \varphi)(-b^2b' - a^2b') + (\cos \varphi)(-a^2a' - b^2a') + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ &= -b'(\sin \varphi)(a^2 + b^2) - a'(\cos \varphi)(a^2 + b^2) + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $A(t)$  é constante e como  $A(t_0) = 1$ , o lema está demonstrado.  $\square$

Podemos agora relacionar a derivada covariante de dois campos de vetores unitários ao longo de uma curva com a taxa de variação do ângulo formado por eles.

**Lema 4.24.** *Sejam  $v$  e  $w$  dois campos diferenciáveis de vetores ao longo da curva  $\alpha : I \rightarrow S$ , com  $|v(t)| = |w(t)| = 1$ ,  $t \in I$ . Então*

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] - \left[ \frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi$  é uma das determinações diferenciáveis do ângulo de  $v$  a  $w$ , dadas no Lema 4.23.

*Demonstração.* Primeiro provaremos o caso onde  $\varphi \neq 0$ . Sejam  $\bar{v}(t) = N(t) \wedge v(t)$ ,  $\bar{w}(t) = N(t) \wedge w(t)$ , onde  $N(t)$  é a restrição de  $N$  a  $\alpha$ , e  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma determinação diferenciável do ângulo de  $v(t)$  a  $w(t)$  na orientação de  $S$ , isto é,

$$w(t) = \cos \varphi(t)v(t) + \sin \varphi(t)\bar{v}(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= N(t) \wedge w(t) \\ &= \cos \varphi(t)N(t) \wedge v(t) + \sin \varphi(t)N(t) \wedge \bar{v}(t) \\ &= \cos \varphi(t)N(t) \wedge v(t) + \sin \varphi(t)N(t) \wedge (N(t) \wedge v(t)) \\ &= \cos \varphi(t)N(t) \wedge v(t) - \sin \varphi(t)v(t), \end{aligned}$$

e

$$w'(t) = -\sin \varphi(t)\varphi'(t)v(t) + \cos \varphi(t)\varphi'(t)\bar{v}(t) + \cos \varphi(t)v'(t) + \sin \varphi(t)\bar{v}'(t).$$

Como

$$\left[ \frac{Dw}{dt}(t) \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N \wedge w(t) \right\rangle = \langle w'(t), \bar{w}(t) \rangle,$$

temos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{Dw}{dt}(t) \right] &= \langle -\operatorname{sen} \varphi(t) \varphi'(t) v(t) + \cos \varphi(t) \varphi'(t) \bar{v}(t) + \cos \varphi(t) v'(t) + \operatorname{sen} \varphi(t) \bar{v}'(t), \\ &\quad \cos \varphi(t) N(t) \wedge v(t) - \operatorname{sen} \varphi(t) v(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Note que

$$\langle v(t), v(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \bar{v}(t) \rangle = 1 \text{ e } \langle v(t), \bar{v}(t) \rangle = 0,$$

com isso, obtemos

$$\langle v(t), v'(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \bar{v}'(t) \rangle = 0 \text{ e } \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle = -\langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle,$$

para todo  $t \in I$ . Dessa forma, podemos escrever a equação (4.4) como

$$\begin{aligned} \left[ \frac{Dw}{dt}(t) \right] &= (\operatorname{sen} \varphi(t))^2 \varphi'(t) + (\cos \varphi(t))^2 \varphi'(t) + (\cos \varphi(t))^2 \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle \\ &\quad - (\operatorname{sen} \varphi(t))^2 \langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle \\ &= \varphi'(t) + \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle \\ &= \varphi'(t) + \left[ \frac{Dv}{dt}(t) \right]. \end{aligned}$$

Se  $\varphi = 0$  em um ponto  $p \in \alpha(I)$ , ou  $\varphi \equiv 0$  em uma vizinhança  $V$  de  $p$ , ou existe uma sequência  $(p_n) \rightarrow p$  com  $\varphi(p_n) \neq 0$ . No primeiro caso,  $\varphi' \equiv 0$  em  $V$ ,  $v = w$  e o resultado é provado imediatamente. No segundo caso, o resultado se verifica pela continuidade, pois se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p,$$

como  $\varphi$  é diferenciável consequentemente contínua, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(p_n) = \varphi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \right) = \varphi(p) = 0.$$

□

Uma consequência imediata do Lema 4.24 é a seguinte observação. Seja  $C$  uma curva regular orientada em  $S$ ,  $\alpha(s)$  uma parametrização pelo comprimento de arco  $s$  de  $C$  em  $p$ , e  $v(s)$  um campo paralelo ao longo de  $\alpha(s)$ . Então, tomando  $w(s) = \alpha'(s)$ , obtemos

$$k_g(s) = \left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Concluimos que a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva. No caso da observação anterior, essa direção paralela é o campo de vetores  $v$ . Para o caso do plano, a direção

paralela é fixa e a curvatura geodésica reduz-se à curvatura usual.

Com estes resultados, podemos agora obter a expressão para o valor algébrico da derivada covariante. Sempre que falamos de uma parametrização de uma superfície orientada, essa parametrização é assumida como compatível com orientação. Além disso, quando falarmos do ângulo entre dois campos de vetores ao longo de uma curva, estaremos nos referindo a uma das determinações diferenciáveis dadas pelo Lema 4.23.

**Proposição 4.25.** *Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização ortogonal (isto é,  $F = 0$ ) de uma vizinhança de uma superfície orientada  $S$ ,  $w(t)$  um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Então,*

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi(t)$  é o ângulo de  $\mathbf{x}_u$  para  $w(t)$  na orientação dada.

*Demonstração.* Sejam  $e_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}$  e  $e_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$  vetores unitários tangentes às curvas coordenadas. Observe que  $e_1$  e  $e_2$  pertencem ao espaço tangente, dessa forma o produto vetorial  $e_1 \wedge e_2 = N$ , onde  $N$  é a orientação dada de  $S$ . Além disso, temos que  $\left\{ \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG}} \right\}$  é uma base ortonormal positiva em  $\mathbb{R}^3$ . Utilizando o Lema 4.24, podemos escrever,

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] - \left[ \frac{De_1}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt} \implies \left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left[ \frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

onde  $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$  é o campo  $e_1$  restrito a curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Utilizando a definição do valor algébrico, temos que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{De_1}{dt} \right] &= \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle \\ &= \left\langle (e_1)_u \frac{du}{dt} + (e_1)_v \frac{dv}{dt}, e_2 \right\rangle \\ &= \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como a parametrização é ortogonal, obtemos

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v,$$

daí, temos que

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_u, e_2 \rangle &= \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{x}_u E_u}{2E^{\frac{3}{2}}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Analogamente, como

$$\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_u,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_v, e_2 \rangle &= \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_v, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{x}_{uv}}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{x}_u E_v}{2E^{\frac{3}{2}}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Por fim, introduzindo as relações anteriores na expressão de  $[Dw/dt]$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{Dw}{dt} \right] &= \left[ \frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{dt} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

□

Através da Proposição 4.25, podemos agora demonstrar a existência e unicidade do transporte paralelo. Por uma questão de melhor conexão, enunciaremos abaixo novamente a Proposição 4.10.

**Proposição 4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$  e seja  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S, t_0 \in I$ . Então existe um único campo de vetores paralelo  $w(t)$  ao longo de  $\alpha(t)$ , com  $w(t_0) = w_0$ .*

*Demonstração.* Vamos supor inicialmente que a curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  esteja contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal  $\mathbf{x}(u, v)$ . Utilizando a notação da Proposição 4.10, com a condição de paralelismo do campo  $w$ , temos que

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} = B(t).$$

Denotando por  $\varphi_0$  uma determinação do ângulo orientado de  $\mathbf{x}_u$  para  $w_0$ , o campo  $w$  é

inteiramente determinado por

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t B(l)dl,$$

o que comprova a existência e unicidade de  $w$  neste caso, pois para cada ponto  $t$ , determinamos o ângulo  $\varphi$  que é formado de  $\mathbf{x}_u$  para  $w$ .

Caso  $\alpha(I)$  não esteja contida em uma vizinhança coordenada, utilizamos a compacidade de  $I$  para dividir  $\alpha(I)$  em um número finito de partes, cada uma contida em uma vizinhança coordenada. Pela unicidade obtida da primeira parte da demonstração, a existência e unicidade também acontece nas intersecções não vazias de cada uma dessas partes, e o resultado se estende para este caso.  $\square$

Uma outra aplicação pertinente da Proposição 4.25 é uma expressão para a curvatura geodésica, conhecida como fórmula de Liouville.

**Proposição 4.26** (Liouville). *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma parametrização pelo comprimento de arco de uma vizinhança de um ponto  $p \in S$  de uma curva regular orientada  $C$  sobre uma superfície orientada  $S$ . Seja  $\mathbf{x}(u, v)$ , com  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ , uma parametrização ortogonal de  $S$  em  $p$  e  $\varphi(s)$  o ângulo que  $\mathbf{x}_u$  faz com  $\alpha'(s)$  na orientação dada. Então*

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

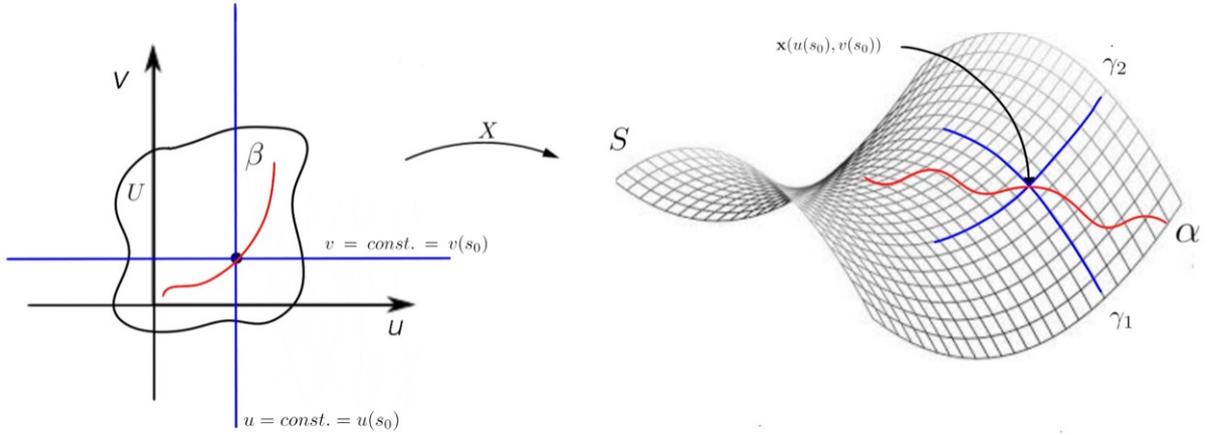
onde  $(k_g)_1$  e  $(k_g)_2$  são as curvaturas geodésicas das curvas coordenadas  $v = \text{const.}$  e  $u = \text{const.}$  respectivamente.

*Demonstração.* Tomando  $w = \alpha'(s)$  como na Proposição 4.25, temos que

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}, \tag{4.5}$$

onde  $\alpha$  pode ser escrito como  $\alpha'(s) = \cos \varphi(s) \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} + \operatorname{sen} \varphi(s) \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$  sendo

$\left\{ \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG}} \right\}$  uma base ortonormal positiva em  $\mathbb{R}^3$ . Podemos escrever a curva  $\alpha$  através da parametrização ortogonal  $\mathbf{x}$  como  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s)) = \mathbf{x}(\beta(s))$  onde  $\beta$  é uma curva em  $U$ . Além disso, sejam  $s_0 \in I$  e  $\gamma_1(t) = \mathbf{x}(u_1(t), v(s_0))$  uma parametrização pelo comprimento de arco da curva coordenada  $v = \text{const.} = v(s_0)$  tal que  $\gamma_1(t_1) = \mathbf{x}(u_1(t_1), v(s_0)) = \mathbf{x}(u(s_0), v(s_0))$ . Seja também  $\gamma_2(r) = \mathbf{x}(u(s_0), v_2(r))$  uma parametrização pelo comprimento de arco da curva coordenada  $u = \text{const.} = u(s_0)$  tal que  $\gamma_2(r_2) = \mathbf{x}(u(s_0), v_2(r_2)) = \mathbf{x}(u(s_0), v(s_0))$  (Figura 4.13).

Figura 4.13: As curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .


Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, como ambas as curvas são parametrizadas pelo comprimento de arco, temos que  $\|\gamma_1'(t)\| = \|u_1'(t)\mathbf{x}_u(u_1(t), v(s_0))\| = 1$  e  $\|\gamma_2'(r)\| = \|v_2'(r)\mathbf{x}_v(u(s_0), v_2(r))\| = 1$ . Como  $\|\mathbf{x}_u\| = \sqrt{E}$  e  $\|\mathbf{x}_v\| = \sqrt{G}$ , concluímos que

$$|u_1'(t)| \cdot \|\mathbf{x}_u\| = |u_1'(t)| \cdot \sqrt{E} = 1 \Rightarrow \frac{du_1}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

e

$$|v_2'(r)| \cdot \|\mathbf{x}_v\| = |v_2'(r)| \cdot \sqrt{G} = 1 \Rightarrow \frac{dv_2}{dr}(r) = \frac{1}{\sqrt{G}}.$$

Tomando  $w = \gamma_1'(t)$  como na Proposição 4.25, obtemos

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{d\varphi_1}{dt},$$

onde  $\varphi_1$  é o ângulo de  $\mathbf{x}_u/\sqrt{E}$  a  $\gamma_1'(t)$ . Como que  $\gamma_1'(t) = \mathbf{x}_u/\sqrt{E}$ , temos que  $\varphi_1 = 0$  e, portanto,

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \cdot \frac{du_1}{dt} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}. \quad (4.6)$$

De forma análoga, tomando  $w = \gamma_2'(r)$  como na Proposição 4.25, temos

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \cdot \frac{dv_2}{dr} + \frac{d\varphi_2}{dr},$$

onde  $\varphi_2$  é o ângulo de  $\mathbf{x}_u/\sqrt{E}$  a  $\gamma_2'(r)$ . Como que  $\gamma_2'(r) = \mathbf{x}_v/\sqrt{G}$ , temos que  $\varphi_2 = \pi/2$  (a parametrização é ortogonal) e, portanto,

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \cdot \frac{dv_2}{dr} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}. \quad (4.7)$$

Introduzindo as relações (4.6) e (4.7) na equação (4.5), temos

$$k_g = (k_g)_1 \sqrt{E} \frac{du}{ds} + (k_g)_2 \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}. \quad (4.8)$$

Agora, sabemos que  $\alpha'(s)$  pode ser escrito como

$$\alpha'(s) = u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v,$$

dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left\langle \alpha'(s), \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \\ &= \left\langle u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v, \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \\ &= u'(s) \left\langle \mathbf{x}_u, \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right\rangle + v'(s) \left\langle \mathbf{x}_v, \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \\ &= u'(s)\sqrt{E}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \left\langle \alpha'(s), \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= u'(s) \left\langle \mathbf{x}_u, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle + v'(s) \left\langle \mathbf{x}_v, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= v'(s)\sqrt{G}. \end{aligned}$$

Por fim, introduzindo as relações anteriores na equação (4.8), chegamos finalmente a

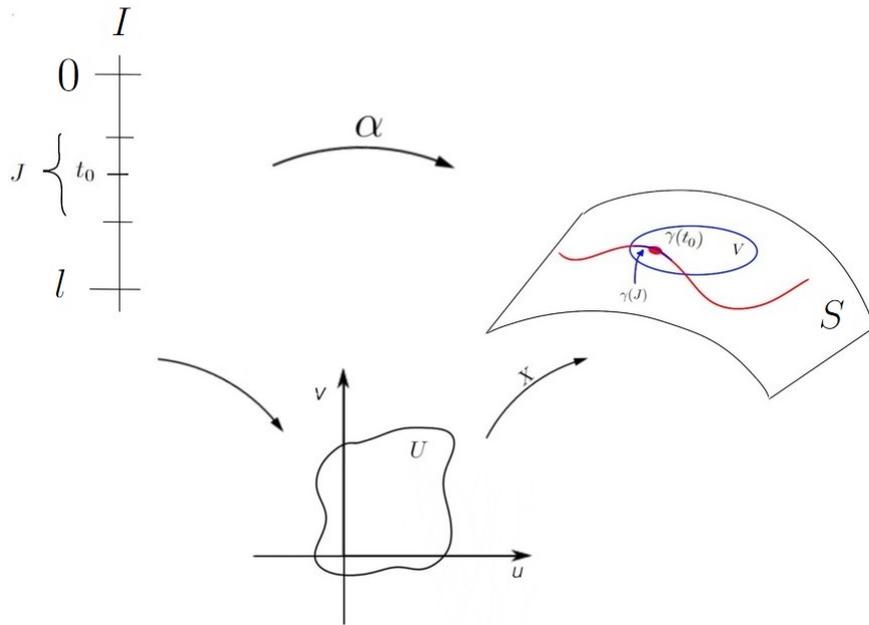
$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

que é a expressão desejada.  $\square$

Neste ponto, introduziremos as equações de uma geodésica em uma vizinhança coordenada. Para isso, seja  $\gamma : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada de  $S$  e seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em uma vizinhança  $V$  de  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ . Seja  $J \subset I$  um intervalo aberto contendo  $t_0$  tal que  $\gamma(J) \subset V$ . Seja  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in J$ , a expressão em coordenadas de  $\gamma : J \rightarrow S$  na parametrização  $\mathbf{x}$  (Figura 4.14). Então, o campo de vetores tangentes  $\gamma'(t) = w(t)$ ,  $t \in J$ , é dado por

$$w(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v.$$

Figura 4.14:  $\gamma : J \rightarrow S$  na parametrização  $\mathbf{x}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo  $w$  paralelo, fazendo  $a = u'$ ,  $b = v'$  e igualando a zero os coeficientes de  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  na equação (4.1), obtemos

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Em outras palavras,  $\gamma : I \rightarrow S$  é geodésica se, e somente se, o sistema (4.9) é satisfeito para todo intervalo  $J \subset I$  tal que  $\gamma(J)$  esteja contido em uma vizinhança coordenada. Este sistema é conhecido como as equações diferenciais das geodésicas de  $S$ . Uma consequência importante do fato de que as geodésicas são caracterizadas pelo sistema (4.9) é a proposição a seguir.

**Proposição 4.27.** *Dado um ponto  $p \in S$  e um vetor  $w \in T_p S$ ,  $w \neq 0$ , existe  $\epsilon > 0$  e uma única geodésica parametrizada  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = w$ .*

## Capítulo 5

# Aplicação Exponencial

Neste tópico, introduziremos alguns sistemas de coordenadas especiais com objetivo de apresentarmos suas aplicações geométricas. Como visto na Proposição 4.27, dado um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$  e um vetor não-nulo  $v \in T_p S$ , existe uma única geodésica parametrizada  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ . Iremos denotar a geodésica  $\gamma$  por  $\gamma(t, v)$ , para indicar a dependência desta geodésica em relação ao vetor  $v$ .

**Lema 5.1.** *Se a geodésica  $\gamma(t, v)$  é definida para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , então a geodésica  $\gamma(t, \lambda v)$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\lambda > 0$ , é definida para  $t \in (-\epsilon/\lambda, \epsilon/\lambda)$  e  $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\alpha : (-\epsilon/\lambda, \epsilon/\lambda) \rightarrow S$  a curva parametrizada definida por  $\alpha(t) = \gamma(\lambda t)$ . Então  $\alpha(0) = \gamma(0)$  e  $\alpha'(0) = \lambda\gamma'(0) = \lambda v$ . Pela linearidade da derivada covariante (4.1), temos que

$$D_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = \lambda^2 D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0.$$

Portanto,  $\alpha$  é geodésica com condições iniciais  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = \lambda v$  e a geodésica  $\gamma(t, \lambda v)$  também é geodésica com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \lambda v$ . Pela unicidade, temos

$$\alpha(t) = \gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v).$$

□

Em outras palavras, o Lema acima nos diz que como a velocidade (em módulo) de uma geodésica é constante, podemos percorrer o seu traço em um tempo prescrito ajustando a velocidade de maneira apropriada.

Adotaremos a partir de agora a seguinte notação. Se  $v \in T_p S$ ,  $v \neq 0$ , é tal que  $\gamma(|v|, v/|v|) = \gamma(1, v)$  está definido, escrevemos

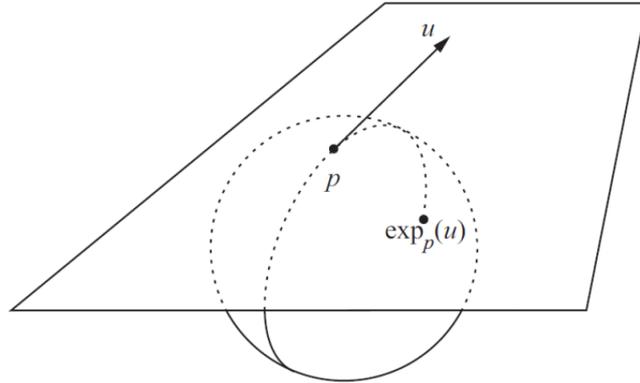
$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad \text{e} \quad \exp_p(0) = p.$$

Geometricamente a construção acima corresponde a percorrer (se possível) um

comprimento igual a  $|v|$  ao longo da geodésica passando por  $p$  na direção de  $v$ . O ponto assim obtido é denotado por  $\exp_p(v)$ .

**Exemplo 5.2.** Na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ ,  $\exp_p(v)$  está definida para todo  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  (Figura 5.1).

Figura 5.1:  $\exp_p(v)$  definida sobre a esfera unitária  $\mathbb{S}$ .

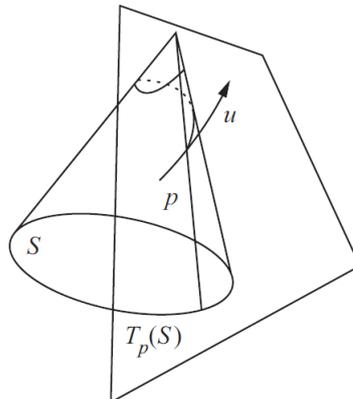


Fonte: CARMO (2014, p. 341).

De fato, sabemos que os grandes círculos são as geodésicas na esfera, com isso dado um ponto  $p \in \mathbb{S}^2$  é possível definir  $\exp_p(v)$  para todo  $v \in T_p\mathbb{S}^2$ . Observe que para os pontos dos círculos em  $T_p\mathbb{S}^2$  com  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  e  $\|v\| = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2n + 1)\pi$ ,  $\exp_p(v)$  é o ponto antípoda (diametralmente oposto) de  $p$ . Para os pontos dos círculos em  $T_p\mathbb{S}^2$  com  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  e  $\|v\| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, (2n)\pi$ ,  $\exp_p(v)$  é o próprio  $p$ .

**Exemplo 5.3.** Em uma superfície regular  $C$  formada pelo cone de uma folha menos o vértice,  $\exp_p(v)$  não está definida para um vetor  $v \in T_pC$  na direção de um meridiano que conecta  $p$  ao vértice, quando  $|v| \geq d$  e  $d$  é a distância de  $p$  ao vértice (Figura 5.2).

Figura 5.2:  $\exp_p(v)$  definida sobre  $S$  onde  $S$  é formada pelo cone de uma folha menos o vértice.



Fonte: CARMO (2014, p. 341).

A próxima proposição garante que a aplicação exponencial está definida e é diferenciável em uma vizinhança da origem de  $T_pS$ . Para demonstrarmos esse fato, necessitamos do seguinte resultado.

**Teorema 5.4.** *Dado  $p \in S$  existem números  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\epsilon_2 > 0$  e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \times \mathbb{B}_{\epsilon_1} \rightarrow S, \quad \text{onde } \mathbb{B}_{\epsilon_1} = \{v \in T_pS / \|v\| < \epsilon_1\}$$

e tal que para  $v \in \mathbb{B}_{\epsilon_1}$ ,  $v \neq 0$ ,  $t \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$  a curva  $t \rightarrow \gamma(t, v)$  é uma geodésica de  $S$  com  $\gamma(0, v) = p$ ,  $\gamma'(0, v) = v$  e para  $v = 0$ ,  $\gamma(t, 0) = p$ .

**Proposição 5.5.** *Dado  $p \in S$  existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p$  é definida e diferenciável no interior de um disco de raio  $\epsilon$  de  $T_pS$ , com centro na origem, isto é, na bola aberta  $\mathbb{B}_\epsilon = \{v \in T_pS / \|v\| < \epsilon\}$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 5.1, para cada direção de  $T_pS$  é possível tomar  $v$  suficientemente pequeno para que o intervalo de definição de  $\gamma(t, v)$  contenha  $\exp_p(v)$ , e assim  $\gamma(1, v) = \exp_p(v)$  está definida. Para mostrar que esta redução pode ser feita de maneira uniforme em todas as direções, precisamos do teorema da dependência de uma geodésica em relação às condições iniciais (Teorema 5.4). Como  $\gamma(t, v)$  está definida para  $|t| < \epsilon_2$ ,  $|v| < \epsilon_1$ , obtemos, fazendo  $\lambda = \epsilon_2/2$  no Lema 5.1, que  $\gamma\left(t, \frac{\epsilon_2}{2}v\right)$  está definida para  $|t| < 2$ ,  $|v| < \epsilon_1$ . Dessa forma, tomando um disco  $\mathbb{B}_\epsilon \subset T_pS$ , com centro na origem de raio  $\epsilon < \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{2}$ , temos que  $\gamma(1, w) = \exp_p w$ ,  $w \in \mathbb{B}_\epsilon$ , está definida. Por fim, a diferenciabilidade de  $\exp_p$  em  $\mathbb{B}_\epsilon$  segue-se da diferenciabilidade de  $\gamma$ .  $\square$

**Proposição 5.6.** *A aplicação  $\exp_p : \mathbb{B}_\epsilon \subset T_pS \rightarrow S$  é um difeomorfismo em uma vizinhança  $U \subset \mathbb{B}_\epsilon$  da origem  $O$  de  $T_pS$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que a diferencial  $d(\exp_p)$  é não-singular em  $O \in T_pS$ . Para isto, identificamos o espaço de vetores tangentes a  $T_pS$  em  $O$  com o próprio  $T_pS$ . Vamos considerar a curva  $\alpha(t) = tv$ ,  $v \in T_pS$ . Então  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha'(0) = v$ . A curva  $(\exp_p \circ \alpha)(t) = \exp_p(tv) = \gamma(t, v)$  tem, em  $t = 0$ , o vetor tangente

$$\left. \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\gamma(t, v)) \right|_{t=0} = \gamma'(0, v) = v.$$

Ou seja,  $d(\exp_p)_0(v) = v$ , o que mostra que  $d(\exp_p)$  é não-singular em  $O$ . Em outras palavras,  $d(\exp_p)_0 : T_pS \rightarrow T_pS$  é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto  $U \subset \mathbb{B}_\epsilon$ , com  $O \in U$ , e um aberto  $V \subset S$  com  $p \in S$ , tais que  $\exp_p : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo.  $\square$

Como a aplicação exponencial em  $p \in S$  é um difeomorfismo em  $U$ , ela pode ser usada para introduzir coordenadas em  $V$ . Entre os sistemas de coordenadas introduzidos deste modo, os mais comuns são:

- As *coordenadas normais* que correspondem a um sistema de coordenada retangulares no plano tangente  $T_p S$ .

As coordenadas normais são obtidas através da escolha no plano  $T_p S$ ,  $p \in S$ , de dois vetores unitários ortogonais  $e_1$  e  $e_2$ . Como  $\exp_p : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo, esta aplicação satisfaz as condições para uma parametrização em  $p$ . Se  $q \in V$ , então  $q = \exp_p(w)$ , onde  $w = ue_1 + ve_2 \in U$ , e dizemos que  $q$  tem coordenadas  $(u, v)$ , isto é, as coordenadas são as componentes de  $w$  na base  $\{e_1, e_2\}$ . Assim, as coordenadas normais assim obtidas dependem da escolha de  $e_1$  e  $e_2$ .

Em outras palavras, temos que  $\mathbf{x} : U \rightarrow V$  com  $\mathbf{x}(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$  é uma parametrização de  $S$  em  $p$ , com  $\mathbf{x}(0, 0) = p$  e  $U$  é um aberto em  $\mathbb{R}^2$ . Dessa forma, se  $q = \exp_p(ue_1 + ve_2)$ , então  $(u, v)$  são as coordenadas normais do ponto  $q$  com respeito à parametrização  $\mathbf{x}$ .

Note que em  $p$ , temos  $\mathbf{x}(u, 0) = \exp_p(ue_1) = \gamma(u, e_1)$  e  $\mathbf{x}(0, v) = \exp_p(ve_2) = \gamma(v, e_2)$ , o que nos dá

$$\mathbf{x}_u(0, 0) = \gamma'(0, e_1) = e_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_v(0, 0) = \gamma'(0, e_2) = e_2.$$

Assim, em  $p$ , os coeficientes da primeira forma fundamental neste sistema de coordenadas são dados por  $E = G = 1$  e  $F = 0$ .

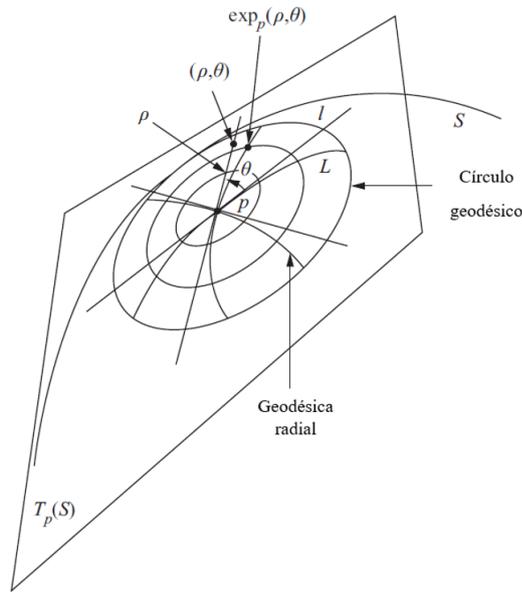
- As *coordenadas polares geodésicas* que correspondem a coordenadas polares no plano tangente  $T_p S$ .

Escolha no plano  $T_p S$ ,  $p \in S$ , um sistema de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , onde  $\rho$  é o raio polar e  $\theta$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ , o ângulo polar, cujo polo é a origem  $O$  de  $T_p S$ . Observe que as coordenadas polares no plano não são definidas na semirreta fechada  $l$  que corresponde a  $\theta = 0$ . Dessa forma, tome  $\exp_p(l) = L$ . Como  $\exp_p : U - l \rightarrow V - L$  ainda é um difeomorfismo, podemos parametrizar os pontos de  $V - L$  pelas coordenadas  $(\rho, \theta)$  que são chamadas coordenadas geodésicas. Isto é, a aplicação  $\mathbf{y}(\rho, \theta) = \exp_p(\rho \cos \theta e_1 + \rho \sin \theta e_2)$ , é uma parametrização de  $S$ .

**Definição 5.7.** As imagens por  $\exp_p : U \rightarrow V$  de círculos de  $U$  centrados em  $O$  serão chamados de *círculos geodésicos* de  $V$ , e as imagens por  $\exp_p$  de retas passando por  $O$  serão chamadas de *geodésicas radiais* de  $V$ . Observe que em  $V - L$ , estas são as curvas  $\rho = \text{const.}$  e  $\theta = \text{const.}$ , respectivamente (Figura 5.3).

Na próxima proposição, vamos obter informações sobre os coeficientes da primeira forma fundamental em um sistema de coordenadas polares geodésicas.

Figura 5.3: Coordenadas polares em  $T_p S$ .



Fonte: CARMO (2014, p. 344).

**Proposição 5.8.** *Seja  $\mathbf{y} : U - l \rightarrow V - L$  um sistema de coordenadas polares geodésicas  $(\rho, \theta)$ . Então os coeficientes  $E = E(\rho, \theta)$ ,  $F = F(\rho, \theta)$ , e  $G = G(\rho, \theta)$  da primeira forma fundamental satisfazem as condições*

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0 \quad e \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1.$$

*Demonstração.* Observe que pela definição da aplicação exponencial,  $\rho$  mede o comprimento de arco ao longo da curva  $\theta = \text{const.} = \theta_0$ . Isto é,

$$s(\rho) = \int_0^{\rho} |\mathbf{y}_{\rho}(\rho, \theta_0)| d\rho = \rho,$$

Dessa forma, como a curva  $\theta = \theta_0$  é uma geodésica radial e a norma do vetor velocidade  $\mathbf{y}_{\rho}$  é constante, pela equação acima temos

$$E = \langle \mathbf{y}_{\rho}, \mathbf{y}_{\rho} \rangle = |\mathbf{y}_{\rho}(\rho, \theta_0)|^2 = 1.$$

Observe que  $\mathbf{y}_{\rho\rho}$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores  $\mathbf{y}_{\rho}$ ,  $\mathbf{y}_{\theta}$  e  $N$ , isto é, existem  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\mathbf{y}_{\rho\rho} = a_1 \mathbf{y}_{\rho} + a_2 \mathbf{y}_{\theta} + a_3 N.$$

Tomando o produto interno de  $\mathbf{y}_{\rho\rho}$  com  $\mathbf{y}_\theta$ , obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{y}_{\rho\rho}, \mathbf{y}_\theta \rangle &= \langle a_1 \mathbf{y}_\rho + a_2 \mathbf{y}_\theta + a_3 N, \mathbf{y}_\theta \rangle \\ &= \langle a_1 \mathbf{y}_\rho + a_2 \mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\theta \rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{\partial \rho} \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_\theta \right\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $F = \langle \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_\theta \rangle$ , temos que

$$\begin{aligned}F_\rho &= \frac{\partial}{\partial \rho} \langle \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_\theta \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\rho), \mathbf{y}_\theta \right\rangle + \left\langle \mathbf{y}_\rho, \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\theta) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\rho), \mathbf{y}_\theta \right\rangle + \left\langle \mathbf{y}_\rho, \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\theta) \right\rangle,\end{aligned}$$

pois  $\frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\rho)$  é escrita como combinação linear de  $\mathbf{y}_\rho$ ,  $\mathbf{y}_\theta$  e  $N$ , e  $\langle \mathbf{y}_\theta, N \rangle = 0$ , o que nos dá  $\left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\rho), \mathbf{y}_\theta \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\rho), \mathbf{y}_\theta \right\rangle$ . Como  $\theta = \text{const.}$  é uma geodésica parametrizada por  $\rho$ , temos

$$\frac{D}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\rho) = 0,$$

e como  $\langle \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_\rho \rangle = 1$ , então derivando com respeito a  $\theta$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \langle \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_\rho \rangle = \langle \mathbf{y}_{\rho\theta}, \mathbf{y}_\rho \rangle + \langle \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_{\rho\theta} \rangle = 2 \langle \mathbf{y}_{\rho\theta}, \mathbf{y}_\rho \rangle = 2 \left\langle \mathbf{y}_\rho, \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\theta) \right\rangle$$

Dessa forma,

$$F_\rho = \left\langle \mathbf{y}_\rho, \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{y}_\theta) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_\rho \rangle = 0.$$

Assim,  $F$  é constante em relação a  $\rho$ . Agora observe que a curva  $\theta \rightarrow \mathbf{y}(0, \theta)$  é a curva constante e igual a  $p$  para todo  $\theta$ . Assim,  $\mathbf{y}_\theta(0, \theta) = 0$  e conseqüentemente  $F(0, \theta) = 0$ , para todo  $\theta$  e como  $F_\rho = 0$  segue que  $F$  é identicamente nula. Para provar a última afirmação desta proposição, escolhemos um sistema de coordenadas normais  $(\bar{u}, \bar{v})$  em  $p$  de tal forma que a mudança de coordenadas é dada por

$$\bar{u} = \rho \cos \theta, \quad \bar{v} = \rho \sin \theta, \quad \rho \neq 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

cujos coeficientes da primeira forma fundamental designaremos por  $\bar{E}$ ,  $\bar{G}$  e  $\bar{F}$ . Lembrando que

$$\sqrt{G} = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)},$$

onde  $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)}$  é o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas. Assim,

$$\sqrt{G} = \rho \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}.$$

Como em  $p$ ,  $\bar{E} = \bar{G} = 1$  e  $\bar{F} = 0$  (as coordenadas normais são definidas em  $p$ ), concluímos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0,$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2})_\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} + \frac{\rho(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)_\rho}{2\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}} \right) = 1,$$

pois  $\frac{\rho(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)_\rho}{2\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}} \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow 0$ . □

Neste ponto é importante salientar o significado geométrico de  $F = 0$ . Em uma vizinhança normal, a família de círculos geodésicos é ortogonal à família de geodésicas radiais. Tal fato é conhecido como Lema de Gauss.

## 5.1 Aplicações geométricas das coordenadas normais e das coordenadas polares geodésicas

A seguir, apresentamos algumas aplicações geométricas das coordenadas normais e das coordenadas polares geodésicas. Para isto, vamos precisar da seguinte proposição.

**Proposição 5.9.** *Se  $\mathbf{x}$  é uma parametrização ortogonal, isto é,  $F = 0$ , então a curvatura Gaussiana é dada por*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}. \quad (5.1)$$

*Demonstração.* Para demonstrar a proposição acima, iremos utilizar a fórmula de Gauss (3.8)

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2.$$

Como  $F = 0$ , pelos sistemas de equações (3.3), (3.4) e (3.5), temos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Substituindo as equações acima na fórmula de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}
 -KE &= \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \left(-\frac{E_v}{2G}\right)_v + \left(\frac{E_v}{2E}\right) \left(-\frac{E_v}{2G}\right) + \frac{G_u G_u}{2G 2G} - \frac{E_u G_u}{2E 2G} - \left(-\frac{E_v}{2G}\right) \left(\frac{G_v}{2G}\right) \\
 &= \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_v^2}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{E_v G_v}{4G^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{GG_{uu} - G_u^2}{G^2} + \frac{GE_{vv} - E_v G_v}{G^2} - \frac{E_v^2}{2EG} + \frac{G_u^2}{2G^2} - \frac{E_u G_u}{2EG} + \frac{E_v G_v}{2G^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2EG^2} \left( EGG_{uu} - EG_u^2 + EGE_{vv} - EE_v G_v - \frac{GE_v^2}{2} + \frac{EG_u^2}{2} - \frac{GE_u G_u}{2} + \frac{EE_v G_v}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Assim,

$$K = -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u). \tag{5.3}$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\sqrt{EG}E_{vv} - \frac{E_v(E_v G + G_v E)}{2\sqrt{EG}}}{EG} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu} - \frac{G_u(E_u G + EG_u)}{2\sqrt{EG}}}{EG} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\sqrt{EG}E_{vv}}{EG} - \frac{E_v^2 G + E_v G_v E}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu}}{EG} - \frac{G_u E_u G + EG_u^2}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{1}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} (2EGE_{vv} - E_v^2 G - E_v G_v E + 2EGG_{uu} - E_u G_u G - EG_u^2) \\
 &= -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u) = K.
 \end{aligned}$$

□

Como em um sistema de coordenadas polares geodésicas  $E = 1$  e  $F = 0$ , pela

Proposição 5.9, a curvatura Gaussiana  $K$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right)_\theta + \left( \frac{G_\rho}{\sqrt{EG}} \right)_\rho \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left( \frac{G_\rho}{\sqrt{G}} \right)_\rho \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{G_\rho}{2\sqrt{G}} \right)_\rho \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{G}} ((\sqrt{G})_\rho)_\rho \\
 &= -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

Se  $K$  for constante, a expressão acima pode ser considerada uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes, isto é,

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0. \quad (5.4)$$

Mais adiante iremos demonstrar o Teorema de Minding que diz que quaisquer duas superfícies com mesma curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas. Para isto, vamos considerar a equação (5.4) e estudar separadamente os casos  $K = 0$ ,  $K > 0$  e  $K < 0$ .

- Se  $K = 0$ , temos

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0.$$

Integrando em ambos os lados da equação acima com respeito a  $\rho$ , obtemos

$$(\sqrt{G})_\rho = g(\theta), \quad (5.5)$$

pois  $g(\theta)$  é constante com respeito a  $\rho$ . Pela proposição 5.8,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1,$$

e tomando o limite em ambos os lados da equação (5.5) quando  $\rho \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} (g(\theta)) \implies g(\theta) = 1.$$

Substituindo  $g(\theta) = 1$  em (5.5) e integrado em ambos os lados da equação (5.5) com

relação a  $\rho$ , obtemos

$$\sqrt{G} = \rho + f(\theta), \quad (5.6)$$

pois  $f(\theta)$  é constante com respeito a  $\rho$ . Novamente, pela Proposição 5.8,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0,$$

e tomando o limite em ambos os lados da equação (5.6) quando  $\rho \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho + f(\theta)) \implies \sqrt{\lim_{\rho \rightarrow 0} G} = f(\theta) \implies f(\theta) = 0.$$

Substituindo  $f(\theta) = 0$  na equação (5.6), obtemos

$$\sqrt{G} = \rho \implies G = \rho^2.$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental para o caso  $K = 0$ , são dados por

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G(\rho, \theta) = \rho^2.$$

Para os casos em que  $K > 0$  ou  $K < 0$ , iremos utilizar métodos envolvendo equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

- Se  $K > 0$ , a equação característica da equação diferencial (5.4), é dada por

$$r^2 + K = 0,$$

e as raízes da equação acima são dadas por

$$r_1 = \sqrt{K}i, \quad r_2 = -\sqrt{K}i.$$

Assim, a solução geral da equação (5.4) com  $K > 0$  é dada por

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cos(\sqrt{K}\rho) + B(\theta) \sin(\sqrt{K}\rho), \quad (5.7)$$

onde  $A(\theta)$  e  $B(\theta)$  são funções de  $\theta$ . Pela Proposição (5.8),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0,$$

consequentemente tomando o limite em ambos os lados da equação (5.7), quando  $\rho \rightarrow 0$ , obtemos

$$0 = \lim_{\rho \rightarrow 0} (A(\theta) \cos(\sqrt{K}\rho) + B(\theta) \sin(\sqrt{K}\rho)) \implies A(\theta) = 0.$$

Substituindo  $A(\theta) = 0$  em (5.7), temos

$$\sqrt{G} = B(\theta) \operatorname{sen}(\sqrt{K}\rho). \quad (5.8)$$

Recorrendo novamente a Proposição 5.8, temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1,$$

logo, derivando com respeito a  $\rho$  e tomando o limite em ambos os lados da equação (5.8) quando  $\rho \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} (B(\theta)\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}\rho)) \implies B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Com isso, a equação (5.8), toma a forma

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}\rho) \implies G = \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{K}\rho)}{K}.$$

Desta forma, para o caso  $K > 0$ , os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G(\rho, \theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{K}\rho)}{K}.$$

- Se  $K < 0$ , a equação característica da equação diferencial (5.4) é dada por

$$r^2 + K = 0,$$

e as raízes desta equação são dadas por

$$r^2 = -K \implies r_1 = \sqrt{-K} \quad \text{e} \quad r_2 = -\sqrt{-K}.$$

Daí, temos como solução para equação (5.4)

$$\sqrt{G} = C_1 e^{\sqrt{K}\rho} + C_2 e^{-\sqrt{K}\rho}.$$

Tomando  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ , obtemos

$$\sqrt{G} = \frac{1}{2} e^{\sqrt{K}\rho} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{K}\rho} = \cosh(\sqrt{K}\rho).$$

Analogamente, tomamos  $C_1 = \frac{1}{2}$  e  $C_2 = -\frac{1}{2}$  obtendo

$$\sqrt{G} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{K}\rho} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{K}\rho} = \sinh(\sqrt{K}\rho).$$

Observe que o wronskiano das soluções obtidas é dado por

$$\begin{vmatrix} \cosh(\sqrt{-K}\rho) & \sinh(\sqrt{-K}\rho) \\ \sqrt{-K} \cosh(\sqrt{-K}\rho) & \sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}\rho) \end{vmatrix} = \sqrt{-K} \neq 0,$$

pois,  $(\cosh^2(\sqrt{-K}\rho) - \sinh^2(\sqrt{-K}\rho)) = 1$ . Com isso, concluímos que o conjunto de soluções  $\{\cosh(\sqrt{-K}\rho), \sinh(\sqrt{-K}\rho)\}$  é linearmente independente. Observe que as escolhas feitas para os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  teve como objetivo encontrar um conjunto de soluções linearmente independentes. Assim, a solução geral da equação (5.4) é dada por

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\theta) \sinh(\sqrt{-K}\rho), \quad (5.9)$$

e mais uma vez, pela Proposição 5.8

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0,$$

logo, tomando o limite em ambos os lados da equação (5.9) quando  $\rho \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (A(\theta) \cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\theta) \sinh(\sqrt{-K}\rho)) \\ \implies 0 &= A(\theta) \cosh(0) + B(\theta) \sinh(0) \\ \implies A(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo  $A(\theta) = 0$  em (5.9), obtemos

$$\sqrt{G} = B(\theta) \sinh(\sqrt{-K}\rho). \quad (5.10)$$

Derivando em ambos os lado da equação (5.10) com respeito a  $\rho$ , obtemos

$$(\sqrt{G})_\rho = \sqrt{-K} B(\theta) \cosh(\sqrt{-K}\rho), \quad (5.11)$$

e como pela Proposição 5.8,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1,$$

tomando o limite em ambos os lados da equação (5.11), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{-K} B(\theta) \cosh(\sqrt{-K} \rho)) \\ \implies 1 &= \sqrt{-K} B(\theta) \cosh(0) \\ \implies B(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{-K}}, \end{aligned}$$

e substituindo  $B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-K}}$  em (5.10), obtemos

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} \rho) \implies G = \frac{\sinh^2(\sqrt{-K} \rho)}{-K}.$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental para o caso  $K < 0$  são dados por

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G(\rho, \theta) = \frac{\sinh^2(\sqrt{-K} \rho)}{-K}.$$

Podemos agora provar o Teorema de Minding.

**Teorema 5.10** (Teorema de Minding). *Quaisquer duas superfícies com a mesma curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas. Mais precisamente, sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares com a mesma curvatura constante  $K$ . Escolha pontos  $p_1 \in S_1$ ,  $p_2 \in S_2$ , e bases ortonormais  $\{e_1, e_2\} \subset T_{p_1} S_1$ ,  $\{f_1, f_2\} \subset T_{p_2} S_2$ . Então existem vizinhanças  $V_1$  de  $p_1$  e  $V_2$  de  $p_2$  e uma isometria  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $\psi(p_1) = p_2$ ,  $d\psi(e_1) = f_1$  e  $d\psi(e_2) = f_2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $V_1$  e  $V_2$  vizinhanças normais de  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente. Seja  $\varphi$  a isometria linear de  $T_{p_1} S_1$  sobre  $T_{p_2} S_2$  dada por  $\varphi(e_1) = f_1$  e  $\varphi(e_2) = f_2$ . Tome um sistema de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  em  $T_{p_1} S_1$  com eixo  $l$  e faça  $L_1 = \exp_{p_1}(l)$ ,  $L_2 = \exp_{p_2}(\varphi(l))$ . Seja  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  definida por

$$\psi = \exp_{p_2} \circ \varphi \circ \exp_{p_1}^{-1}.$$

**Afirmção:**  $\psi$  é isometria. De fato, a restrição  $\bar{\psi}$  de  $\psi$  a  $V_1 - L_1$ , aplica uma vizinhança em coordenadas polares geodésicas  $(\rho, \theta)$  centrada em  $p_1$  sobre uma vizinhança em coordenadas polares geodésicas  $(\rho, \theta)$  centrada em  $p_2$ . Pelo estudo feito anteriormente da equação (5.4), mostramos que em coordenadas polares geodésicas, os coeficientes da primeira forma fundamental de superfícies com curvatura gaussiana constante  $K$ , com mesmo sinal ou nula, são idênticos. Logo, os coeficientes das primeiras formas fundamentais em pontos correspondentes são iguais. Pela Proposição (3.4),  $\bar{\psi}$  é uma isometria. Por continuidade,  $\psi$  ainda preserva os produtos internos nos pontos de  $L_1$  e assim  $\psi$  é uma isometria. É imediato verificar que  $d\psi(e_1) = f_1$  e  $d\psi(e_2) = f_2$ .  $\square$

## 5.2 Comportamento das geodésicas com relação ao sinal da curvatura

Vamos analisar o caso em que  $K$  não é constante mas mantém seu sinal com base na expressão  $K\sqrt{G} = -(\sqrt{G})_{\rho\rho}$ . Considere o comprimento de arco  $L(\rho)$  da curva  $\rho = \rho_0$ , sendo  $\rho_0$  uma constante, entre duas geodésicas próximas  $\theta = \theta_0$  e  $\theta = \theta_1$ . Portanto,

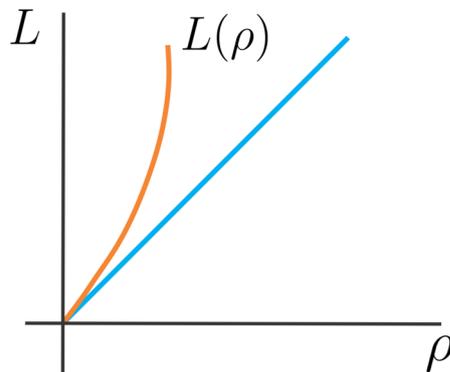
$$L(\rho) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{G(\rho, \theta)} d\theta.$$

- Se  $K < 0$ , como pela Proposição 5.8 temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1 \quad \text{e} \quad (\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G} > 0,$$

então a função  $L(\rho)$  tem comportamento como na Figura 5.4. Isto é,  $L(\rho)$  aumenta com o aumento de  $\rho$ . Em outras palavras, as geodésicas  $\theta = \theta_0$  e  $\theta = \theta_1$  afastam-se cada vez mais.

Figura 5.4: Comportamento de  $L(\rho)$  se  $K < 0$  e mantém seu sinal.

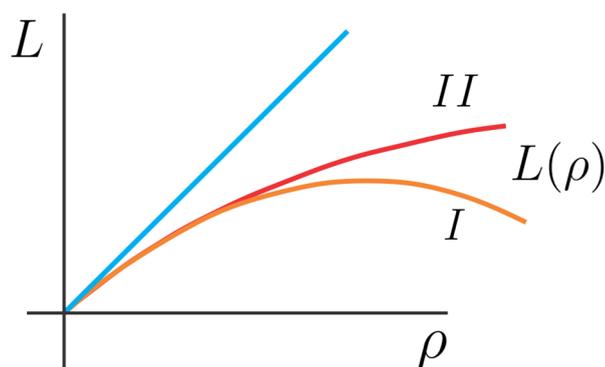


Fonte: Elaborado pelo autor.

- Se  $K > 0$ , como pela Proposição 5.8 temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1 \quad \text{e} \quad (\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G} < 0,$$

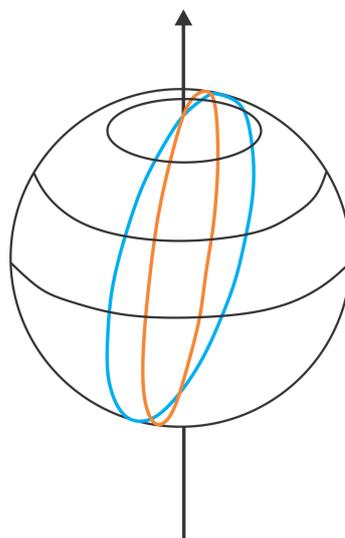
$L(\rho)$  tem comportamento como na Figura 5.5.

Figura 5.5: Comportamento de  $L(\rho)$  se  $K > 0$  e manter seu sinal.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As geodésicas  $\theta = \theta_0$  e  $\theta = \theta_1$  podem ou não se aproximar após certo valor de  $\rho$ , isto irá depender da curvatura Gaussiana. Um bom exemplo desta situação são duas geodésicas da esfera. Partindo de um polo, inicialmente as geodésicas se afastam e começam a se aproximar depois do equador (Figura 5.6).

Figura 5.6: Comportamento de duas geodésicas na esfera.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.3 Uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana

Uma outra aplicação das coordenadas polares geodésicas consiste de uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana  $K$ . Primeiramente, observamos que a expressão

de  $K$  em coordenadas geodésicas polares  $(\rho, \theta)$ , com centro em  $p \in S$ , é dada por

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} \implies (\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G}.$$

Dessa forma, derivando em ambos os lados da equação acima com respeito a  $\rho$ , obtemos

$$\frac{\partial^3(\sqrt{G})}{\partial\rho^3} = -K(\sqrt{G})_{\rho} - K_{\rho}(\sqrt{G}). \quad (5.12)$$

Pela Proposição 5.8, temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0,$$

logo, tomando o limite em ambos os lados da equação (5.12), obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial^3(\sqrt{G})}{\partial\rho^3} = -K(p).$$

Por outro lado, definindo  $\sqrt{G}$  e suas derivadas sucessivas com relação a  $\rho$  em  $p$  pelos seus valores limite, podemos escrever

$$\sqrt{G}(\rho, \theta) = \sqrt{G}(0, \theta) + \rho(\sqrt{G})_{\rho}(0, \theta) + \frac{\rho^2}{2!}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(0, \theta) + \frac{\rho^3}{3!}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(0, \theta) + R(\rho, \theta),$$

onde

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{R(\rho, \theta)}{\rho^3} = 0,$$

uniformemente em  $\theta$ . Substituindo na expressão acima os valores apresentados anteriormente da Proposição 5.8, obtemos

$$\sqrt{G}(\rho, \theta) = \rho - \frac{\rho^3}{3!}K(p) + R.$$

A partir deste valor de  $\sqrt{G}$ , podemos calcular o comprimento de arco  $L$  de um círculo geodésico de raio  $\rho = r$  da seguinte forma

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sqrt{G}(r, \theta) d\theta = 2\pi r - \frac{\pi}{3}r^3 K(p) + R_1,$$

onde

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_1}{r^3} = 0.$$

Dessa forma, obtemos

$$K(p) = -\frac{3}{\pi} \left( \frac{L - R_1 - 2\pi r}{r^3} \right) = \frac{3}{\pi} \left( \frac{R_1 + 2\pi r - L}{r^3} \right)$$

Por fim, tomando o limite em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left( \frac{2\pi r - L}{r^3} \right) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3 R_1}{\pi r^3} \implies K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left( \frac{2\pi r - L}{r^3} \right),$$

o que nos mostra que  $K(p)$  está em função do raio  $r$  de um círculo geodésico  $S_r(p)$  em torno de  $p$  e dos comprimentos de arco  $L$  e  $2\pi r$  de  $S_r(p)$  e  $\exp_p^{-1}(S_r(p))$ , respectivamente. Observe que para  $K$  ser igual a zero, como  $L$  é o comprimento de um círculo geodésico  $\rho = \rho_0$  então  $2\pi r = L$ . Logo o comprimento de um círculo geodésico é igual ao comprimento de um círculo no plano, isto é,  $L(r) = 2\pi r$ .

## 5.4 Geodésicas Minimizantes

Como uma última aplicação das coordenadas polares geodésicas, vamos estudar as propriedades minimizantes das geodésicas. Uma propriedade fundamental de uma geodésica é que, localmente, ela minimiza o comprimento de arco. De forma mais precisa, temos a seguinte proposição.

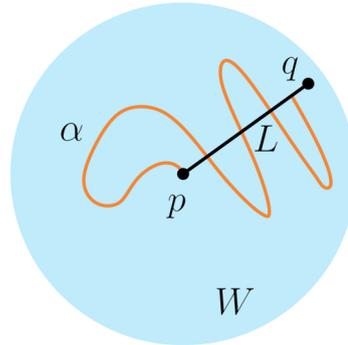
**Proposição 5.11.** *Seja  $p$  um ponto em uma superfície  $S$ . Então existe uma vizinhança  $W \subset S$  de  $p$  tal que se  $\gamma : I \rightarrow W$  é uma geodésica parametrizada com  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(t_1) = q$ ,  $t_1 \in I$  e  $\alpha : [0, t_1] \rightarrow S$  é uma curva parametrizada regular ligando  $p$  a  $q$ , temos*

$$l_\gamma \leq l_\alpha,$$

onde  $l_\alpha$ ,  $l_\gamma$  denotam o comprimento da curva  $\alpha$  e  $\gamma$ , respectivamente. Além disso, se  $l_\gamma = l_\alpha$ , então o traço de  $\gamma$  coincide com o traço de  $\alpha$  entre  $p$  e  $q$ .

*Demonstração.* Seja  $V$  uma vizinhança normal de  $p$  e seja  $\bar{W}$  uma região fechada limitada por um círculo geodésico de raio  $r$  contido em  $V$ . Sejam  $(\rho, \theta)$  coordenadas polares geodésicas em  $\bar{W} - L$  centradas em  $p$ . Vamos considerar primeiro o caso em que  $\alpha([0, t_1]) \subset \bar{W}$  (Figura 5.7).

Figura 5.7: O caso em que  $\alpha([0, t_1]) \subset \bar{W}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja  $0 < \beta_0 < \beta_1 < t_1$ . Como  $\alpha$  tem comprimento finito, podemos escolher  $L$  de modo que  $\alpha([\beta_0, \beta_1])$  intersecta  $L$  em apenas um número finito de pontos, suponhamos  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{k-1}$ . Tomamos  $\beta_0 = \tau_0$  e  $\beta_1 = \tau_k$ . Podemos escrever  $\alpha(t) = (\rho(t), \theta(t))$  em cada intervalo  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Note que

$$\sqrt{(\rho)^2 + G(\theta')^2} \geq \sqrt{(\rho)^2}.$$

Além disso, observe que para ocorrer a igualdade na desigualdade acima é necessário que  $\theta' = 0$ , isto é,  $\theta = \text{const.}$  em  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ .

**Afirmção:** O comprimento de  $\alpha$  entre  $\beta_0$  e  $\beta_1$  é maior ou igual do que  $|\rho(\beta_1) - \rho(\beta_0)|$  e a igualdade se verifica se, e somente se,  $\alpha$  é a geodésica radial com uma parametrização  $\rho(t)$ ,  $\rho'(t) > 0$ .

Com efeito, observe que o comprimento de  $\alpha$  de  $\beta_0$  a  $\beta_1$ , é dado por

$$\begin{aligned} L(\alpha)|_{\beta_0}^{\beta_1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sqrt{(\rho)^2 + G(\theta')^2} dt \geq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sqrt{(\rho)^2} dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\rho'| dt \\ &\geq \left| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \rho' dt \right| = \left| \sum_{i=0}^{k-1} \rho(\tau_{i+1}) - \rho(\tau_i) \right| = |\rho(\beta_1) - \rho(\beta_0)|, \end{aligned}$$

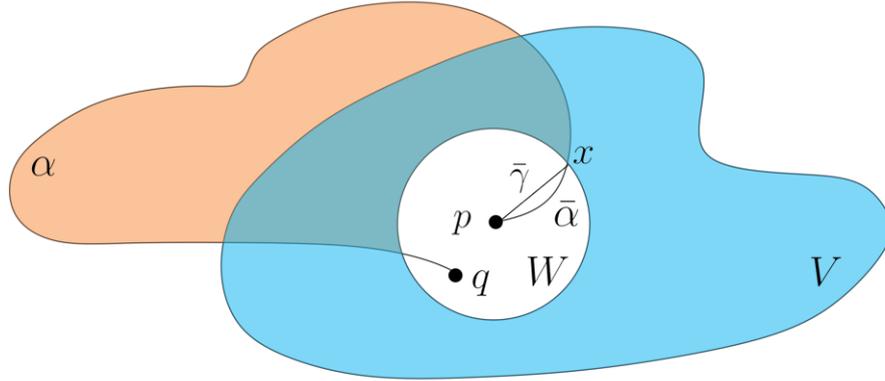
onde a integral entre  $\tau_i$  e  $\tau_{i+1}$  é obtida como limite, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , da integral entre  $\tau_i + \epsilon$  e  $\tau_{i+1} - \epsilon$ , com  $\epsilon > 0$ . Além disso, a igualdade se verifica em ambas as desigualdades acima se e só se  $\rho'(t) > 0$  e  $\theta(t) = \text{const.}$  em cada intervalo  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ , isto é,  $\alpha(t_i)$  e  $\alpha(t_{i+1})$  pertencem a uma geodésica radial. Com isto, provamos nossa afirmação.

Desta forma, a demonstração da proposição para o caso  $\alpha([0, t_1]) \subset \bar{W}$  segue imediatamente da afirmação acima, fazendo  $\beta_0 \rightarrow 0$  e  $\beta_1 \rightarrow t_1$ .

Vamos supor agora que  $\alpha([0, t_1])$  não esteja inteiramente contida em  $\bar{W}$ . Seja  $t_0 \in [0, t_1]$  o primeiro valor para o qual  $\alpha(t_0) = x$  pertence a fronteira de  $\bar{W}$ . Seja  $\bar{\gamma}$  a

geodésica radial  $\rho x$  e seja  $\bar{\alpha}$  a restrição da curva  $\alpha$  ao intervalo  $[0, t_0]$  (Figura 5.8).

Figura 5.8: O caso em que  $\alpha([0, t_1])$  não esteja inteiramente contida em  $W$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Segue então que  $l_\alpha \geq l_{\bar{\alpha}}$ . Por este mesmo argumento, segue que  $l_{\bar{\alpha}} \geq l_{\bar{\gamma}}$ . Como  $q$  é ponto interior em  $\bar{W}$ , temos que  $l_{\bar{\gamma}} > l_\gamma$ . Por fim, concluímos que  $l_\alpha > l_\gamma$ .  $\square$

Ressaltamos que as proposições anteriores não são válidas globalmente. Basta tomarmos o exemplo da esfera. Dois pontos que não são antípodas de uma esfera podem ser conectados por dois meridianos de comprimentos diferentes. Ou seja, uma geodésica suficientemente estendida, pode não ser o menor caminho entre seus pontos extremos. Contudo, a proposição a seguir mostra que quando uma curva regular é o menor caminho entre quaisquer dois de seus pontos, esta curva é necessariamente uma geodésica.

**Proposição 5.12.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular com um parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Suponha que o comprimento de  $\alpha$  entre dois pontos quaisquer  $t, \tau \in I$  é menor ou igual ao comprimento de qualquer curva parametrizada regular ligando  $\alpha(t)$  a  $\alpha(\tau)$ . Então  $\alpha$  é uma geodésica.*

*Demonstração.* Seja  $t_0 \in I$  um ponto arbitrário de  $I$  e seja  $W$  a vizinhança de  $\alpha(t_0)$  dada pela Proposição 5.11. Seja  $q = \alpha(t_1) \in W$ . Do caso da igualdade da Proposição 5.11, segue que  $\alpha$  é geodésica de  $(t_0, t_1)$ . Caso contrário teríamos, entre  $t_0$  e  $t_1$ , um comprimento maior do que o da geodésica radial ligando  $\alpha(t_0)$  a  $\alpha(t_1)$ , o que contradiz a hipótese. Como  $\alpha$  é regular pela continuidade da derivada covariante, temos que  $\alpha$  é também geodésica em  $t_0$ .  $\square$

## Considerações Finais

Neste trabalho fizemos um breve estudo sobre transporte paralelo, geodésicas e a aplicação exponencial. No capítulo 1 apresentamos as demonstrações dos teoremas de Peano e Picard e alguns corolários e reflexões a respeito das soluções de equações diferenciais lineares de ordem superior que podem ser convertidas em sistemas de equações diferenciais de 1<sup>a</sup> ordem, resumindo assim as questões de existência e unicidade a estes casos. No capítulo 2, dedicado a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , estudamos a primeira forma fundamental e como esta permite calcular questões métricas da superfície sem fazer menção ao espaço ambiente, a ideia de orientação de superfícies, a segunda forma fundamental e a curvatura Gaussiana. No capítulo 3 fizemos um estudo sobre isometria, demonstramos com detalhes o teorema Egregium de Gauss e como o conceito de curvatura depende apenas da primeira forma fundamental e suas derivadas. No capítulo 4 fizemos um estudo sobre a derivada covariante, o transporte paralelo e geodésicas, além da curvatura geodésica, que generaliza para superfícies regulares a noção de curvatura de uma curva plana, e mostramos alguns resultados que nos auxiliam no cálculo desta curvatura. Por fim no capítulo 5, estudamos a aplicação exponencial, vimos que ela é um difeomorfismo na vizinhança da origem de  $T_p S$  e vimos que por meio deste resultado obtemos dois sistemas de coordenadas especiais: As coordenadas normais e as coordenadas polares geodésicas. Obtivemos informações sobre os coeficientes da primeira forma fundamental destes sistemas de coordenadas e estudamos algumas aplicações do sistema de coordenadas polares geodésicas entre elas o teorema de Minding, como as geodésicas se comportam com relação ao sinal da curvatura e uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos do raio, do comprimento do círculo geodésico e de sua imagem inversa pela aplicação exponencial. Por fim mostramos que geodésicas localmente minimizam o comprimento.

Este trabalho é um "compilado resumido" dos estudos realizados por mim nas duas iniciações científicas realizadas no período de 2020 a 2022, onde pude estudar alguns temas relacionados a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, alguns métodos de solução destas equações e a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  onde procuramos sempre que possível apresentar riqueza de detalhes na demonstração ou explicar com mais detalhes os conceitos apresentados além de apresentar figuras que melhorem o entendimento dos conceitos. Considero que o estudo aqui apresentado me

trouxe uma boa base para cursar uma futura pós-graduação.

## Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**, 6<sup>a</sup>.ed, SBM, Rio de Janeiro, 2014.
- [2] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. **Geometria Diferencial I**, 2003 - 2009, Notas de Aula, Rio de Janeiro.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton I. **Um curso de Cálculo vol.2**, 5<sup>a</sup>.ed, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A, 2001.
- [4] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2014.
- [5] SANTOS, Túlio José de Souza. **Um breve estudo sobre a geometria Diferencial de Superfícies em  $\mathbb{R}^3$** . Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, 2021.
- [6] SOTOMAYOR, J.M. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1979.
- [7] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno**. Rio de Janeiro. LCT, 2010.
- [8] O'NEILL, B. **Elementary Differential Geometry**, 2<sup>a</sup>.ed, Elsevier Science, 2006.