UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Ana Catarine Freitas de Lima

Pontos fixos em espaços métricos completos e o Teorema de Picard

Recife - PE
Setembro de 2023

Pontos fixos em espaços métricos completos e o Teorema de Picard

por

Ana Catarine Freitas de Lima

Sob orientação de

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Recife - PE
Setembro de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

http://www.sib.ufrpe.br/deposito legalp

Lima, Ana Catarine Freitas
Pontos fixos em espaços métricos completos e o Teorema de Picard / Ana Catarine Freitas Lima. - 2023.
60 f. : il.

Orientador: Gilson Mamede de Carvalho.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2024.

1. Espaços métricos . 2. Espaços métricos completos. 3. Teorema de Picard. 4. Ponto fixo. I. Carvalho, Gilson Mamede de, orient. II. Título

CDD 510

Ana Catarine Freitas de Lima

Pontos fixos em espaços métricos completos e o Teorema de Picard

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Universidade Federal Rural de Pernambuco - (UFRPE)

Prof. Dr. Yane Lísley Ramos Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Júnior
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Recife - PE
Setembro de 2023

À minha família, por todo apoio e ao meu sobrinho, por todo amor.

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus por me permitir viver esse sonho e por me dar forças para lutar até o fim.

Aos meus pais, Angela e Luciano, pelo apoio incondicional. À minha tia Solange, minha segunda mãe, que sempre apoiou meus estudos. Aos meus irmãos, Nailson e Carol, por todo amor. E à minha avó, por todo o amor e carinho dedicados a mim ao longo da vida.

Ao meu sobrinho e afilhado, Theo, mesmo sendo tão pequeno, sua presença foi uma fonte constante de inspiração e garra para seguir meus sonhos e não desistir.

Ao meu orientador, Gilson Carvalho, que sempre foi um exemplo de professor para mim. Agradeço por toda dedicação e apoio aos meus estudos, pelo incentivo e pela paciência que teve ao me guiar durante esse percurso acadêmico.

Aos membros da banca, professora Yane Lísley e o professor Reginaldo Júnior, pela correção e contribuição para meu trabalho.

À minha dupla da faculdade, Bruna Vitória, por todo o apoio e parceria. Ter você ao meu lado durante a jornada árdua da graduação foi essencial para enfrentarmos juntas os desafios e superá-los com sucesso.

À minha amiga, Laís Santos, agradeço por acreditar em mim e por todo o apoio ao longo da faculdade. Sua presença e escuta nos momentos difíceis foram essenciais para me motivar a sempre seguir em frente.

Aos professores Murilo Ramos e Rildo Vaz, que foram professores incríveis e se tornaram referências em matemática para mim.

Aos meus amigos do ônibus, que compartilham comigo as dificuldades da faculdade, mas também os momentos de felicidade, quero dedicar um agradecimento especial às minhas amigas Clara e Cássia.

Também sou grata aos demais professores e professoras do Departamento de Matemática da UFRPE, que contribuíram de forma positiva em minha graduação. Em especial, às professoras Yane Lisley, Tarciana Santos, Thamires Cruz e Lorena Brizza, que se tornaram referências de mulheres na matemática para mim, mostrando a importância da presença feminina nessa área do conhecimento.

Por fim, não posso deixar de mencionar a FACEPE pelo apoio financeiro durante os estudos de iniciação científica, que resultaram na elaboração deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo aprofundar o estudo dos espaços métricos completos, concentrando-se especialmente na análise dos pontos fixos. Nossa intenção é demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e, posteriormente, aplicar essa teoria às equações diferenciais ordinárias por meio do Teorema de Picard.Para atingir esse objetivo, iniciaremos abordando os conceitos fundamentais dos espaços métricos, com ênfase na compreensão dos elementos básicos, oferecendo exemplos e introduzindo conceitos topológicos, como também a noção de continuidade. Conduziremos o estudo até chegarmos à definição de espaços métricos completos, para então analisar a noção de ponto fixo. Finalmente, demonstraremos o Teorema principal, que estabelece a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias.

Palavras-Chave: Espaços métricos; Ponto fixo; Espaços métricos completos; Teorema de Picard.

Abstract

This work aims to deepen the study of complete metric spaces, focusing especially on the analysis of fixed points. Our intention is to demonstrate Banach's Fixed Point Theorem and, subsequently, apply this theory to ordinary differential equations through Picard's Theorem. To achieve this objective, we will begin by addressing the fundamental concepts of metric spaces, with an emphasis on understanding the basic elements , offering examples and introducing topological concepts, as well as the notion of continuity. We will conduct the study until we reach the definition of complete metric spaces, and then analyze the notion of fixed point. Finally, we will demonstrate the main theorem, which establishes the existence and uniqueness of solutions to initial value problems in ordinary differential equations.

KeyWords: Metric spaces; Fixed point; Full metric spaces; Theorem from Picard.

Sumário

Lista de Notações

- $\operatorname{int} X$ denota o conjunto dos pontos interiores de X;
- $\overline{X}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a X;
- $\operatorname{fr} X$ denota o conjunto dos pontos de fronteira de X;
- $d(x, y)$ indica a distância de x para y;
- $|\cdot|$ representa o valor absoluto em $\mathbb{R}$;
- $||\cdot||$ representa uma norma;
- $B(a, r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r;
- $B[a, r]$ denota a bola fechada de centro a e raio r;
- $S[a, r]$ denota a esfera de centro a e raio r;
- $\text{diam} X$ denota o diâmetro de X;
- $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é o conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$ limitadas.

Introdução

Com o avanço da teoria e das técnicas nos mais distintos ramos da matemática, a exemplo da pesquisa desenvolvida em Equações Diferencias Parciais, alguns matemáticos se depararam com a necessidade de desenvolver e avançar nos estudos sobre objetos topológicos em espaços bem mais gerais do que os espaços Euclidianos $\mathbb{R}^N$. No século XX, o matemático Mauricie Frechét em sua tese entitulada ?Sur quelques points du calcut fonctionnel? contribuiu para o avanço da nova teoria, formulando conceitos como o de limite, continuidade e derivada para espaços de funções no qual surgiu um novo conceito abstrato de distância, que veio a ser denominada Espaços Métricos.

O conhecimento em espaços métricos é fundamental para compreensão de diversos métodos númericos e técnicas em vários ramos da pesquisa desenvolvida hoje, que é o caso das equações diferencias, uma vez que, alguns espaços de funções são vistos como espaços métricos e estes, são os ambientes naturais onde se busca a desejada solução para uma equação diferencial. Os conceitos e resultados desta teoria também mostram a sua importância no que tange a obtenção e demonstração de alguns resultados importantes, o qual destacamos o Teorema do ponto fixo de Banach, que faz uso das ferramentas desenvolvidas nos espaços métricos completos.

Um fato que torna o estudo de pontos fixos de funções interessantes é que podemos relaciona-las com zeros de funções auxiliares. Temos que um ponto fixo de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Com isto, se X é um espaço vetorial, defina $g : X \to X; g(x) = x - f(x)$, então temos que x_0 é uma raíz da função g se, e somente se, x_0 é um ponto fixo de f.

No decorrer do primeiro capítulo, abordaremos a introdução da noção de distância, também conhecida como métrica, com o objetivo de definir espaços métricos. Esses espaços são caracterizados por serem ambientes nos quais a ideia de distância entre elementos faz sentido. A exploração dos conceitos de bolas e esferas será de grande ajuda para compreendermos a ideia de continuidade em espaços métricos, onde agora temos uma noção clara de distância entre pontos. Além disso, esses conceitos nos fornecerão ferramentas para a definição de conjuntos abertos em espaços métricos.

No segundo capítulo, exploraremos os conceitos de funções contínuas, juntamente com as noções de conjuntos abertos e fechados. Em seguida, abordaremos o estudo das sequências em espaços métricos, com destaque para a sequência de Cauchy, que é um conceito relevante para a definição de espaços métricos completos. Finalizaremos com a definição de espaço de Banach, o qual nos conduzirá à demonstração do ponto fixo de Banach.

No terceiro capítulo, abordaremos a aplicação do teorema do ponto fixo de Banach em equações diferenciais, conhecido como Teorema de Picard, ou seja, demonstraremos que, para uma função contínua em um conjunto aberto, no qual a derivada parcial em relação à segunda variável também é contínua, a solução para o problema de valor inicial existe e é única.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Os espaços métricos são fundamentais na matemática, pois têm como objetivo formalizar e quantificar o conceito de distância entre pontos, através da métrica. Neste capítulo, abordaremos conceitos e resultados preliminares sobre espaços métricos, essenciais para compreendermos os resultados apresentados neste trabalho. Essa compreensão será crucial para o desenvolvimento de aplicações na área de equações diferenciais.

1.1 Conceitos iniciais

Definição 1.1. Uma métrica em num conjunto M, não vazio, é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par $(x, y) \in M \times M$, o número real $d(x, y)$, chamado de distância entre x e y. Tal que para todos $x, y, z \in M$ são satisfeitas as seguintes propriedades:

(1) $d(x, x) = 0$;

(2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

(3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2. Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em M.

Agora apresentaremos alguns exemplos de espaços métricos:

Exemplo 1.3. Métrica zero-um. Esse exemplo mostra que podemos munir qualquer conjunto com uma estrutura métrica. Seja M um conjunto não-vazio. Defina $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Vejamos que essa função satisfaz as propriedades de métrica:

(1) Note que se $x = y$ a distância é zero por definição.

(2) Note que se $x \neq y$ então a $d(x, y) = 1$, ou seja, é maior que zero.

(3) $d(x, y) = 1 = d(y, x)$, se $x \neq y$ e se $x = y$ temos $d(x, y) = 0 = d(y, x)$.

(4) Precisamos analisar os casos.
1º caso: Dados $x, y, z \in M$ tal que $x = y = z$, então $d(x, z) = d(x, y) = d(y, z) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ 0 &\leq 0 + 0. \end{aligned}$$

2º caso: Se $x = y$ e $x \neq z$, então $d(x, z) = 1, d(x, y) = 0\ e\ d(y, z) = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ 1 &\leq 0 + 1. \end{aligned}$$

3º caso: Se $x = z$ e $x \neq y$, então $d(x, z) = 0, d(x, y) = 1\ e\ d(y, z) = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ 0 &\leq 1 + 1. \end{aligned}$$

4º caso: Se $y = z$ e $y \neq x$, então $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1\ e\ d(y, z) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ 1 &\leq 1 + 0. \end{aligned}$$

5º caso: Se $x \neq y \neq z$, então $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1\ e\ d(y, z) = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ 1 &\leq 1 + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4. Seja (M, d) um espaço métrico. Todo subconjunto $S \subset M$ herda uma estrutura métrica de M . Para isto, basta definir:

$$\begin{aligned} d|_{S\times S} : S \times S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y), \end{aligned}$$

a restrição da função d a $S \times S$. Nesse caso, chamamos $d|_{S\times S}$ de métrica induzida em S.

Exemplo 1.5. A reta real $\mathbb{R}$ tem estrutura métrica se considerarmos a métrica:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = |x - y|. \end{aligned}$$

Está é chamada métrica usual da reta.

Exemplo 1.6. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ pode ser munido de diferentes métricas. Se $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, definimos as seguintes métricas em $\mathbb{R}^n$:

(1) $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$;

(2) $d_S(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$;

(3) $d_M(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\}$.

Pode-se dizer que as funções d, d_S *e* d_M: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são métricas. A métrica d é chamada de *métrica euclidiana*, d' de *métrica da soma* e d'' de *métrica do máximo*.

Proposição 1.7. *Sejam d, d_S e d_M as métricas definidas no Exemplo 1.6. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d_M(x,y) \leq d(x,y) \leq d_S(x,y) \leq n \cdot d_M(x,y).$$

Demonstração. Note que a primeira desigualdade é satisfeita, pois

$$\begin{aligned} d_M(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} =& |x_j - y_j|, \ \textit{para algum } j \in \{1, ..., n\} \\ =& \sqrt{(x_j - y_j)^2} \\ \leq& \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\ =& d(x,y). \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} d(x,y) =& \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\ \leq& \sqrt{(x_1 - y_1)^2} + ... + \sqrt{(x_n - y_n)^2} \\ =& |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\ =& d_S(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, a segunda desigualdade é satisfeita. E por fim, temos que

$$\begin{aligned} d_S(x,y) =& |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\ \leq& |x_j - y_j| + ... + |x_j - y_j| \\ =& n \cdot |x_j - y_j| \\ =& n \cdot \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} \\ =& n \cdot d_M(x,y). \end{aligned}$$

$\square$

Podemos observar com o exemplo a seguir que o conjunto das funções limitadas é um espaço métrico.

Exemplo 1.8. Seja X um conjunto denotamos por $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções reais limitadas de X, ou seja, o conjunto das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para as quais existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in X$. Definimos:

$$\begin{aligned} d : \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto d(f,g) = \sup_{x\in X} \{|f(x) - g(x)|\}. \end{aligned}$$

Temos que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico, pois toda norma induz uma métrica, veremos a seguir.

Definição 1.9. Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* em E é uma aplicação $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ que associa a cada vetor x o número real $\|x\|$ chamado a norma de x, satisfazendo:

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. Para quaisquer $x, y \in E$ temos que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemplo 1.10. Um espaço vetorial normado é um par $(E, \| \cdot \|)$, onde E é um espaço vetorial real e $\| \cdot \|$ é uma norma em E. Todo espaço vetorial normado é um espaço métrico se considerarmos sobre $E \times E$ a função $d(x,y) = \|x - y\|$. Neste caso, dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\| \cdot \|$.

Exemplo 1.11. Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função

$$\begin{aligned} \langle \cdot \, , \, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \langle \ x \ , \ y \ \rangle, \end{aligned}$$

tal que para todo $x', x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

(P_1) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$.

(P_2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

(P_3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(P_4) Se $x \neq 0$, então $\langle x, x\rangle > 0$.

Todo produto interno origina uma norma $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. A métrica Euclidiana é induzida por um produto interno.

1.2 Bolas e conjuntos limitados

Para introduzir a parte topológica nos espaços métricos, nessa seção iremos introduzir a noção de bolas e conjutos limitados.

Definição 1.12. Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:
A **bola aberta** de centro a e raio r, por:

$$B(a,r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

A **bola fechada** de centro a e raio r, por:

$$B[a,r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

A **esfera** de centro a e raio r, por:

$$S(a,r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Se X é um subespaço do espaço métrico M, para cada $a \in X$ e $r > 0$, definimos a bola de centro em a e raio r, relativamente à métrica induzida, $B_X(a,r)$ como:

$$B_X(a,r) = B(a,r) \cap X.$$
$$B_X[a,r] = B[a,r] \cap X.$$
$$S_X(a,r) = S(a,r) \cap X.$$

Exemplo 1.13. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$ pois a condição $|x-a| < r$ equivale a $-r < x-a < r$, ou seja, $a-r < x < a+r$. Analogamente, $B[a,r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a esfera $S(a,r)$ tem apenas dois pontos: $a-r$ e $a+r$.

Exemplo 1.14. Em $\mathbb{R}^2$, dependendo da métrica considerada, temos diferentes representações geométrias para as bolas abertas. Considerando em $\mathbb{R}^2$ a:

1. *Métrica euclidiana*, então se $a = (a_1, a_2)$

$$B(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\}.$$

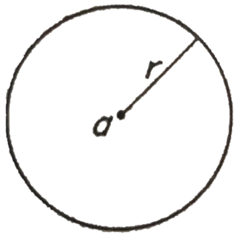
2. *Métrica da soma*, então:

$$B_S(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1-a_1| + |x_2-a_2| < r\}.$$

3. *métrica do máximo*, então:

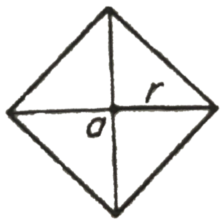
$$B_M(a,r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \max\{|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|\} < r\}.$$

Figura 1.1: Representação da bola aberta, $B(a,r)$ na métrica euclidiana



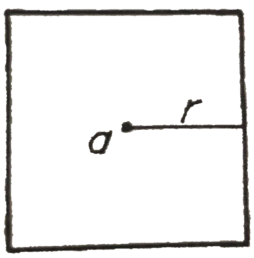
Fonte: Elon Lages Lima, 2009, pág.9

Figura 1.2: Representação da bola aberta, $B_S(a,r)$ na métrica da soma



Fonte: Elon Lages Lima, 2009, pág.9

Figura 1.3: Representação da bola aberta, $B_M(a,r)$ na métrica do máximo



Fonte: Elon Lages Lima, 2009, pág.9

Exemplo 1.15. No produto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, consideremos a métrica:

$$d(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i)\},$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ e d_i é a métrica em M_i. Então as bolas em M são produtos cartesianos das bolas em M_i, ou seja,

$$B(a, r) = B_{d_1}(a_1, r) \times B_{d_2}(a_2, r) \times ... \times B_{d_n}(a_n, r),$$

onde $a = (a_1, ..., a_n)$. De maneira análoga podemos definir a bola fechada no produto cartesiano.

Definição 1.16. Seja M um espaço métrico. Dizemos que um ponto $a \in M$ é *ponto isolado*, quando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) = \{a\}$. Isso significa que além do próprio a, não existem pontos de M a uma distância inferior a r.
Dizer que um ponto $a \in M$ *não é isolado* significa afirmar que para todo $r > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in M$ tal que $0 < d(a, x) < r$.

Dizemos que o espaço métrico M é *discreto* se todo ponto de M é isolado.

Exemplo 1.17. Em $\mathbb{Z}$, com a métrica induzida pela reta, todo ponto é isolado.
De fato, se $0 < r < 1$, então $B(n, r) = \{n\}; \forall n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, existem espaços métricos enumeráveis em que nem todos os seus pontos são isolados. Considere o espaço métrico $P = \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ com a métrica induzida pela reta. Note que 0 não é ponto isolado, pois dado $r < 0$, considerando $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$, teremos que $\frac{1}{n} \in B(0, r)$ e $\frac{1}{n} \neq 0$.

Proposição 1.18. *Seja M um espaço métrico e $a, b \in M$ com $a \neq b$. Sejam ainda $r, s > 0$ tais que*

$$r + s \leq d(a, b).$$

Então, $B(a, r) \cap B(b, s) = \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$. Então, $d(a, x) < r$ e $d(b, x) < s$. Dai,

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) < r + s \leq d(a, b).$$

O que é um absurdo. Portanto, sob estas condições temos que as bolas $B(a, r)$ e $B(b, s)$ são disjuntas. □

Definição 1.19. Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se existe $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$; para todo $x, y \in X$. Quando X for limitado, chamamos de diâmetro de X o número:

$$\text{diam}(X) = \sup \{d(x, y);\ x, y \in X\}.$$

Para indicar que X não é limitado, escreve-se $\text{diam}(X) = \infty$, quando isto ocorre é possível obter $c \in \mathbb{R}$, $x_c, y_c \in X$ tal que $d(x_c, y_c) > c$. É evidente que se X é limitado e $Y \subset X$, então Y é limitado, valendo $\text{diam}(Y) \leq \text{diam}(X)$.

Exemplo 1.20. Toda bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro é menor ou igual a $2r$. De fato, dados $x, y \in B(a, r)$

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r.$$

Pode acontecer de o diâmetro de $B(a, r)$ ser menor que $2r$. Por exemplo, em um espaço com a métrica zero-um, se $0 < r < 1$, então $\text{diam}(B(a, r)) = \text{diam}\{a\} = 0$.

Exemplo 1.21. Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B = B(a, r)$ tem diâmetro $2r$. De fato, com $\text{diam}(B(a, r)) \leq 2r$, basta mostrarmos que não existe $0 < s < 2r$, tal que $d(x, y) \leq s$, para todo $x, y \in B(a, r)$. Supondo, por contradição, que exista s, considere $t \in (s/2, r)$. Então para $y \neq 0$ qualquer, $x = \frac{t \cdot y}{||y||}$ tem norma t. Assim, $a - x, a + x \in B(a, r)$. Porém,

$$||(a + x) - (a - x)|| = ||2x|| = 2t > s.$$

Contradição. Logo, o diâmetro da bola é $2r$.

Proposição 1.22. *Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se, e somente se, $X \subset B(a, r)$ para algum $a \in M$ e $r > 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) De fato, se X é limitado, então pela definição, existe $c > 0$ tal que $d(y, x) \leq c$, para todo $x, y \in X$ fixando $y = a$ temos que $d(x, a) \leq c$; para todo $x \in X$. Logo, $X \subset B[a, c] \subset B(a, c + 1)$.
($\Leftarrow$) Se $X \subset B(a, r)$, então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r; \ \forall \ x, y \in X.$$

Logo, X é limitado. □

Exemplo 1.23. Se X e Y são limitados então $X \cup Y$ é limitado.
Fixemos um ponto $a \in X$ e um ponto $b \in Y$ tomaremos X, $Y \neq \emptyset$. Logo, existe $c > 0$ tal que $d(x, a) \leq c$ e $d(y, b) \leq c$; para todo $x \in X$ e $y \in Y$.
Tomando $k = 2c + d(a, b)$ temos para todo $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários:

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq c + d(a, b) + c = k.$$

A desigualdade $d(x, y) \leq k$ é evidente quando $x, y \in X$ ou $x, y \in Y$. Logo, vale $d(x, y) \leq k$ para x e y quaisquer em $X \cup Y$, o que mostra que $X \cup Y$ é limitado.

1.3 Distância de um ponto a um conjunto; distância entre dois conjuntos

Definição 1.24. Sejam a um ponto e X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Definiremos a *distância do ponto a ao conjunto X* como o número real:

$$d(a,X) = \inf_{x \in X} d(a,x).$$

1. $d(a,X) \leq d(a,x)$; para todo $x \in X$. Isso nos diz que o número $d(a,X)$ é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de a aos pontos de X.

2. Se $d(a,X) < c$ então existe $x \in X$ tal que $d(a,x) < c$. Isso nos diz que nenhum número maior do que $d(a,X)$ é cota inferior desse conjunto.

3. Se $c \leq d(a,x)$; para todo $x \in X$, então $c \leq d(a,X)$.

Proposição 1.25. *Em um espaço vetorial normado E, seja $B = B(a,r)$ a bola aberta de centro $a \in E$ e raio $r > 0$. Dado $b \in E$, tem-se:*

$$d(b,B) = 0 \Leftrightarrow b \in B[a,r].$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $d(b,B) = 0$, então se $b \in B$ nada há para provar. Se $b \notin B$, queremos mostrar que $d(b,a) = r$, ou seja, se ele não está no interior da bola, está na esfera.

$$0 = d(b,B) = \inf_{x \in B} d(b,x).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in d(b,x_n) \leq \frac{1}{n}$ e a $d(a,x_n) \leq r$, pois $x_n \in B[a,r]$,

$$\begin{aligned} d(b,a) \leq d(b,x_n) + d(x_n,a) &\leq \frac{1}{n} + r; \forall\, n \in \mathbb{N} \\ r \leq d(b,a) &\leq r \\ d(b,a) &= r. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $b \in B[a,r]$ *se* existe $(x_n) \subset B(a,r)$ tal que $x_n \to b$. Então,

$$0 \leq d(b,B) = \inf_{x \in B} d(b,x) = 0.$$

Logo, $d(b,B) = 0$. □

Proposição 1.26. *Sejam M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e um subconjunto não-vazio $X \subset M$ vale:*

$$|d(a,X) - d(b,X)| \leq d(a,b).$$

Demonstração. Vamos analisar a veracidade de $d(a, X) \leq d(a, b) + d(b, X)$. Sem perda de generalidade, supondo que $d(a, X) \geq d(b, X)$, para todo $x_0 \in X$, temos

$$\begin{aligned} d(a, X) \leq d(a, x_0) \leq d(a, b) + d(b, x_0) &\Rightarrow \\ d(a, X) - d(a, b) \leq d(b, x_0) &\Rightarrow \\ d(b, X) \geq d(a, X) - d(a, b) &\Rightarrow \\ d(a, b) \geq d(a, X) - d(b, X) &\Rightarrow \\ |d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b). \end{aligned}$$

□

Definição 1.27. Pode-se também definir, mais geralmente, a distância entre dois subconjuntos não-vazios $X, Y \subset M$. Considerando

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y), x \in X, y \in Y\}.$$

Exemplo 1.28. Para todo intervalo aberto $X = (a, b)$ na reta, tem-se $d(a, X) = d(b, X) = 0$. Dado um disco aberto $X = B(a, r)$ no plano $\mathbb{R}^2$, tem-se $d(b, X) = 0$ para todo ponto b da circunferência $S(a, r)$.

1.4 Isometrias

Definição 1.29. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita uma *imersão isométrica* se

$$d_N = (f(x), f(y)) = d_M(x, y); \forall x, y \in M.$$

Observação 1.30. Toda imersão isómetrica é injetiva. De fato, se $f(x) = f(y)$, então $d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y)) = 0$ o que implica que $x = y$. Quando uma imersão isométrica é também sobrejetora, então é dito que temos uma isometria.

Exemplo 1.31. Seja $\mathbb{R}^n$ com a métrica induzida por uma norma qualquer. Tomemos $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $||u|| = 1$.
A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $f(t) = a + tu$ é uma imersão isométrica da reta

em $\mathbb{R}^n$. Dados $s, t \in \mathbb{R}$ arbitrários, temos:

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) = ||f(s) - f(t)|| =& ||a + su - a + tu|| \\ =& ||su - tu|| \\ =& ||u(s-t)|| \\ =& ||u|||t - s| \\ =& 1 \cdot d(s,t). \end{aligned}$$

Definição 1.32. Seja (M, d) um espaço métrico, $X \subset M$ um conjunto qualquer e $f : X \longrightarrow M$ uma função injetiva. Podemos definir uma métrica em X, d_x por:

$$d_x(x, y) = d_M(f(x), f(y)).$$

Esta é a chamada métrica induzida por f em X.

Fixado $a \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $g(x) = x + a$, é uma isometria (cuja inversa é $y \mapsto y - a$), chamada translação pelo vetor a.
Também $h(x) = -x$ define uma isometria $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. As translações mostram que, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, existe uma isometria $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(a) = b$. Este fato se exprime dizendo que $\mathbb{R}^n$ é "metricamente homogêneo".

Exemplo 1.33. Concebendo $\mathbb{R}^2$ como o conjunto $\mathbb{C}$, fixemos um elemento $u = a + ib$, com $||u||^2 = a^2 + b^2 = 1$.
A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x) = u \cdot z$ é uma isometria.

$$\begin{aligned} d(f(z), f(w)) =& ||(f(w), f(z))|| = ||u.w - u.z|| \\ =& ||u|| \cdot ||w - z|| = ||w - z|| = d(z, w). \end{aligned}$$

Logo, f preserva distâncias.

Exemplo 1.34. Seja M limitado. Dada a aplicação $f : M \longrightarrow \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ pondo para cada $x \in M$, $f(x) = d_x$, onde:

$$\begin{aligned} d_x :& M \longrightarrow \mathbb{R} \\ d_x(y) =& d(x, y); \forall y \in M. \end{aligned}$$

Como a métrica d é limitada, cada função d_x é limitada. Dados $x, x', y \in M$ arbitrários. Temos $|d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x')$. Logo,

$$||d_x - d_{x'}|| = \sup_{y \in M} |d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x').$$

Tomando $y = x'$, obtemos $|d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x')$. Segue que $||d_x - d_{x'}|| = d(x, x')$, ou seja, $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$ assim f é imersão isométrica. Quando M não é limitado, definimos $g : M \to \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ pondo $d = d_x - d_a$, onde $a \in M$ está fixado.

$$||g|| = ||d_x - d_a|| \leq d(a, x).$$

Logo, g é limitada. Portanto $d(g(x), g(x')) = ||g(x) - g(x')|| = ||(d_x - d_a) - (d_{x'} - d_a)|| = ||d_x - d_{x'}|| = d(x, x')$. Logo, g é imersão isométrica.

Capítulo 2

Espaços métricos completos

Neste capítulo, nosso foco é abordar o conceito de espaços métricos completos, bem como algumas de suas propriedades, para que estejam aptos a enunciar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, para que esto seja possível, também se faz necessário a abordagem do conceito de pontos fixos de funções definidos em espaços vetoriais normados.

Para compreendrmos o conceito dos espaços métricos completos, é necessário estabelecermos algumas definições fundamentais, que serão tratadas inicialmente neste capítulo e serão úteis para os resultados e aplicações que serão desenolvidos ao longo do estudo.

2.1 Funções contínuas

Definição 2.1. Sejam M e N espaços métricos, $f : M \longrightarrow N$ uma função e $a \in M$. Dizemos que *f é contínua em a* se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$. Tal que $x \in M$ e $d_M(x, a) < \delta$ implica que $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
Equivalentemente, f é contínua em $a \in M$ se, para toda bola $B_N(f(a), \varepsilon) \subset N$, existir uma bola $B_M(a, \delta) \subset M$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Observação 2.2. A noção de continuidade em um ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto.
Se existir em M uma bola B, de centro a, tal que $f|_B$ seja contínua no ponto a, então $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto a.
Daí segue que se, para toda parte limitada $X \subset M$, $f|_X$ for contínua, então $f : M \longrightarrow N$ é contínua.

Definição 2.3. Dada $f : M \longrightarrow N$, se existe $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$; para todo $x, y \in M$, dizemos que f é uma função *Lipschitziana* e que c é a sua constante de Lipschitz.

Proposição 2.4. *Toda função lipschitziana é contínua.*

Demonstração. As funções lipschitzianas são contínuas pois, dado $\varepsilon > 0$, considerando $\delta = \varepsilon/c > 0$, temos:

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c.\delta < \varepsilon.$$

Assim, $d(f(x), f(a)) \leq c < c \cdot \delta < c \cdot \dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$ □

A definição a seguir desempenha um papel crucial na prova do teorema principal desse trabalho, o Teorema do ponto fixo de Banach.

Definição 2.5. Se $f : M \longrightarrow N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$ e $c \in (0, 1)$, dizemos que f é uma *contração*. Neste caso, f é lipschitziana e contínua.

Definição 2.6. Se $f : M \longrightarrow N$ é tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$ é uma *contração fraca*.

Observação 2.7. Note que uma contração fraca é uma aplicação lipschitziana com $c = 1$.

Exemplo 2.8. As aplicações constantes $f : M \longrightarrow N, f(x) = k \in N$, para todo $x \in M$, são contrações fracas.

Exemplo 2.9. As imersões isométricas são contrações fracas. Para cada $a \in M$ e cada $b \in N$, obtemos imersões isométricas,
$i_b : M \longrightarrow M \times N$ e $j_a : N \longrightarrow M \times N$, pondo $i_b(x) = (x, b)$ e $j_a(y) = (a, y)$.

Exemplo 2.10. Para cada $i = 1, ..., n$ a projeção $p_i : M_1 \times ... \times M_n \longrightarrow M_i$, definida por $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$, é uma contração fraca, se tomarmos no produto cartesiano qualquer uma das três métricas.
De fato, seja

$$\begin{aligned} p_1 : & M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \\ & (x_1, x_2) \mapsto p_1(x_1, x_2) = x_1. \end{aligned}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} d_1(p_1(x_1, x_2), p_1(y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) \leq & d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ = & d((x_1, x_2), (y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Exemplo 2.11. Se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda $f : M \longrightarrow N$ é contínua em a. Como a é isolado, então existe $\delta > 0$ tal que $B_M(a, \delta) = \{a\}$. Para $\varepsilon > 0$, considerando $x \in M$ e $d(x, a) < \delta$ temos que $x \in B(a, \delta) = \{a\}$ e assim $x = a$. Logo, $d(f(x), f(a)) = d(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$. Portanto, f é contínua em a.

Definição 2.12. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita *descontínua* em $a \in M$, se não for contínua em a, ou seja, se $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que, $\forall\ \delta > 0, \exists\ x_\delta \in B(a, \delta)$ tal que $f(x_\delta, a) < \delta$, mas $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Proposição 2.13. *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais especificamente, se $f : M \longrightarrow N$ é contínua em $a \in M$ e $g : N \longrightarrow P$ é contínua em $f(a) \in N$, então $g \circ f : M \longrightarrow P$ é contínua em a.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como g é contínua em $f(a)$, então existe $\eta > 0$ tal que, $y \in N$.

$$d_N(y, f(a)) < \eta \Rightarrow d_P(g(y), g(f(a))) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Como f é contínua em a, para $\eta > 0$ acima existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \eta. \tag{2.2}$$

Logo, por (2.1) e (2.2) temos:

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \eta \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em a. $\square$

Corolário 2.14. *Toda restrição de uma aplicação contínua, é contínua, ou seja, se $f : M \longrightarrow N$ é contínua e $X \subset M$, então $f|_X$ é contínua.*

$$\begin{aligned} f|_X : X &\longrightarrow N \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Com efeito, seja

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow M \\ x &\mapsto i(x) = x, \end{aligned}$$

então, note que $f|_X = f \circ i$ e pela proposição anterior, $f|_X$ é contínua.

Proposição 2.15. *$g : M \longrightarrow N_1 \times N_2$ é contínua se, e somente se, suas funções coordenadas, $g_1 : M \longrightarrow N_1$ e $g_2 : M \longrightarrow N_2$ o são.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se g for contínua, então g_1 e g_2 também serão, pois $g_1 = p_1 \circ g$ e $g_2 : p_2 \circ g$, onde $p_i : N_1 \times N_2 \longrightarrow N_i$ é a i-ésima projeção. As projeções são contínuas.
($\Leftarrow$) Se g_1 e g_2 forem contínuas em $a \in M$, então dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} d_M(x, a) < \delta_1 &\Rightarrow d_{N1}(g_1(x), g_1(a)) < \varepsilon, \\ d_M(x, a) < \delta_2 &\Rightarrow d_{N2}(g_2(x), g_2(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que:

$$d_M(x,a) < \delta \;\Rightarrow\; d(g(x), g(a)) = \max\{d(g_1(x), g_1(a)), d(g_2(x), g_2(a))\} < \varepsilon.$$

$\square$

2.1.1 Homeormorfismo

Exemplo 2.16. Seja $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ munido da métrica induzida pela métrica de $\mathbb{R}^2$. A função $f : [0, 2\pi] \longrightarrow S^1$ dada por $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ é contína, pois suas funções coordenadas o são. Ainda f é bijetiva. Mostraremos agora que a sua inversa $g : S^1 \longrightarrow [0, 2\pi]$ é uma função descontínua em $P = (1,0) = f(0)$. De fato, note que $g(0) = 0$ e seja $\varepsilon = \pi$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n = 2\pi - \frac{1}{n}$ e $z_n = f(t_n)$. Observe então que $|z_n - p| < \frac{1}{n}$, enquanto:

$$|g(z_n) - g(p)| = |2\pi - \frac{1}{n} - 0| = |2\pi - \frac{1}{n}| > \pi = \varepsilon.$$

Logo, g não é contínua.

No exemplo acima podemos observar que nem toda bijeção contínua tem inversa cotínua.

Definição 2.17. Sejam M e N espaços métricos, um *homeomorfismo* de M em N é uma bijeção $f : M \longrightarrow N$ contínua, cuja inversa é contínua de N em M. Nesse caso, dizemos que M e N são homeomorfos.

Dois espaços métricos que são homeomorfos não podem ser diferenciados do ponto de vista topológico. Uma característica de um espaço métrico que permanece inalterada sob um homeomorfismo é conhecida como uma propriedade topológica. Aquelas propriedades que são invariantes sob isometrias são chamadas de propriedades métricas. Dado que toda isometria também é um homeomorfismo, é possível afirmar que todas as propriedades métricas também são propriedades topológicas. Contudo, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2.18. a) Se M é homeomorfo a N e M é discreto, então N é discreto.
De fato, se $f : N \longrightarrow M$ é um homeomorfismo e $f(a) \in M$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a), \varepsilon) = \{f(a)\}$.
Para esse $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) = \{f(a)\}.$$

Ou seja, $B(a,\delta)$ é formada apenas pelo ponto $\{a\}$ uma vez que f é injetiva. Logo N também é discreto.

b) O gráfico de uma aplicação contínua é homeomorfo ao seu domínio.
De fato, seja $f : M \longrightarrow N$ contínua. O gráfico de f é o subconjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in M \times N;\ x \in M\}.$$

Note que a aplicação:

$$\begin{aligned} f\ &: M \longrightarrow G(f) \\ &x \mapsto (x, f(x)), \end{aligned}$$

é contínua, pois suas funções coordenadas o são.
Ainda, sua inversa é:

$$\begin{aligned} \pi : G(f) &\longrightarrow M \\ (x, f(x)) &\mapsto x, \end{aligned}$$

a qual é contínua por ser a restrição de

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\longrightarrow M \\ (x, y) &\mapsto x, \end{aligned}$$

ao conjunto $G(f)$. Portanto, π é um homeomorfismo entre $G(f)$ e M.
c) Uma aplicação injetiva $f : M \longrightarrow N$ que é um homeomorfismo de M sobre sua imagem $f(M)$ chama-se uma imersão topológica. A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (t, t^2)$ é uma imersão topológica da reta no plano.
Com efeito, a inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(t, t^2) = t$ é a restrição a $f(\mathbb{R})$ da projeção $p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.1.2 Métricas equivalentes

Definição 2.19. Seja M um conjunto e consideramos os espaços métricos (M, d_1) e (M, d_2). Dizemos que a métrica d_1 é mais fina que d_2, denotada por $d_1 \succ d_2$, se a aplicação identidade:

$$\begin{aligned} i_{1,2} : (M, d_1) &\longrightarrow (M, d_2) \\ x &\mapsto i(x) = x, \end{aligned}$$

for contínua. Equivalentemente, $d_1 \succ d_2$ se, dado $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $B_{d_1}(a, \delta) \subset B_{d_2}(a, \varepsilon)$.

Definição 2.20. Duas métricas d_1 e d_2 em um espaço métrico M, são ditas equivalentes quando cada uma delas é mais fina que a outra, ou seja, quando:

$$\begin{aligned} i_{1,2} : (M, d_1) &\longrightarrow (M, d_2) \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

for um homeomorfismo. Nesse caso, denotamos $d_1 \sim d_2$.

Vejamos agora alguns resultados importantes a respeito de métricas equivalentes.

Proposição 2.21. *Se existirem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2.d_1(x,y)$;para todo $x, y \in M$, então d_1 e d_2 são equivalentes em M.*

Demonstração. De fato, nesse caso, a aplicação identidade bem como sua inversa, são lipschitzianas, e portanto, contínuas. □

Proposição 2.22. *Sejam (M, d_1) e (M, d_2) espaços métricos. São equivalentes:*
1. $d_1 \sim d_2$;
2. $f : M \longrightarrow N$ *é continua segundo* d_1 *se, e somente se, o for com respeito a* d_2.

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Seja $f : M \longrightarrow N$ e suponha que seja continua com respeito a d_1. Então, dada $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Como $d_1 \sim d_2$, existe $\eta > 0$ tal que $B_{d_2}(a, \eta) \subset B_{d_1}(a, \delta)$, logo:

$$f(B_{d_2}(a, \eta)) \subset f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Assim, f é contínua com respeito a d_2. Analogamente, mostra-se que se f for continua com respeito a d_2 tambem o será com respeito a d_1.
$(2 \Rightarrow 1)$

$$\begin{aligned} i_1 : M_1 &\longrightarrow M_1 \\ x &\mapsto i_1(x) = x. \end{aligned}$$

é contínua, em que $M_1 = (M, d_1)$.
Sendo $d(x,y) < \delta$, $\delta = \varepsilon$ é continua. Por hipótese, $i_{2,1} : M_2 \longrightarrow M_1$ é contínua. Logo $i_2 \succ i_1$. Analogamente para o outro caso. □

Proposição 2.23. *A aplicação injetiva $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ é contínua se, e somente se, a métrica d_M é mais fina do que a métrica d_1, induzida em M por f.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Temos $d_1(x,y) = d_N(f(x), f(y))$. Por d_M ser mais fina que d_1, definimos $i_{M_1} : (M, d_M) \longrightarrow (M_1, d_1)$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ vai existir $\delta > 0$ tal que $d_M(x,y) < \delta$ então $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Note que, $d_1(x,y) = d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$, assim se $d_M(x,y) < \delta$, temos i contínua.
$(\Leftarrow)$ Por i ser contínua, temos que dado $a \in M$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x,y) < \delta$ então $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$, com $d_N(f(x), f(y)) = d_1(x,y)$, ou seja, $B_{d_M}(a, \delta) \subset B_{d_1}(a, \varepsilon)$. Logo, d_M é mais fina que d_1. □

Proposição 2.24. *A bijeção $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ é um homeomorfismo se, e somente se, a métrica d_M é equivalente a métrica d_1, induzida em M por f.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) $d_1 \sim d_M$, com $d_1(x, y) = d_N(f(x), f(y))$. Tome $i : (M, d_M) \longrightarrow (M_1, d_1)$ sendo contínua. Pela proposição anterior, sabemos que f é contínua, basta mostrar que f^{-1} é contínua. Temos, $f^{-1} : N \longrightarrow M$. Então, $i_{M_1} : M_1 \longrightarrow M$ contínua. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que se $d_1(x, y) < \eta$ isto implica em $d_M(x, y) < \varepsilon$. Tomando $x = f^{-1}(u)$ e $y = f^{-1}(v)$, então $d_M(f^{-1}(u), f^{-1}(v))$. Assim, $d_N(u, v) < \sigma$ então $d_M(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) < \varepsilon$. Tomando $\sigma = \eta$, temos

$$d_N(u, v) = d_N(f(x), f(y)) = d_1(x, y) < \eta$$

Logo é contínua e portanto homeomorfismo.
($\Leftarrow$) Temos $d_M(x, y) \leq d_M(x, y) + d_N(f(x), f(y)) = d_f(x, y)$. Logo, $d_1 \succ d_M$. Considerando,

$$\begin{aligned} g :& M \longrightarrow M \times N \\ & x \mapsto g(x) = (x, f(x)), \end{aligned}$$

g contínua e injetora, então temos $d_1|_g = d((x, f(x)), (y, f(y))) = d_M(x, y) + d_N(f(x), f(y)) = d_f$. Logo, $d_M > d_f$. E portanto, $d_M \sim d_1$, pois d_1 é induzida por f. $\square$

Corolário 2.25. *A aplicação $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ é contínua se, e somente se, a métrica $d_f : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d_f(x, y) = d(x, y) + d_N(f(x), f(y)$ é equivalente a d.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Observe que, $d_M(x, y) \leq d_M(x, y) + d_N(f(x), f(y)) = d_f(x, y)$. Logo $d_f > d_M$. Por outro lado, considere

$$\begin{aligned} g :& M \longrightarrow M \times N \\ & x \mapsto g(x) = (x, f(x)). \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \check{d} :& (M \times N) \times (M \times N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \check{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_f(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Por g ser injetora e contínua, então pela Proposição (2.23), d_M é mais fina do que $\check{d}$ implica $d_M \succ \check{d} = d_M + d_f \succ d_f$.
($\Leftarrow$) Sejam $x, y \in M$, então

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(y)) \leq & d_M(x, y) + d_N(f(x), f(y)) \\ = & d_f(x, y) \\ \leq & d_M(x, y). \end{aligned}$$

Ou seja, é contração fraca, e portanto é contínua. □

Exemplo 2.26. Se existir $c > 0$ tal que $d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y)$, então $d_1 > d_2$. De fato, nesse caso,

$$i_{1,2} : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$$
$$x \mapsto x,$$

será lipschitziana, e portanto, contínua. Note que, $d_2(i_{1,2}(x), i_{1,2}(y) = d_2(x, y)) \leq c \cdot d_1(x, y)$; para todo $x, y \in M$.

Exemplo 2.27. Em $\mathbb{R}$, as métricas d, d' *e* d'' são equivalentes. De fato, é consequência da Proposição 1.7:

$$d''(a, x) \leq d(a, x) \leq d'(a, x) \leq n \cdot d''(a, x).$$

O que prova que dado $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, então

$$B_{d''}(a, r) \subset B_d(a, r) \subset B_{d'}(a, r) \subset B_{d''}(a, n \cdot r).$$

2.1.3 Transformação linear

Definição 2.28. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação $f : E \longrightarrow F$ chama-se uma *transformação linear* quando, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos :

$$f(x, y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

Daí, resulta que:

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + ... + \lambda_n \cdot f(v_n).$$

Se for $F = \mathbb{R}$, diremos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear.

Observe que toda transformação linear $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow F$, definida em $\mathbb{R}^m$ e tomando valores num espaço vetorial normado F qualquer, é contínua.

Em termos de base canônica $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_m = (0, ..., 0, 1)$, todo vetor $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ se escreve como: $x = x_1 \cdot e_1 + ... + x_m \cdot e_m$. Então, $f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + ... + x_m \cdot f(e_m)$ e portanto $|f(x)| \leq |x_1||f(e_1)| + ... + |x_m||f(e_m)|$. Tomando $c = \max\{|f(e_1)|, ..., |f(e_m)|\}$, temos $|f(x)| \leq c \cdot (|x_1| + ... + |x_m|)$.

Usando em $\mathbb{R}^m$, a norma: $||x||_S = |x_1| + ... + |x_m|$, temos : $|f(x)| \leq c \cdot ||x||; \forall x \in \mathbb{R}^m$.

Para x, y arbitrários, vale que:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq c \cdot |x - y|.$$

Logo, f é lipschitiziana, ou seja, é contínua.

Exemplo 2.29. Nem todo funcional linear é contínuo. Seja E o conjunto dos polinômios reais com uma variável. E é um espaço vetorial, no qual definiremos a norma $||p|| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} ||p(x)||$. Seja agora $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = p(2)$, f é um funcional linear, mas f não é contínua. Com efeito, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um polinômio p_n, com $p_n(x) = (\frac{x}{2})^n$ tal que $||p_n - 0|| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ mas $|f(p_n) - f(0)| = |f(p_n)| = 1 > \varepsilon$.

Proposição 2.30. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f : E \longrightarrow F$ são equivalentes.*
(1) f é contínua;
(2) f é contínua no ponto $0 \in E$;
(3) existe $c > 0$ tal que $||f(x)|| \leq c \cdot ||x||; \forall x \in E$;
(4) existe $c > 0$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq c \cdot ||x - y||$ para quaisquer $x, y \in E$.

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Segue diretamente da definição.
$(2 \Rightarrow 3)$ Sendo f contínua no ponto 0, com $f(0) = 0$, tomamos $\varepsilon = 1$ e obtemos $\delta > 0$ tal que $||x|| < \delta \Rightarrow ||f(x)|| < 1$. Seja c qualquer número tal que $0 < 1/c < \delta$.
Se $x = 0, ||f(x)|| \leq c \cdot ||x||$ é evidente. Se $x \neq 0$, então $\frac{x}{c\cdot||x||}$ tem norma $\frac{1}{c}$, portanto menor que δ. Logo, $||f\left(\frac{x}{c\cdot||x||}\right)|| < 1$. Como f é linear, isto nos dá, $\frac{1}{c\cdot||x||} \cdot ||f(x)|| < 1$, ou seja, $||f(x)|| < c||x||$.
$(3 \Rightarrow 4)$ Por f ser linear e $||f(x)|| \leq c \cdot ||x||$ implica que

$$||f(x) - f(y)|| = ||f(x - y)|| \leq c \cdot ||x - y||.$$

$(4 \Rightarrow 1)$ Por ser lipschitiziana, é contínua. □

De acordo com a Proposição 2.30, as transformações lineares contínuas $f : E \longrightarrow F$ são precisamente aquelas que são limitadas na esfera unitária $S = \{x \in E; ||x|| = 1\}$ do espaço E.

Indica-se com $L(E, F)$ o conjunto das transformações lineares contínuas de E em F. Evidentemente, $L(E, F)$ é um espaço vetorial em relação as operações:

$$(f + g) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

pois se $f, g : E \longrightarrow F$ são contínuas, então $f + g$ e $\alpha \cdot f$ também são. $L(E, F)$ possui uma norma natural, definida por $||f|| = \sup\{||f(x)||; x \in E, ||x|| = 1\}$, ou seja, $||f|| = \sup\limits_{x\in S}\{||f(x)||\}$.

Definição 2.31. Sejam $E_1, E_2, ..., E_n, F$ espaços vetoriais. Uma aplicação $f : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ chama-se n-linear quando é linear separadamente em cada uma das suas n

variáveis. Isso significa que, para cada $i = 1, 2, ..., n$, tem-se:

$$f(x_1, ..., x_i + y_i, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + f(x_1, ..., y_i, ..., x_n),$$

$$f(x_1, ..., \lambda \cdot x_i, ..., x_n) = \lambda \cdot f(x_1, ..., x_i, ..., x_n).$$

sejam quais forem $x_1 \in E_1, ..., x_i$ e $y_1 \in E_i, ..., x_n \in E_n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se algum $x_i = 0$ então, pela segunda condição (com $\lambda = 0$), tem-se $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Proposição 2.32. *Sejam E, F, G espaços vetoriais normados e $f : E \times F \longrightarrow G$ uma aplicação bilinear. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) f é contínua;
(2) f é contínua no ponto $(0, 0) \in E \times F$;
(3) Existe $c > 0$ tal que $||f(x, y)|| \leq c \cdot ||x|| \cdot ||y||; \forall x \in E$ e $y \in F$;
(4) f é lipschitziana em cada parte limitada de $E \times F$.

Demonstração. As ideias são análogas às da prova da Proposição (2.30). □

Corolário 2.33. *Seja F um espaço vetorial normado. Toda aplicação bilinear $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F$, definida num par de espaços euclidianos é contínua.*

Demonstração. Sejam $\{e_1, ..., e_m\}$ e $\{e'_1, ..., e'_n\}$ as bases canônicas do $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Dados

$$\sum_i x_i \cdot e_i \ e \ \sum_j x_j \cdot e'_j$$

temos

$$f(x, y) = \sum_{i \cdot j} x_i \cdot y_j \cdot f(e_i, e'_j).$$

Tomando $c = \max\{|f(e_i, e'_j)|\}$. Temos em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, $||x|| = \sum_i |x_i|$ e $||y|| = \sum_j |y_j|$ valendo $||x|| \cdot ||y|| = \sum_{i,j} |x_i|\ |y_j|$. Temos então,

$$\begin{aligned} ||f(x, y)|| \leq & \sum_{i,j} |x_i|\ |y_j|\ |f(e_i, e'_j)| \\ \leq & c \cdot \sum |x_i|\ |y_j| \\ = & c \cdot ||x|| \cdot ||y||;\ \forall x \in \mathbb{R}^m \ e \ y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo, f é contínua. □

Exemplo 2.34. A multiplicação por um escalar, $m : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, onde $m(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot x$ é bilinear. Também todo produto interno $p : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(x, y) = \langle x, y \rangle$ é bilinear.

2.2 Conjutos abertos e fechados

Dando continuidade a parte topólogica temos as definições de conjuntos abertos e fechados.

Definição 2.35. Seja $X \subset M$, onde M é um espaço métrico. Um ponto $a \in X$ é dito um *ponto interior* a X, se existir $r > 0$, tal que $B(a, r) \subset X$.
Ao conjunto dos pontos interiores a X, denominamos *interior* de X, denotado por intX.
Dizer que $a \in X$ não é interior a X é dizer que para todo $r > 0$, existe $x \in B(a, r)$, com $x \notin X$.

Definição 2.36. A *fronteira* de X em M é o conjunto, formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.

Exemplo 2.37. O interior do intervalo $[0, 1)$ na reta é o intervalo aberto $(0, 1)$ e sua fronteira consta dos pontos 0 e 1 apenas. De fato, se $a \in (0, 1)$ então sendo $r = \min\{a - 0, 1 - a\}$, temos que $(a - r, a + r) \subset [0, 1)$ e portanto $a \in \text{int}[0, 1)$. Ainda, $0 \in \partial[0, 1)$, pois para todo $\varepsilon > 0, (-\varepsilon, \varepsilon) \cap [0, 1) \neq \varnothing$ e $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{R} - [0, 1) \neq \emptyset$.
$1 \in \partial[0, 1)$ pois para todo $\varepsilon > 0, (-\varepsilon, \varepsilon) \cap [0, 1) \neq \varnothing$ e $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{R} - [0, 1) \neq \emptyset$.

Exemplo 2.38. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. O interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio. Com efeito, para todo $q \in \mathbb{Q}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem irracionais em $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$. Logo, $(q - \varepsilon, q + \varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$.

Observação 2.39. As noções de interior e fronteira são relativas, isto é, dependem do espaço métrico M no qual se considera X imerso.
Por exemplo, $\partial[0, 1) = \{0, 1\}$ em $\mathbb{R}$, porém considerando $[0, 1)$ como subconjunto do espaço métrico $(-2, 1)$, temos que: De fato, $1 \notin \partial[0, 1)$ em $(2, 1)$ pois dado $\varepsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned} D(1, \varepsilon) &= B(1, \varepsilon) \cap (-2, 1) \\ &= (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \cap (-2, 1) \\ &= (1 - \varepsilon, 1), \end{aligned}$$

onde $D(x, \mathbb{R})$ representa a bola centrada em x e de raio r, em $(-2, 1)$. Assim, $D(1, \varepsilon) \cap \{(-2, 1) - [0, 1)\} = \varnothing$.

Definição 2.40. Um subconjunto A de um espaço métrico M é dito *aberto* em M se todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int}A = A$.

Exemplo 2.41. Um espaço métrico é sempre aberto em si mesmo. Seja $x \in M$, então $B_M(x, 1) \subset M \Rightarrow x \in \text{int}M \Rightarrow \text{int}M = M$.

Exemplo 2.42. Em todo espaço métrico M, o complementar de uma bola fechada $B[a, r]$ é um conjunto aberto $A = M - B[a, r]$.
Seja $c \in A$, então $d(a, c) > r$. Considerando $s > 0$, tal que $s < d(a, c) - r$. Observe que, $B(c, s) \subset A$. De fato, $x \in B(c, s)$ implica em $d(x, c) < s$, portanto $d(x, c) - s < 0$. Assim, $r < d(a, c) - s \leq d(a, x) + d(x, c) - s < d(a, x)$, ou seja, $r < d(a, x)$. Assim, $x \in A = M - B[a, r]$. Logo, A é aberto.

Proposição 2.43. *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Tomando $x \in B(a, r)$, temos que $d(a, x) < r$ e sendo assim, considerando $s = r - d(a, x) > 0$. Seja $y \in B(x, s)$, temos $d(y, x) < s$. Assim,

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq d(y, x) + d(x, a) \\ &< r - d(a, x) + d(x, a) \\ &= r. \end{aligned}$$

Assim, $B(x, s) \subset B(a, r)$ e então $y \in B(a, r)$. Isso nos diz que $B(a, r)$ é um conjunto aberto. $\square$

Observação 2.44. Pela definição de conjunto aberto vemos que $\text{int}X$ é o maior subconjunto aberto de X, ou seja, se $A \subset X$ é um aberto, então $A \subset \text{int}X$.

Corolário 2.45. *Para todo $X \subset M$, $\text{int}X$ é aberto em M.*

Demonstração. Seja $Y = \text{int}X$. Y é aberto, se $\text{int}Y = Y$. Seja $y \in Y$ implicando em $y \in \text{int}X$ então existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset X$. Seja $x \in B(y, r)$ assim existe $s > 0$ tal que $B(x, s) \subset B(y, r) \subset X$ o que implica $x \in \text{int}X$. Portanto, $x \in Y$. $\square$

Proposição 2.46. *Seja $\mathcal{U}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M. Então:*

1. *$M \in \mathcal{U}$ e $\emptyset \in \mathcal{U}$;*
2. *Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{U}$ então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{U}$, ou seja, a interseção finita de abertos é um conjunto aberto;*
3. *Se $A_\lambda \in \mathcal{U}, \forall\ \lambda \in L$ então $A = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{U}$.*

Demonstração. 1. $M \in \mathcal{U}$ é verdade, pois um espaço métrico é sempre aberto em si mesmo. Como o vazio não tem nenhum elemento não tem como considerar um ponto e mostrar que ele não é interior, logo não temos como provar que a afirmação é falsa, logo é aberto por vacuidade.

2. Sejam $A_1, ..., A_n \in \mathcal{U}$. Seja $a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Por serem conjntos abertos, existem $r_1, ..., r_n > 0$ de forma que $B(a, r_1) \subset A_1, ..., B(a, r_n) \subset A_n$. Seja $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$.

$$B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset A_1$$
$$\vdots$$
$$B(a, r) \subset B(a, r_n) \subset A_n$$

Ou seja, $B(a, r) \subset A_1 \cap ... \cap A_n$. E por definição, $A_1 \cap ... \cap A_n$ é aberto.

3. Seja $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, então a é interior a A_{λ_0}, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Portanto, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é conjunto aberto.

□

Exemplo 2.47. Para a interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Em $\mathbb{R}$, $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n})$ não é um conjunto aberto.

Corolário 2.48. *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como A é aberto, então para cada $x \in A$ podemos obter uma bola aberta B_x de forma que $x \in B_x \subset A$. Logo, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$. Logo, todo aberto é uma reunião de bolas abertas.
($\Leftarrow$) Se $A = \bigcup B_\lambda$ é uma reunião de bolas abertas, então A é aberto em M, pela Proposições 2.46. □

Proposição 2.49. *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \longrightarrow N$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto em M, para todo aberto $A \subset N$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que f seja contínua e $A \subset N$ aberto. Queremos mostrar que $f^{-1}(A)$ é aberto. Seja $a \in f^{-1}(A)$ então $f(a) \in A$ e A é aberto. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a),\ \varepsilon) \subset A$. Como f é contínua em a, então existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset A$, implicando que existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A)$, assim $f^{-1}(A)$ é aberto.
($\Leftarrow$) Suponha que $f^{-1}(A)$ seja aberto em M, para todo aberto $A \subset N$ tome $a \in M$ precisamos mostrar que f é contínua em a. Seja $\varepsilon > 0$, e note que $B(f(a), \varepsilon)$ é aberto em $\mathbb{N}$, por hipótese. Sabendo que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ é aberto em M. Logo, $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Como a é interior, então existe $\delta > 0$, $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ de onde temos que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Logo, f é contínua em a. □

Observe que, pelo resultado anterior, podemos estabelecer uma relação entre continuidade e os abertos de um espaço, mesmo que não exista uma métrica envolvida. No caso dos espaços métricos, o que importa é a coleção dos abertos aos quais a métrica da origem, ou seja, a topologia induzida pela métrica.

Corolário 2.50. *O produto cartesiano $A_1 \times ... \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é um subconjunto aberto de $M = M_1 \times ... \times M_n$.*

Demonstração. Como a projeção

$$\pi_1 : M_1 \times ... \times M_n \longrightarrow M_i$$
$$(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i,$$

é uma aplicação contínua. Logo, $\pi_1^{-1}(A_i)$ é aberto em $M_1 \times ... \times M_n$. Como $A_1 \times ... \times A_n = \pi_1^{-1}(A_i) \cap ... \cap \pi_n^{-1}(A_n)$, então $A_1 \times ... \times A_n$ é aberto em M_i. □

Corolário 2.51. *Sejam $f_1, ..., f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais contínuas. O conjunto A, formado pelos pontos $\{x \in M;\ f_1(x), ..., f_n(x) > 0\}$ é aberto em M.*

Demonstração. Definindo $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$, logo f é contínua. Note que, $A = f^{-1}(B)$, com $B = (0, +\infty) \times ... \times (0, +\infty)$ e B é aberto em $\mathbb{R}^n$. Logo, A é aberto em M. □

Corolário 2.52. *Sejam $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas. O conjnto $A = \{x \in M;\ f(x) \neq g(x)\}$ é aberto em M.*

Demonstração. Definindo $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$, logo φ é contínua pois observe que $A = \varphi^{-1}((0, +\infty))$, pois $x \in A$ se, e somente se, $\varphi(x) > 0$. Logo, A é aberto em M. □

Definição 2.53. Uma função $f : M \longrightarrow N$ tal que $f(A)$ é aberto em N, para todo aberto $A \subset M$ é chamada de uma *aplicação aberta*.

Proposição 2.54. *Um subconjunto $A \subset M \times N$ é aberto se, e somente se, é reunião de "retângulos" $U \times V$, onde $U \subset M$ e $V \subset N$ são abertos.*

Demonstração. (⇒) Como $A \subset M \times N$ é aberto, tomemos em $M \times N$ a métrica

$$\delta[(x, y), (x', y')] = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}.$$

Logo, para cada $z \in A$, existem bolas abertas $U_z \subset M$ e $V_z \subset N$ tal que $z \in U_z \times V_z \subset A$, ou seja, $\{z\} \subset U_z \times V_z \subset A$. Tomando, $A = \bigcup_{z \in A} \{z\} \subset \bigcup_{z \in A} U_z \times V_z \subset A$ e portanto $A = \bigcup U_z \times V_z$.
(⇐) Seja $A = \bigcup_{\lambda} U_\lambda \times V_\lambda$ onde, para cada $\lambda, U_\lambda \subset M$ e $V_\lambda \subset N$ são abertos, logo A é reunião de abertos pela Proposição 2.46 e então é aberto. □

Definição 2.55. Um ponto a diz-se *aderente* a um subconjunto de X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Também vale:

(1) Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$;

(2) Para todo aberto A contendo a, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$;

(3) Toda vizinhança de a tem pontos em comum com X.

Definição 2.56. Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Definimos o *fecho* de X, denotado por $\overline{X}$, ao conjunto dos pontos aderentes a X.

Observação 2.57. Note que $\overline{M} = M$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e ainda temos que $X \subset \overline{X}$, para todo $X \subset M$.

Exemplo 2.58. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos da fronteira também são aderentes a X.

Definição 2.59. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se *denso* em M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X, ou ainda, para cada aberto não-vazio A em M, tem-se que $A \cap X \neq \emptyset$.

Exemplo 2.60. O conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. O conjunto dos irracionais também é denso na reta.

Exemplo 2.61. Se $X \subset M$ e $Y \subset N$ são subconjuntos densos, então $X \times Y$ é denso no produto cartesiano.
De fato, se pegarmos $A \subset M \times N$ sendo A aberto não-vazio. Assim A contém um aberto $U \times V$ que pela Proposição 2.54 temos $U \subset M \text{ e } V \subset N$ abertos. Por X e Y serem densos em $M \text{ e } N$, existe $x \in U \cap X \text{ e } y \in V \cap Y$. Então, $w = (x, y) \in (U \times V) \cap (X \times Y)$ e logo $w \in A \cap (X \times Y)$. Portanto, $X \times Y$ é denso em $M \times N$.

Proposição 2.62. *Para todo ponto a e todo subconjunto não-vazio X num espaço métrico M, tem-se:*

$$d(a, X) = d(a, \overline{X}).$$

Demonstração. Sabendo que $X \subset \overline{X}$, então $d(a, \overline{X}) \leq d(a, X)$. Suponha, por contradição, que $d(a, \overline{X}) < d(a, X)$. Considerando $m \in \mathbb{R}$ de forma que $d(a, \overline{X}) < m < d(a, X)$. Então, existe $\bar{x} \in \overline{X}$ tal que $d(a, \bar{x}) < m$. Tomando $\varepsilon = m - d(a, \bar{x}) > 0$, então existe $x \in X$ onde $d(x, \bar{x}) < \varepsilon$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(a, x) \leq & d(a, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) \\ < & d(a, \bar{x}) + \varepsilon \\ < & d(a, \bar{x}) + m - d(a, \bar{x}) = m. \end{aligned}$$

Logo, $d(a, X) < m$, contradição. Portanto, $d(a, X) = d(a, \overline{X})$. □

Corolário 2.63. *Para todo subconjunto* $X \subset M$*, tem-se* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração. Se $a \in \overline{\overline{X}}$, então $d(a, \overline{X}) = 0 \Rightarrow d(a, X) = 0$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Logo, $a \in \overline{X}$ e então $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$. □

Definição 2.64. Diz-se que um conjunto $F \subset M$ é *fechado* no espaço métrico M quando seu complementar $M - F$, é aberto em M.

Exemplo 2.65. Num espaço métrico M, toda bola fechada $B[a, r]$ é um subconjunto fechado de M, pois seu complementar é aberto.

Proposição 2.66. *Dado* $F \subset M$*, tem-se* $\overline{F} = F$ *se, e somente se,* F *é fechado.*

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned} F = \overline{F} &\Leftrightarrow \text{ todo } a \in M - F \text{ não é aderente a } F; \\ &\Leftrightarrow \text{ todo } a \in M - F, \ \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } \ B(a, \varepsilon) \subset M - F; \\ &\Leftrightarrow \text{ todo } a \in M - F \text{ é ponto interior a } \ M - F; \\ &\Leftrightarrow \ F \text{ é fechado.} \end{aligned}$$

□

Corolário 2.67. *Para todo* $X \subset M$*, seu fecho* $\overline{X}$ *é um conjunto fechado.*

Demonstração. Segue do Corolário (2.63) e da Proposição (2.66). □

Observação 2.68. Fechado não é o contrário de aberto. Quando um subconjunto não é fechado, não se pode concluir que ele seja aberto. É o caso dos racionais que não é fechado nem é aberto.

Exemplo 2.69. A fronteira de qualquer conjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M. Basta observar que o complementar de ∂X é o aberto $(\text{int}X) \cup \text{int}(M - X)$.

Exemplo 2.70. Todo subconjunto finito $F = \{a_1, ..., a_n\} \subset M$ é fechado em M.
Se pegarmos $a \notin F$, então $d(a, F)$ é o menor dos números $d(a, a_1), ..., d(a, a_n)$ e portanto $d(a, F) > 0$. Assim, todo ponto $a \in M$ é um subconjunto fechado de M.

Proposição 2.71. *Os subconjuntos fechados de um espçao métrico* M *gozam das seguintes propriedades:*

1. $\emptyset$ *e* M *são fechados;*

2. *A reunião* $F = F_1 \cup ... \cup F_n$ *de um número finito de subconjuntos fechados* $F_1, ..., F_n \subset M$ *é um subconjunto fechado de* M*;*

3. *Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda\in A}$ uma família qualquer de fechado em M, então $F = \bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ é fechado.*

Demonstração. 1. Segue de maneira análoga à Proposição 2.46

2. $A_1 = {F_1}^c, ..., A_n = {F_n}^c$ são abertos em M. Assim, $A_1 \cap ... \cap A_n = {F_1}^c \cap ... \cap {F_n}^c = (F_1 \cup ... \cup F_n)^c$ que é aberto. Logo, $F_1 \cup ... \cup F_n$ é fechado em M.

3. Seja $A_\lambda = {F_\lambda}^c$ para cada $\lambda \in L$. Assim, cada A_λ é aberto e sendo assim $\bigcup A_\lambda = \bigcup {F_\lambda}^c = (\bigcap F_\lambda)^c$ que é aberto em M. Logo, $\bigcap F_\lambda$ é fechado.

□

Exemplo 2.72. A reunião de uma família infinta de fechados pode não ser um conjunto fechado. Note que, $\bigcup_{x\in(0,1)} \{x\} = (0,1)$ que é aberto em $\mathbb{R}$ e cada $\{x\}$, com $x \in (0,1)$, é fechado em $\mathbb{R}$.

Proposição 2.73. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^1(F)$ de todo subconjunto fechado $F \subset N$ seja um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sendo f contínua e $F \subset N$ fechado. Como F^c é aberto e f é contínua, logo $(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$ é aberto, portanto $f^{-1}(F)$ é fechado.
($\Leftarrow$) Sendo $f^1(F)$ fechado em M para todo $F \subset N$ fechado. Seja $A \subset N$ aberto, então A^c é fechado. Pela hipótese, $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$ é fechado. Implicando que $f^{-1}(A)$ é aberto. Logo, f é contínua. □

Corolário 2.74. *Se $F_1 \subset M_1, ..., F_n \subset M_n$ são subconjuntos fechados, então $F_1 \times ... \times F_n$ é fechado em $M_1 \times ... \times M_n = M$.*

Demonstração. Note que as projeções $p_1 : M \to M_1, ..., p_n : M \to M_n$ são contínuas. Logo, $F_1 \times ... \times F_n = p_1^{-1}(F_1) \cap ... \cap p_n^{-1}(F_n)$ é fechado em M, pela Proposição (2.73) temos que f é contínua a imagem inversa é um subconjunto fechado e pela Proposição (2.71) temos que a interseção de uma família qualquer é um subconjunto fechado. □

Corolário 2.75. *Seja $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família (finita ou não) de funções contínuas $f_\lambda : M \to \mathbb{R}$, definidas no espaço métrico M. O conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f_\lambda(x) \geq 0$; $\forall \lambda \in L$ é fechado em M.*

Demonstração. Observe que podemos escrever esse conjunto como a interseção das imagens inversas $f_\lambda^{-1}([0, +\infty))$, o qual é um conjunto fechado pois a semi reta $[0, +\infty)$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}$. Isto decorre das Proposições (2.71) e (2.73) □

Corolário 2.76. *O gráfico de uma aplicação contínua $f : M \to N$ é um subconjunto fechado de $M \times N$. Em particular, a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in M \times N; x = y\}$ é um subconjunto fechado de $M \times N$.*

Demonstração. Tomando $G(f) = \{(x,y) \in M \times N; y = f(x)\}$. A função

$$\begin{aligned} \varphi :& M \times N \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto d(f(x),y), \end{aligned}$$

é contínua. E $G(f) = \{(x,y) \in M \times N; \varphi(x,y) = 0\}$. Então temos que $G(f)$ é fechado em $M \times N$. □

Proposição 2.77. *Seja S um subespaço do espaço métrico M. Dado um subconjunto $X \subset M$, indiquemos com $\widetilde{X}$ o fecho de X em S e com $\overline{X}$ o fecho de X em M. Então, $\widetilde{X} = \overline{X} \cap S$.*

Demonstração. Se $a \in S$, então a distância $d(a,X) = \inf\{d(a,x)\}; x \in X$ é a mesma que considerarmos X como subconjunto de S, que de M. Então,

$$\widetilde{X} = \{a \in S; d(a,X) = 0\} = \{a \in M; d(a,X) = 0\} \cap S = \overline{X} \cap S.$$

□

Corolário 2.78. *Se S é fechado em M então, para todo $X \subset S$ tem-se $\widetilde{X} = \overline{X}$.*

Demonstração. Temos, $X \subset S \Rightarrow \overline{X} \subset S \Rightarrow \overline{X} = \overline{X} \cap S = \widetilde{X}$. □

Corolário 2.79. *Os subconjuntos fechados do subespaço S são as interseções $F \cap S$, dos fechados $F \subset M$ com o subespaço S.*

Demonstração. Dado, $F \subset S$ um fechado em S. Temos então:

$$\begin{aligned} F = \widetilde{F} \Leftrightarrow & F = \overline{F} \cap S \\ \Leftrightarrow & F = F \cap S. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.80. *Seja $M = F_1 \cup F_2$ onde F_1 e F_2 são fechados em M. Se $f : M \to N$ é tal que suas restrições $f_1 = f|_{F_1}$ e $f_2 = f|_{F_2}$ são contínuas, então f é contínua.*

Demonstração. Dado $G \subset N$ fechado, temos $f^{-1}(G) = f_1^{-1}(G) \cup f_2^{-1}(G)$. Pela Proposição (2.73), a imagem inversa de todo subconjunto fechado é fechado, logo $f_1^{-1}(G)$ é fechado em F_1 e logo é fechado em M. Da mesma forma, $f_2^{-1}(G)$ é fechado em M. Concluímos então que $f_1(G)$ é fechado em M e dessa forma f é contínua de acordo com a Proposição (2.73). □

Definição 2.81. Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ chama-se ponto de acumulação de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X, diferente do ponto a. Denotado por X'.

Exemplo 2.82. Na reta $\mathbb{R}$, tomemos: $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Z}$ e $U = [0,1]$. Então, $X' = \mathbb{R}$, $Y' = \varnothing$ e $U' = U$.

2.3 Limites

Definição 2.83. Uma *sequência* num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e chama-se o n-ésimo termo da sequência. Notação de sequência: $(x_1, x_2, ..., x_n, ...), (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n).
Notação para o conjunto dos termos da sequência: $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}, \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$.
Quando a aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$ for injetiva, diremos que (x_n) é uma sequência de termos distintos, ou sem repetições.

Definição 2.84. Uma *subsequência* de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n_1}, ..., x_{n_k}, ...), (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou (x_{n_k}).

A subsequência não é uma sequência, mas caso escrevendo $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$, a subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$ pode ser considerada como sequência, pela aplicação $1 \mapsto x_{n_1}, 2 \mapsto x_{n_2}, ..., k \mapsto x_{n_k}, ...$

Definição 2.85. Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para qualquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.86. Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada.

Observação 2.87. Note que uma sequência é limitada se, e somente se, para todo $a \in M$ existir $r > 0$ tal que $x_n \in B(a, r); \forall n \in \mathbb{N}$.
De fato, se $x_n \in B(a, r); \forall n \in \mathbb{N}$, temos $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < r + r = 2r; \forall n, m \in \mathbb{N}$. Além disso, se existe $c > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < c$; para todo $n, m \in \mathbb{N}$, temos que dado $a \in M, d(a, x_n) \leq d(a, x_1) + d(x_1, x_n) \leq d(a, x_1) + c = r$.

Exemplo 2.88. Fixemos $a \in \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $x_n = (\cos(na), sen(na))$. Obtemos assim uma sequência (x_n) no plano $\mathbb{R}^2$, ou no círculo S^1. Note que,

$$\begin{aligned} ||x_n|| &= ||(\cos(na), sen(na))|| \\ &= \sqrt{(\cos(na))^2 + (sen(na))^2} \\ &= \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Logo, (x_n) é limitada.

Exemplo 2.89. Uma sequência que assume apenas um número finito de valores, é evidentemente limitada.

Exemplo 2.90. Se $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| > 1$, a sequência de números reais $x_n = a^n$ não é limitada. Observe que $|a| > 1$, então existe $\lambda > 0$ tal que $|a| = \lambda + 1$. Assim, a sequência $|x_n| = |a^n| = |a|^n = (\lambda + 1)^n > 1 + n \cdot \lambda > n \cdot \lambda$. Note que dado $c > 0$ tomando $n > c/\lambda$ temos que $n \cdot \lambda > c$. Logo, (x_n) não é limitada.

Definição 2.91. Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Definição 2.92. Quando existe $a = \lim x_n \in M$ diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M, e converge para a. Se não existe tal $a \in M$, então a sequência é divergente.

Definição 2.93. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Dizer que $\lim x_n = a \in M$ significa que, dada qualquer bola aberta B, de centro a, tem-se $x_n \in B$ para todo n suficientemente grande.

Exemplo 2.94. Dada a sequência de números reais $x_n = 1/n$, temos $\lim x_n = 0$.
Dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0 > 1/\varepsilon$ e $n > n_0$ temos $|1/n - 0| < \varepsilon$.

Exemplo 2.95. A sequência de números reais $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.
Suponha, por contradição, que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to a$. Dado $\varepsilon = 1/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1/2$.

- Se n é par
$$\begin{aligned} |1 - a| < 1/2 &\Rightarrow -1/2 < 1 - a < 1/2 \\ &\Rightarrow -3/2 < -a < -1/2 \\ &\Rightarrow 3/2 > a > 1/2. \end{aligned}$$

- Se n é ímpar
$$\begin{aligned} |-1 - a| < 1/2 &\Rightarrow -1/2 < -1 - a < 1/2 \\ &\Rightarrow 1/2 < -a < 3/2 \\ &\Rightarrow -1/2 > a > -3/2. \end{aligned}$$

  O que é uma contradição. Logo, a sequência diverge.

Proposição 2.96. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Uma sequência é convergente quando $\lim x_n = a$ num espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$ temos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$. Assim, $x_n \in B(a, 1)$. Dessa forma, o conjunto de valores da sequência está na reunião $\{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup B(a, 1)$, onde os dois conjuntos são limitados, logo é limitado. $\square$

Proposição 2.97. *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existam (x_n) e $a, b \in M$, tal que $x_n \to a$ e $x_n \to b$ e $b \neq a$. Considere $\varepsilon = \dfrac{d(a,b)}{10} > 0$. Por $x_n \to a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ sempre que $n > n_1$ e $x_n \to b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, b) < \varepsilon$, sempre que $n > n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então se $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \\ &< 2\varepsilon \\ &< \frac{d(a,b)}{5}. \end{aligned}$$

O que é uma contradição. Logo, o limite é único. □

Proposição 2.98. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para* a.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$,para todo $n \geq n_0$, isto ocorre pois $x_n \to a$. Seja $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\} \subset \mathbb{N}$ o conjunto de índice da subsequência (x_{n_k}). Como $\mathbb{N}'$ não é limitado superiormente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que se $k \geq k_0$, segue que $n_k > n_0$ e então $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Logo, $x_{n_k} \to a$. □

Corolário 2.99. *Se* $\lim x_n = a$, *então para todo* $p \in \mathbb{N}$, *tem-se* $\lim\limits_{n} x_{n+p} = a$.

Demonstração. Note que, $(x_{n+p})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1}, ..., x_{n+p}, ...)$ é uma subsequência de (x_n). □

Corolário 2.100. *Se* $\lim x_n = a \neq b$ *então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq b$.

Demonstração. De fato, caso contrário os ídices $n \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = b$ formariam um conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < ... < n_k < ...\}$ e então a subsequência constante (x_{n_k}) teria um limite b, o que é absurdo. □

Proposição 2.101. *Um ponto* a *num espaço métrico* M, *é limite de uma sequência* (x_n) *se, e somente se, toda bola aberta de centro* a *contém termos* x_n *com indices* n *arbitrariamente grandes.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se uma sequência $(x_{n_1}, ..., x_{n_k}, ...)$ converge para a então dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in B(a, \varepsilon)$, para todo $k \geq k_0$. Assim, toda bola $B(a, \varepsilon)$ contém termos de x_n com índices arbitrariamente grandes.
$(\Leftarrow)$ A bola $B(a, 1)$ contém um termo x_{n_1}, a bola $B(a, 1/2)$ contém um termo x_{n_2}, com índice $n_2 > n_1$ e assim por diante para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_{n_k} \in B(a, 1/k)$ com $n_k > n_{k-1} > ... > n_2 > n_1$. Isto define um $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ infinito e uma subsequência (x_{n_k}) tal que $d(x_{n_k}, a) < 1/k$. Assim, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. □

Exemplo 2.102. Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela é divergente.
Se a sequência (x_n) converge para a, então toda subsequência de (x_n) também converge para a. Logo nenhuma subsequência pode possuir um limite $b \neq a$.

Proposição 2.103. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \to a$ em M implique $f(x_n) \to f(a)$ em N.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ f é contínua no ponto a. Se $x_n \to a$ então temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implicando em $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Por $\delta > 0$, temos que $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, obtemos $d(x_n, a) < \delta$ assim $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Dessa forma, $\lim f(x_n) = f(a)$.
$(\Leftarrow)$ Suponha, por contradição, que f não é contínua em a. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ nós temos $x_n \in M$, com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. O que acarreta numa sequência (x_n) em M onde $x_n \to a$ mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$. O que é uma contradição. Logo, f é contínua. □

Proposição 2.104. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. A fim de que se tenha $a \in \overline{X}$ em M, é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $a \in \overline{X}$, então $d(a, X) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$, o que define uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
$(\Leftarrow)$ Como $a = \lim x_n$ e $x_n \in X$, então toda bola aberta de centro a contém pontos $x_n \in X$. Logo, $a \in \bar{X}$. □

Proposição 2.105. *Um conjunto A é aberto em M se, e somente se, cumpre a seguinte condição: $x_n \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $A \in M$ aberto e (x_n) tal que $\lim x_n = a \in A$. Por $a \in A$ ser ponto interior, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset A$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implicando em $x_n \in B(a, \varepsilon) \subset A$.
$(\Leftarrow)$ Suponha, por contradição, que A não é aberto. Logo existe $a \in A - intA$. Por a não ser ponto interior, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M - A$ tal que $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$. Assim, (x_n) converge para a e $(x_n) \subset M - A$. Contradição. Logo, A é aberto. □

Proposição 2.106. *A fim de que a seja ponto de acumulção de um conjunto $X \subset M$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos distintos $x_n \in X$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $a \in X'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $B(a, 1/n) \cap X$ tem infinitos elementos, podemos formar uma sequência (x_n), tal que $x_n \notin \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $x_n \neq x_m$ se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n \neq m$.
$(\Leftarrow)$ Se existir a sequência com $\lim x_n = a$, então $a \in X'$. □

Exemplo 2.107. Vimos que $\lim x_n = a > b$ na reta implica $x_n > b$ para todo n suficientemente grande. Note que é um caso particular da Proposição (2.105) pois o conjunto $(b, +\infty)$ dos pontos $x > b$ é aberto na reta.
Observe que existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset (b, +\infty)$. Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < r$ para todo $n \geq n_0$ o que implica que $x_n \in (b, +\infty)$; para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 2.108. Dado $X \subset M$ limitado e não-vazio, mostraremos que $\text{diam}X = \text{diam}\overline{X}$.
Seja $c = \text{diam}X$. Dados $x, y \in \overline{X}$, existem $(x_n) \subset X$ e $(y_n) \subset X$ tais que $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$. Dessa forma, por $X \subset \overline{X}$ temos que $\text{diam}X \leq \text{diam}\overline{X}$ que resulta em $c \leq \text{diam}\overline{X}$. E $d(x, y) = d(\lim x_n, \lim y_n)$. Como $d(x_n, y_n) \leq c$ para todo n, temos que $d(\lim x_n, \lim y_n) \leq c$ implicando em $\sup\limits_{x,y \in \overline{X}} \{d(x, y)\} \leq c$. Portanto, temos que $\text{diam}X = \text{diam}\overline{X}$.

Exemplo 2.109. Sejam $f, g : M \longrightarrow N$ contínuas. Com o conjunto $F = \{x \in M; f(x) = g(x)\}$.
Seja $a \in \bar{F}$. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset F$ com $\lim x_n = a \in M$. Temos, $f(x_n) = g(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(a)$, Logo, $a \in F$ e F é fechado.

Exemplo 2.110. Sejam $f, g : M \longrightarrow N$ contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo x pertencente a um subconjunto $X \subset M$ então $f(y) = g(y)$ para todo $y \in \bar{X}$.
Seja $y \in \overline{X}$. Logo, existe $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to y$. Assim, $f(x_n) = g(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim f(x_n) = \lim g(x_n)$ implicando em $f(y) = g(y)$.

2.4 Sequências de funções

Diz-se que a sequência de aplicações $f_n : X \longrightarrow M$ converge pontualmente em X para a aplicação $f : X \longrightarrow M$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$ tem limite $f(x)$ em M, ou seja, para cada $x \in X$, tem-se $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Exemplo 2.111. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função identicamente nula.

Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{|x|}{\varepsilon}$. Então, para $n > n_0$ tem-se que $\dfrac{|x|}{n} < \varepsilon$.

Dizemos que a sequência de aplicações $f_n : X \longrightarrow M$ converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \longrightarrow M$ quando para todo número real $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Vale ressaltar que se f_n converge uniformemente para f em X então f_n converge pontualmente para f em X. Mas por outro lado, se f_n converge pontualmente para f em X, então f_n não pode convergir uniformemente para outra aplicação que não seja f.

Proposição 2.112. *Uma função $f : M \to N$ é dita uniformemente contínua se para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$ então a $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, sejam quais forem os $x, y \in M$.*

Exemplo 2.113. A sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$ nos reais ela convergente pontualmente $f_n(x) \to f_0(x) \equiv 0$, porém f_n não converge uniformemente para f_0.

Proposição 2.114. *Se $f_n \to f$ uniformemente em x então, para todo n suficientemente grande, f_n está a uma distância finita de f e $\lim f_n = f$ no espaço métrico $\mathcal{B}_f(X, M)$. Reciprocamente, se $\lim f_n = f$ em $\mathcal{B}_f(X, M)$, então $f_n \to f$ uniformemente em X.*

Demonstração. De fato, note que $d(f_n, f) = \sup_{x, \in X} d(f_n(x), f(x))$, tem-se $d(f_n, f) < \varepsilon$ implicando em $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$; para todo $x \in X$. Por outro lado, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$, logo $d(f_n, f) \leq \varepsilon$. □

Em particular, se $f_n \to f$ uniformemente e f é limitada então, para todo n suficientemente grande, f_n é limitada.

Proposição 2.115. *Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f : M \to N$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e um número natural n tal que $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$. Por f_n ser contínua em a, então existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implica $d(f(x), f_n(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) \leq & d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) \\ < & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, f é contínua em a. □

2.5 Sequência de Cauchy

Agora iremos introduzir a sequência de Cauchy, que é uma definição importante para demonstração de resultados nos espaços métricos completos.

Definição 2.116. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ tem-se que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposição 2.117. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Se $\lim x_n = a$ em M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Considerando $m, n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Exemplo 2.118. Nem toda sequência de Cauchy é convergente. No espaço métrico $X = (0, 1]$, a sequência $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, mas não é convergente.
De fato, como $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}$, então é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim, munindo X da métrica induzida pela métrica de $\mathbb{R}$, é também de Cauchy em X. Porém, $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente em X.

Proposição 2.119. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implicando $d(x_m, x_n) < 1$. Assim, $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ é limitada com $diam \leq 1$. Portanto, $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$. Como cada conjunto é limitado, a união é limitada. □

Proposição 2.120. *Sejam M um espaço métrico, $(x_n) \subset M$ uma sequência de Cauchy e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) tal que $x_{n_k} \to a \in M$. Então, $x_n \to a$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0$ implica em $d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja ainda, $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ onde $d(x_{n_k}, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja então, $z = max\{n_0, n_{k_0}\}$ e note que se $n \geq n_0$, tomando $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > z$, temos que

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &\leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim x_n = a$. □

Proposição 2.121. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. Sendo $f : M \longrightarrow N$ uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ logo $d(x_m, x_n) < \delta$ então $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Logo, $f(x_n)$ é de Cauchy. □

Exemplo 2.122. Uma aplicação apenas contínua pode não transformar sequências de Cauchy em sequência de Cauchy. Por exemplo, o caso da função contínua $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$, que transforma a sequência de Cauchy $(1/n)$ na sequência $(f(1/n)) = (1, 2, ...)$, que não é de Cauchy.

2.6 Espaços métricos completos

Definição 2.123. Diz-se que o espaço métrico M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 2.124. Todo espaço M com a métrica zero-um é completo, pois qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice, e portanto é convergente. No entando, se considerarmos $P = \{1, 1/2, ..., 1/n, ...\}$ com a métrica induzida pela métrica da reta, a sequência $x_n = 1/n$ é de Cauchy, mas não é convergente, logo P não é completo.

Proposição 2.125. *A reta é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy na reta. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}, X_n$ é limitado em $\mathbb{R}$. Ainda, $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ....$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \inf X_n$ e note que $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq \sup X_1 = b$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não decrescente e limitada superiormente, então existe $\lim a_n = a$. Mostraremos agora que $a = \lim x_n$. Uma vez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, é suficiente provar que existe uma subsequência que converge para a. Dado $k \in \mathbb{N}$, como $\lim a_n = a$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \frac{1}{k} < a_n < a + \frac{1}{k}$$

Como $a_n = \inf X_n$ e $a_n < a + \frac{1}{k}$, então existe $n_k > n$ tal que

$$a - \frac{1}{k} < a_n < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}.$$

Com isso, construimos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim x_{n_k} = a$. □

Proposição 2.126. *Todo subespaço métrico fechado de um espaço métrico completo, é completo.*

Demonstração. Seja M completo e $F \subset M$ fechado. Seja $(x_n) \subset F$ uma sequência de Cauchy. Então, (x_n) é de Cauchy em M, logo existe $a \in M$ tal que $x_n \to a$. Uma vez que F é fechado e $a \in \overline{F}$ segue que $a \in F$. Logo, F é completo. □

Proposição 2.127. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam (x_n) de Cauchy em M e (y_n) de Cauchy em N. Daí defina, $z_n = (x_n, y_n)$. Afirmação: z_n é de Cauchy, pois dado $\varepsilon > 0$, existem n_1 *e* $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq n_1$ e $d(y_m, y_n) < \varepsilon$ para todo $m, n \geq n_2$. Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ temos que $d(z_m, z_n) < \varepsilon$. Logo, (z_n) é de Cauchy em $M \times N$ que é

completo assim existe $z_0 = (x_0, y_0) \in M \times N$ tal que $z_n \to z_0$. Note que $d(x_n, x_0) \leq d(z_n, z_0) \Rightarrow x_n \to x_0$ e $d(y_n, y_0) \leq d(z_n, z_0) \Rightarrow y_n \to y_0$.
$(\Leftarrow)$ Seja $z_n = (x_n, y_n)$ uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Como as projeções $p_1 : M \times N \longrightarrow M$ e $p_2 : M \times N \longrightarrow N$ são uniformemente contínuas, temos que pela Proposição 2.121 (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N respectivamente e convergentes. Logo existem $\lim x_n = a \in M$ e $\lim y_n = b \in N$. Tomando $c = (a, b) \in M \times N$, com $limz_n = c$. Portanto, $M \times N$ é completo.

□

2.7 Ponto fixo de Banach

Definição 2.128. Um espaço normado E é chamado *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 2.129. O espaço $\mathbb{R}^n$ com a norma definida por

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

é um espaço de Banach. Tomemos $x_m = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, ..., a_n^{(m)})$ uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, k > n_0$. Temos que,

$$||x_m - x_k|| = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^m - a_i^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Desta forma, para $m, k > n_0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (a_i^m - a_i^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \\ (a_i^m - a_i^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \\ |a_i^m - a_i^k| < \varepsilon; \quad \forall\ 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Se fixarmos algum $i = 1, ..., n$, verificamos que a sequência de números reais $(a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m, ...)$ é de Cauchy. Por $\mathbb{R}$ ser completo, sabemos que a sequência converge, então $a_i^m \to a_i \in \mathbb{R}$ quando $m \to \infty$. Usando o mesmo procedimento n vezes, definimos $(a_1, a_2, ..., a_n) = a \in \mathbb{R}^n$. Assim, para cada $1 \leq i \leq n$; dado $\varepsilon > 0$, existe $m_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_{i_0}$ temos $|a_i{}^m - a_i| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$. Com isto, sendo $m_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{m_{i_0}\}$, se $m \geq m_0$ obtemos

$$||x_m - a||^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i^m - a_i|^2 < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Logo, $\mathbb{R}^n$ é de Banach.

Definição 2.130. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H, munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno.

Exemplo 2.131. $\mathbb{R}^n$ com a norma $||\cdot||$ é Hilbert, porém quando munido com uma das normas do máximo ou da soma, não é Hilbert.

Portanto, temos que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach, com a norma proveniente do produto interno.

Definição 2.132. Um *ponto fixo* de uma aplicação $f : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Exemplo 2.133. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ admite ponto fixo. De fato, $f(x) = x$ implica que $x^2 = x$ e, portanto, $x = 0$ ou $x = 1$.

Exemplo 2.134. Existe algumas funções que não existe ponto fixo, é o caso de:

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

.

Existe alguns teoremas de ponto fixo, a título de comparação iremos introduzir o Teorema de Brouwer em dimensão 1. Iremos iniciar enunciando o Teorema do Valor Intermediário, resultado auxiliar na demonstração.

Definição 2.135. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se d for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = d$.

Teorema 2.136 (Ponto fixo de Brouwer)**.** *Sejam $a > 0$ e $f : [-a, a] \to [-a, a]$ contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Demonstração. Defina a seguinte função auxiliar

$$\begin{aligned} g : [-a, a] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(x) - x. \end{aligned}$$

Note que $g(-a) = f(-a) - (-a) = f(-a) + a \geq 0$ e que $g(a) = f(a) - a \leq 0$. Além disso, g é contínua, uma vez que g é a soma de funções contínuas, pois f é pelo Teorema do Valor Intemediário. Logo, pelo T.V.I. existe $c \in [-a, a]$ tal que $g(c) = 0$ o que implica que $f(c) = c$. $\square$

Agora vejamos o teorema do ponto fixo de Banach.

Teorema 2.137 (Ponto Fixo de Banach). *Seja M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único $a \in M$ tal que $f(a) = a$.*

Demonstração. Por f ser uma contração existe $c \in (0,1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$, para todos $x, y \in M$. Primeiramente vamos demonstrar a unicidade de tais pontos fixos. Suponha, por contradição, que f admite dois pontos fixos, isto é, existem $a, b \in M$ tal que $f(a) = a$ e $f(b) = b$ com $a \neq b$. Por f ser contração, temos que:

$$\begin{aligned} d(a,b) = d(f(a), f(b)) &\leq c \cdot d(a,b) \\ d(a,b) &\leq c \cdot d(a,b) \\ d(a,b) - c \cdot d(a,b) &\leq 0 \\ d(a,b) \cdot (1-c) &\leq 0. \end{aligned}$$

Note que $d(a,b) \geq 0$ e $(1-c) > 0$. Logo, $d(a,b) = 0$, ou seja, $a = b$. O que é uma contradição. Portanto, se existe um ponto fixo para a contração f, então este é único.
Agora, vamos demonstrar que, de fato, f admite um ponto fixo.
Dado $x_0 \in M$, defina uma sequência (x_n) em M onde $x_n = f(x_{n-1})$, seja qual for o $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n \cdot d(x_1, x_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos usar o princípio de indução finita para demonstrar esta afirmação. Para $n = 1$, tal afirmação é claramente verdadeira. Agora suponha verdadeira a hipótese de indução $d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n \cdot d(x_1, x_0)$ e vejamos se com ela conseguimos demonstrar que $d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq c^{n+1} \cdot d(x_1, x_0)$. Observe que

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq c \cdot d(x_{n+1}, x_n) \leq c^{n+1} \cdot d(x_1, x_0).$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $n > m$. Então

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + ... + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (c^{n-1} + ... + c^m) \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $k \in (0,1)$ então $\sum_{i=1}^{\infty} c^{i-1}$ é convergente, logo $S_n = \sum_{i=1}^{n} c^{i-1}$ é de Cauchy. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m \geq n_0$ então

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| = \sum_{i=n}^{m} c^{i-1} &= c^{n-1} + ... + c^m \\ &< \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_0)}. \end{aligned}$$

Se $n > m > n_0$, temos que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Assim, (x_n) é de Cuachy em M. Então, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in M$. Note que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x).$$

□

Podemos notar que os teoremas possuem algumas diferenças, é possível notar que enquanto o Teorema de Brouwer exige apenas a continuidade da função, o Teorema de Banach exige mais da função, é necessário que a função também seja uma contração.

Com respeito ao conjunto onde a função f está definida, o Teorema do ponto fixo de Banach, exige apenas que M seja completo, já o Teorema do ponto fixo de Brouwer trabalha sobre um intervalo fechado simétrico, que além de ser completo, é um fechado e limitado. Desta maneira, ambos apresentam vantagens e desvantagens com relação um ao outro e devem ser utilizados de acordo com o contexto onde possam ser melhor aplicados.

Capítulo 3

Teorema de Picard

3.1 Conceitos preliminares

Equações diferenciais

A título de deixar este trabalho completo, vamos definir algumas ferramentas fundamentais para que possamos enunciar o Teorema de Picard.

Definição 3.1. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *diferenciável* em $x_0 \in \Omega$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Quando tal limite existir, o denotaremos por $f'(x_0)$ e este número é chamado de derivada de f no ponto x_0. Dizemos que f é uma função diferenciável quando esta for diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Quando isto ocorrer fica bem definida a função

$$\begin{aligned} f' : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação envolvendo uma variável independente, uma função incógnita (desta variável independente) e um número finito de suas derivadas. Uma solução de uma EDO é uma função, definida num intervalo, que satisfaz a EDO para todos os valores da variável no intervalo de definição da função.

Definição 3.2. Uma equação da forma

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{3.1}$$

é chamada de *Equação Diferencial de primeira ordem*, onde $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ é uma função e y é a função incógnita. Uma solução para (3.1) é uma função $u : (a, b) \to (c, d)$ satisfazendo (3.1) pontualmente, isto é, u satisfaz $u'(x) = f(x, u(x)); \forall x \in (a, b)$. Um problema de valor inicial é um sistema da forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in (c, d)$.

A solução para um P.V.I. não necessariamente é única. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.

$$\begin{cases} y'(x) = |y(x)|^{1/2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Neste exemplo, podemos notar que $f(x, y) = |y|^{1/2}$ é contínua em todo o plano (x, y). As funções $y_1 \equiv 0$ e

$$y_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2; x \geq 0 \\ \dfrac{-1}{4}x^2; x < 0. \end{cases}$$

são soluções do P.V.I. Note que y_1 é claramente solução. Para vermos que y_2 é solução devemos derivar,

- para $x > 0$,

$$y_2' = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}|x| = |y_2(x)|^{\frac{1}{2}}.$$

- para $x < 0$,

$$y_2' = \frac{-1}{2}x = \frac{1}{2}(-x) = \frac{1}{2}|x| = |y_2(x)|^{\frac{1}{2}}.$$

- $x = 0$,

$$y_{2_+}'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{y_2(0+h) - y_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1/4)h^2}{h} = \lim_{h \to o^+} \frac{1}{4}h = 0.$$

- $x = 0$,

$$y_{2_-}'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{y_2(0+h) - y_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-1/4)h^2}{h} = \lim_{h \to o^-} \frac{-1}{4}h = 0.$$

3.2 Teorema de Picard

Teorema 3.4. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto ω do plano (x, y). Suponhamos que a derivada parcial com relação a segunda variável $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \omega$ para todo $x \in I$, que é solução do PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Para demonstrar precisamos de um lema que transfere o P.V.I. em um problema de resolução de uma equação integral.

Lema 3.5. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função num aberto Ω do plano (x, y). Então, uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do PVI se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds; \ x \in I. \tag{3.4}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se ϕ é uma solução do PVI dado em (3.3), então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é solução da equação integral (3.4).
($\Leftarrow$) Se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que é solução da integral (3.4) então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e é solução do PVI (3.3). □

Agora iremos demonstrar o Teorema 3.4 com o auxílio do Lema 3.5.

Demonstração. Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tomando $a, b > 0$ tais que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x-x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$ esteja contido em Ω. Temos $M = max\{|f(x, y)|; \ (x, y) \in B\}$. Sejam $0 < \bar{a} \leq min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ e $J_{\bar{a}}$ o intervalo fechado $[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$. Defina $C = \{g : J_{\bar{a}} \to \mathbb{R}; \ g$ é contínua , $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b\}$. Munido com a seguinte métrica:

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)|; \ x \in J_{\bar{a}}\}.$$

Vejamos que C é um fechado do espaço métrico $\mathcal{C} = \{h : J_{\bar{a}} \to \mathbb{R}; \ h$ é contínua$\}$, onde $\mathcal{C}$ é munido com a métrica d dada acima. Suponha, por contradição, que C não é um fechado de $\mathcal{C}$. Existe $(g_n) \subset C$ tal que $g_n \to g$, segundo a métrica d, mas $g \notin C$. Por $\mathcal{C}$ ser completo, temos que $g \in \mathcal{C}$, ou seja, g é contínua. Ou $g(x_0) \neq y_0$ ou existe $x_1 \in J_{\bar{a}}$ tal que $|g(x_1) - y_0| > b$. Se $g(x_0) \neq y_0$ então $\varepsilon = |g(x_0) - y_0| > 0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$

$$\frac{\varepsilon}{10} > d(g_n, g) \geq |g_n(x_0) - g(x_0)| = |y_0 - g(x_0)| = \varepsilon.$$

Contradição! Portanto $g(x_0) = y_0$. Se existe $x_1 \in J_{\bar{a}}$ tal que $|g(x_1) - y_0| > b$. Existe $l > 0$ tal que $|g(x_1) - y_0| = b + l$. Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que se $n \geq n_0$ tem-se $d(g_n, g) < l/2$.

$$\begin{aligned} b + l = |g(x_1) - y_0| &\leq |g(x_1) - g_n(x_1)| + |g_n(x_1) - y_0| \\ &\leq d(g_n, g) + |g_n(x_1) - y_0| < \frac{l}{2} + b. \end{aligned}$$

Contradição! Logo $g \in C$ e portanto, C é completo. Considere agora

$$\begin{aligned} \phi :& C \to C \\ & y \mapsto \phi(y) = h. \end{aligned}$$

onde $h(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$. Vejamos que de fato, $h \in C$. Note que h é cotínua, pois f é contínua e $h(x_0) = y_0$. E por fim,

$$\begin{aligned} |h(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \right| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|ds \\ &\leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \bar{a} \leq b. \end{aligned}$$

Logo, $\phi : C \to C$ está bem definida. Note que soluções de (3.4) são pontos fixos de ϕ, pois

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds = h(x) = (\phi(y))(x).$$

Logo, $y = \phi(y)$. Vejamos que ϕ é uma contração. Para isto defina:

$$\begin{aligned} \sigma_x :& [0, 1] \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \sigma_x(t) = f(x, y_1 + t(y_2 - y_1)). \end{aligned}$$

Note que, $\sigma_x'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_2 - y_1)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \sigma(1) - \sigma(0) &= \sigma_x'(c)(1 - 0) \\ f(x, y_2) - f(x, y_1) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + c(y_2 - y_1))(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Seja $K = max\{|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)|;\ (x, y) \in J_{\bar{a}} = [y_0 - b, y_0 + b]\}$. Logo,

$$\begin{aligned} |f(x, y_2) - f(x, y_1)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + c(y_2 - y_1)) \right| \cdot |y_2 - y_1| \\ &\leq K \cdot |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Agora, note que $|\phi(g_1)(x) - \phi(g_2)(x)| < K \cdot \bar{a} \cdot d(g_1, g_2)$. Tomando $\bar{a} < \frac{1}{K}$, obtemos que ϕ é uma contração. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe um único $y \in C$ tal que $\phi(y) = y$. Portanto, y é uma solução para (3.3).

$\square$

Em síntese, esta pesquisa aprofundou a compreensão dos pontos fixos em espaços métricos completos, com foco especial na aplicação do Teorema de Picard. Este teorema, apresentado como uma ferramenta importante na solução de equações diferenciais ordinárias, destaca-se ao demonstrar a existência e unicidade de soluções sob condições específicas. Destaca-se que fatores cruciais, como a completude do espaço métrico e a continuidade da derivada parcial em relação à segunda variável, exercem uma influência significativa no resultado final. A observação atenta a essas condições é essencial, pois a não satisfação delas pode impedir a obtenção de uma solução única para o problema em questão.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza, Introdução à análise matemática, segunda edição, São Paulo: Blucher, 1999.

[2] FIGUEIREDO, Djaro G. de NEVES, Aloísio F., Equações Diferenciais Aplicadas, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[3] SILVA, Hugo Henryque Coelho e. Um estudo sobre completude e compacidade em espaços métricos. 2019. 82 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.

[4] LIMA, Elon Lages, Espaços Métricos, Rio de Janeiro, Projeto Euclides - IMPA, 2009.

[5] LIMA, Elon Lages, Análise Real- Volume 1, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[6] OLIVEIRA, Alessandra Arcanjo Lisboa de. Espaços métricos: continuidade, completude e compacidade. 2021. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2021.