UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RICARDO ARAÚJO DOS SANTOS

CÁLCULO DE ÁREA DOS TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS: UM ESTUDO SOBRE AS FÓRMULAS DE HERON E BRAHMAGUPTA.

Recife

2023

RICARDO ARAÚJO DOS SANTOS

CÁLCULO DE ÁREA DOS TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS: UM ESTUDO SOBRE AS FÓRMULAS DE HERON E BRAHMAGUPTA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título.

Orientador: Professor Me. Cícero Monteiro de Souza.

Recife

2023

RICARDO ARAÚJO DOS SANTOS

CÁLCULO DE ÁREA DOS TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS: UM ESTUDO SOBRE AS FÓRMULAS DE HERON E BRAHMAGUPTA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título.

Aprovado em: / / 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Cícero Monteiro de Souza (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Costa
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof. Dr. Felipe Andrade da Costa
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Recife, 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237c Santos, Ricardo Araújo dos
CÁLCULO DE ÁREA DOS TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS: UM ESTUDO SOBRE AS FÓRMULAS DE HERON E BRAHMAGUPTA / Ricardo Araújo dos Santos. - 2023.
56 f.

Orientador: Cicero Monteiro de Souza.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. História da Geometria. 2. Áreas de triângulos e quadriláteros. 3. Fórmula de Heron. 4. Fórmula de Brahmagupta. I. Souza, Cicero Monteiro de, orient. II. Título

CDD 510

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, pela graça da vida e ao dom da sabedoria que me permitiu sempre buscar conhecimento.

A minha família, em especial aos meus pais Ricardo Alexandre dos Santos e Adnalva Araújo dos Santos, também aos meus tios Advaldo Araújo da Silva e Arlete Araújo da Silva, os maiores incentivadores para eu seguir meus estudos.

A minha esposa Maria Cecília Martins Vieira, um pilar importante nessa conquista e também ao nosso filho Ravi Martins dos Santos, minha inspiração para ser sempre o meu melhor.

As minhas avós, Bernadete Zeferina da Silva e Josefa Emília dos Santos, que sempre torceram, me apoiaram e me incentivaram a viver meus sonhos, e hoje, mesmo que descansando perto do Divino, sei que elas comemorarão todas as minhas conquistas.

Ao meu avô, Sebastião Araújo da Silva, que sempre me deu conselhos sábios e buscou incentivar meus estudos.

Aos meus amigos que se tornaram família e sempre me ajudaram a suportar cada uma das barreiras que surgiram ao longo do caminho.

Ao meu orientador, amigo e conselheiro, o professor Me. Cícero Monteiro, meu professor das disciplinas de Desenho Geométrico e História da Matemática, na qual levarei para sempre seus ensinamentos e procurarei propagá-los sempre que possível.

Aos professores da graduação, que durante toda a jornada pela universidade conduziram o ensino de forma esplêndida, me incentivaram e me guiaram a caminhos de muito conhecimento, se tornando referências para mim.

"O impossível é só uma

questão de escolha."

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo fazer uma análise histórica do cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros. Inicialmente, fez-se necessário um breve histórico da matemática, mais especificamente da Geometria nas civilizações antigas como: Mesopotâmia, Egito, Índia e na Grécia a partir de Tales de Mileto (c. 624 – 546 a.C.) e Pitágoras (c. 585 – 500 a.C.). Na Grécia, as áreas das figuras planas foram sistematizadas e registradas nos 13 livros dos Elementos de Euclides. No século I, surge o matemático Heron de Alexandria (c. 10 – 70 d.C.) com uma fórmula para se calcular a área de um triângulo qualquer, necessitando para isso apenas o conhecimento do seu perímetro. No século VII, usando como base os conhecimentos deixados por Heron, Brahmagupta (598 – 668) cria uma fórmula para determinar a área de um quadrilátero qualquer quando se conhece os seus lados. Posteriormente, com o avanço da trigonometria, verificou-se que a fórmula de Brahmagupta era válida apenas para quadriláteros cíclicos ou inscritíveis.

Palavras-chave: História da Geometria; Áreas de triângulos e quadriláteros; Fórmula de Heron; Fórmula de Brahmagupta.

ABSTRACT

The present work aims to make a historical analysis of the calculation of areas of triangles and quadrilaterals. Initially, a brief history of mathematics was necessary, more specifically of Geometry in ancient civilizations such as: Mesopotamia, Egypt, India and Greece from Thales of Miletus (c. 624 – 546 B.C.) and Pythagoras (c. 585 – 500 B.C.). In Greece, the areas of plane figures were systematized and recorded in the 13 books of Euclid's Elements. In the 1st century, the mathematician Heron of Alexandria (c.10 – 70 A.D.) came up with a formula to calculate the area of any triangle, requiring only knowledge of its perimeter. In the 7th century, using as a basis the knowledge left by Heron, Brahmagupta (598 – 668) created a formula to determine the area of any quadrilateral when its sides were known. Later, with the advancement of trigonometry, it was found that Brahmagupta's formula was valid only for cyclic or inscribable quadrilaterals.

Keywords: History of Geometry; Areas of triangles and quadrilaterals; Heron's formula; Brahmagupta's formula.

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dentre as subdivisões presentes na matemática temos a geometria, a parte que causa mais entusiasmo em ser estudada, pelos desafios e por toda a construção histórica nela presente. Essa área da matemática estuda as formas e os espaços.

É bem comum vermos elementos que remetem a princípios geométricos em nosso dia a dia, por exemplo o conceito de áreas, ou até mesmo na visualização da geometria espacial que surgem para nós em tarefas básicas, como estacionar o carro, quantidade de cerâmicas ou tintas para uma parede, até na arrumação de livros em uma estante, dentre outros.

Grandes nomes da geometria organizaram e comprovaram seus estudos através de algumas demonstrações, como pioneiros nesse processo temos Tales de Mileto (c. 624 – 546 a.C.), Pitágoras de Samos (c. 585 – 500 a.C.), Euclides de Alexandria (c. 365 – 300 a.C.), além do fato de termos a Academia de Platão e todo o aglomerado de mentes brilhantes que impulsionaram ainda mais os conhecimentos que estudamos e seguimos até os dias atuais.

Esse trabalho tem como objetivo principal estudar sobre o cálculo de área dos triângulos e quadriláteros, bem como evidenciar e demonstrar a fórmula de Heron e da fórmula de Brahmagupta, além de apresentar um contexto histórico explicitando a evolução da geometria, e principalmente do cálculo de áreas através de gerações.

No capítulo um apresentamos uma contextualização histórica da geometria, buscando ressaltar a importância desse conhecimento, e demonstrando como surgiram determinados estudos. Também mencionamos a importância, não só dos egípcios e babilônicos, como o progresso do conhecimento matemático, desenhado na Grécia, através da Academia de Platão.

Além de ter sido enfatizado, neste capítulo, teoremas importantes para toda a conjetura da temática abordada, sendo estes, o teorema de Tales, e o teorema de Pitágoras.

Nos capítulos dois e três apresentamos, respectivamente, a fórmula de Heron e a fórmula de Brahmagupta conceituando o cálculo da área de um quadrilátero, dando ênfase a fórmula de Brahmagupta, está válida somente em quadriláteros inscritíveis, também denominados de quadriláteros cíclicos, cujo o conceito e definição se encontram presentes no capítulo três.

Em ambos os capítulos mostramos algumas demonstrações e aplicações para as fórmulas de Heron e para a fórmula geral do cálculo de áreas de um quadrilátero convexo e como recorrência dela, a demonstração da fórmula de Brahmagupta.

1. BREVE HISTÓRICO DA GEOMETRIA

A matemática está inserida na sociedade como uma ferramenta, de suma importância para cálculos elementares, aritméticos, geométricos, bem como dos mais sofisticados cálculos científicos modernos. Falar sobre a origem da matemática nos possibilita ao mesmo tempo obter respostas sobre os seus fundamentos e de todo processo criativo, mas também nos leva a uma dificuldade: Por onde começar a falar sobre essa origem? Platão (C. 427 – 347 a.C.) acreditava que a matemática sempre existiu, estando meramente a aguardar sua descoberta. É possível levantar hipóteses a níveis paradoxais e, nesse contexto poderíamos indagar como conseguir definir a matemática e toda sua sistematização em tópicos considerando suas demonstrações, mas, por outro lado necessitamos de provas empíricas sem sequer fazer uma suposição numérica ou até mesmo simbológica. Existem caminhos e ideias que nos motivam de conhecimento para tal proposição e tudo que se envolve a isso faz parte do entendimento formal, como resultante da riqueza de ramificações e acontecimentos que circundam o surgimento de algo que poderíamos facilmente considerar vital para o desenvolvimento científico da civilização.

Não há como falar da história da matemática sem mencionar a geometria estudada pelos babilônicos e todos os outros povos antigos, dentre eles, temos os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios, que não necessariamente na mesma época, mas fizeram parte dessa construção.

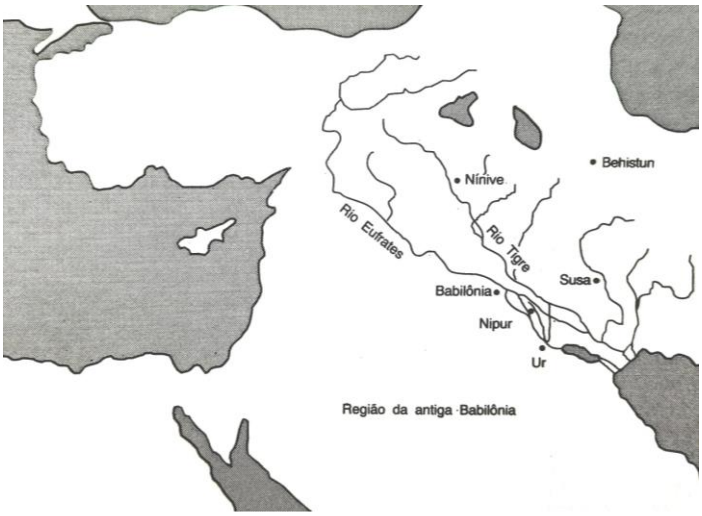

Imagem 1: *Região da antiga Babilônia*

Fonte: *EVES, Howard (2004)*

Existem inúmeras evidências de que por volta dos anos de 2000 a 1600 a.C. os babilônicos já tinham conhecimentos específicos de cálculos de área dos triângulos, dos retângulos e dos trapézios. Também já calculavam o volume de alguns prismas inclusive os paralelepípedos.

Os primeiros registros matemáticos da história chegaram até nós através de tabletes de argila, livros sagrados e papiros. Exemplificando esse fato temos estudos voltados ao Papiro Golenishev, também conhecido como o Papiro de Moscou, em que se encontram 25 problemas matemáticos e ao Papiro Rhind, encontrado por volta de 1850, também é conhecido como Papiro de Ahmes, documento egípcio, escrito aproximadamente em 1650 a.C. e contém 85 problemas, dentre eles alguns que abordam o cálculo de áreas, volumes, trigonometria, e fundamentos geométricos.

Robins (1987) afirma que o *Rhind Mathematical Papyrus* (RMP) mostra que os egípcios calculavam o volume dos armazéns cilíndricos de grãos corretamente, multiplicando a área da base pela altura. Os volumes dos recipientes cúbicos e retangulares foram determinados pelo mesmo modo.

Dessa forma é possível verificar que apesar de não se ter uma matemática axiomática como a que conhecemos nos dias atuais. É notório que se tinha o conhecimento bem fundamentado de situações que ajudaria a resolução de alguns problemas práticos. Boyer (1974) explicita que existem no Papiro Ahmes problemas relacionados à Geometria, como por exemplo o problema 51, que mostra o cálculo da medida da área de um triângulo isósceles efetuado por meio da multiplicação da metade da base pela altura.

1.1. A geometria Grega

A matemática grega é considerada uma das bases fundamentais da matemática moderna. Os antigos gregos fizeram importantes contribuições em áreas como geometria, aritmética e astronomia. Um dos matemáticos mais conhecidos da Grécia Antiga foi Tales de Mileto, considerado o pai da geometria. Ele desenvolveu teoremas geométricos e os aplicou na resolução de problemas práticos, como a medição de alturas das pirâmides.

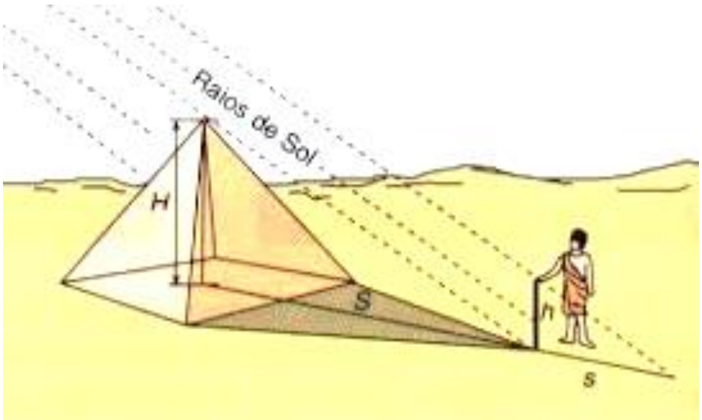

Imagem 2: *Altura de uma Pirâmide medida por Tales*

Fonte: *Google Imagens*

Tales de Mileto observou em seus estudos que os raios solares chegavam à Terra paralelos entre si, e assim conseguiu concluir que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos. Para Bongiovanni (2007) o teorema de Tales faz uma ligação entre o geométrico e o numérico e traz um relato de Plutarco (46 d.C. – 120 d.C.) se referindo sobre a medição da altura da grande pirâmide do Egito feita por Tales:

> "...limitando-te a colocar o bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio de sol tangente aos dois triângulos, demonstraste que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão." (PLUTARCO citado por BONGIOVANNI, 2007, pg.98)

O teorema de Tales afirma que se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

É interessante perceber a variação do enunciado desse mesmo teorema em diferentes países, por exemplo na Itália o teorema de Tales diz que os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais, indicando a razão de dois segmentos da mesma transversal.

Já na Alemanha enuncia-se dizendo: se um feixe de retas concorrentes é cortado por duas retas paralelas então a razão entre as medidas dos segmentos determinados por uma reta do feixe é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre qualquer outra reta do feixe.

Note que existe uma similaridade com o que foi enunciado no teorema de Tales na Itália, visto que temos uma razão entre dois segmentos de uma mesma transversal, porém ao invés de duas transversais intersectadas por um feixe de retas paralelas, temos duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

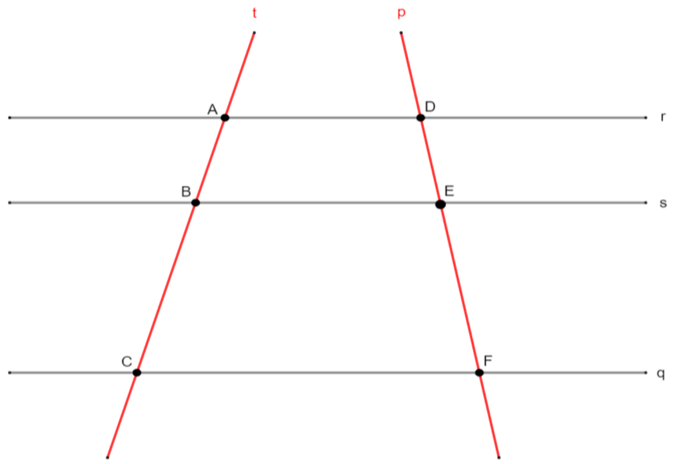

Figura 1: *Visualização Geométrica do Teorema de Tales*

Fonte: *O Autor*

A partir da imagem 3 fica melhor o entendimento do que temos sobre o teorema de Tales, note que ao falarmos que dado duas retas transversais, nesse caso as retas *t* e *p*, cortadas por um feixe de retas paralelas, que são *r*, *s* e *q*, formamos segmentos de retas proporcionais, nesse caso é válido a igualdade referente aos segmentos formados, sendo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Válido também para algumas variações na formação dessa igualdade de acordo com as equivalências proporcionais.

Euclides de Alexandria, em sua obra Os Elementos, apresenta no livro V a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (390 – 340 a.C.) que foi fundamento base para a demonstração do teorema de Tales que é encontrada na proposição dois do livro VI dessa mesma obra.

Outro matemático grego de muita importância foi Pitágoras de Samos que deu grandes contribuições que impulsionaram ainda mais a obra de Tales. Pitágoras, após viajar pelo oriente buscando conhecimento retorna à Grécia e leva consigo um vasto número de seguidores, uma espécie de seita, que ficaria conhecida como a Escola Pitagórica.

O aceite da Escola Pitagórica era extremamente rigoroso, tendo como rito de iniciação um período probatório de cinco anos em que o candidato não se comunicava verbalmente com os membros mais antigos. Dentre os pitagóricos existia uma comparação entre uma escala musical e o próprio universo, os participantes dessa sociedade secreta passavam todo o tempo a procura de relações matemáticas em busca de uma explicação para a harmonia do mundo. Dentre os dogmas da sociedade pitagórica existia a situação de que qualquer descoberta deveria ser destinada ao mérito do mestre e jamais revelada a um estranho à comunidade. Os pitagóricos também acreditavam na importância dos números e na sua relação com o universo.

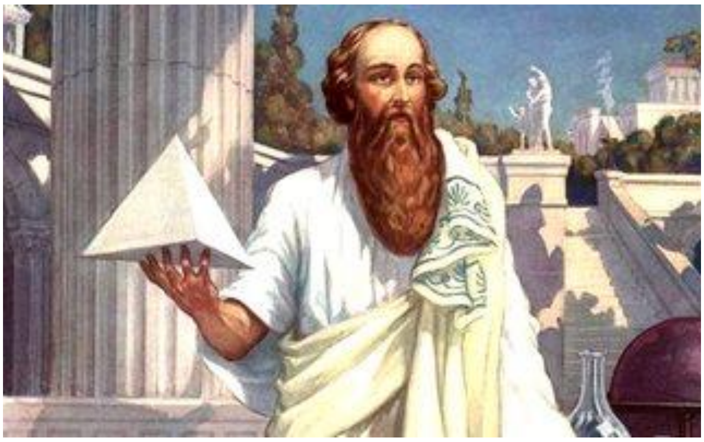

Imagem 3: *Pitágoras de Samos*

Fonte: *Google Imagens*

Pitágoras tem como uma de suas maiores contribuições o famoso teorema que leva seu nome, que estabelece uma relação entre os lados de um triângulo retângulo. De acordo com o seu enunciado a área do quadrado de lado igual a medida da hipotenusa equivale a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

O professor de matemática dos Estados Unidos, Elisha Scott Loomis, fez um acervo de demonstrações desse teorema no livro “The Pythagorean Proposition”, que em sua segunda edição, no ano de 1940, o livro era composto por 370 demonstrações. Esse teorema também aparece em uma das proposições do livro I, em Os Elementos, de Euclides. Atualmente, existem infinitas formas de se demonstrar o Teorema de Pitágoras, sendo um dos teoremas que mais recebeu demonstrações.

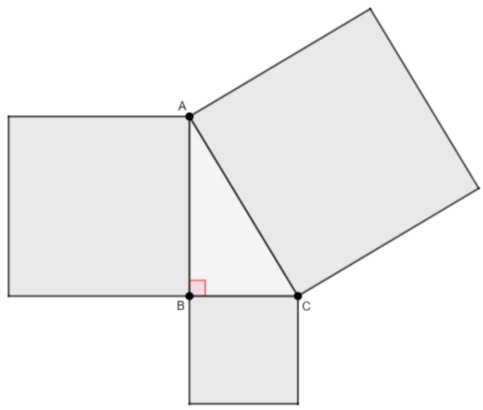

Figura 2: *Representação Geométrica do Teorema de Pitágoras*

Fonte: *O Autor*

Uma forma de demonstrar o teorema de Pitágoras, é através da comparação de áreas.

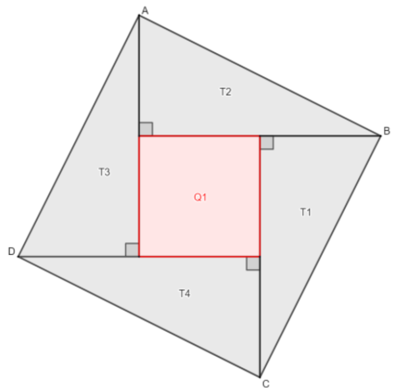

Figura 3: *Quadrado cujo lado é a hipotenusa dos Triângulos Retângulos*

Fonte: *O Autor*

Na figura o quadrado *ABCD* foi dividido em cinco áreas, quatro áreas triangulares, sendo os triângulos retângulos congruentes, de forma que:

$$T1 = T2 = T3 = T4 = \frac{bc}{2}$$

E uma área quadrada, sendo:

$$Q1 = (b - c)^2 \Rightarrow Q1 = b^2 - 2bc + c^2$$

Note que a área do quadrado *ABCD* é equivalente a soma das áreas de $T1, T2, T3, T4$ e $Q1$. Verifica-se também que o quadrado $ABCD$ possui lado de medida a, que é a hipotenusa dos triângulos que tem como área $T1, T2, T3$ e $T4$. Dessa forma a área do quadrado maior é dada por:

$$S_{ABCD} = a^2$$

Pode-se perceber por equivalência de áreas que é válido:

$$S_{ABCD} = T1 + T2 + T3 + T4 + Q1$$

$$\Longrightarrow a^2 = 4.\frac{bc}{2} + (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$\Longrightarrow a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

Logo,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sendo essa uma das formas de demonstrar o teorema de Pitágoras. Tendo esse teorema um dos alicerces fundamentais para demonstrarmos a fórmula proposta por Heron de Alexandria (c. 10 – 70 d.C.) para o cálculo de área de um triângulo qualquer, que veremos no próximo capítulo.

1.2. A Academia de Platão e o impulsionamento da Matemática

Um fator importante para a história da matemática é a fundação da Academia de Platão, fundado pelo filósofo grego Platão em Atenas que após o falecimento de seu mentor Sócrates, ele decide criar uma escola onde pudesse transmitir seus ensinamentos filosóficos.

A Academia era um local de estudos e discussões, e seus membros eram chamados de acadêmicos. O nome academia foi inspirado no jardim de Academo, no qual Platão costumava realizar suas primeiras aulas. A instituição era dedicada ao estudo da filosofia, matemática, ciências naturais e outras disciplinas intelectuais.

Imagem 4: *Academia de Platão, pintura de Rafael Sanzio (1510)*
Fonte: *Google Imagens*

A Academia teve um papel fundamental na preservação e disseminação do pensamento filosófico de Platão. Além disso, foi um importante centro de aprendizado que influenciou gerações futuras. Ela continuou a existir por muitos séculos após a morte do próprio Platão. No entanto, foi fechada em 529 d.C. pelo imperador romano Justiniano I, que proibiu todas as escolas pagãs. A matemática na Academia Platônica desempenhou um papel significativo no desenvolvimento do pensamento matemático na Grécia Antiga. E posteriormente em todo o mundo. Na Academia, a matemática era ensinada como uma forma de exercitar o raciocínio lógico e a capacidade de abstração. Os estudantes eram encorajados a explorar conceitos matemáticos, como geometria, aritmética e astronomia.

Platão via a geometria como uma ferramenta para entender as formas ideais e os princípios universais. Ele considerava a geometria como uma linguagem que descrevia as relações eternas e imutáveis entre os objetos. Acreditava-se que através do estudo da geometria, os estudantes poderiam alcançar um nível mais elevado de compreensão da realidade. Além disso, Platão reconhecia a importância da aritmética no desenvolvimento do pensamento lógico.

Ele via os números como entidades abstratas e acreditava que eles possuíam propriedades intrínsecas que podiam ser descobertas e exploradas.

Euclides de Alexandria é um dos mais importantes matemáticos da Academia por ter sintetizado em uma só obra toda a matemática grega existente até aquele momento, sua obra, Os Elementos reúne 13 livros (capítulos) que enfatizam de forma sistemática conhecimentos da matemática. Dentre os livros presentes em Os Elementos, se destacam alguns capítulos, sendo: Fundamentos da Geometria Plana, Álgebra Geométrica, Teoria da Circunferência, Figuras Inscritas e Circunscritas, Figuras Geométricas Semelhantes e Proporcionais, Teoria dos Números, Geometria dos Sólidos, Medição de Figuras.

A matemática na Academia de Platão influenciou as gerações futuras com seus ensinamentos sobre a importância da lógica, abstração e busca pelo conhecimento verdadeiro que continuaram a impactar o estudo da matemática ao longo dos séculos. Dentre alguns nomes que fizeram parte da academia de Platão se destaca uma forte influência de Euclides, Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.), Eudoxo de Cnido, assim como Heron que é o matemático que desenvolveu uma fórmula de calcular a área de triângulos e é o personagem de estudo desse trabalho.

1.3. Cálculo de Áreas de Figuras Planas

O estudo e cálculo de áreas é uma prática antiga que remonta aos tempos da antiguidade. Civilizações como os egípcios e os gregos já desenvolviam métodos rudimentares para medir áreas de terrenos e construções.

Há indícios de que egípcios e babilônicos já dominavam a arte dos cálculos de áreas das figuras planas, no entanto foi a partir da contribuição de matemáticos como Arquimedes e Euclides que esses cálculos começaram a ser formalizados, e demonstrados de forma algébrica.

Dentre o processo de evolução dos conceitos de áreas, temos o que até nos dias atuais conceituamos o cálculo da área de um triângulo sendo a metade do produto da base pela altura relativa a ela, mas percebe-se que a dependência do cálculo da área do triângulo em função da altura relativa a uma base não torna o cálculo da área um percurso para o resultado de forma direta. Levando isso em consideração, vamos ressaltar a ideia centrada pelo matemático Heron de Alexandria, que seguindo o viés mencionado consegue estipular a área de qualquer triângulo através de uma fórmula que leva seu nome, cujo a área se resulta em função do semiperímetro, a metade da soma de todas as medidas do triângulo.

Uma das principais aplicações para tal fórmula, que será demonstrada no capítulo seguinte, é o cálculo das áreas de figuras que possui formas indefinidas, ou seja, figuras de formatos não convencionais. Atualmente teríamos exemplos disso em situações de medidas em alguns terrenos irregulares visto que, a depender da situação deve ser feito um processo denominado de triangulação, que nada mais é do que traçar a partir de ângulos conhecidos linhas, segmentos de reta, e com isso dividir toda a região em porções triangulares, para facilitar os cálculos.

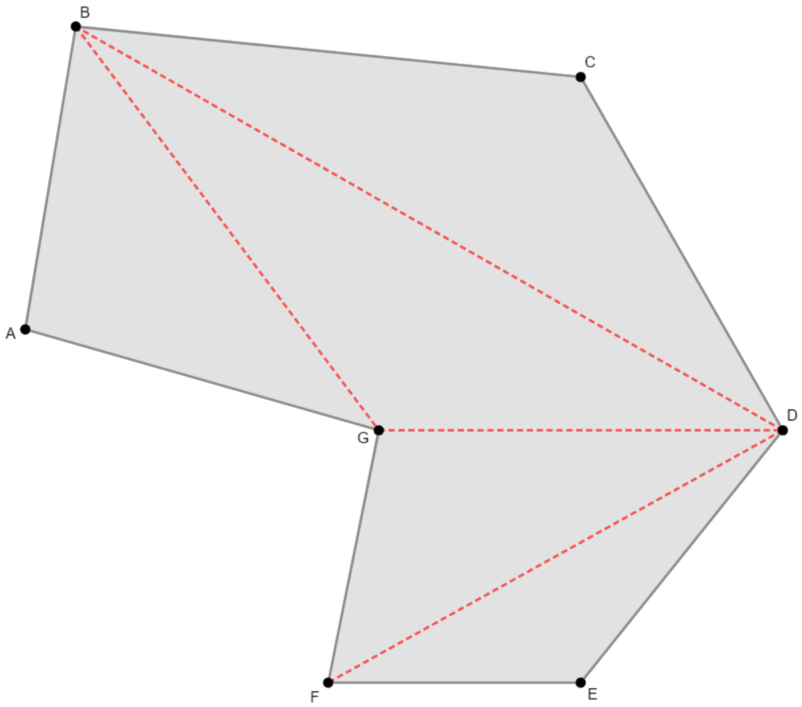

Figura 4: *Triangulação de uma figura não convencional*

Fonte: *O Autor*

E para cálculos de área em regiões similares e/ou iguais a exemplificada na imagem se torna bem mais interessante utilizarmos a fórmula de Heron, ou até mesmo a de Brahmagupta, que também será visto e demonstrado ainda nesse trabalho, em que, ambas, consiste no cálculo da área em função do semiperímetro seja de um triângulo, utiliza-se nesse caso a fórmula de

Heron, ou faz-se um caminho para as quadraturas da imagem, utilizando com isso a fórmula de Brahmagupta.

É importante ressaltar que a precisão dos cálculos de área depende da correta aplicação das fórmulas e do uso adequado das unidades de medida. Portanto, é fundamental estar atento aos detalhes e utilizar as ferramentas corretas para obter resultados confiáveis. Em resumo, o histórico dos cálculos de área é um reflexo da evolução do conhecimento matemático e de como essa área de estudo se tornou essencial em diversas aplicações práticas ao longo da história.

2. A FÓRMULA DE HERON DE ALEXANDRIA

Heron de Alexandria foi um geômetra, engenheiro, inventor e estudante de mecânica, também conhecido pelos nomes Hero ou Herão, é lembrado pela sua obra A Métrica, que ficou perdida durante séculos, vindo a ser encontrada apenas em 1896. Este livro é um esboço formado por três livros, que se encontra recheado de fórmulas e regras estudadas e selecionadas por Heron. Por exemplo áreas de figuras planas e volumes, fazendo uma grande referência a um dos fatores que incentivaram Heron a matemática, os babilônicos.

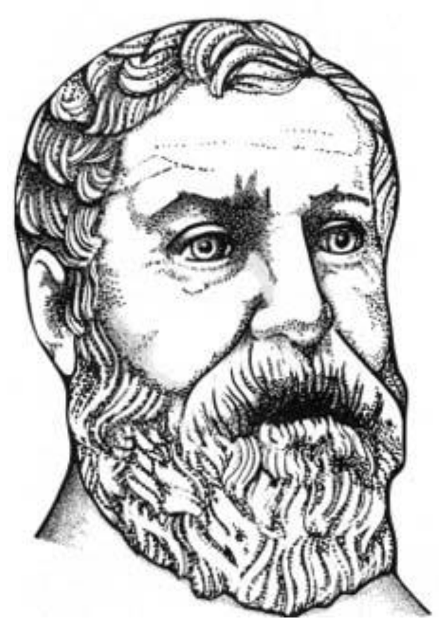

Imagem 5: *Retrato representando Heron de Alexandria*

Fonte: *Google Imagens*

Infelizmente alguns fatos sobre a vida de Heron foi perdido com o tempo, como também muito de seu próprio trabalho. E apesar dos poucos estudos que se salvaram, foi o suficiente para desencadear muitas alterações em diversas áreas.

Dentre as fórmulas que estão no aglomerado da produção de Heron, uma se destaca, tornando-o conhecido por ela até pelo fato de levar seu nome, A Fórmula de Heron, tal qual é utilizada para o cálculo de área de um triângulo qualquer em dependência do semiperímetro. Sendo, a fórmula de Heron:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

De tal forma que S equivale a área do triângulo em questão, p a medida do semiperímetro, cujo cálculo é dado pela metade da soma das medidas reais dos lados do triângulo, expresso na fórmula por a, b e c.

Vamos exemplificar, para calcularmos a área do triângulo retângulo ABC, representado abaixo na figura abaixo, cujo as medidas são 5cm, 12cm e 13cm.

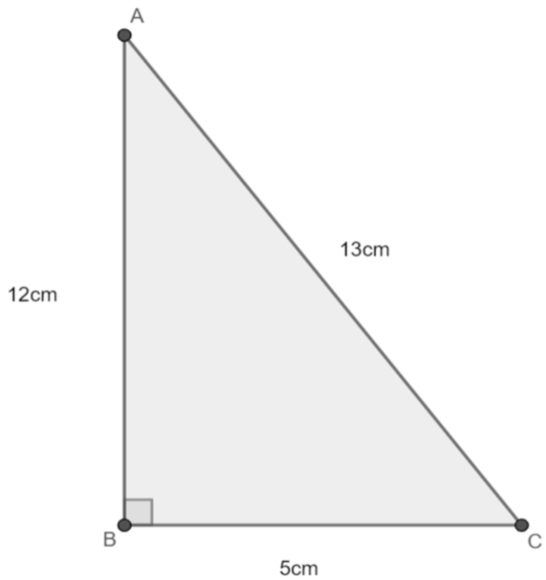

Figura 5: *Triângulo Retângulo ABC de medidas 5cm, 12cm e 13cm*

Fonte: *O Autor*

Na figura acima temos o triângulo retângulo ABC, sendo as medidas de seus lados dadas de forma que: $\overline{AB} = 12cm$, $\overline{BC} = 5cm$ e $\overline{CA} = 13cm$.

Note que, de fato esse triângulo é um triângulo retângulo visto que é válido o Teorema de Pitágoras, dado: $13^2 = 12^2 + 5^2$

Dessa forma é notório que os catetos do ΔABC, cujo as medidas são 5cm e 12cm, equivalem ao comprimento e largura do triângulo, ou dizer que os catetos são equivalentes a base e a altura do triângulo.

Calculando a área desse triângulo, utilizando o método convencional, temos que a área é dada pela metade do produto da base pela altura, dessa forma:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{60}{2} = 30cm^2$$

Se caso utilizarmos a Fórmula de Heron, teríamos o mesmo resultado de tal modo que faríamos, a priori o cálculo para descobrirmos o semiperímetro do ΔABC, que é calculado pela metade da soma de seus lados, sendo:

$$p = \frac{5+12+13}{2} = \frac{30}{2} = 15cm$$

Basta efetuar o cálculo da área pela fórmula listada por Heron, dessa forma:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{15\,(15-5)\,(15-12)\,(15-13)} = \sqrt{900} = 30cm^2$$

Observe que, em ambos os casos conseguimos chegar no mesmo resultado.

2.1. Demonstração da Fórmula de Heron utilizando o Teorema de Pitágoras

Vamos agora demonstrar a fórmula de Heron utilizando o Teorema de Pitágoras.

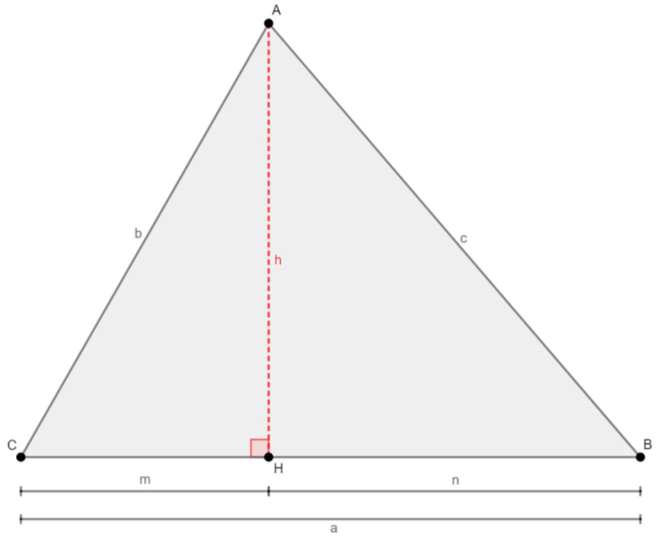

Figura 6: *Triângulo ABC de lados a, b e c*

Fonte: *O Autor*

Na figura acima temos um triângulo qualquer com a base a e os outros lados b e c. Ao traçar uma das alturas h, subdividimos a base em $\overline{CH} = m$ e $\overline{HB} = n$.

Sendo h a medida da altura do triângulo, relativa ao lado de medida a, segue que a área da região triangular, S_Δ, é calculada por:

$$S_\Delta = \frac{a\ \ h}{2}$$

Ao consideramos o segmento $\overline{AH} = h$, forma-se dois triângulos retângulos, o triângulo AHC e o triângulo AHB. A partir desses triângulos obtém-se as igualdades abaixo que segue do Teorema de Pitágoras, são elas:

$$b^2 = m^2 + h^2 \quad \text{(I).}$$

$$c^2 = n^2 + h^2 \quad \text{(II).}$$

Por uma construção geométrica temos também a relação $m + n = a$ (III).

Efetuando (I) – (II) temos:

$$b^2 - c^2 = (m^2 + h^2) - (n^2 + h^2)$$

$$b^2 - c^2 = m^2 - n^2$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = (m + n)(m - n)$$

Utilizando a igualdade (III):

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = a(m - n)$$

$$\Rightarrow m - n = \frac{b^2 - c^2}{a} \quad \text{(IV)}$$

Somando os membros de (III) e (IV), segue que:

$$(m + n) + (m - n) = a + \left(\frac{b^2 - c^2}{a}\right)$$

$$\Rightarrow 2m = \frac{a^2 + (b^2 - c^2)}{a}$$

$$\Rightarrow m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad \text{(V)}$$

Seguindo de (I), temos:

$$b^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$$

$$\Rightarrow h^2 = (b + m)(b - m)$$

Por (V), obtém-se:

$$h^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow h^2 = \left(\frac{2ab + (\ a^2 + b^2 - c^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{1}{4a^2}[(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)]$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{1}{4a^2}[((2ab + a^2 + b^2) - c^2)((2ab - a^2 - b^2) + c^2)]$$

Reordenando os termos, temos:

$$\Rightarrow h^2 = \frac{1}{4a^2}[((a^2 + 2ab + b^2) - c^2)(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))]$$

Utilizando produtos notáveis chegamos em:

$$\Rightarrow h^2 = \frac{1}{4a^2}[((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)]$$

$$\Rightarrow 4a^2h^2 = [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]$$

$$\Rightarrow 4a^2h^2 = \big[\big((a + b) - c\big)\big((a + b) + c\big)\big]\big[\big(c + (a - b)\big)\big(c - (a - b)\big)\big]$$

$$\Rightarrow 4a^2h^2 = [(a + b - c)(a + b + c)]\,[(c + a - b)(c - a + b)]$$

$$\Rightarrow 4a^2h^2 = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a) \quad \text{(VI)}$$

Sendo *2p* o perímetro do triângulo ABC, temos que $2p = a + b + c$, dessa forma, podemos entender a veracidade das igualdades abaixo, utilizando o processo de somar zero, de tal forma que:

$$a + b - c \Leftrightarrow (a + b + c) - 2c \Leftrightarrow 2p - 2c \Leftrightarrow 2(p - c) \quad (i)$$

$$a + c - b \Leftrightarrow (a + b + c) - 2b \Leftrightarrow 2p - 2b \Leftrightarrow 2(p - b) \quad (ii)$$

$$b + c - a \Leftrightarrow (a + b + c) - 2a \Leftrightarrow 2p - 2a \Leftrightarrow 2(p - a) \quad (iii)$$

Substituindo a relação do perímetro, (i), (ii) e (iii), na igualdade (VI), temos:

$$4a^2h^2 = (2p)\big(2(p - c)\big)\big(2(p - b)\big)\big(2(p - a)\big)$$

$$\Rightarrow 4a^2h^2 = 16\big(p(p - c)(p - b)(p - a)\big)$$

Sendo a multiplicação comutativa, então reordenando os termos, obtém-se:

$$\Rightarrow 4a^2h^2 = 16\big(p(p - a)(p - b)(p - c)\big)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2h^2}{4} = \big(p(p - a)(p - b)(p - c)\big)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ah}{2}\right)^2 = \big(p(p - a)(p - b)(p - c)\big)$$

Sendo a área do triângulo, dada por:

$$S_\Delta = \frac{a\,h}{2}$$

Como vimos anteriormente.

Substituindo na equação, temos:

$$(S_\Delta)^2 = \left(p(p-a)(p-b)(p-c)\right)$$

Logo,

$$S_\Delta = \sqrt{\left(p(p-a)(p-b)(p-c)\right)}$$

Com isso, podemos concluir que em qualquer triângulo, tendo o conhecimento da medida de seus lados podemos calcular a sua área utilizando a Fórmula de Heron.

2.2. Demonstração da Fórmula de Heron utilizando as Relações Trigonométricas

Agora vamos demonstrar a Fórmula de Heron utilizando relações trigonométricas. Mas antes da demonstração vamos enunciar alguns resultados que será suficiente e necessário para essa demonstração. É importante a priori lembrarmos das próprias relações trigonométricas, que nesse caso usaremos para a demonstração as seguintes listadas abaixo:

2.2.1. Lei dos Cossenos

Considere um triângulo ABC um triângulo qualquer em que a é a medida do lado oposto ao ângulo $\hat{A}$, de forma análoga b é a medida do lado oposto ao ângulo $\hat{B}$, e por fim, c é a medida do lado oposto ao ângulo $\hat{C}$. Pela lei dos Cossenos podemos identificar as seguintes igualdades, a partir desse triângulo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos(\hat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos(\hat{C})$$

2.2.2. Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Vamos visualizar o triângulo retângulo com suas devidas medições de ângulos e lados.

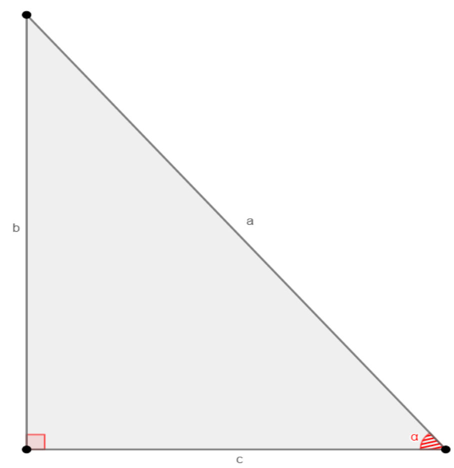

Figura 7: *Triângulo Retângulo cujos lados tem medidas a, b e c*

Fonte: *O Autor*

Dessa forma podemos definir o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α destacado de tal maneira que:

$$Sen(\alpha) = \frac{b}{a}$$

$$Cos(\alpha) = \frac{c}{a}$$

$$Tg(a) = \frac{b}{c}.$$

2.2.3. Seno da Soma e da Diferença, Cosseno da Soma e da Diferença.

Tomando dois ângulos, sendo α e β, com medida qualquer, temos que:

$$Sen(\alpha + \beta) = Sen\alpha Cos\beta + Sen\beta Cos\alpha$$

Para calcularmos $Sen(\alpha - \beta)$ basta alterarmos o sinal, sendo uma subtração ao invés de uma soma, dessa forma:

$$Sen(\alpha - \beta) = Sen\alpha Cos\beta - Sen\beta Cos\alpha$$

O mesmo segue para $Cos(\alpha + \beta)$ e $Cos(\alpha - \beta)$, visto que:

$$Cos(\alpha + \beta) = Cos\alpha Cos\beta - Sen\alpha Sen\beta$$

E o $Cos(\alpha - \beta)$ invertemos a operação utilizada na anterior, sendo:

$$Cos(\alpha - \beta) = Cos\alpha Cos\beta + Sen\alpha Sen\beta$$

Vale ressaltar, que para descobrirmos a Tangente da soma e da diferença de dois ângulos quaisquer basta tomarmos a razão entre o seno e cosseno.

2.2.4. Área de um Triângulo em função do Seno de um ângulo interno

É possível calcular a área de um triângulo qualquer em função do seno de um ângulo em questão de tal modo que:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc\ Sen(\alpha)}{2}$$

Sendo o ângulo α, mencionado acima, formado pelos lados do triângulo de dimensões b e c. É fácil verificar essa igualdade, também utilizando a nossa fórmula convencionado, já mencionada, em que a área se dar pela metade do produto entre a base e a altura.

Então sendo o triângulo ABC, e tomando o lado de medida b, como uma base, basta traçarmos uma altura relativa à base, de tal forma exposta na figura abaixo.

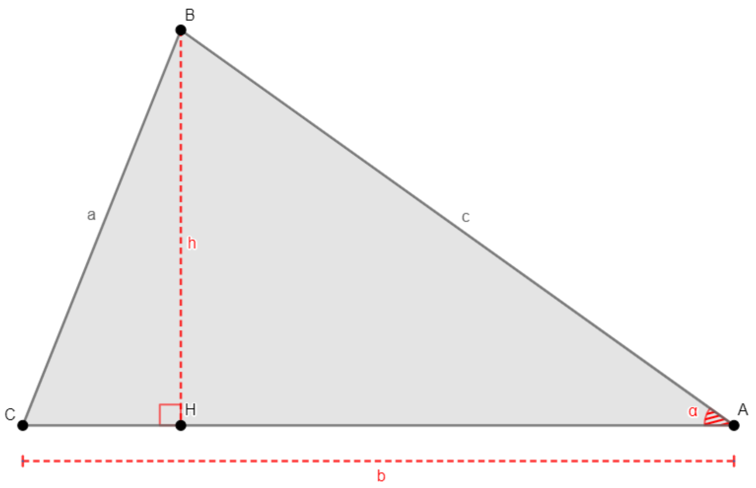

Figura 8: *Triângulo ABC, de base b e altura h*
Fonte: *O Autor*

Na figura 8 temos um triângulo qualquer ABC, em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$, em que vamos considerar $\overline{AC}$ como uma base para nível de entendimento da fórmula enunciada. Note também o ângulo $C\hat{A}B = \alpha$ e que $\overline{BH} = h$ é a altura relativa à base $\overline{AC}$.

De forma convencional o cálculo da área do triângulo da figura acima é dado por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b\,h}{2}$$

Note que ao tomarmos o triângulo AHB, observarmos que:

$$Sen\alpha = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\,Sen\alpha$$

Substituindo essa igualdade na forma de calcularmos a área temos uma nova configuração da forma tradicional, porém agora em função do seno de um ângulo e os lados do triângulo que formam este ângulo, sendo:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b\ h}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{bc\ Sen\alpha}{2}$$

Com isso a Fórmula de Heron pode ser facilmente demonstrada, vejamos:

2.2.5. Demonstração da Fórmula de Heron

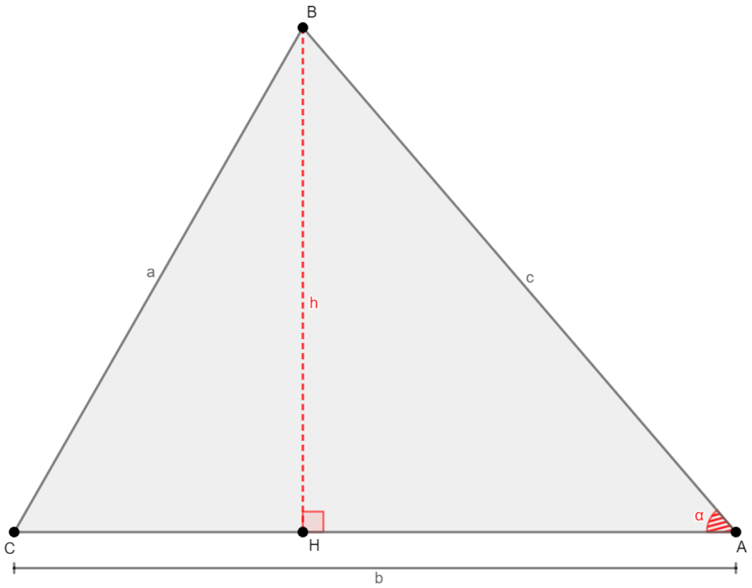

Figura 9: *Triângulo ABC de dimensões a, b, c e altura h*
Fonte: *O Autor*

Na figura 9 observa-se um triângulo qualquer ABC, cujas dimensões de seus lados são a, b e c, tendo h a medida da altura relativa ao lado de dimensão b, conforme estabelecido na figura.

Como vimos anteriormente podemos calcular a área do triângulo em função do seno de um ângulo, ou seja:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc\ Sen\alpha}{2}$$

Note que podemos reescrever o $Sen\alpha$ sendo:

$$Sen\alpha = Sen\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Utilizando a relação do seno da soma, obtém-se:

$$Sen\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Substituindo a igualdade acima na relação da área do triângulo da figura temos:

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{bc\left(2Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2}$$

$$S_{\Delta ABCD} = bc\ Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{(I)}$$

Levando em consideração a Lei dos Cossenos temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos(\alpha)$$

$$\Longrightarrow 2bc\ Cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Longrightarrow Cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{(II)}$$

Note também que podemos considerar a seguinte igualdade:

$$2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - Cos(\alpha)$$

A igualdade é válida pois ao tomar a relação fundamental da trigonometria temos:

$$Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Longrightarrow Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

E sendo,

$$Cos(\alpha) = Cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Substituindo a relação fundamental da trigonometria na igualdade acima, temos:

$$Cos(\alpha) = 1 - Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Cos(\alpha) = 1 - 2\,Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - Cos(\alpha)$$

De forma análoga consegue-se mostrar que:

$$2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + Cos(\alpha)$$

Basta considerar mais uma vez a relação fundamental da trigonometria e o cosseno da soma, para obtermos as igualdades:

$$Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$Cos(\alpha) = Cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Substituindo a relação fundamental da trigonometria na igualdade acima, temos que:

$$Cos(\alpha) = Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow Cos(\alpha) = Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Cos(\alpha) = 2.Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\Rightarrow 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + Cos(\alpha)$$

Desenvolvendo nossos resultados temos que:

$$2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - Cos(\alpha)$$

Substituindo (II) na igualdade acima:

$$2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

Pela relação dos produtos notáveis, sendo a diferença dos quadrados, obtém-se:

$$\Rightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\big(a - (b - c)\big)\big(a + (b - c)\big)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$$

Sendo 2p o perímetro do triângulo, dado pela soma dos seus lados, temos, nesse caso, que $2p = a + b + c$.

$$\Rightarrow 2Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)}{2bc}$$

$$\Rightarrow Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(2p-2b)(2p-2c)}{2bc}\right)$$

$$\Rightarrow Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\big(2(p-b)\big)\big(2(p-c)\big)}{4bc}$$

$$\Rightarrow Sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$\Rightarrow Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Tendo em vista a relação angular, abaixo:

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad (i)$$

De maneira análoga, ao desenvolvermos a outra igualdade, temos:

$$2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + Cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow\ 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow\ 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$\Rightarrow\ 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow\ 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow\ 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\Rightarrow Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(b+c+a)(b+c+a-2a)}{2bc}\right)$$

Usando a mesma relação do perímetro já mencionada chegamos em:

$$\Rightarrow Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(2p)(2p-2a)}{4bc}$$

$$\Rightarrow Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(2p)\big(2(p-a)\big)}{4bc}$$

$$\Rightarrow Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\Longrightarrow Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad (ii)$$

Portanto, ao substituirmos (i) e (ii) na igualdade (I), temos que:

$$S_{\Delta ABC} = bc\ Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} =\ bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p)(p-a)}{bc}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} =\ bc\sqrt{\left(\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right)\left(\frac{(p)(p-a)}{bc}\right)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} =\ b.c.\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{bc\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

Logo,

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Dessa maneira fica provado que a Fórmula de Heron pode ser aplicada para o cálculo de área em um triângulo qualquer.

2.3. Aplicação da Fórmula de Heron

Ao ter o conhecimento da Fórmula de Heron basta ter a medida dos lados de um triângulo qualquer que é possível calcularmos a sua área, e até mesmo de figuras não convencionais, em que podemos fazer um processo de triangulação e calcularmos a área da região delimitada.

Uma das maiores vantagens desse método é que apenas com alguns instrumentos de medições conseguimos determinar o comprimento de cada lado do triângulo, não precisando de compasso para delimitar a altura relativa a um dos lados e calcular a área de maneira convencional.

Um dos exemplos bem atuais para a utilização do teorema de Heron se dar na área de tecnologia, em que precisamos do conceito de sua fórmula para usá-la em correções de *bug*[1]. As técnicas de depuração (*debug*) enviam erros em construção de figuras. As figuras ao serem criadas são sujeitas a triangulação e com utilizamos a fórmula de Heron para determinar a Área.

[1] Em 1947, Grace Hopper, uma das pioneiras a desenvolver linguagem e programação, descobriu que um inseto estava atrapalhando o funcionamento de um computador de grande porte, e por esse motivo chamamos as falhas de funcionamento de uma máquina de bug.

Suponha que em um desses triângulos tenha as medidas: 7cm, 9cm e 14cm. Para calcularmos a área desse triângulo basta tomarmos o semiperímetro, e aplicar a fórmula de Heron, sendo:

$$p = \frac{7+9+14}{2} = \frac{30}{2}$$

$$\Longrightarrow p = 15cm$$

Agora fazendo a aplicação ensina por Heron temos:

$$S_{ABCD} = \sqrt{15.(15-7)(15-9)(15-14)}$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD} = \sqrt{10.8.6.1}$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD} = \sqrt{480}$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD} = 4\sqrt{30}$$

O teorema e Heron é aplicável, também em outras situações nas quais se precisa calcular a área de um terreno no formato poligonal não convencional. Facilitando a efetuar os cálculos.

3. FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA E CÁLCULO DA ÁREA DE UM QUADRILÁTERO

Brahmagupta (598 – 668) foi um matemático e astrônomo indiano que viveu no século VII. Ele é conhecido como um dos matemáticos mais influentes da Índia antiga. Brahmagupta fez contribuições significativas para a matemática, especialmente na área da álgebra e da geometria.

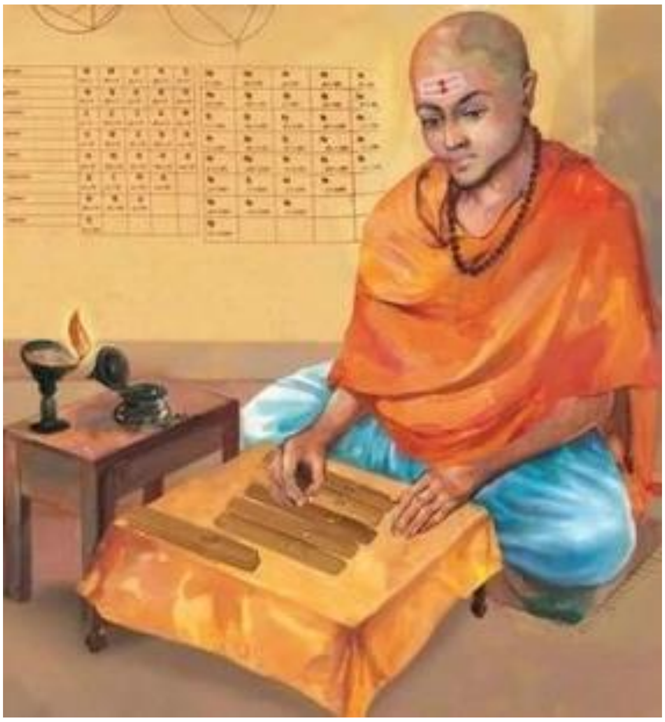

Imagem 6: *Retrato representando Brahmagupta*
Fonte: *Google Imagens*

Sua obra mais famosa é o *Brahmasphutasiddhanta*, que trata de diversos tópicos matemáticos, como aritmética, álgebra, trigonometria além de tópicos de astronomia. Nessa obra, ele introduziu o conceito de zero como um número independente e descreveu as regras para operações com números positivos e negativos.

Um dos resultados mais bonitos em sua obra foi a generalização da fórmula de Heron para a área de um quadrilátero de lado a, b, c e d. cujo semiperímetro, denotado por p, é:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Porém Brahmagupta não foi capaz de observar que a fórmula só é coesa no caso de um quadrilátero ser cíclico. Para demonstrarmos a veracidade dessa fórmula precisamos entender como se calcula a área de um quadrilátero qualquer.

3.1. Área de um Quadrilátero

A priori é interessante termos em mente o que é um polígono: é uma figura geométrica plana, fechada e convexa formadas por segmentos de reta unidos dois a dois apenas por suas extremidades. Seguindo com nossas definições precisamos entender o que é um quadrilátero.

Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados, os quais são classificados em paralelogramos, trapézios e trapezoides. Pelas características e propriedades, todos os quadriláteros têm duas diagonais e a soma dos seus ângulos internos é igual a 360°. Os quadriláteros estão presentes de inúmeras maneiras em nosso cotidiano e principalmente nas situações matemáticas.

Para os paralelogramos e trapézios existem fórmulas específicas para o cálculo de suas áreas, porém, não existe uma fórmula específica para os trapezoides. Entretanto existe uma fórmula que calcula a área de qualquer quadrilátero, dado:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\, cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

Sendo:

S → A área de um quadrilátero qualquer.

p → Semiperímetro do quadrilátero, a metade da soma das medidas dos lados.

a, b, c, d → Lados do quadrilátero em questão.

α, β → Ângulos de Vértices Opostos em um quadrilátero.

Desse modo, para demonstrarmos a veracidade dessa igualdade vamos tomar um quadrilátero $ABCD$, cujo as medidas de seus lados sejam: $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$ e $\overline{DA} = d$. Tomemos também uma das diagonais, a diagonal $\overline{AC} = r$, para utilização da igualdade de áreas em que equivalemos a Área do quadrilátero $ABCD$ sendo a soma das áreas dos dois triângulos menores, o triângulo ABC e ACD.

Vamos considerar também as medidas de dois ângulos opostos para fazer jus a condição de nossa igualdade proposta, dessa forma, vamos supor as medidas α e β para os ângulos $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$, respectivamente, conforme a figura abaixo.

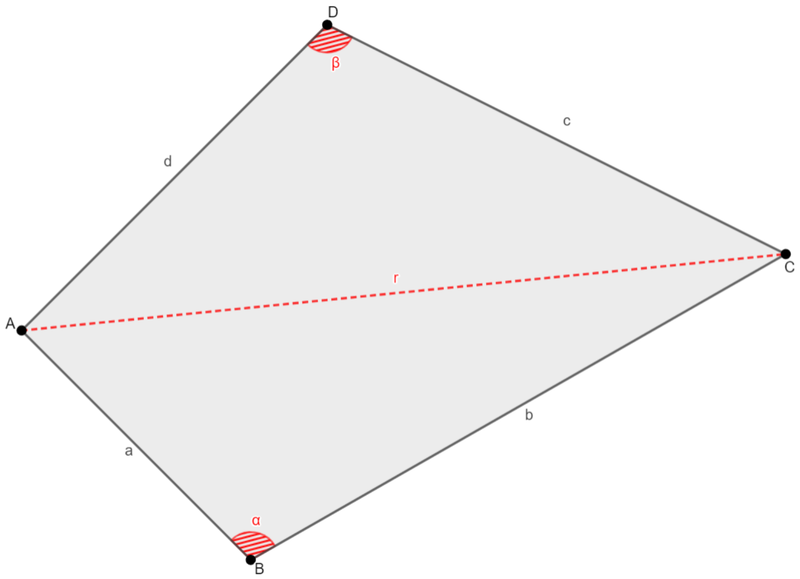

Figura 10: *Quadrilátero ABCD, cujo as medidas dos lados são a, b, c e d*
Fonte: *O Autor*

Note que, na figura 10 temos o quadrilátero ABCD cujas medidas de seus lados são dadas por a, b, c e d, tendo como destaque na figura a diagonal $\overline{AC} = r$ e os ângulos destacados, sendo: $A\hat{B}C = \alpha$ e $A\hat{D}C = \beta$.

Observe que a área do quadrilátero equivale a soma das áreas dos triângulos ABC e ADC, dessa forma:

$$S = S_{ABC} + S_{ADC}$$

Ao calcularmos a área dos triângulos pela dependência do seno, como visto anteriormente a área poderá ser calculada pela metade do produto das medidas de dois lados adjacentes e o seno do ângulo formado por eles, consequentemente temos que:

$$S = \frac{absen(\alpha)}{2} + \frac{cdsen(\beta)}{2}$$

$$\Rightarrow 2S = absen(\alpha) + cdsen(\beta)$$

Elevando ambos os termos ao quadrado temos que:

$$\Rightarrow (2S)^2 = \left(absen(\alpha) + cdsen(\beta)\right)^2$$

$$\Rightarrow 4S^2 = \left(absen(\alpha)\right)^2 + 2abcdsen(\alpha)sen(\beta) + \left(cdsen(\beta)\right)^2 \quad \text{(I)}$$

Fazendo uma relação nos dois triângulos menores do quadrilátero, temos pela Lei dos Cossenos temos que:

Pelo Triângulo $ABC \rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

Pelo Triângulo $ADC \rightarrow r^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\beta)$

Com isso pode-se concluir que:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\beta)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos(\alpha) - 2cd\cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} = ab\cos(\alpha) - cd\cos(\beta)$$

Elevando ambos os termos ao quadrado temos que:

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 = (ab\cos(\alpha) - cd\cos(\beta))^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 = (ab\cos(\alpha))^2 - 2abcd\cos(\alpha)\cos(\beta) + (cd\cos(\beta))^2$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab\cos(\alpha))^2 - 2abcd\cos(\alpha)\cos(\beta) + (cd\cos(\beta))^2 \quad \text{(II)}$$

E somando (I) e (II). Temos:

$$4S^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2abcd\cos(\alpha+\beta)$$

Note que,

$$Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{2} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = 2Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 1$$

Substituindo, temos que:

$$4S^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2abcd\left[2\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 1\right]$$

$$\Rightarrow 4S^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 4abcd\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 2abcd$$

$$\Rightarrow 4S^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = [(ab)^2 + 2abcd + (cd)^2] - 4abcd\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4S^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab+cd)^2 - 4abcd\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 16abcd\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 16abcd\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = [(2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2] - 16abcd\,Cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = \Big[\big((2ab+2cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\big)\big((2ab+2cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\big)\Big] - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = [((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2)] - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = \big((a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)\big) - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = \big((a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2c)(c+d+a+b-2b)(c+d+a+b-2a)\big) - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Temos que o perímetro, que denominaremos por 2p, é a soma dos lados do quadrilátero em questão, dessa forma temos que $2p = a + b + c + d$. Sendo assim:

$$\Rightarrow 16S^2 = \big((2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)\big) - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = \Big(\big(2(p-d)\big)\big(2(p-c)\big)\big(2(p-b)\big)\big(2(p-a)\big)\Big) - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2 = 16\big((p-d)(p-c)(p-b)(p-a)\big) - 16abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S^2 = \big((p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\big) - abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcdCos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Dessa maneira fica provado que a Fórmula é válida para o cálculo de Áreas de um quadrilátero qualquer, sabendo a medida de seus lados e ângulos.

3.2. Demonstração da veracidade da Fórmula de Brahmagupta

Vermos que a fórmula de Brahmagupta é válida apenas para quadriláteros cíclicos, dessa forma vamos definir esse quadrilátero.

3.2.1. Quadriláteros Cíclicos

Um quadrilátero é dito cíclico quando existe uma circunferência que intercepte seus quatros vértices. Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero ser inscritível é que os pares de ângulos opostos sejam suplementares.

Diferentemente dos triângulos, nem todo quadrilátero é cíclico ou circunscritível. Nessa subseção iremos demonstrar a condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja cíclico, levando em consideração a proposição que nos é dada, sendo enunciada por: Um quadrilátero convexo ABCD é cíclico se, e somente se, uma das seguintes condições forem satisfeitas: $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180°$ e $B\hat{A}D = B\hat{C}D$.

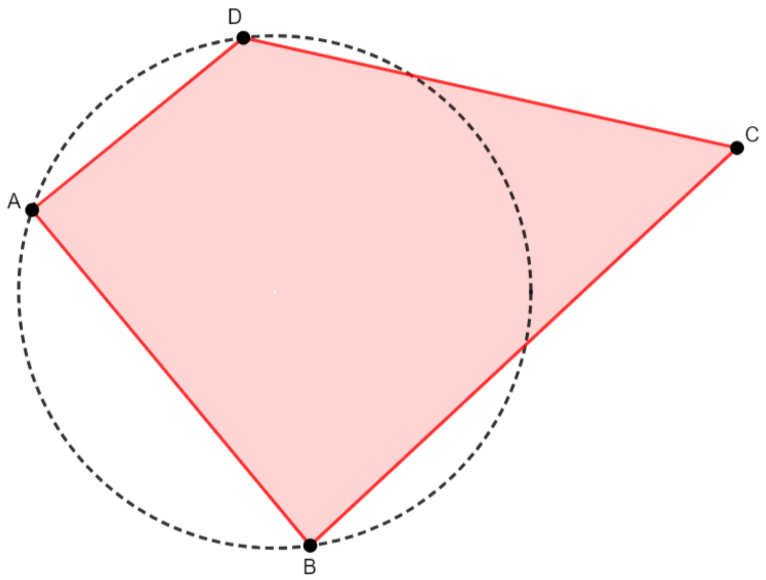

Figura 11: *Exemplo de um quadrilátero não cíclico*
Fonte: *O Autor*

Na figura 11 temos um quadrilátero ABCD não inscrito na circunferência, tal qual intersecta apenas os pontos A, B e C.

Confirma-se que o quadrilátero é não cíclico, pois, como já mencionado, é perceptível que a circunferência não intersecta todos os vértices do quadrilátero.

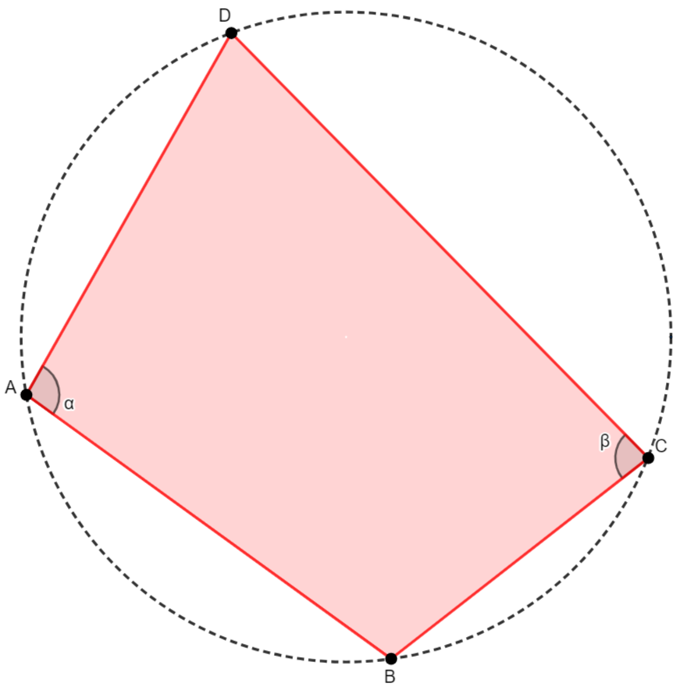

Figura 12: *Exemplificação de um Quadrilátero Cíclico*
Fonte: *O Autor*

Na figura 12 temos o quadrilátero ABCD, com ângulo sendo $B\hat{A}D = \alpha$ e $B\hat{C}D = \beta$, e sendo o quadrilátero cíclico então ele está inscrito a circunferência.

Pela definição de ângulo inscrito, sendo: Um ângulo inscrito num círculo é um ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são duas cordas do mesmo. Vale ressaltar que a medida de um ângulo inscrito equivale à metade do ângulo central correspondente. Dessa forma é possível dizermos que $\mathrm{B\widehat{A}D} = \mathrm{B\widehat{C}D}$ visto que ambos os ângulos compreendem o mesmo arco, observe a figura 12.

Logo,

$$\alpha + \beta = \frac{\mathrm{B\widehat{A}D} + \mathrm{B\widehat{C}D}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Agora suponha que o quadrilátero $ABCD$ não é inscritível, ou seja, que D não pertence à circunferência determinada que intercepta os pontos A, B e C.

Seja D' o ponto de interseção da reta AD com a circunferência, sendo assim:

$$B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180°$$

Por hipótese temos que $B\hat{A}D + B\hat{C}D' = 180°$, visto que $ABCD'$ é inscritível.

Logo, $D \equiv D'$

Portanto, um quadrilátero é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos forem suplementares.

Nota-se que ao aplicarmos a definição de um quadrilátero cíclico na fórmula geral do cálculo de área de um quadrilátero podemos concluir que é válida a fórmula de Brahmagupta, sendo essa fórmula uma decorrência direta da fórmula provada anteriormente. Dessa forma ao calcularmos:

$$\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Percebe-se que, sendo um quadrilátero cíclico, por definição, a soma dos ângulos opostos resulta em 180°, com isso, temos:

$$\alpha + \beta = 180°$$

Sendo assim, obtém-se:

$$\frac{180°}{2} = 90°$$

Observe também que ao calcularmos o $Cos(90°)$ resultamos em Zero. Dessa forma,

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2(90°)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd(0)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Dessa forma é possível entendermos a fórmula de Brahmagupta, e sendo válido para cálculo de áreas de quaisquer quadriláteros a fórmula, como visto anteriormente, sendo:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Percebe-se que a Fórmula de Brahmagupta também é válida, porém apenas para quadriláteros cíclicos.

É importante ressaltar que caso o quadrilátero não seja cíclico sua área possui medida estritamente menor que o resultado advindo da fórmula vista, sendo:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

De fato, para que a área seja a máxima possível, e tomando a fórmula para o cálculo, a maior área será aquela na qual o valor a ser retirado seja o menor possível.

Tomando a fórmula para o cálculo de área de um quadrilátero convexo. O menor valor a ser retirado será aquele cujo qual o valor de $\cos^2(\theta)$ seja o menor possível, e embasado na trigonometria conclui-se que esse valor é 0, portanto efetuando os cálculos temos:

$$\cos^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} Rad.$$

Dessa forma, sendo:

$$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} Rad$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) Rad.$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \pi Rad.$$

E por definição de quadriláteros inscritíveis temos que a soma de dois ângulos opostos é 180° ou πRad. Logo, esses quadriláteros possuíram a maior área.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao buscarmos uma temática para esse trabalho, tivemos a intenção de enfatizar um tema da geometria que tem uma grande importância não só para uma continuidade de estudos, como também para situações práticas que podem facilmente serem vivenciados no cotidiano. E espera-se que estudantes e professores que se interessarem em pesquisar sobre essa temática, tenham nesse trabalho um ponto de apoio para seus estudos.

Toda a pesquisa realizada nesse trabalho foi desenvolvida através de estudos sistematizados a partir do entendimento histórico de como se fundamentou o cálculo de áreas, enaltecendo as fórmulas de Heron e Brahmagupta que partem do princípio do cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros, que não dependem das alturas, tendo a área calculada em função do semiperímetro de uma figura.

Nesse processo conseguimos notar algumas relações entre as fórmulas estudadas, sendo assim buscamos elucidar tais conceitos através de demonstrações com uma linguagem bastante inerente a compreensão, deixando explícito todo o desenvolvimento.

Nota-se também que o ensino dessas fórmulas tanto no Ensino Médio como nos anos finais Ensino Fundamental é de extrema importância, apesar de termos fórmulas específicas para alguns polígonos, podemos perceber que elas expandem o conhecimento e facilitam o cálculo da área de triângulos e principalmente dos trapezoides com a utilização da fórmula de Brahmagupta.

O presente estudo nos motiva em continuar propagando a matemática e seus conceitos de forma relevante e engrandecendo personagens que fizeram parte da construção teórica e deixaram seu legado com suas devidas contribuições.

REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico.** REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.5, p.94-106, UFSC: 2007.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, 1974.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. e introdução de Irineu Bicudo. Ed. Unesp. São Paulo, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Ed. UNICAMP. São Paulo, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, vol.3.** Editora Atual. São Paulo, 1993.

ROBINS, Gay; SHUTE, Charles. **The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient Egyptian text.** London: British Museum Press, 1987.

SOBRÉ, Ulysses. **Geometria Plana: Área de região triangular**. Fórmula de Heron. www.pessoal.sercomtel.com.br. 11 out. 2014.

SÓ MATEMÁTICA. **Brahmagupta**. Consultado em 16/11/2023 às 21:08. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/biograf/brahma.php