



UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Modelos Matemáticos Epidemiológicos do Tipo SIS e SIR
e o Segundo Método de Lyapunov**

Letícia Maria Menezes dos Santos

Orientadora Prof^ª. Dr^ª. Maria Ângela Caldas Didier

Coorientadora Prof^ª. Dr^ª. Lorena Brizza Soares Freitas

RECIFE

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Letícia Maria Menezes dos Santos

**Modelos Matemáticos Epidemiológicos do Tipo SIS e SIR
e o Segundo Método de Lyapunov**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de graduado.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Maria Ângela Caldas Didier
Coorientadora: Prof^ª. Dr^ª. Lorena Brizza Soares Freitas

RECIFE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D722m dos Santos, Letícia Maria Menezes
Modelos matemáticos epidemiológicos do tipo SIS e SIR e o segundo método de Lyapunov / Letícia Maria Menezes dos Santos. - 2023.
104 f. : il.

Orientadora: Maria Angela Caldas Didier.
Coorientadora: Lorena Brizza Soares Freitas.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. Modelos SIS e SIR. 2. Sistemas localmente lineares. 3. Análise de estabilidade. 4. Funções de Lyapunov. 5. Valor de reprodutividade basal. I. Didier, Maria Angela Caldas, orient. II. Freitas, Lorena Brizza Soares, coorient. III. Título



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
TERMO DE APROVAÇÃO DE TCC

LETÍCIA MARIA MENEZES DOS SANTOS

MODELOS MATEMÁTICOS EPIDEMIOLÓGICOS DO TIPO SIS E
SIR E O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV

Trabalho de conclusão de curso aprovado com nota 10,0 como requisito para conclusão da disciplina de monografia (Cód. 06108), pela seguinte banca examinadora:

Orientadora:	_____	Nota: 10,0
	Prof. ^a . Dr. ^a /Ms. ^a . Maria Ângela Caldas Didier Departamento de Matemática – UFRPE	
Membro:	_____	Nota: 10,0
	Prof. Dr./Ms. Thiago Dias Oliveira Silva Departamento de Matemática – UFRPE	
Membro:	_____	Nota: 10,0
	Prof. Dr./Ms. Rodrigo Genuino Clemente Departamento de Matemática – UFRPE	

Média das notas	10,0
-----------------	------

Recife, 05 de Maio de 2023.

Dedico este trabalho aos meus pais, Elias e Wilza, que sempre me incentivaram e apoiaram durante toda minha trajetória.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, porque sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, Elias Francisco dos Santos e Wilza de Menezes Serpa dos Santos, ao meu irmão, Lucas Menezes dos Santos e a minha avó, Anizete Felizarda de Menezes, pela confiança inabalável em minha capacidade e pelo apoio incansável que me concederam em todas as etapas da minha vida.

A todos os professores que encontrei durante minha vida escolar e acadêmica. E ainda, a todos os meus colegas e amigos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação e para o desenvolvimento deste trabalho, sempre me incentivando a alcançar meus objetivos. Em particular, a Silvio Cavalcante Bonfim, pelo apoio de sempre e pelo auxílio na linguagem Python.

Em especial, gostaria de agradecer a minha orientadora e coorientadora, respectivamente, Maria Ângela Caldas Didier e Lorena Brizza Soares Freitas, pela paciência, dedicação e disponibilidade que sempre tiveram comigo.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo um estudo de modelos matemáticos epidemiológicos do tipo SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível) e SIR (Suscetível - Infectado - Removido) com foco na estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas de equações diferenciais que os descrevem. A análise de estabilidade será apresentada de duas maneiras, utilizando as características dos autovalores e/ou traço da matriz do sistema e usando o Segundo Método de Lyapunov. Também tratamos a estabilidade de variações desses modelos, considerando a população total não constante e a dinâmica vital (nascimentos e mortes) ou dividindo a população dos infectados em indivíduos expostos (infectados que ainda não transmitem a doença) e os indivíduos infecciosos (infectados que transmitem a doença). Definimos o Valor de Reprodutividade Basal e, para alguns modelos, apresentamos formas para a sua obtenção a partir das taxas envolvidas e condições iniciais do sistema. Um cálculo que determina o número máximo de infectados atingido foi realizado para o modelo SIR com população total constante e sem dinâmica vital. Por fim, para compreender como acontece, na prática, a utilização destes modelos, decidimos estudar a evolução da Pandemia do *Covid-19* no estado de Pernambuco em 2020 e 2021 por meio do modelo SIR com tamanho de população constante e sem dinâmica vital. Para isso, calculamos o valor de reprodutividade basal e o número máximo de infectados para cada caso. Vale destacar que para obter um modelo que melhor aproximasse os dados reais foi utilizado um algoritmo evolucionário.

Palavras-chave: Modelos SIS e SIR ; Sistemas Localmente Lineares; Análise de Estabilidade; Funções de Lyapunov; Valor de Reprodutividade Basal.

Abstract

This work aims to study epidemiological mathematical models of the SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) and SIR (Susceptible-Infected-Removed) types, focusing on the stability of the equilibrium points of the differential equation systems that describe them. Stability analysis will be presented in two ways, using the eigenvalue characteristics and/or the trace of the system matrix and using the Second Lyapunov Method. We also address the stability of variations of these models, considering non-constant total population and vital dynamics (births and deaths), or dividing the population of infected individuals into exposed individuals (infected who do not yet transmit the disease) and infectious individuals (infected who transmit the disease). We define the Basic Reproduction Value, and for some models, we present ways to obtain it from the involved rates and initial conditions of the system. A calculation that determines the maximum number of infected individuals reached was performed for the SIR model with constant total population and without vital dynamics. Finally, to understand how these models are practically applied, we decided to study the evolution of the COVID-19 pandemic in the state of Pernambuco in 2020 and 2021 through the SIR model with constant population size and no vital dynamics. To do this, we calculated the Basic Reproduction Value and the maximum number of infected individuals for each case. It is worth noting that an evolutionary algorithm was used to obtain a model that best approximated the real data.

Keywords: SIS and SIR Models; Locally Linear Systems; Stability Analysis; Lyapunov Functions; Basic Reproduction Number.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) Ponto crítico estável, (b) ponto crítico assintoticamente estável e (c) ponto crítico instável	26
Figura 2 – Retrato de fase do Exemplo (1.6).	34
Figura 3 – Retrato de Fase do Exemplo (1.7).	36
Figura 4 – Retrato de Fase do Exemplo (1.8).	39
Figura 5 – Retrato de Fase do Exemplo (1.9).	41
Figura 6 – Retrato de Fase do Exemplo (1.10).	42
Figura 7 – Retrato de fase do Exemplo (1.11).	44
Figura 8 – Retrato de fase do Exemplo (1.12).	46
Figura 9 – Retrato de Fase do Exemplo (1.13).	50
Figura 10 – Retrato de Fase do Exemplo (1.14).	52
Figura 11 – Retrato de fase do exemplo (2.4).	59
Figura 12 – Interpretação geométrica Segundo Método de Lyapunov.	63
Figura 13 – Retrato de Fase do Exemplo (2.7).	67
Figura 14 – Diagrama modelo SIS com N constante e sem demografia.	69
Figura 15 – Plano de fase.	72
Figura 16 – Diagrama modelo SIS com N constante e com dinâmica vital.	73
Figura 17 – Plano de fase.	75
Figura 18 – Diagrama modelo SIS com N variando e dinâmica vital.	76
Figura 19 – Diagrama do modelo SIR com N constante e sem dinâmica vital.	77
Figura 20 – Retrato de fase SI para o modelo SIR.	80
Figura 21 – Diagrama do modelo SIR N variável e com dinâmica vital.	82
Figura 22 – Diagrama do molo SIS com N variável e dinâmica vital.	87
Figura 23 – Diagrama do modelo SIR com N variável e dinâmica vital.	90
Figura 24 – Diagrama do modelo SEIR.	94
Figura 25 – Gráficos das aproximações obtidas.	101

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estabilidade de Sistemas lineares.	53
Tabela 2 – Tabela Comparativa de Estabilidade entre Sistemas lineares e Sistemas Localmente Lineares tal que N = Nó, NI = Nó impróprio, NP = Nó próprio, PS = Ponto de sela, PSp = Ponto de espiral, C = Centro. . .	57
Tabela 3 – Valores obtidos por algoritmo evolucionário.	100
Tabela 4 – Valores aproximados para I_{max} e \mathcal{R}_0	101

Sumário

	Introdução	19
1	SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM	22
1.1	Conceitos Preliminares	22
1.2	Teoria de Sistemas Lineares de Primeira Ordem	26
1.3	Retrato de Fase e Estabilidade no Caso Bidimensional	31
1.3.1	Autovalores Reais e Distintos	32
1.3.2	Autovalores Reais e Iguais	39
1.3.3	Autovalores Complexos	47
2	ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	54
2.1	Caso Bidimensional	54
2.2	O Segundo Método de Lyapunov	60
3	MODELOS MATEMÁTICOS EPIDEMIOLÓGICOS DO TIPO SIS E SIR	68
3.1	Modelos SIS	69
3.1.1	Modelo SIS: N constante sem dinâmica vital	69
3.1.2	Modelo SIS: N constante com dinâmica vital	73
3.1.3	Modelo SIS: N variável com dinâmica vital	76
3.2	Modelos SIR	77
3.2.1	Modelo SIR: N constante sem dinâmica vital	77
3.2.2	Modelo SIR: N variável com dinâmica vital	81
4	ESTABILIDADE VIA LYAPUNOV	87
4.1	Uma variação do modelo SIS com N variável e dinâmica vital	87
4.2	Uma variação do modelo SIR com N variável e dinâmica vital	90
4.3	Modelo SEIR (Suscetível - Exposto - Infectado - Removido)	93

5	MODELOS SIR PARA A <i>COVID-19</i> EM PERNAMBUCO .	99
5.1	Descrição da modelagem	99
	Conclusão	103
	REFERÊNCIAS	104

Introdução

Ao longo da história da humanidade, podemos perceber os diversos casos de doenças infecciosas que devastaram inúmeros povos. Quando uma doença se propaga rapidamente, de maneira direta ou indiretamente, atingindo uma boa parte da população de uma região, temos uma Epidemia. E quando uma epidemia atinge diversos países ou continentes, temos uma Pandemia.

Entre 430-426 a.C, houve registros da primeira epidemia significativa, na qual temos registros, a Peste de Atenas, que até hoje gera discussões acadêmicas sobre qual foi o seu agente causador. Já na idade média foi a vez da Peste Negra ou Peste Bubônica, uma das mais famosas e mais cruel pandemia presenciada pela humanidade. Ela foi responsável por dizimar pelo menos $1/3$ da população europeia da época. Era transmitida pelas pulgas dos ratos infectadas por uma bactéria que acredita-se ser de origem asiática.

No século XX a humanidade deparou-se com a pandemia da Gripe Espanhola que ocasionou cerca de 50 milhões de mortes ao redor do globo. Consistia em uma mutação do vírus da influenza. Essa doença surgiu no período da primeira guerra mundial onde a movimentação constante de tropas e refugiados possibilitou o cenário ideal para a disseminação da doença além dos sintomas da doença apresentarem-se inicialmente como uma gripe e posteriormente desenvolver-se para uma pneumonia.

Na atualidade, por exemplo, temos a AIDs que é considerada um doença pandêmica desde 1980 e a cólera no Haiti que desde 2010 é considerada uma epidemia. Além da pandemia do *Covid-19*, iniciada no final de 2019.

Através da Modelagem Matemática conseguimos entender o comportamento dessas doenças e auxiliar no combate das mesmas. Para a realização dessa análise usaremos os modelos compartimentais, que são chamados dessa forma devido ao fato da população ser dividida em compartimentos ou classes, que indicam em qual estado se encontra o indivíduo. Um modelo compartimental clássico é o SIR, que foi proposto a primeira vez por Kermack e McKendrick, de modo que a dinâmica é definida pelos indivíduos suscetíveis, infectados

e recuperados/removidos. Outro modelo compartimental mais simples é o modelo SIS. Nesse modelo tiramos a suposição de imunidade permanente, isto é, após a recuperação, os indivíduos podem se infectar novamente.

Podemos analisar um modelo quanto a sua estabilidade, esse estudo pode nos responder quando pequenas variações nas condições iniciais de uma equação diferencial de ordem um têm pouca importância a longo prazo. Ou seja, dada uma certa solução de uma equação diferencial de primeira ordem quando soluções com condições iniciais próximas permanecem próximas nela para sempre no futuro.

Um recurso utilizado para a análise de estabilidade é Segundo Método de Lyapunov que foi desenvolvido pelo matemático Russo Aleksandr Lyapunov (1857-1918). Este método consiste em analisar a estabilidade de um ponto crítico sem conhecer a solução do sistema, apenas utilizando uma função auxiliar. No entanto, não existe uma maneira geral para determinar essa função, dificultando assim, a utilização desse método.

Desse modo, este trabalho tem como foco uma análise da estabilidade de variações de modelos epidemiológicos do tipo SIS e SIR com o auxílio do segundo método de Lyapunov, quando possível. Observamos que no decorrer do texto utilizaremos negrito para indicar vetores em \mathbb{R}^n . Além disso, este trabalho está estruturado em capítulos que estão descritos abaixo.

No capítulo 1, apresentamos conceitos básicos envolvidos no estudo de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem autônomas assim como os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade. Também, classificamos a estabilidade dos pontos críticos de sistemas da forma $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, com \mathbf{A} matriz constante, observando a natureza dos autovalores de \mathbf{A} . Para cada caso, foram expostos exemplos com gráficos ilustrando o retrato de fase do ponto crítico em questão.

No capítulo 2, abordamos condições para que um sistema não-linear possa ser considerado localmente linear e um teorema que permite analisar a estabilidade de sistemas localmente lineares através dos autovalores do sistema linearizado. Como um outro recurso para análise de estabilidade de solução de sistemas equações diferenciais, apresentamos o Segundo Método de Lyapunov.

No capítulo 3, tratamos os modelos compartimentais epidemiológicos do tipo SIS e SIR com variações sobre o tamanho da população e sobre a dinâmica vital (nascimentos e mortes). Explicamos a construção dos sistemas de equações que os representam. Definimos o Valor de Reprodutividade Basal e o formulamos para alguns dos modelos vistos.

No capítulo 4, analisamos a estabilidade dos modelos SIS e SIR com tamanho de população variável e dinâmica vital utilizando o Segundo Método de Lyapunov. Também, apresentamos o modelo epidemiológico SEIR e analisamos a sua estabilidade via Lyapunov.

Por fim, no capítulo 5 são construídos modelos SIR para o *Covid-19* no estado de Pernambuco referentes a dados obtidos no site (8) em maio de 2020, fevereiro de 2021 e novembro de 2021. Para a obtenção dos valores das taxas de transmissão e remoção que melhor aproxima o modelo dos dados reais foi utilizado um algoritmo evolucionário e foram observados o valor de reprodutividade basal e o número máximo de infectados, em porcentagem.

Devido a quantidade de resultados que foram utilizados para a análise dos modelos epidemiológicos, nem todos eles foram demonstrados. Além disso, para uma melhor compreensão dos conceitos estudados e simulação dos modelos foi estudada e utilizada a linguagem Python. Os códigos referentes a aplicação descrita no capítulo 5 estão disponíveis em <<https://github.com/Leticia-MM-Santos/Aplica-o-COVID-19>>.

1 Sistemas de Primeira Ordem

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos que envolvem o estudo de equações diferenciais e teoria de estabilidade de sistemas de equações diferenciáveis lineares de primeira ordem autônomos. Para melhor compreensão dos tipos de estabilidade, analisaremos o caso bidimensional onde podemos visualizar o comportamento das trajetórias no plano de fase. Observamos que os modelos epidemiológicos que abordaremos são construídos a partir deste tipo de sistemas.

1.1 Conceitos Preliminares

Nesta seção, apresentaremos os conceitos iniciais necessários para o bom entendimento deste trabalho. Para tal, apresentaremos fatos básicos sobre a teoria de Equações Diferenciais Lineares.

Definição 1.1. Uma *equação diferencial* consiste em uma equação que envolve uma função y desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. Quando uma equação diferencial contém uma única variável independente é chamada de *equação diferencial ordinária*.

Dada uma variável independente t e uma função $y(t)$, costuma-se representar uma equação diferencial ordinária na forma:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

onde F é uma expressão que envolve t , $y = y(t)$ e suas derivadas, sendo a ordem da mais alta derivada de y , a ordem da equação (1.1).

A ordem da mais alta derivada de $y = y(t)$ que aparece em (1.1), determina a *ordem* deste tipo de equação. Em geral, uma equação diferencial ordinária de ordem n é representada por:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.2)$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada de $y = y(t)$ de ordem n . É possível transformar esse tipo de equação em um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Essa mudança pode ser vista em [3, p. 65].

Quanto a linearidade, uma equação (1.2) é *linear* quando se apresentar por uma combinação linear da função $y = y(t)$ e de suas derivadas, sendo os seus coeficientes funções de t . Isto é, são equações do tipo:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t), \quad (1.3)$$

sendo $a_i(t), i = 1, \dots, n$ e $g(t)$ funções. Caso contrário, a equação (1.2) é *não linear*.

Definição 1.2. Um *sistema de equações diferenciais ordinárias de Primeira Ordem* é conjunto de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e, geralmente, é representado pelo sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.4)$$

Uma *solução* para esse sistema em um intervalo $I : \alpha < t < \beta$ é apresentada como um conjunto de n funções $\phi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, com $t \in I$, tal que

$$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$$

são diferenciáveis e satisfazem a forma geral do sistema (1.4) em todos os pontos do intervalo I . Em um sistema de equações é comum serem apresentadas condições iniciais necessárias para analisá-lo. Aqui, as denotaremos por:

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0,$$

tal que x_1^0, \dots, x_n^0 são os números dados e t_0 é um valor de t em um intervalo I .

Definição 1.3. Um *problema de valor inicial* (PVI) é formado pelo sistema de equações (1.4) com condições iniciais fornecidas.

As soluções de um PVI são um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimensão n . Elas podem ser interpretadas como trajetórias de partículas movendo-se no sistema dado. Segundo o *Teorema de Existência e Unicidade de Picard* em [2, Teorema 2.8.1, p. 94], um PVI possui uma única solução, isto é, uma única trajetória.

Um sistema do tipo (1.4) é *linear* se ele for composto por equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. É representado por:

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{cases} \quad (1.5)$$

De modo contrário, o sistema (1.4) é dito *não linear*.

Quando todas as funções $g_1(t), \dots, g_n(t)$ forem nulas em um intervalo $I : \alpha < t < \beta$ o sistema (1.5) é dito *homogêneo*. Caso não satisfaça a condição anterior, é chamado *não homogêneo*.

O sistema (1.5), também pode ser escrito como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (1.6)$$

onde \mathbf{x} e $\mathbf{g}(t)$ são matrizes colunas com suas entradas nas coordenadas dos vetores $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $(g_1(t), \dots, g_n(t))$, respectivamente e $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz $n \times n$. Se as componentes do vetor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ satisfizerem o sistema (1.5), então diremos que ele será uma solução da equação (1.6). Consideraremos $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ contínuas em $I : \alpha < t < \beta$.

Definição 1.4. Um *sistema autônomo* é um sistema do tipo (1.5) cujas as funções que o compõem não dependem da variável independente t , podendo ser representado de duas formas:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Os conceitos que abordaremos a seguir são referentes apenas aos sistemas autônomos.

Definição 1.5. Um ponto \mathbf{x}^0 tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ é denominado *ponto crítico ou de equilíbrio* do sistema autônomo $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{0}$ denota o vetor nulo.

Adiante apresentaremos definições que caracterizam um ponto crítico quanto a sua estabilidade.

Definição 1.6. Um ponto crítico \mathbf{x}^0 do sistema (1.7) é dito *estável*, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda solução $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{t})$ do sistema, com condição

$$\|\phi(\mathbf{0}) - \mathbf{x}^0\| < \delta,$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$\|\phi(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon$$

para todo $t \geq 0$.

Definição 1.7. Um ponto crítico \mathbf{x}^0 do sistema (1.7) é *assintoticamente estável* se ele for estável e existir um $\delta_0 \in (0, \delta)$ tal que se uma solução

$$\|\phi(\mathbf{0}) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0,$$

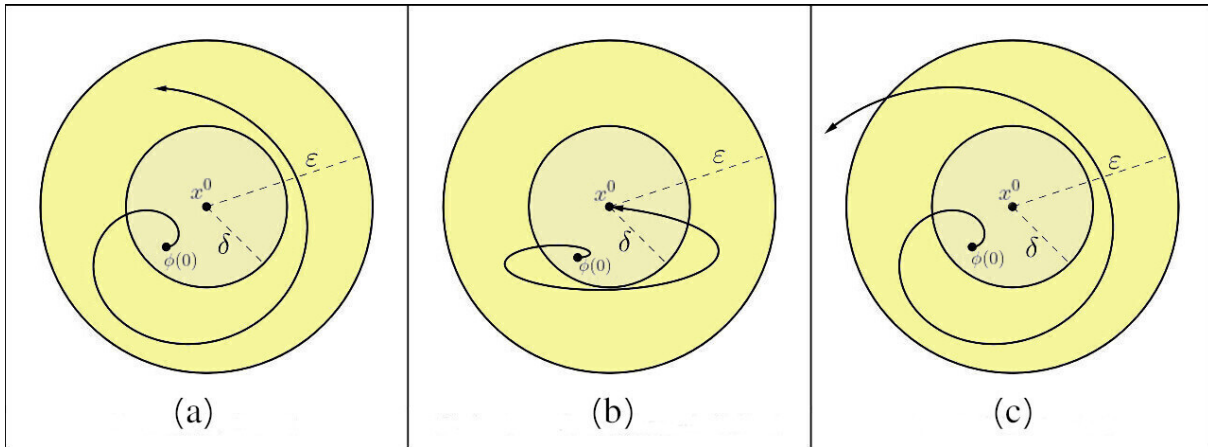
então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{t}) = \mathbf{x}^0.$$

Definição 1.8. Todo ponto crítico que não é estável é chamado *instável*.

As Figuras a seguir ilustram os tipos de equilíbrio quanto a sua estabilidade.

Figura 1 – (a) Ponto crítico estável, (b) ponto crítico assintoticamente estável e (c) ponto crítico instável



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

1.2 Teoria de Sistemas Lineares de Primeira Ordem

A partir de agora, trabalharemos com sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem homogêneos. Isto é, trataremos sistemas da forma (1.6) com $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Conseqüentemente, o nosso sistema será

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (1.8)$$

e usaremos a notação a seguir para representar soluções específicas do sistema.

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \dots$$

Adiante, serão abordados alguns teoremas que dizem respeito as soluções do sistema (1.8).

Teorema 1.1. *Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ forem soluções do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, então a combinação linear $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ também será solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2 .*

Demonstração. Considere $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$. Derivando, temos

$$(c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)})' = c_1(\mathbf{x}^{(1)})' + c_2(\mathbf{x}^{(2)})'.$$

Como $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}^{(1)'} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)'} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(2)}$.

Logo,

$$\begin{aligned} (c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)})' &= c_1(\mathbf{x}^{(1)})' + c_2(\mathbf{x}^{(2)})' \\ &= c_1\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(2)} \\ &= \mathbf{A}(t)(c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Portanto, $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ é a solução da equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$. \square

Mais geralmente, toda combinação linear finita de soluções da $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ também será solução.

Seja $\mathbf{X}(t)$ uma matriz de modo que suas colunas sejam compostas pelos componentes de $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, soluções do sistema (1.8). Assim,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Definição 1.9 (Wronskiano). O determinante da matriz $\mathbf{X}(t)$ é chamado de *Wronskiano* e é denotado por $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$.

Quando $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t_0) \neq 0$ para algum t_0 , então as colunas de $\mathbf{X}(t)$ são linearmente independentes nesse t_0 , isso pode ser visto em [2, p. 328]. Logo, as soluções do sistema em um ponto t serão linearmente independentes quando o Wronskiano for diferente de zero, isto é

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \det \mathbf{X} \neq 0.$$

Teorema 1.2. *Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forem soluções linearmente independentes do sistema (1.8) em cada ponto do intervalo $I : \alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ do sistema poderá ser expressa como uma combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$,*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

de exatamente um modo.

Demonstração. Mostraremos que se existe alguma solução $\mathbf{x}(t)$ do sistema (1.8), então ela será na forma $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ para valores convenientes de c_1, c_2, \dots, c_n . Sejam $t = t_0 \in I$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $\phi(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ que também satisfaça a condição inicial $\phi(t_0) = \mathbf{y}$. Por hipótese, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em todo o intervalo I , o que já garante que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}] \neq 0 \forall t \in \alpha < t < \beta$, em particular para $t = t_0$. Isto é, existem únicos c_1, \dots, c_n tais que $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0)$. Desse modo, $\phi(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ é solução de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ e pelo Teorema de Existência e Unicidade, implica em $\mathbf{x}(t)$ ser solução única de

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0) \end{cases}.$$

Portanto, temos que $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ com c_1, \dots, c_n unicamente determinados.

□

Definição 1.10. Para c_1, \dots, c_n constantes arbitrárias, chamamos de *solução geral* todas as soluções do sistema que a podem ser representadas da seguinte forma $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$. E cada conjunto de soluções linearmente independentes do sistema em um intervalo $I : \alpha < t < \beta$ chamaremos de *conjunto fundamental de soluções* para este intervalo.

O próximo teorema é conhecido como *Teorema de Abel* e é importante, pois através dele não precisamos calcular o Wronskiano em todos os pontos do intervalo desejado, para determinar se as soluções são linearmente dependentes ou independentes. Para isso, precisamos determinar se a solução do sistema é um conjunto fundamental de soluções, caso seja, então basta calculá-lo em apenas um ponto do intervalo.

Teorema 1.3. (*Teorema de Abel*) Se $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forem soluções da equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula neste intervalo.

Demonstração. Inicialmente demonstramos o caso 2×2 . Sejam $\mathbf{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)})^t$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)})^t$ soluções do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ no intervalo (α, β) , isto é,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)'} & x_1^{(2)'} \\ x_2^{(1)'} & x_2^{(2)'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} & a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} \\ a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} & a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Por outro lado,

$$W' = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix}' = (x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)})' = (x_1^{(1)})'x_2^{(2)} + x_1^{(1)}(x_2^{(2)})' - (x_2^{(1)})'x_1^{(2)} - x_2^{(1)}(x_1^{(2)})'.$$

Substituindo as derivadas conforme a igualdade das matrizes em (1.11), tem-se

$$\begin{aligned} W' &= x_1^{(1)'}x_2^{(2)} + x_1^{(1)}x_2^{(2)'} - x_2^{(1)'}x_1^{(2)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)'} \\ &= (a_{11} + a_{22})W. \end{aligned}$$

Note que se $W = 0$ nada temos a demonstrar. Suponha que $W \neq 0$ para algum $t \in (\alpha, \beta)$.

Então da equação $W' = (a_{11} + a_{22})W$ tem-se que

$$W = e^{(a_{11}+a_{22})t+c}.$$

Portanto, $W \neq 0$. □

Teorema 1.4. *Sejam*

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, suponha que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$ satisfazendo as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)},$$

respectivamente, em que t_0 é um ponto qualquer no intervalo $I : \alpha < t < \beta$. Então, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para esse sistema.

Demonstração. A existência e unicidade das soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ com condição inicial em $t = t_0$ é garantida em [2, Teorema 7.1.2, p. 305]. Ademais, temos que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ e satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}.$$

Logo, as soluções formam uma matriz identidade em $t = t_0$ e o Wronskiano é igual a 1 nesse ponto. Assim, pelo Teorema de Abel, concluímos que o $\det X \neq 0$ e, conseqüentemente, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções. \square

Teorema 1.5. *Considere o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, em que cada elemento de A é uma função contínua que assume valores reais. Se $\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ for uma solução complexa do sistema, então sua parte real $\mathbf{u}(t)$ e sua parte imaginária $\mathbf{v}(t)$ também serão soluções deste sistema.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\mathbf{A}(t)$ assume valores reais, então iremos separá-lo em partes real e imaginária. Para isso, tomaremos $\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ e substituiremos na equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$. Assim,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t))' - \mathbf{A}(t)(\mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)) &= 0, \\ \Rightarrow \mathbf{u}'(t) + i\mathbf{v}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{A}(t)i\mathbf{v}(t) &= 0, \\ \Rightarrow \mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + i(\mathbf{v}'(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, sendo um número complexo igual a zero, se e somente se, suas partes real e imaginária forem iguais a zero, concluímos que

$$\mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = 0 \text{ e } \mathbf{v}'(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) = 0.$$

Portanto, $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são soluções da equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$.

\square

Por fim, concluímos que um conjunto fundamental de soluções para o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ é formado por qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes desse sistema e que para determinar se o conjunto de soluções é um conjunto fundamental, basta verificar se o Wronskiano é diferente de zero em algum ponto do intervalo analisado.

Além disso, qualquer solução do sistema pode ser representada como combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções.

1.3 Retrato de Fase e Estabilidade no Caso Bidimensional

Vamos considerar os sistemas autônomos como definido na primeira seção deste capítulo. Ou seja, sistemas na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.12)$$

sendo \mathbf{A} uma matriz constante de ordem 2×2 . Esta é a ordem considerada da matriz, para podermos visualizar e analisar graficamente as soluções do sistema.

Procuramos soluções de (1.12) na forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{\lambda t}$. Como consequência, a equação

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = 0, \quad (1.13)$$

precisa ser satisfeita e, assim, λ é um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ é um autovetor associados a matriz \mathbf{A} . Usando álgebra linear, os autovalores são determinados pela equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Já os autovetores são identificados substituindo os autovalores na equação (1.13).

Para o caso de n autovalores reais distintos, a solução geral é dada por

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}. \quad (1.14)$$

Verifica-se no capítulo 7 de [2] que se tivermos autovalores iguais ou complexos, após algumas manipulações algébricas, é possível obter um conjunto fundamental de soluções e a solução geral com aspecto igual a (1.14).

Uma solução do sistema (1.12) é uma função vetorial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})$. Essa função pode ser vista como uma representação paramétrica de uma curva no espaço n -dimensional, $x_1x_2 \dots x_n$. A representação dessa solução no espaço $x_1x_2 \dots x_n$ será denominada *Espaço de Fase* e o conjunto de trajetórias presentes no espaço é chamado de *Retrato de Fase*. Neste

trabalho, abordaremos o caso bidimensional, onde o espaço de fase é chamado de *Plano de Fase*.

Em particular, as *soluções de equilíbrio* são pontos que satisfazem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, isto é, os pontos críticos. Ou seja, se temos um ponto crítico \mathbf{x}^0 , pelo teorema de existência e unicidade, a única solução que passa por este ponto é a própria solução constante. Assim, a trajetória desta solução é o ponto único \mathbf{x}^0 . Além disso, note que se \mathbf{A} é invertível, isto é, $\det \mathbf{A} \neq 0$, então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto crítico do sistema (1.12).

Os cálculos necessários para se ter uma boa análise de um sistema de equações diferenciais de ordem n nem sempre são bem sucedidos, um outro caminho para resolver esse problema é fazer uma análise geométrica, que muitas vezes permite uma abordagem satisfatória. Sendo assim, uma solução do sistema será considerada como uma trajetória percorrida por uma partícula em movimento com velocidade $\frac{dx}{dt}$, determinada pela equação diferencial. E para visualizarmos essa trajetória, será tratado somente o caso bidimensional.

A seguir vamos classificar a estabilidade de um ponto crítico de (1.12), através de seu retrato de fase. Observamos que dependendo da natureza dos autovalores de A , diferentes retratos de fase serão obtidos.

1.3.1 Autovalores Reais e Distintos

Analisaremos todas as possibilidades para autovalores reais da matriz \mathbf{A} do sistema (1.12) caracterizando as trajetórias do sistema quanto a sua estabilidade.

Caso 1: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Quando os autovalores forem reais, distintos e negativos, então a solução geral do sistema é dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t}.$$

Note que, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$, independente das constantes c_1 e c_2 . Ou seja, as soluções ficam mais próximas do ponto crítico na origem quando $t \rightarrow \infty$. Temos ainda que para $t \rightarrow \infty$, se $c_1 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Analogamente, se $c_2 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

Reescrevendo a solução geral como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)}].$$

Se $c_2 \neq 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, quando $t \rightarrow \infty$ com trajetórias tendendo a origem e também à reta em direção a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Pois, como $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, então $c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ torna-se desprezível em relação a $c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)}$, para valores suficientemente grandes de t . Exceto se as trajetórias começarem exatamente na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

Neste caso, a solução é *assintoticamente estável* e a origem é chamada de *nó*, *nó atrator* ou *sorvedouro*. Assim, pelos conceitos da seção anterior, temos um *nó assintoticamente estável*. Segue um exemplo desse caso.

Exemplo 1.6. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0, \\ \Rightarrow (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 1 &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}.$$

Portanto, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$. Agora, encontrando o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 + 3 & 1 \\ 1 & -2 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\xi_1^{(1)} = -\xi_2^{(1)}.$$

E assim, o autovetor associado ao autovalor λ_1 é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinando o autovetor associado a $\lambda_2 = -1$, temos que

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$\xi_1^{(2)} = \xi_2^{(2)}.$$

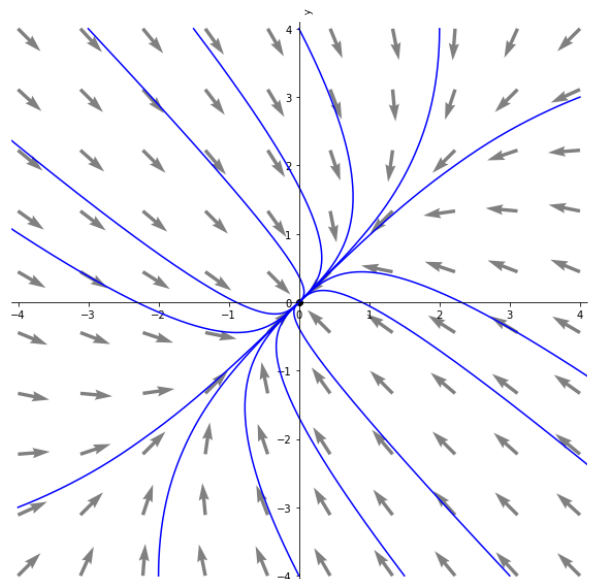
E assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Figura 2 – Retrato de fase do Exemplo (1.6).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste exemplo, o ponto $(0, 0)$ é chamado *nó atrator* ou *sorvedouro* e de acordo com os conceitos da seção (1.1) podemos dizer que ele é um *nó assintoticamente estável*.

Caso 2: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Para os autovalores reais, distintos e positivos, temos que as trajetórias se comportam de maneira análoga ao caso anterior. No entanto, na origem, elas fazem o movimento oposto, isto é, elas se afastam do ponto crítico.

Neste caso, a solução é instável e a origem é chamada de *nó* ou *fonte*. Veja um exemplo desse caso.

Exemplo 1.7. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{5}{4} - \lambda\right)\left(\frac{5}{4} - \lambda\right) - \frac{9}{16} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\lambda = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2}$$

logo, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$. Agora, encontrando o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\xi_1^{(1)} = -\xi_2^{(1)}.$$

E assim, o autovetor associado ao autovalor λ_1 é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinando o autovetor associado a $\lambda_2 = 2$, temos que

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} - 2 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$\xi_1^{(2)} = \xi_2^{(2)}.$$

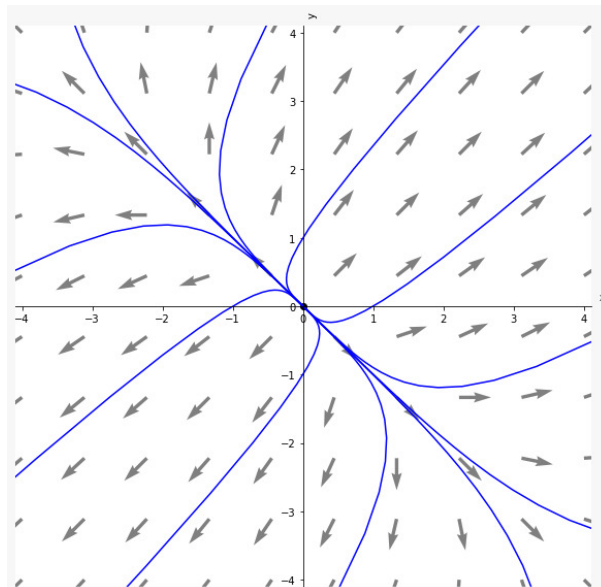
E assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Figura 3 – Retrato de Fase do Exemplo (1.7).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é chamado *nó* ou *fonte* e conforme a seção (1.1), temos que ele é um *um nó instável*.

Caso 3: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

No caso em que os autovalores são reais com sinais opostos, tal que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, temos que a solução geral do sistema é da forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t}.$$

Para $c_1 = 0$, temos que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ com $t \rightarrow \infty$, visto que $\lambda_2 < 0$. E se a solução começar em um ponto da reta que contém a origem, então a direção da trajetória é determinada por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e a solução permanece nessa reta.

Já para $c_2 = 0$, temos que $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ com $t \rightarrow \infty$, dado que $\lambda_1 > 0$. E se a solução começar em um ponto da reta que contém a origem, então a direção da trajetória é determinada por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e a solução permanece nessa reta.

Por outro lado, se $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, então $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$. Isto é, para soluções que comecem em qualquer outro ponto inicial, elas tenderão a infinito assintoticamente à reta determinada por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. Pois, para valores suficientemente grandes de t , $c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t}$ é desprezível em comparação a $c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t}$. Neste caso, chamamos a origem de *ponto de sela*.

Observe abaixo um exemplo desse caso.

Exemplo 1.8. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Determinando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 3 & -2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 3 &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Encontrando o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2+1 & -1 \\ 3 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$3\xi_1^{(1)} = \xi_2^{(1)}.$$

Então, o autovetor associado ao autovalor λ_1 é

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Encontrando o autovetor associado a λ_2 , temos que

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 3 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$\xi_1^{(2)} = \xi_2^{(2)}.$$

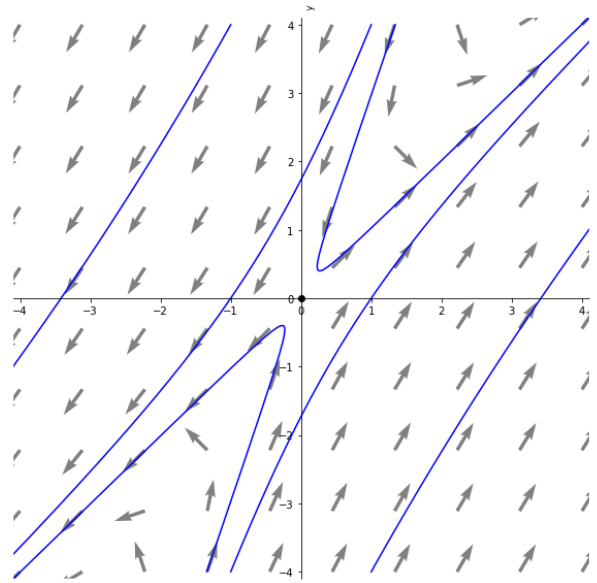
E assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ é

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Figura 4 – Retrato de Fase do Exemplo (1.8).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é chamado *ponto de sela* e conforme a seção (1.1), temos que ele é um *ponto de sela instável*.

1.3.2 Autovalores Reais e Iguais

Para o caso dos autovalores reais iguais teremos dois subcasos, dos quais dependerá se o autovalor repetido terá autovetores linearmente independentes ou dependentes.

Caso 4: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ com autovetores independentes

Neste caso, temos que a solução geral do sistema é da forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda t},$$

de modo que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são autovetores linearmente independentes. Caso $c_1 = 0$ então $x(t) = c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda t}$. Como $\lambda < 0$ quando $t \rightarrow \infty$ segue que $x(t) \rightarrow 0$. Analogamente, se $c_2 = 0$ então $x(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda t}$ o que implica em $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Suponha $c_1, c_2 \neq 0$, então $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t}$ com $\boldsymbol{\xi} = (c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)})$. Como os autovetores são linearmente independentes então $\boldsymbol{\xi}$ é não nulo. Portanto $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Desse modo o plano de fase é formado por retas que passam pela origem.

Exemplo 1.9. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$. Para $\lambda = -1$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{pmatrix} -1 - 1 & 0 \\ 0 & -1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

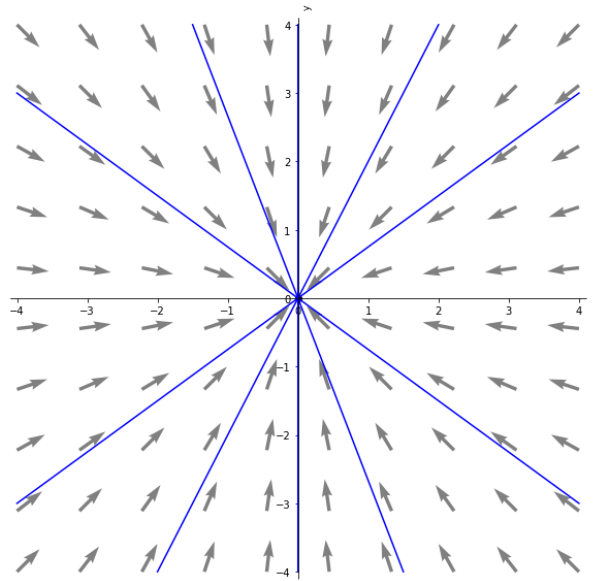
Então, os autovetores correspondentes são

$$\boldsymbol{\xi}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral para esse sistema é representada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 5 – Retrato de Fase do Exemplo (1.9).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é chamado *nó próprio* ou *ponto estrela* e conforme a seção (1.1), temos que ele é *assintoticamente estável*.

Caso 5: Um autovetor independente com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

Observe que o $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ é unicamente determinado por $e^{\lambda t}$. Desse modo executando uma análise análoga ao caso anterior concluímos que se $t \rightarrow \infty$ então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$.

Exemplo 1.10. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (2 - \lambda)(2 - \lambda) &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$. Para $\lambda = 2$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

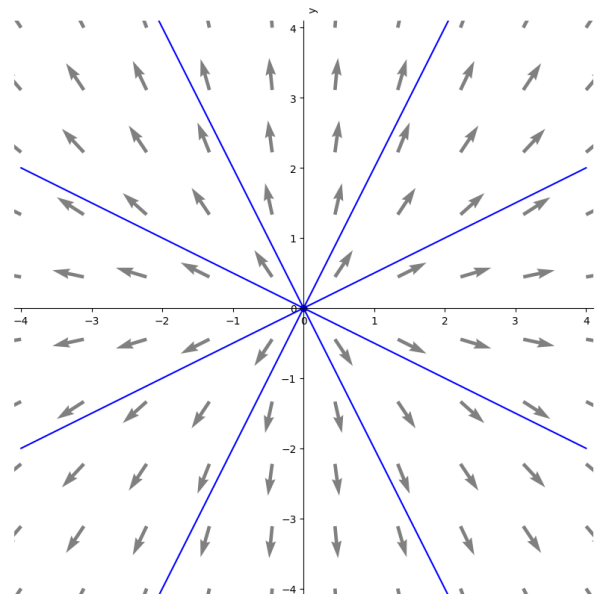
Então, os autovetores correspondentes são

$$\boldsymbol{\xi}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral para esse sistema é representada por

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 6 – Retrato de Fase do Exemplo (1.10).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, a origem é chamada de *nó próprio* ou *ponto estrela*, no entanto ele é *instável*.

Caso 6: Um autovetor dependente com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

Para este caso, a solução geral do sistema é expressa por:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t}),$$

tal que $\boldsymbol{\xi}$, é um autovetor e $\boldsymbol{\eta}$ é um autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Suponha $c_1 = 0$ então $\mathbf{x}(t) = c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t})$. Logo, se $t \rightarrow \infty$ então $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$, pois $\lim_{t \rightarrow 0} t e^{\lambda t} = 0$. Analogamente, se $c_2 = 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$. Agora, se $c_1, c_2 \neq 0$, como $\lambda < 0$ segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + \lim_{t \rightarrow \infty} c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + \lim_{t \rightarrow \infty} c_2 \boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \lim_{t \rightarrow \infty} c_2 \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.11. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 4 & -7 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (1 - \lambda)(-7 - \lambda) &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -3$. Para $\lambda = -3$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 + 3 & -4 \\ 4 & -7 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Então, o autovetor correspondente é

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, calculamos $\boldsymbol{\eta}$ por meio de

$$\begin{pmatrix} 1+3 & -4 \\ 4 & -7+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\eta_2 = \eta_1 - \frac{1}{4}.$$

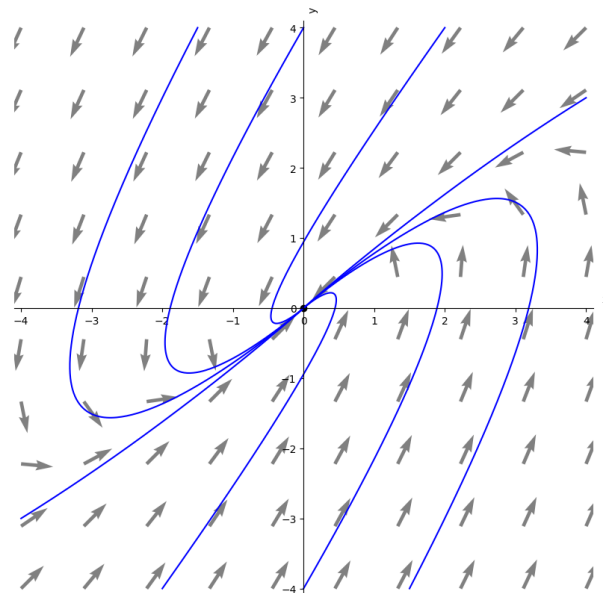
Isto é,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral para esse sistema é representada por

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[t e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right].$$

Figura 7 – Retrato de fase do Exemplo (1.11).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é chamado *nó impróprio* ou *degenerado* e conforme a seção (1.1), temos que ele é *assintoticamente estável*.

Caso 7: Um autovetor dependente com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

Para este caso, a solução geral do sistema é expressa por:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t}),$$

tal que $\boldsymbol{\xi}$, é um autovetor e $\boldsymbol{\eta}$ é um autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Se $c_1 = 0$ então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$ se $t \rightarrow \infty$ uma vez que $c_2 \boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t}$ é o termo de maior crescimento da solução. Se $c_2 = 0$ então $\mathbf{x}(t)$ vai pra infinito na direção de $\boldsymbol{\xi}$. Agora suponha que $c_1, c_2 \neq 0$. Analisamos três casos: Se $c_1, c_2 > 0$ então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$; Se $c_1, c_2 < 0$ então $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow -\infty$. Se c_1 e c_2 tem sinais opostos então $\mathbf{x}(t) = (c_3 \boldsymbol{\mu} + c_2 t \boldsymbol{\xi}) e^{\lambda t}$ com c_3 constante e $\boldsymbol{\mu}$ um novo autovetor obtido da combinação linear de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$. Desse modo $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ na direção de $\boldsymbol{\xi}$.

Exemplo 1.12. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -8 \\ 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (6 - \lambda)(-2 - \lambda) + 16 &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$. Para $\lambda = 2$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 - 2 & -8 \\ 2 & -2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Então, o autovetor correspondente é

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora calculamos $\boldsymbol{\eta}$ por meio de

$$\begin{pmatrix} 6-2 & -8 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\eta_1 = \frac{1}{2} + 2\eta_2.$$

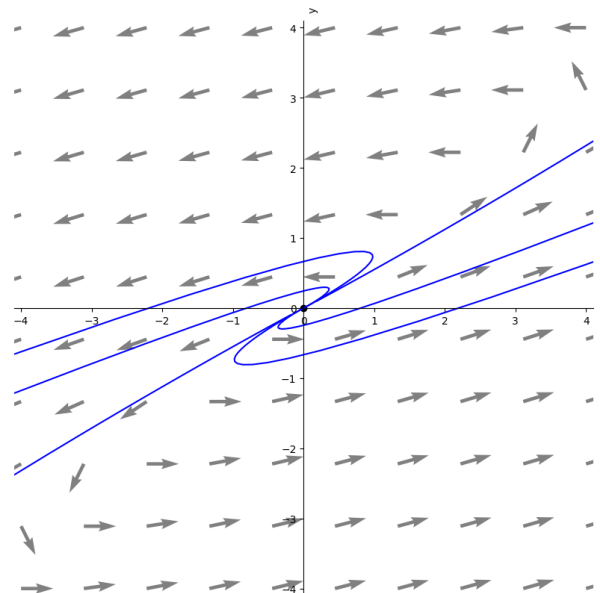
Isto é,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral para esse sistema é representada por

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[t e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Figura 8 – Retrato de fase do Exemplo (1.12).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é chamado *nó impróprio* ou *degenerado* e conforme a seção (1.1), temos que ele é *instável*.

1.3.3 Autovalores Complexos

Para o caso de autovalores complexos faremos a análise das soluções a partir do sistema.

Caso 8: $\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$ com $r \neq 0$

Supondo que os autovalores são $r \pm i\mu$, tal que $r \neq 0$ e $\mu > 0$, considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (1.15)$$

ou de maneira escalar

$$\begin{cases} x_1' &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \lambda x_2 \end{cases} \quad (1.16)$$

Considere

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan \theta = \frac{x_2}{x_1}.$$

Derivando essas equações em relação a t , temos

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (\sec^2 \theta)\theta' = \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{x_1^2}. \quad (1.17)$$

Então,

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2' = x_1(\lambda x_1 + \mu x_2) + x_2(-\mu x_1 + \lambda x_2) = \lambda(x_1^2 + x_2^2) - \mu x_1x_2 + \mu x_1x_2 = \lambda r^2.$$

Portanto $r' = \lambda r$. Desse modo,

$$r(t) = ce^{\lambda t}. \quad (1.18)$$

Agora, para a segunda equação observe que $\sec^2 \theta = r^2/x_1^2$, então

$$\begin{aligned} (\sec^2 \theta)\theta' &= \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{x_1^2} = \frac{x_1(-\mu x_1 + \lambda x_2) - x_2(\lambda x_1 + \mu x_2)}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu(x_1^2 + x_2^2) - \lambda x_1x_2 + \lambda x_1x_2}{x_1^2} = \frac{-\mu r^2}{x_1^2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\theta' = -\mu.$$

Portanto,

$$\theta(t) = -\mu t + \theta_0, \quad (1.19)$$

com $\theta_0 = \theta(0)$. Desse modo, temos que as equações (1.18) e (1.19) são equações paramétricas em coordenadas polares do sistema inicial. Note que, como $\mu > 0$ então θ diminui, de modo que t cresce, então o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Temos ainda, pela equação (1.18), quando $t \rightarrow \infty$, se $\lambda < 0$, então $r \rightarrow 0$. Já se $\lambda > 0$, então $r \rightarrow \infty$. Portanto, as trajetórias são espirais que dependendo do sinal se afastam ou tendem à origem.

Nestes casos o ponto crítico é chamado de *ponto espiral*. Quando $\lambda < 0$, esse ponto pode ser chamado de *atrator espiral* e diremos que as trajetórias são *assintoticamente estáveis*. E quando $\lambda > 0$, podemos denotá-lo de *fonte espiral* e diremos que as trajetórias são *instáveis*.

Exemplo 1.13. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} &= 0, \\ (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 &= 0, \\ \lambda^2 - 2\lambda + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Então, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = 1 - 2i$ e $\lambda_2 = 1 + 2i$.

Olhando para $\lambda_1 = 1 - 2i$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 - 1 + 2i & -2 \\ 4 & -1 - 1 + 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 2 + 2i & -2 \\ 4 & -2 + 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Multiplicando, temos

$$(2 + 2i)\xi_1^{(1)} - 2\xi_2^{(1)} = 0.$$

Logo,

$$(1+i)\xi_1^{(1)} = \xi_2^{(1)}.$$

Assim, encontramos

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

E a solução para esse autovetor é

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(1-2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^t e^{-2it}.$$

Pela identidade de Euler, sabemos que $e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, então obtemos

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^t (\cos 2t - i \sin 2t).$$

Para $\lambda_2 = 1 + 2i$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{pmatrix} 3-1-2i & -2 \\ 4 & -1-1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando, temos

$$(2-2i)\xi_1^{(2)} - 2\xi_2^{(2)} = 0.$$

Logo,

$$(1-i)\xi_1^{(2)} = \xi_2^{(2)}.$$

Assim, encontramos

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

A solução para esse autovetor é

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^t e^{2it}.$$

Pela identidade de Euler, sabemos que $e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, então,

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^t (\cos 2t + i \sin 2t).$$

Podemos escolher tanto $x_1(t)$ quanto $x_2(t)$ para determinar a solução da equação. Considerando $x_1(t)$ tem-se,

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^t (\cos 2t - i \sin 2t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

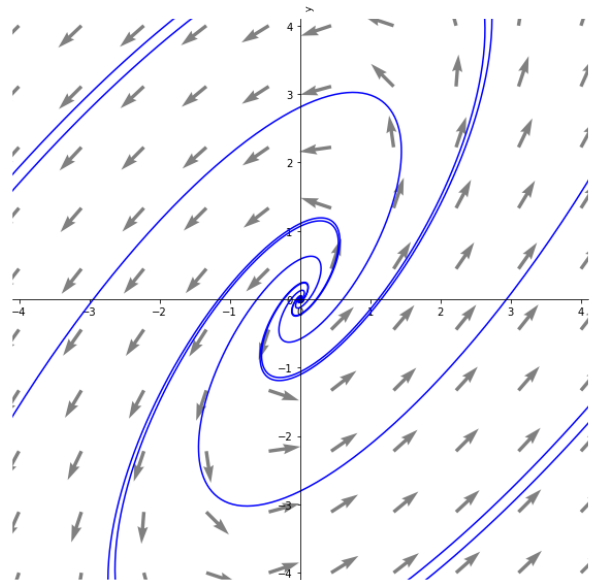
Resta verificar se a parte real e a parte imaginária são linearmente independentes. Então,

$$\begin{aligned} W &= \det \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & -e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t - e^t \sin 2t & e^t \cos 2t - e^t \sin 2t \end{pmatrix} \\ &= e^t (\cos^2 2t - \cos 2t \sin 2t + \cos 2t \sin 2t + \sin^2 2t) \\ &= e^t (\sin^2 2t + \cos^2 2t) = e^t. \end{aligned}$$

Como $e^t \neq 0$ para todo t uma solução geral para esse sistema pode ser representada por

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Figura 9 – Retrato de Fase do Exemplo (1.13).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste exemplo, temos trajetórias instáveis e um ponto espiral, ou ainda, um ponto espiral instável.

Caso 9: $\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$ com $r = 0$

Neste caso, consideraremos os autovetores $\lambda = r \pm i\mu$, tal que $r = 0$. Assim, trataremos o seguinte sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (1.20)$$

Utilizando os argumentos do caso anterior, encontramos

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu,$$

logo,

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0,$$

tal que c e θ_0 são constantes. Portanto, as trajetórias são círculos cujo centro está na origem, de modo que se $\mu > 0$, então o movimento da trajetória é no sentido horário. Já se $\mu < 0$, então o sentido da trajetória será no movimento anti-horário. O ponto crítico é chamado de *centro* e as trajetórias são *estáveis*.

Exemplo 1.14. Encontre a solução geral e analise a estabilidade do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Encontrando os autovalores, temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0, \\ (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 5 &= 0, \\ \lambda^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos os seguintes autovalores para a matriz, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Olhando para $\lambda = i$, temos que o autovetor associado é dado por

$$\begin{pmatrix} 2 - i & -5 \\ 1 & -2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0,$$

implicando que

$$\xi_1^{(1)}(2 - i) - 5\xi_2^{(1)} = 0 \Leftrightarrow \xi_2^{(1)} = \left(\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right)\xi_1^{(1)}.$$

Então, encontramos

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - i \end{pmatrix}.$$

A solução para esse autovetor é

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ 2 \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Resta verificar se as partes real e imaginária de x_1 são linearmente independentes.

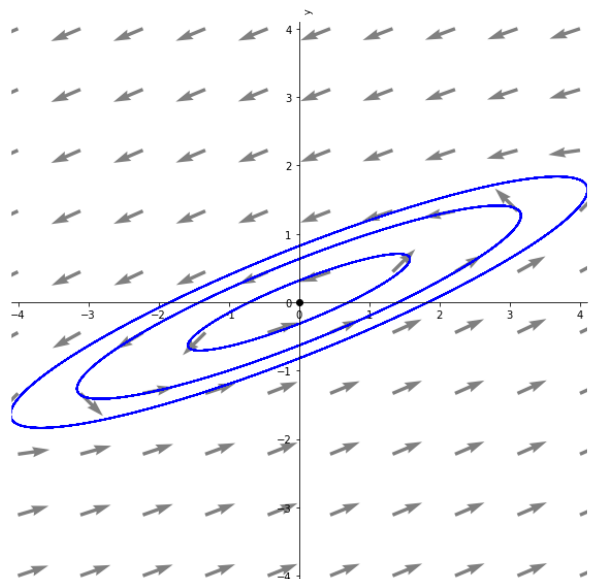
Então,

$$\begin{aligned} W &= \det \begin{pmatrix} 5 \cos t & 5 \sin t \\ 2 \cos t + \sin t & 2 \sin t - \cos t \end{pmatrix} \\ &= 10 \cos t \sin t - 5 \cos^2 t - 10 \cos t \sin t - 5 \sin^2 t \\ &= -5(\sin^2 t + \cos^2 t) = -5 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral para esse sistema pode ser representada por

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + ic_2 \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ 2 \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Figura 10 – Retrato de Fase do Exemplo (1.14).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é chamado de *centro* e pela Seção (1.1) podemos dizer que ele é um *centro estável*.

Depois de estudar todas as classificações dos autovalores e o quanto eles influenciam no conhecimento do tipo das trajetórias, podemos resumir esses resultados no seguinte teorema.

Teorema 1.15. *O ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema autônomo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ será:*

- I. *Assintoticamente estável, se os autovalores λ_1 e λ_2 forem reais e negativos ou tiverem parte real negativa.*
- II. *Estável, mas não assintoticamente estável, se λ_1 e λ_2 forem imaginários puros*
- III. *Instável, se λ_1 e λ_2 forem reais e um deles for positivo, ou se ambos tiverem parte real positiva.*

Demonstração. Ver [2, p. 418]. □

Podemos ilustrar o Teorema 1.15 com a tabela abaixo:

Tabela 1 – Estabilidade de Sistemas lineares.

Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com $\det(\mathbf{A} - \lambda) = 0$ e $\det \mathbf{A} \neq 0$		
Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó	Assintoticamente Estável
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó Próprio ou Impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó Próprio ou Impróprio	Assintoticamente Estável
$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm \mu i$		
$r > 0$	Ponto Espiral	Instável
$r < 0$	Ponto Espiral	Assintoticamente Estável
$r = 0$	Centro	Estável

Fonte: [2].

2 Estabilidade de Sistemas Não Lineares de Primeira Ordem

Neste capítulo, apresentaremos a teoria de estabilidade de sistemas de equações diferenciais não lineares de primeira ordem autônomos e o método que faz uso de uma função auxiliar para determinar a estabilidade da solução, chamado de Segundo Método de Lyapunov. Para este método, desenvolveremos duas demonstrações: uma analítica e outra com argumentos geométricos. Analogamente ao capítulo anterior, analisaremos o caso bidimensional onde podemos visualizar o comportamento das trajetórias no plano de fase.

2.1 Caso Bidimensional

Considere um sistema autônomo bidimensional não linear, dado por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{2.1}$$

Queremos analisar o comportamento das trajetórias do sistema (2.1) na vizinhança de um ponto crítico \mathbf{x}^0 . No entanto, na maior parte dos casos em que o sistema é não linear, não conseguimos fazer essa análise diretamente, pois muitas vezes as soluções podem não ser expressas como operações de funções elementares. O exemplo 1, na seção 9.2 de [2], perto de cada ponto crítico de um sistema não linear, o padrão das trajetórias é parecido com o das trajetórias de determinado sistema linear. Portanto, para conseguirmos analisar a estabilidade das trajetórias do sistema não linear (2.1) em um ponto crítico \mathbf{x}^0 , precisamos aproximá-lo por um sistema linear apropriado com trajetórias fáceis de descrever, desde que isso seja possível. A seguir, vamos supor algumas condições sobre um sistema não linear de forma a encontrar um sistema linear cujas trajetórias estejam muito próximas das trajetórias do sistema não linear perto do ponto crítico.

Sem perda de generalidade, vamos supor que o ponto crítico é a origem do sistema. Isso é, possível, pois caso o ponto crítico não seja a origem, isto é, $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, realizamos a

substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ em (2.1) e obtemos que \mathbf{u} satisfará um sistema autônomo com um ponto crítico na origem.

Considere o sistema não linear (2.1) escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

de modo que \mathbf{A} é uma matriz 2×2 e o ponto crítico $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$.

Vamos apresentar condições para o sistema não linear (2.2) que garantirão similaridade entre o comportamento de suas trajetórias e o das trajetórias do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ próximo do ponto crítico.

Suponha que $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ é *ponto crítico isolado* do sistema, isto é, existe alguma bola de raio $r > 0$ centrada em \mathbf{x}^0 que não contém outros pontos críticos no seu interior. Suponha ainda que $\det A \neq 0$. Desse modo $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ é ponto crítico isolado do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Por fim, assuma que $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tem derivadas parciais contínuas de primeira ordem e que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))^t$ e $\mathbf{x} = (x, y)^t$ obedeçam a seguinte condição limite:

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0},$$

ou seja, $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$ é pequeno comparado a $\|\mathbf{x}\|$ perto da origem. Assim, temos que o sistema não linear (2.2) se aproxima do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ na origem. Nestas condições, o sistema (2.2) representa um *sistema localmente linear* na vizinhança do ponto crítico \mathbf{x}^0 .

Além disso, considerando $\mathbf{x} = (x, y)^t$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [F(x, y), G(x, y)]^t$, o sistema não linear (2.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}. \quad (2.3)$$

O teorema abaixo nos apresenta condições necessárias, para que um sistema não linear (2.3) seja localmente linear em uma vizinhança de um ponto crítico.

Teorema 2.1. *O sistema (2.3) será localmente linear em uma vizinhança de um ponto crítico $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0)$ sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.*

Demonstração. Utilizando a expansão de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) temos que $F(x, y)$ e $G(x, y)$ podem ser escritos como

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y),$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y),$$

tal que $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ e analogamente para η_2 . Como $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt}$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt}$, o sistema pode ser escrito na forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Ou ainda, representado por notação vetorial, na qual $\mathbf{u} = (x - x_0, y - y_0)^T$ e $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$, tem-se

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}),$$

Portanto $\frac{\|\boldsymbol{\eta}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} \rightarrow 0$ quando $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rightarrow \mathbf{0}$. □

Em síntese, desde que as funções F e G do sistema linear (2.3) sejam de classe C^2 podemos aproximar este sistema não linear perto do ponto crítico (x_0, y_0) pela parte linear da equação (2.4), isto é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

tal que $u_1 = x - x_0$ e $u_2 = y - y_0$.

A matriz

$$J = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

que é representada em (2.5) é chamada de *matriz jacobiana* das funções F e G em relação a x e y . Para que o ponto (x_0, y_0) seja um ponto crítico isolado do sistema linear, iremos supor que $\det(J)$ não se anula nele. Segue dois resultados importantes.

Teorema 2.2. *Seja $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ ponto crítico do sistema linear*

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Dizemos que \mathbf{x}^0 :

I. é assintoticamente estável se $\text{tr}(A) < 0$ e $\det(A) > 0$.

II. é estável se $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$.

III. é instável se $\text{tr}(A) > 0$ ou $\det(A) < 0$ onde A é a matriz de coeficientes.

Demonstração. Ver [3, p.17]. □

Teorema 2.3. *Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, correspondente ao sistema localmente linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Então, o tipo e a estabilidade do ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ e do sistema localmente linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ são como descritos na tabela abaixo.*

Tabela 2 – Tabela Comparativa de Estabilidade entre Sistemas lineares e Sistemas Localmente Lineares tal que N = Nó, NI = Nó impróprio, NP = Nó próprio, PS = Ponto de sela, PSp = Ponto de espiral, C = Centro.

Sistema Linear			Sistema Localmente Linear	
Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	Assintoticamente Estável	N	Assintoticamente Estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	PS	Instável	PS	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PSp	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	NP ou NI	Assintoticamente Estável	N ou PSp	Assintoticamente Estável
$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$ $r > 0$ $r < 0$ $r = 0$	PSp PSp C	Instável Assintoticamente Estável Estável	PSp PSp C ou PSp	Instável Assintoticamente Estável Indeterminado

Fonte: [2].

Demonstração. Ver [2, p. 435]. □

Exemplo 2.4. Analise a estabilidade dos pontos críticos do sistema

$$\begin{cases} x' = (2 + y)(y - 0, 5x) \\ y' = (2 - x)(y + 0, 5x) \end{cases}$$

Solução: Os pontos críticos do sistema são encontrados, fazendo

$$\begin{cases} (2+y)(y-0,5x) = 0, \\ (2-x)(y+0,5x) = 0. \end{cases}$$

Note que a primeira equação é satisfeita por $y = -2$ e substituindo esse valor na segunda equação temos:

$$(2-x)(-2+0,5x) = 0.$$

Logo, $x = 2$ ou $x = 4$. Assim, temos os seguintes pontos críticos $(2, -2)$ e $(4, -2)$. Analogamente, a primeira equação é satisfeita por $y = 0, 5x$. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos:

$$(2-x)(0,5x+0,5x) = 0.$$

Então, $x = 0$ ou $x = 2$. Logo, temos os seguintes pontos críticos $(0, 0)$ e $(2, 1)$. Portanto, os pontos críticos desse sistema são:

$$(2, -2), (4, -2), (0, 0) \text{ e } (2, 1).$$

A matriz jacobiana desse sistema é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0,5y & 2 + 2y - 0,5x \\ 1 - y - x & 2 - x \end{pmatrix}.$$

Aplicando o ponto crítico $(2, -2)$ em J

$$J(2, -2) = \begin{pmatrix} -1 - 0,5 \cdot (-2) & 2 + 2 \cdot (-2) - 0,5 \cdot 2 \\ 1 - (-2) - 2 & 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$.

Aplicando o ponto crítico $(4, -2)$ em J , temos:

$$J(4, -2) = \begin{pmatrix} -1 - 0,5 \cdot (-2) & 2 + 2 \cdot (-2) - 0,5 \cdot 4 \\ 1 - (-2) - 4 & 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz possui os seguintes autovalores $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{5}$.

Aplicando o ponto crítico $(0, 0)$ em J

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 - 0,5 \cdot 0 & 2 + 2 \cdot 0 - 0,5 \cdot 0 \\ 1 - 0 - 0 & 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz possui os seguintes autovalores $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$.

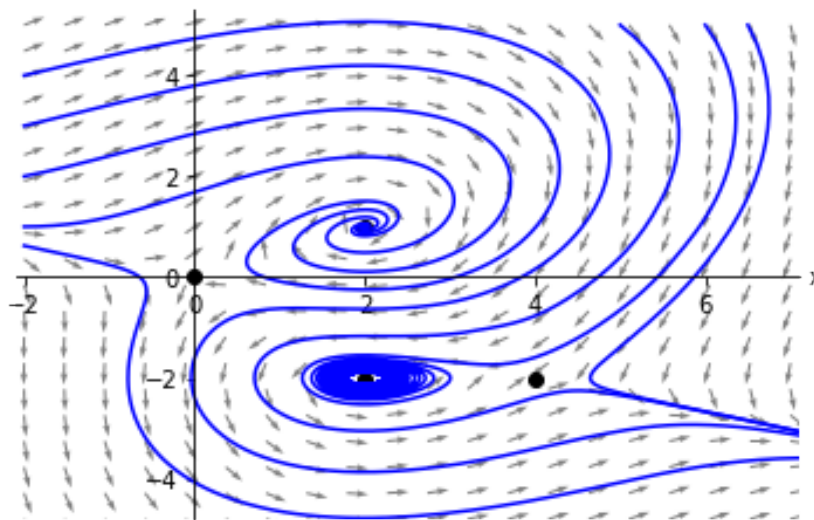
Aplicando o ponto crítico $(2, 1)$ em J , temos:

$$J(2, 1) = \begin{pmatrix} -1 - 0,5 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot 1 - 0,5 \cdot 2 \\ 1 - 1 - 2 & 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os seguintes autovalores desta matriz são $\lambda_1 = \frac{-1,5 + i\sqrt{21,75}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-1,5 - i\sqrt{21,75}}{2}$.

Portanto, pela Tabela 2.1, temos que os pontos críticos são localmente lineares, de modo que $(2, -2)$ é um centro ou um ponto espiral, no entanto sua estabilidade é indeterminada. Já os pontos críticos $(4, -2)$ e $(0, 0)$ são pontos de sela instáveis, enquanto o ponto crítico $(2, 1)$ é um ponto espiral assintoticamente estável. Isto pode ser visto no retrato de fase abaixo.

Figura 11 – Retrato de fase do exemplo (2.4).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Com este exemplo, percebemos que através da matriz dos coeficientes podemos determinar os autovalores de um sistema, estes nos oferece informações importantes sobre um ponto crítico de um sistema linear. No entanto, quando ocorre pequenas perturbações em alguns dos coeficientes, é possível que haja mudanças consideráveis nesse sistema. Pela Tabela 2.1, observamos que essas mudanças acontecem quando os autovalores são imaginários puros ou quando são iguais, nos outros casos as perturbações não irão influenciar o comportamento das trajetórias do sistema.

Quando os autovalores são imaginários puros $\lambda = \pm i\mu$, o ponto crítico é um centro estável. Entretanto, caso seja realizado uma perturbação na matriz dos coeficientes, então o sistema pode passar a ter autovalores complexos, assim, o ponto crítico pode continuar a ser um centro ou passar a ser um ponto espiral, e com isso a estabilidade do ponto fica indeterminada. Como aconteceu no exemplo (2.4) com o ponto crítico $(2, -2)$.

Quando os autovalores são iguais, então o ponto crítico é um nó. Neste caso, os autovalores podem deixar de serem iguais, se houver uma perturbação em algum dos seus elementos. Caso tornem-se autovalores diferentes e reais, o ponto crítico continuaria sendo um nó. Porém, eles também podem ser diferentes e complexos, assim o ponto crítico seria um ponto espiral. Não havendo mudanças quanto a estabilidade do ponto crítico.

Para esses casos, em que as características dos pontos críticos são indeterminadas para o sistema localmente linear, é necessário o uso de outras técnicas para decidir o tipo de estabilidade. O método a seguir pode ser útil nessa etapa.

2.2 O Segundo Método de Lyapunov

O *segundo método de Lyapunov* ou também chamado *método direto*, nos permite analisar a estabilidade e instabilidade de um ponto crítico sem conhecer a solução do sistema, apenas utilizando uma função auxiliar que chamamos de *função de Lyapunov*. Seguem algumas definições necessárias para continuarmos nossos estudos.

Definição 2.1. Sejam $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathbf{x}^0 \in D$. A função V é dita *definida positiva* (*definida negativa*) em D , se $V(\mathbf{x}^0) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ ($V(\mathbf{x}) < 0$), para todos $\mathbf{x} \in D$ diferentes de \mathbf{x}^0 .

Definição 2.2. Sejam $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathbf{x}^0 \in D$. A função V é dita *semidefinida positiva* (*semidefinida negativa*) em D , se $V(\mathbf{x}^0) = 0$ e $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ($V(\mathbf{x}) \leq 0$), para todos $\mathbf{x} \in D$ diferentes de \mathbf{x}^0 .

Definição 2.3. Seja V uma função continuamente diferenciável num domínio D contendo uma vizinhança de \mathbf{x}^0 e definida positiva. Então, V é uma *função de Lyapunov* se satisfaz uma das seguintes condições:

- I. $V'(\mathbf{x})$ é semidefinida negativa.
- II. $V'(\mathbf{x})$ é definida negativa.
- III. $V'(\mathbf{x})$ é definida positiva.

Através dos resultados do segundo método de Lyapunov, podemos estudar as características de um ponto crítico com relação à sua estabilidade, sem a necessidade do conhecimento da sua solução. Segue a definição desse método.

Teorema 2.5. (Segundo Método de Lyapunov) *Sejam $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ ponto crítico de um sistema autônomo $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ com $\mathbf{x} = (x, y)$ e V uma função de Lyapunov.*

- I. *Se $V'(x, y)$ é semidefinida negativa, então \mathbf{x}^0 é estável .*
- II. *Se $V'(x, y)$ é definida negativa, então \mathbf{x}^0 é assintoticamente estável.*
- III. *$V'(x, y)$ é definida positiva, então \mathbf{x}^0 é instável.*

Antes de fazermos a demonstração analítica do Teorema de Lyapunov, apresentaremos argumentos geométricos que ajudam a confirmar os resultados.

Para tal, seja $c \geq 0$ e $V(x, y) = c$ uma curva vamos lembrar do Cálculo que o gradiente de V , no plano xy é normal à curva de nível $V(x, y) = c$ e aponta no sentido do crescimento de V .

Seja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | V(x, y) = c\}$ uma curva no plano xy . Observe que para $c = 0$, a curva é unicamente a origem do sistema, e não temos nada a fazer. Por outro lado, para $c > 0$ e suficientemente pequeno, usando a continuidade de V , obtemos uma curva fechada contendo a origem. Ainda usando a continuidade de V , quando c fica menor, as curvas fechadas $V(x, y) = c$, que envolvem a origem, se comprimem em torno da origem.

Mostraremos que uma trajetória se iniciando dentro de uma curva fechada $V(x, y) = c$ permanecerá dentro desta curva fechada. E assim, concluiremos que a origem será um ponto crítico estável.

Considere uma trajetória $(x, y) = (x(t), y(t))$ correspondendo a uma solução do sistema

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y) \\ y'(t) = G(x, y) \end{cases}.$$

Tome $(x_1, y_1) = (x(t_1), y(t_1))$ como sendo um ponto de interseção da trajetória com $V(x, y) = c$. Assim,

$$\begin{cases} x'(t_1) = F(x(t_1), y(t_1)) \\ y'(t_1) = G(x(t_1), y(t_1)) \end{cases},$$

e, sendo $(x_1, y_1) = (x(t_1), y(t_1))$, então

$$\begin{cases} x'(t_1) = F(x_1, y_1) \\ y'(t_1) = G(x_1, y_1) \end{cases}.$$

Pela Regra da Cadeia a derivada de V é dada por

$$V'(x_1, y_1) = V_x(x_1, y_1)F(x_1, y_1) + V_y(x_1, y_1)G(x_1, y_1).$$

Reescrevendo, temos que

$$\begin{aligned} V'(x_1, y_1) &= V_x(x_1, y_1)x'(t_1) + V_y(x_1, y_1)y'(t_1) \\ &= (V_x(x_1, y_1)i + V_y(x_1, y_1)j) \cdot (x'(t_1)i + y'(t_1)j) \\ &= \nabla V(x_1, y_1) \cdot T(t_1). \end{aligned}$$

De modo que $T(t_1)$ é o vetor tangente à trajetória em cada ponto e o gradiente de V , denotado por ∇V , é normal à curva $V(x, y) = c$ e aponta na direção de crescimento V . Logo, o gradiente de V apontará para fora da origem. Além disso, $V'(x_1, y_1)$ é o produto interno entre dois vetores, conseqüentemente, podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$V'(x_1, y_1) = \nabla V(x_1, y_1) \cdot T(t_1) = \|\nabla V(x_1, y_1)\| \cdot \|T(t_1)\| \cdot \cos \theta,$$

em que θ é o ângulo formado pelos dois vetores. Vamos analisar os casos 1, 2 e 3.

Caso 1: Por hipótese temos que V' é negativa semidefinida, logo

$$\|\nabla V(x_1, y_1)\| \cdot \|T(t_1)\| \cdot \cos \theta \leq 0,$$

Como $\|T(t_1)\| \geq 0$ Para a desigualdade ser válida, devemos ter $\cos \theta \leq 0$. Logo,

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

Portanto, temos que a direção do movimento das trajetórias começando em uma curva fechada $V(x, y) = c$, deverá ser para dentro no sentido da origem, no pior caso, tangente a essa curva, permanecendo lá. Sendo assim, a origem é um ponto crítico estável.

Caso 2: Por hipótese temos que V' é negativa definida, logo

$$\|\nabla V(x_1, y_1)\| \cdot \|T(t_1)\| \cdot \cos \theta < 0,$$

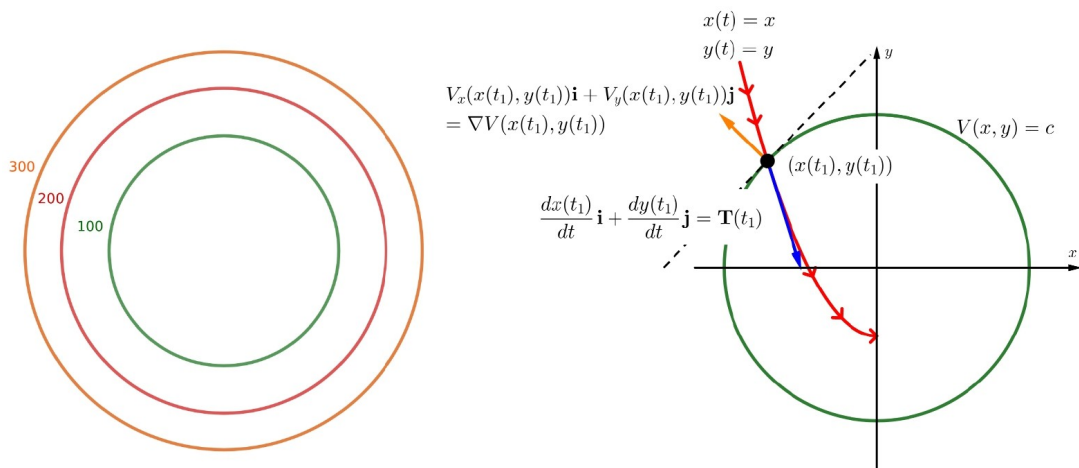
em que θ é o ângulo formado pelos dois vetores. Para a desigualdade ser válida, então $\cos \theta < 0$. Logo,

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Deste modo, as trajetórias tendem para a origem. Ou seja, a origem será um ponto crítico assintoticamente estável.

Caso 3: Suponha que V' é positiva definida e suponha que em qualquer círculo fechado que contenha a origem, exista (x_1, y_1) um ponto interior de modo que $V(x_1, y_1) > 0$. Tome uma trajetória que começa em (x_1, y_1) . Note que ao decorrer dessa trajetória V cresce, pois $V'(x, y) > 0$. Além disso, como $V(x_1, y_1) > 0$, a trajetória não poderá se aproximar da origem, pois $V(0, 0) = 0$. Isto mostra que a origem não é um ponto crítico assintoticamente estável. Finalmente, visto $V'(x, y) = \nabla V(x_1, y_1) \cdot T(t_1)$ e que $V'(x, y) > 0$, concluímos que a origem é um ponto crítico instável.

Figura 12 – Interpretação geométrica Segundo Método de Lyapunov.



Demonstração. Considere $\varepsilon > 0$ de modo que $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq \varepsilon\}$. Seja $\tau = \min\{V(x); \|x\| = \varepsilon\}$. Como V é definida positiva, $V(x) > 0 \forall x \in \Omega \setminus (0, 0)$, assim, $\tau > 0$. Além disso, V é contínua em $(0, 0)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow \|V(x) - V(0, 0)\| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = \tau$, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|V(x)\| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$V(x) < \varepsilon \forall x \in B_\delta(0, 0) = B_\delta(0).$$

Tome $\delta \leq \varepsilon$ e seja $\beta(t)$ solução maximal. De modo que $\beta(0, 0) \in B_\delta(0)$, ou seja, $\|\beta(0)\| < \delta$, daí, pela continuidade de V ,

$$\|V(\beta(0))\| < \tau \Rightarrow V(\beta(0)) < \tau.$$

Sendo $V'(x) \leq 0$, a função $t \rightarrow V(\beta(t))$ é não crescente, logo para

$$t > 0 \Rightarrow V(\beta(t)) < V(\beta(0)) < \tau.$$

Segue que $V(\beta(0)) < \tau$ e, em particular, $\beta(t)$ não está na esfera de raio ε em torno do zero. Se $\beta(t)$ estivesse em $\{x; \|x\| = \varepsilon\}$, então

$$V(\beta(t)) \geq \min\{V(x); \|x\| = \varepsilon\} = \tau,$$

o que condiz que $V(\beta(t)) < \tau$. Portanto, $\beta(t) \in B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < \varepsilon\} \forall t \geq 0$.

Agora suponha que V é estrita, ou seja, $V'(x) < 0 \forall x \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$. Queremos provar que $\beta(t)$ converge para $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Das afirmações anteriores, temos que $\beta(t)$ permanece em $B_\varepsilon(0)$ e assim, está definida $\forall t \geq 0$. Como $V'(x) < 0$, segue que a função $t \rightarrow V(\beta(t))$ é decrescente e minorada por $(0, 0)$. Logo, existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\beta(t))$. Chamaremos de a este limite, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\beta(t)) = a.$$

Temos que $a \geq 0$ e $V(\beta(t)) \geq a \forall t \in [0, +\infty)$. Suponha que $a > 0$. Como V é contínua e $V(0) = 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\|x\| < r \Rightarrow V(x) < a \forall x \geq 0.$$

Assim, $\beta(t) \notin Br(0)$, pois se $\beta(t) \in Br(0)$, teríamos

$$\|\beta(t)\| < r \Rightarrow V(\beta(t)) < 0,$$

o que contradiz $V(\beta(t)) \geq a$. Por outro lado, V' é definida negativa, ou seja,

$$V'(x) < 0,$$

assim, existe $-b < 0$ tal que

$$V'(x) \leq -b$$

como x fora de $Br(0)$. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$V(\beta(t)) - V(\beta(0)) \leq -bt$$

$$\Rightarrow V(\beta(t)) \leq V(\beta(0)) - bt.$$

contradição, pois V é minorada por zero, logo a não pode ser positiva, ou seja, $a = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\beta(t)) = 0$. \square

A maior desvantagem desse resultado é que não existe uma forma geral para determinar uma função de Lyapunov. No entanto, em alguns casos o teorema abaixo pode ajudar.

Teorema 2.6. *A função*

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

será positiva definida se, e somente se,

$$a > 0 \text{ e } 4ac - b^2 > 0$$

e será negativa definida se, e somente se,

$$a < 0 \text{ e } 4ac - b^2 > 0.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} V(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= ax^2 + bxy + \frac{b^2}{4a}y^2 + cy^2 - \frac{b^2}{4a}y^2 \\ &= \left(ax^2 + bxy + \frac{b^2}{4a}y^2\right) + y^2 \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\ &= a \left(x + \frac{by}{2a}\right)^2 + y^2 \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

Se V é definida positiva, então $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$a \left(x + \frac{by}{2a} \right)^2 + y^2 \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Como, $\left(x + \frac{by}{2a} \right)^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, então, temos que $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$. Suponha $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$, então

$$a \left(x + \frac{by}{2a} \right)^2 + y^2 \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) > 0$$

e como $V(0, 0) = 0$ temos que $V(x, y)$ é definida positiva.

Seja V é definida negativa, então $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$,

ou seja,

$$a \left(x + \frac{by}{2a} \right)^2 + y^2 \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Como, $\left(x + \frac{by}{2a} \right)^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, então, temos que $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$. Considere $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$, então

$$a \left(x + \frac{by}{2a} \right)^2 + y^2 \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) < 0$$

e como $V(0, 0) = 0$ temos que $V(x, y)$ é definida negativa.

□

Exemplo 2.7. Analise a estabilidade do ponto crítico na origem do sistema

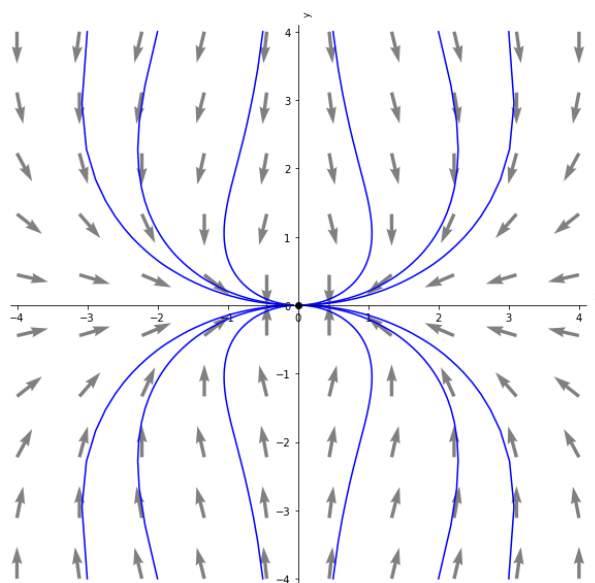
$$\begin{cases} x'(t) = -x^3 + xy^2 \\ y'(t) = -2x^2y - y^3 \end{cases}.$$

Solução: Considere a função de Lyapunov $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Logo,

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= V_x F(x, y) + V_y G(x, y) \\ &= (2ax + by)(-x^3 + xy^2) + (bx + 2cy)(-2x^2y - y^3) \\ &= -2ax^4 + 2ax^2y^2 - bxy^3 + bxy^3 - 2bxy^3 - bxy^3 - 4cx^2y^2 - 2cy^4 \\ &= -[2ax^2(x^2 - y^2) + 3bxy^3 + 2cy^2(2x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

Assumindo $b = 0, a > 0$ e $2c > a$, então V é uma função definida positiva e V' é negativa definida. Portanto, pelo Teorema 2.5 a origem é um ponto assintoticamente estável desse sistema. Vale observar o retrato de fase desse exemplo na Figura 9.

Figura 13 – Retrato de Fase do Exemplo (2.7).



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

3 Modelos Matemáticos Epidemiológicos do tipo SIS e SIR

Modelos do tipo SIS e SIR são modelos representados por equações diferenciais obtidas pelo método dos compartimentos. Essencialmente, pensamos que a população está dividida em compartimentos interligados por taxas que representam a passagem de um indivíduo de um compartimento para o outro ou para o meio ambiente. Os compartimentos associados as variações destes modelos seguem:

- Suscetíveis que são os indivíduos que podem tornar-se infectados caso sejam expostos a doença e são representados por $S(t)$.
- Infectados que são os indivíduos portadores da doença que estando infecciosos transmitem a doença aos indivíduos suscetíveis e são representados por $I(t)$.
- Removidos que são os indivíduos que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, ou por motivo de morte ou imunização após contrair a doença e são representados por $R(t)$.

Na construção de modelos de transmissão de doenças infecciosas um termo relacionado aos novos casos de uma doença na população é denominado incidência. Consideramos dois tipos de incidência. A incidência de ação de massa que é igual a αSI , sendo α a taxa de transmissão da doença, é usada em doenças nas quais o tamanho da população interfere na taxa de contato, como por exemplo na gripe. Já a incidência padrão que é igual a $\frac{\alpha SI}{N}$ (casos por pessoa), é usada quando a taxa de contato não aumenta com a população, por exemplo, doenças sexualmente transmissíveis. Para os modelos aqui tratados, utilizaremos a incidência de ação de massa.

Um parâmetro importante no controle epidemiológico é o Valor de Reprodutividade Basal que denotaremos aqui por \mathcal{R}_0 . Ele nos fornece o número de casos secundários que um indivíduo infectado produzirá na população dos suscetíveis no seu período infeccioso. Matematicamente, o número reprodutividade basal desempenha o papel de um valor limite

para a dinâmica do sistema. Se $\mathcal{R}_0 > 1$, a doença permanece na população. Nesse caso, dizemos que a doença se tornou endêmica na população. Se $\mathcal{R}_0 < 1$, o número de infectados diminui gradualmente para zero e a doença desaparece da população.

A análise dos modelos epidemiológicos apresentados aqui consistirá no estudo da estabilidade dos pontos críticos do sistema associado e na determinação do número de reprodutividade basal. Observamos que o ponto crítico com $I = 0$ será denominado de *equilíbrio livre da doença* e o ponto crítico com $I \neq 0$ será chamado de equilíbrio endêmico.

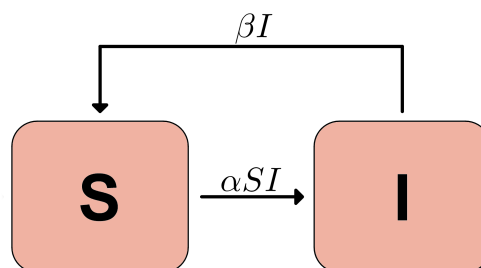
3.1 Modelos SIS

Os modelos SIS descrevem as doenças em que os indivíduos suscetíveis que as adquirirem, tornam-se infectados a uma taxa α e ao se recuperarem, ficam suscetíveis imediatamente a uma taxa β . A gripe e a meningite são doenças que podem ser descritas por esse modelo. Abaixo seguem algumas variações de modelos SIS.

3.1.1 Modelo SIS: N constante sem dinâmica vital

Este modelo é do tipo SIS de modo que não consideramos o número de nascimentos e nem de mortes, com tamanho da população constante e denotado por N . As taxas desse modelo são α , a taxa de transmissão da doença, e β , a taxa de recuperação. Portanto, sendo $N = S + I$, representamos esse modelo com o diagrama abaixo.

Figura 14 – Diagrama modelo SIS com N constante e sem demografia.



Assim, esse modelo compartimental é representado por:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha SI + \beta I \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad (3.1)$$

com $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I$. Sejam

$$\begin{cases} F(S, I) = -\alpha SI + \beta I \\ G(S, I) = \alpha SI - \beta I \end{cases}.$$

Seguindo a teoria vista no Capítulo 1, para determinar os pontos críticos desse modelo precisamos analisar quando a derivada é zero. Então, fazendo $F(S, I) = G(S, I) = 0$, temos

$$\begin{cases} -\alpha SI + \beta I = 0 \\ \alpha SI - \beta I = 0 \end{cases} \Rightarrow -\alpha SI + \beta I = 0 \Rightarrow I(-\alpha S + \beta) = 0.$$

Logo, temos dois casos, $I = 0$ e $S = \frac{\beta}{\alpha}$. Então, para $I = 0$ temos que $N = S + 0 = N$. Já para $S = \frac{\beta}{\alpha}$, temos que $N = \frac{\beta}{\alpha} + I$ implicando que $I = N - \frac{\beta}{\alpha}$.

Portanto, os pontos críticos do modelo são $P = (N, 0)$ e $Q = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Para determinar a estabilidade desses pontos críticos, usaremos o traço e o determinante da matriz do sistema localmente linear. Então, determinando a matriz Jacobiana J , obtemos

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & \beta - \alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Aplicando os pontos críticos, P e Q , em J , temos a análise seguinte:

- Para $P = (N, 0)$: O sistema localmente linear que melhor se aproxima ao sistema (3.1) próximo do ponto crítico $(N, 0)$ é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta - \alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz A do sistema localmente linear é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta - \alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix}.$$

Portanto, o $Tr(A) = \alpha N - \beta$ e $\det(A) = 0$. Como $\alpha, \beta > 0$ e supondo N suficientemente grande, tem-se que $Tr(A) > 0$. Assim, pelo Teorema 2.2 e pelo Teorema 2.3, o ponto crítico P é instável.

- Para $Q = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$: O sistema que melhor se aproxima ao sistema (3.1) próximo do ponto crítico Q é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, a matriz A do sistema localmente linear é

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $Tr(A) = \beta - \alpha N$ e $\det(A) = 0$. Como $\alpha, \beta > 0$ e supondo N suficientemente grande, tem-se que $Tr(A) < 0$. Então, o Teorema 2.2 e o Teorema 2.3 são inconclusivos para o ponto crítico $Q = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Dessa forma, será necessário realizar uma análise para $I'(t)$.

Sabemos que N é constante e, portanto, $N = S + I$. Com esta observação, escrevemos $S = N - I$. Desenvolvendo $I'(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} I'(t) &= \alpha SI - \beta I \\ &= \alpha(N - I)I - \beta I \\ &= \alpha NI - \alpha I^2 - \beta I \\ &= \alpha I \left(N - I - \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) - I\right]. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\frac{dI}{dt} = I'(t) = \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) - I\right].$$

Definindo $A = N - \frac{\beta}{\alpha}$ e utilizando o método de separação de variável, temos que

$$I(t) = \frac{-Ae^{A\alpha t}e^{I_0}}{1 - e^{A\alpha t}e^{I_0}}.$$

Calculando o $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$ por L'Hospital, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-Ae^{A\alpha t}e^{I_0}}{1 - e^{A\alpha t}e^{I_0}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-Ae^{A\alpha t}A\alpha e^{I_0}}{-e^{A\alpha t}A\alpha e^{I_0}} = A = N - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Agora, calculando o $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N - I(t) = N - \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = N - \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Portanto, como quando $t \rightarrow \infty, I(t) \rightarrow N - \frac{\beta}{\alpha}$ e $S(t) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$, então o ponto crítico $Q = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ é assintoticamente estável.

Analisando o sistema (3.1), podemos notar que

- Se $S > \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então multiplicando ambos os lados da desigualdade por $(-\alpha I)$, temos que

$$-\alpha IS + \beta I < 0.$$

Conseqüentemente, $S'(t) < 0$ e $I'(t) > 0$. Logo, o ponto (S, I) se aproxima de $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ na reta $S + I = N$.

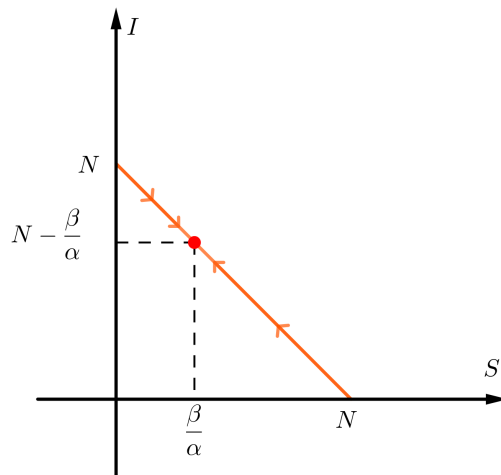
- Se $S < \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então, multiplicando ambos os lados da desigualdade por $(-\alpha I)$, obtemos

$$-\alpha IS + \beta I > 0.$$

Seguindo que, $S'(t) > 0$ e $I'(t) < 0$. Mais uma vez, o ponto (S, I) se aproxima de $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ na reta $S + I = N$.

A figura abaixo, ilustra o comportamento assintoticamente estável do ponto crítico $Q = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ do sistema (3.1).

Figura 15 – Plano de fase.

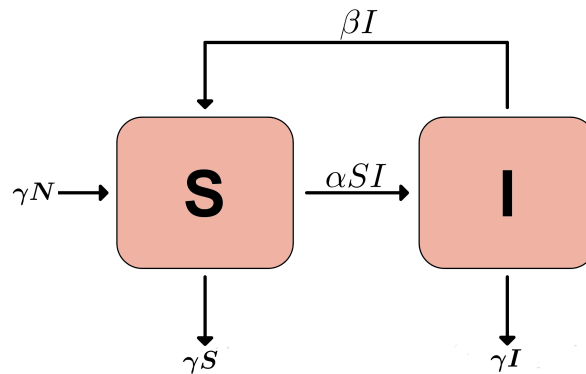


Fonte: [3].

3.1.2 Modelo SIS: N constante com dinâmica vital

Este modelo é do tipo SIS consideramos o número de nascimentos e de mortes, de modo que o número de nascimentos é igual ao número de mortes, pois a população N é constante. A taxa de natalidade é representada por γ , que é igual a taxa de mortalidade. Podemos definir o seguinte diagrama para esse modelo.

Figura 16 – Diagrama modelo SIS com N constante e com dinâmica vital.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

O Sistema de Equações Diferenciais que representa esse modelo compartimental é:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \gamma S \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I - \gamma I \end{cases}, \quad (3.3)$$

tal que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $N = S + I$. Defina

$$\begin{cases} F(S, I) = -\alpha SI + \beta I + \gamma I, \\ G(S, I) = \alpha SI - \beta I - \gamma I. \end{cases}$$

Fazendo $F(S, I) = G(S, I) = 0$ para determinar os pontos críticos desse modelo. Como $N = S + I$, implicando em $I = N - S$, então

$$\begin{cases} -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \gamma S = 0, \\ \alpha SI - \beta I - \gamma I = 0. \end{cases}$$

Logo, $I = 0$ e da equação $-\alpha S + \beta + \gamma = 0$ temos que $S = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$.

Conseqüentemente, se $I = 0$, como $N = S + I$, então $S = N$. Em segunda possibilidade, se $S = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$, como $N = S + I$, temos $N = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + I$ implicando que $I = N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$.

Assim, os pontos críticos desse modelo são $P = (N, 0)$ e $Q = \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right)$.

Vamos analisar a estabilidade destes pontos críticos. Para tal, considere a matriz Jacobiana J .

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & \beta - \alpha S + \gamma \\ \alpha I & \alpha S - \beta - \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

- Para $P = (N, 0)$: O sistema localmente linear que melhor se aproxima ao sistema (3.3) próximo do ponto crítico P é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta - \alpha N + \gamma \\ 0 & \alpha N - \beta - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $Tr(A) = \alpha N - \beta - \gamma$ e $\det(A) = 0$. Como $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e N pode ser suficientemente grande, tem-se que $Tr(A) > 0$. Assim, pelos Teoremas 2.2 e 2.3 o ponto crítico P é instável.

- Para $Q = \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right)$: O sistema localmente linear que melhor se aproxima ao sistema (3.3) próximo do ponto crítico Q é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta + \alpha & 0 \\ \alpha N - \beta - \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $Tr(A) = -\alpha N + \beta + \alpha < 0$ para N suficientemente grande e $\det(A) = 0$. Com isso, os Teoremas 2.2 e 2.3 são inconclusivos para o ponto crítico $Q = \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right)$. Dessa forma, será necessário realizar uma análise para $I'(t)$. Temos que $S = N - I$ e N é constante. Então, desenvolvendo $I'(t)$

$$\begin{aligned} I'(t) &= \alpha SI - \beta I - \gamma I \\ &= \alpha(N - I)I - \beta I - \gamma I \\ &= \alpha NI - \alpha I^2 - \beta I - \gamma I \\ &= \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right) - I \right]. \end{aligned}$$

Do mesmo modo que no modelo anterior, definindo $A = N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$ e utilizando o método de separação de variável, temos que

$$I(t) = \frac{-Ae^{A\alpha t}e^{I_0}}{1 - e^{A\alpha t}e^{I_0}}.$$

Calculando o $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$ por L'Hospital, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-Ae^{A\alpha t} e^{I_0}}{1 - e^{A\alpha t} e^{I_0}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-Ae^{A\alpha t} A\alpha e^{I_0}}{-e^{A\alpha t} A\alpha e^{I_0}} = A = N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$$

Calculando o $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$, tem-se:

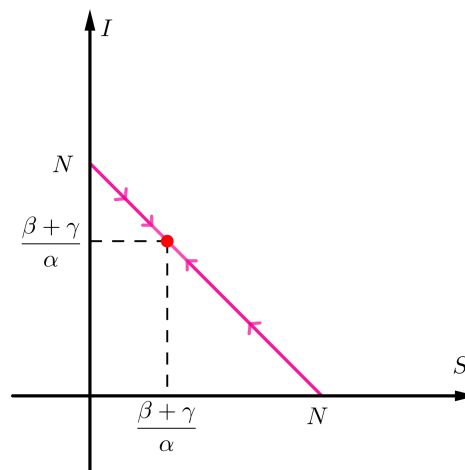
$$\lim_{t \rightarrow \infty} S = \lim_{t \rightarrow \infty} N - I = N - \lim_{t \rightarrow \infty} I = N - \left(N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right) = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}.$$

Portanto, como quando $t \rightarrow \infty$, $I \rightarrow N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$ e $S \rightarrow \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$, então o ponto $Q = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right)$ é assintoticamente estável.

Desta maneira, temos a mesma conclusão vista para o modelo anterior. Isto é,

- Se $S > \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então $S'(t) < 0$ e $I'(t) > 0$.
- Se $S < \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então $S'(t) > 0$ e $I'(t) < 0$.

Figura 17 – Plano de fase.



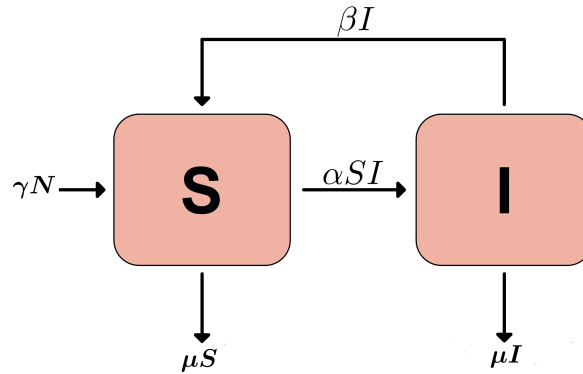
Fonte: [3].

Notamos que ao observar a dinâmica vital no modelo SIS, quando a população é constante, a magnitude de cada coordenada do ponto de equilíbrio Q é alterada, mas o tipo de estabilidade permanece o mesmo para os dois pontos críticos existentes.

3.1.3 Modelo SIS: N variável com dinâmica vital

Neste modelo o tamanho da população N é variável e a relação $N(t) = S(t) + I(t)$ é satisfeita para cada instante de tempo. Assumiremos que a taxa de natalidade γ seja diferente da taxa de mortalidade μ . Esse modelo é representado pelo seguinte diagrama.

Figura 18 – Diagrama modelo SIS com N variando e dinâmica vital.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

O sistema que representa esse modelo compartimental é dado por

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha IS + \beta I + \gamma N - \mu S \\ I'(t) = \alpha IS - \beta I - \mu I \end{cases} \quad (3.5)$$

tal que $\alpha, \beta, \gamma, \mu > 0$ e $N = S + I$. Considere,

$$\begin{cases} F(S, I) = -\alpha IS + \beta I + \gamma N - \mu S \\ G(S, I) = \alpha IS - \beta I - \mu I \end{cases}.$$

Encontrando os pontos críticos desse modelo, então analisando $F(S, I) = G(S, I) = 0$, temos

$$\begin{cases} -\alpha IS + \beta I + \gamma N - \mu S = 0, \\ \alpha IS - \beta I - \mu I = 0. \end{cases}$$

Temos que os pontos de equilíbrio desse sistema são $P = (0, 0)$ e $Q = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, \frac{-\beta - \mu}{\alpha}\right)$.

Observe que em termos biológicos não faz sentido trabalhar o ponto $P = (0, 0)$, nem o ponto $Q = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, \frac{-\beta - \mu}{\alpha}\right)$, pois $I < 0$. Portanto, esse sistema não possui pontos de equilíbrio.

Reduzindo o modelo SIS a uma equação logística, encontramos $\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha N}{\beta}$. Podendo ser visto em [5, p.19].

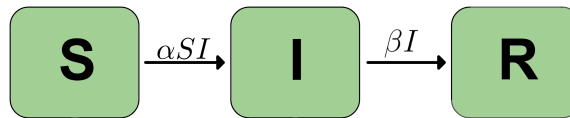
3.2 Modelos SIR

O modelo SIR Kermack-McKendrick descreve doenças tais que os indivíduos suscetíveis que as adquirirem, tornam-se infectados a uma taxa α e os recuperados obtêm imunidade a uma taxa β . Não são considerados período latente nem isolamentos. As doenças que melhor se encaixam nesse modelo, são em maioria, doenças infantis, como a varicela (catapora), a varíola, a rubéola e a caxumba. A seguir mostraremos duas variações para esse modelo, o SIR sem dinâmica vital e o SIR com dinâmica vital.

3.2.1 Modelo SIR: N constante sem dinâmica vital

Esse é o modelo SIR clássico. Mais precisamente, ele tem as características citadas no início desta seção acrescentando a hipótese de que o tamanho da população total N é constante, não temos nascimentos ou mortes e que a variação da população removida é proporcional a população infectada. Representamos esse modelo com o diagrama abaixo.

Figura 19 – Diagrama do modelo SIR com N constante e sem dinâmica vital.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

O sistema de EDO's que representa esse modelo compartimental é

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha SI \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I \\ R'(t) = \beta I \end{cases} \quad (3.6)$$

tal que $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I + R$. As condições iniciais para este modelo são:

$$\begin{cases} R(0) = 0 \\ I(0) = I_0 \\ S(0) = N - I_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Podemos notar que esse sistema está matematicamente bem posto, pois

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha SI + \alpha SI - \beta I + \beta I = 0.$$

Observe que $S'(t)$ e $I'(t)$ dependem de S e I e $R = N - S - I$, então podemos reduzir nosso modelo ao sistema

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha SI \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I \end{cases}$$

em que $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I$. Considerando

$$\begin{cases} F(S, I) = -\alpha SI \\ G(S, I) = \alpha SI - \beta I \end{cases}$$

e fazendo $F(S, I) = G(S, I) = 0$ para determinar os pontos críticos desse modelo, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} -\alpha SI = 0 \\ \alpha SI - \beta I = 0 \end{cases}$$

com soluções $S = 0$ ou $S = N$. Consequentemente, temos $I = 0$ para estes dois valores de S .

Assim, temos $P = (N, 0)$ e $Q = (0, 0)$ pontos críticos desse sistema. No entanto, como N é constante para o nosso modelo, desconsideraremos o ponto $Q = (0, 0)$.

Para análise da estabilidade de P utilizaremos o traço e o determinante da matriz do sistema localmente linear.

A matriz Jacobiana J é dada por

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Aplicando P em J , temos que o sistema linear que melhor aproxima ao sistema (3.6) na vizinhança de $(N, 0)$ é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o $Tr(A) = \alpha N - \beta$ e $\det(A) = 0$. Como $\alpha, \beta > 0$ e supondo N suficientemente grande, tem-se que $Tr(A) > 0$. Assim, pelo Teorema 2.2 e pelo Teorema 2.3, o ponto crítico $P = (N, 0)$ é instável.

Agora, iremos analisar $I'(t)$, note que no instante $t = 0$, temos que

$$I'(0) = \alpha S_0 I_0 - \beta I_0$$

que será positivo quando $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$ e será negativo quando $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$. Como $S'(t) \leq 0$ e $S \leq S_0$, então, se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, tem-se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, seguindo que:

$$I'(t) = I(\alpha S - \beta) \leq 0, \forall I \geq 0.$$

Isto é, $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e não temos uma epidemia.

Por outro lado, se $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$ então, $I(t)$ aumenta e a doença se propaga. Ou seja, temos uma epidemia.

A razão $\frac{\beta}{\alpha}$ é chamada de *taxa de remoção relativa*.

Considerando a razão $\frac{\alpha S_0}{\beta}$, percebemos que se ela é maior do que 1, então $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$ e a doença se propaga.

Por outro lado, se esta razão é menor do que 1, então $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$ e a doença desaparece.

Desta forma, podemos denotar esta razão por \mathcal{R}_0 e ela será chamada de *valor de reprodutividade basal* do modelo.

Observando a variação de I com relação a S , temos que

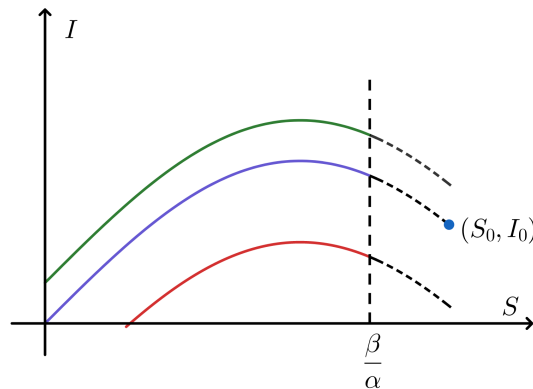
$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = \frac{\beta}{\alpha S} - 1. \quad (3.9)$$

Resolvendo esta EDO pelo método de separação de variáveis e usando as condições iniciais do modelo temos que

$$I = N - S + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{S}{S_0}.$$

Conseqüentemente, de (3.9) $\frac{dI}{dS} > 0$, se $S < \frac{\beta}{\alpha}$ e $\frac{dI}{dS} < 0$, se $S > \frac{\beta}{\alpha}$.

Deste modo, o comportamento do número de infectados versus o número de suscetíveis do sistema pode ser ilustrado pela figura abaixo.

Figura 20 – Retrato de fase SI para o modelo SIR.

Fonte:[3].

Uma análise do comportamento da população de suscetíveis versus a população de removidos em [3] nos mostra que quando $t \rightarrow \infty$, obtemos $S(t) \rightarrow 0$ e $R(t) \rightarrow N$. Isto é esperado pois quando o número de suscetíveis diminui, conseqüentemente, o número de infectados aumenta, os quais, em seguida, passam a ser removidos, e a epidemia é extinta.

Por fim, vamos descobrir o número máximo de indivíduos infectados I_{max} . Este valor indica o momento em que número de infectados começará a diminuir.

Para encontrarmos o I_{max} precisamos fazer um estudo sobre o $I'(t)$. Para isso, inicialmente dividindo o $I'(t)$ por $S'(t)$ no modelo (3.6), temos

$$\frac{I'}{S'} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S}.$$

Separando as variáveis, temos

$$I' = \left(-1 + \frac{\beta}{\alpha S}\right) S'.$$

Integrando, então

$$I = -S + \frac{\beta}{\alpha} \ln S + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim, as trajetórias da solução são dadas implicitamente pela equação

$$I + S - \frac{\beta}{\alpha} \ln S = C.$$

Esse modelo possui as seguintes condições iniciais $S_0 = S(0)$ e $I_0 = I(0)$. E temos que a igualdade acima vale tanto para as condições iniciais (S_0, I_0) quanto para as condições

finais $(S_\infty, 0)$. Assim,

$$I_0 + S_0 - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0 = C.$$

Consequentemente

$$I_0 + S_0 - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0 = S_\infty - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_\infty.$$

Reorganizando os termos, temos

$$I_0 + S_0 - S_\infty = \frac{\beta}{\alpha} (\ln S_0 - \ln S_\infty).$$

Portanto,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\ln \frac{S_0}{S_\infty}}{S_0 + I_0 - S_\infty}.$$

Observe que $S(t)$ é uma função decrescente, Logo $S_\infty < S_0 + I_0$. Então, a solução implícita nos permite encontrar o I_{max} , para isso $I'(t) = 0$, ou seja, quando $S = \frac{\alpha}{\beta}$. Logo,

$$I + S - \frac{\beta}{\alpha} \ln S = I_0 + S_0 - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0,$$

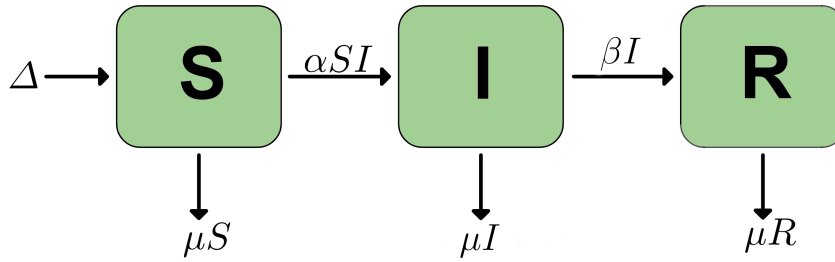
substituindo S pela expressão e movendo todos os termos, exceto I , obtemos que o I_{max} é dado por

$$I_{max} = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha} + S_0 + I_0 - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0. \quad (3.10)$$

No Capítulo 5 deste trabalho, iremos apresentar uma melhor aproximação dos dados obtidos da COVID-19 em 2020 e 2021 a partir deste modelo SIR. Também comentaremos os valores da reprodutividade basal e o resultado do I_{max} encontrado, em porcentagem, para os casos abordados.

3.2.2 Modelo SIR: N variável com dinâmica vital

Neste modelo SIR assumimos que o tamanho da população total N é variável e todos os indivíduos nascem suscetíveis. De modo que α é a taxa de transmissão, β a taxa de recuperação da doença, e os indivíduos de cada classe nascem em uma taxa de natalidade Δ e morrem a uma taxa de mortalidade per capita μ . Segue abaixo um diagrama para esse modelo.

Figura 21 – Diagrama do modelo SIR N variável e com dinâmica vital.

Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Esse modelo compartimental é representado pelo sistema

$$\begin{cases} S'(t) = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I - \mu I \\ R'(t) = \beta I - \mu R \end{cases} \quad (3.11)$$

tal que $\alpha, \beta, \Delta, \mu > 0$ e a população total $N = S + I + R$.

Derivando $N(t)$, temos

$$\begin{aligned} N'(t) &= \Delta - \alpha SI - \mu S + \alpha SI - \beta I - \mu I + \beta I - \mu R \\ N'(t) &= \Delta - \mu S - \mu I - \mu R \\ N'(t) &= \Delta - \mu(S + I + R) \\ N'(t) &= \Delta - \mu N. \end{aligned}$$

Resolvendo a $N'(t) = \Delta - \mu N$ obtida usando o método do fator integrante, temos

$$\begin{aligned} N'(t) + \mu N &= \Delta \\ e^{\mu t} N'(t) + \mu e^{\mu t} N &= \Delta e^{\mu t} \\ (e^{\mu t} N)' &= \Delta e^{\mu t} \\ e^{\mu t} N &= \frac{\Delta}{\mu} e^{\mu t} + c \\ N &= \frac{\Delta}{\mu} + ce^{-\mu t}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\mu} + ce^{-\mu t} = \frac{\Delta}{\mu}.$$

Com isso, concluí-se que o tamanho da população não é constante. Ele é assintoticamente constante visto que $N(t) \rightarrow \frac{\Delta}{\mu}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Note que as duas primeiras equações do modelo apresentado são independentes da terceira, então podemos considerar

$$\begin{cases} S'(t) = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ I'(t) = \alpha SI - (\beta + \mu)I \end{cases}$$

tal que $R = N - S - I$. Considere agora,

$$\begin{cases} F(S, I) = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ G(S, I) = \alpha SI - (\beta + \mu)I \end{cases}$$

Esse sistema não linear, não depende explicitamente do tempo, pois Δ , α e β são constantes.

Note que N, S, I e R possuem unidades de população (quantidade de indivíduos) e conseqüentemente N', S', I' e R' tem unidade de medida população por tempo. Então, tome $p =$ população e $t =$ tempo, analisando $S'(t)$ pelas unidades, tem-se

$$S'(t) = \Delta - \alpha SI - \mu S$$

$$\frac{p}{t} = \frac{p}{t} - \alpha pp - \mu p$$

Então, para todas as unidades corresponderem temos que μ tem unidade $\frac{1}{t} = t^{-1}$ e α tem unidade $\frac{1}{pt} = (pt)^{-1}$. Fazendo a mesma análise em $I'(t)$ concluímos que a unidade de medida de β é t^{-1} . Desse modo tomando $\tau = (\beta + \mu)t$ como uma quantidade sem unidade, temos que $t = \frac{\tau}{\beta + \mu}$. Desse modo definimos

$$N(t) = N\left(\frac{\tau}{\beta + \mu}\right) = \hat{N}(\tau)$$

$$I(t) = \hat{I}(\tau)$$

$$S(t) = \hat{S}(\tau).$$

Logo,

$$\frac{d\hat{I}}{d\tau} = \frac{dI}{dt} \frac{dt}{d\tau} = I'(t) \frac{1}{\beta + \mu}$$

e

$$\frac{d\hat{S}}{d\tau} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\tau} = S'(t) \frac{1}{\beta + \mu}.$$

Tomando $x = \frac{\mu\hat{S}}{\Delta}$ e $y = \frac{\mu\hat{I}}{\Delta}$, tem-se

$$\begin{aligned}
x'(\tau) &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mu \hat{S}}{\Delta} \right) = \frac{\mu}{\Delta} \frac{d\hat{S}}{d\tau} = \frac{\mu}{\Delta} S' \frac{1}{(\beta + \mu)} \\
&= \frac{\mu}{\Delta} (\Delta - \alpha \hat{S} \hat{I} - \mu \hat{S}) \frac{1}{\beta + \mu} \\
&= \frac{\mu}{\beta + \mu} - \frac{\alpha \mu}{\Delta(\beta + \mu)} \hat{S} \hat{I} - \frac{\mu^2}{(\beta + \mu)\Delta} \hat{S} \\
&= \frac{\mu}{\beta + \mu} - \frac{\alpha}{\beta + \mu} x \hat{I} - \frac{\mu}{\beta + \mu} x \\
&= \frac{\mu}{\beta + \mu} - \frac{\alpha \Delta}{\mu(\beta + \mu)} xy - \frac{\mu}{\beta + \mu} x.
\end{aligned}$$

Considere $\rho = \frac{\mu}{\beta + \mu}$ e $\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha \Delta}{\mu(\beta + \mu)}$, tem-se

$$x' = \rho(1 - x) - \mathcal{R}_0 xy.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
y'(\tau) &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mu \hat{I}}{\Delta} \right) = \frac{\mu}{\Delta} \frac{d\hat{I}}{d\tau} = \frac{\mu}{\Delta} \frac{1}{(\beta + \mu)} I' \\
&= \frac{\mu(\alpha \hat{S} \hat{I} - (\mu + \beta) \hat{I})}{(\beta + \mu)\Delta} \\
&= \frac{\alpha \mu^2 \hat{S} \hat{I} - (\mu + \beta) \mu^2 \hat{I}}{\mu(\beta + \mu)\Delta} \\
&= \frac{\Delta \alpha \mu^2 \hat{S} \hat{I}}{\mu(\beta + \mu)\Delta^2} - \frac{(\mu + \beta) \mu^2 \Delta \hat{I}}{\mu(\beta + \mu)\Delta^2} \\
&= \left(\frac{\Delta \alpha \mu \hat{S}}{\mu(\beta + \mu)\Delta} - \frac{\mu(\beta + \mu)\Delta}{\mu(\beta + \mu)\Delta} \right) \frac{\mu}{\Delta} \hat{I} \\
&= \left(\frac{\Delta \alpha}{\mu(\beta + \mu)\Delta} \frac{\mu}{\Delta} \hat{S} - 1 \right) \frac{\mu}{\Delta} \hat{I} \\
&= (\mathcal{R}_0 x - 1)y.
\end{aligned}$$

Portanto, encontramos o seguinte sistema livre de unidades de tempo.

$$\begin{cases} x' = \rho(1 - x) - \mathcal{R}_0 xy \\ y' = (\mathcal{R}_0 x - 1)y \end{cases} \quad (3.12)$$

Sejam

$$\begin{cases} F(x, y) = \rho(1 - x) - \mathcal{R}_0 xy \\ G(x, y) = (\mathcal{R}_0 x - 1)y \end{cases}$$

Então, calculando $F(x, y) = G(x, y) = 0$ para determinar os pontos críticos, temos

$$\begin{cases} \rho(1 - x) - \mathcal{R}_0 xy = 0 \\ (\mathcal{R}_0 x - 1)y = 0 \end{cases}$$

- Se $y = 0$, então $\rho(1 - x) = 0$, assim $1 - x = 0$ e $x = 1$. Desse modo $P = (1, 0)$ é um ponto crítico.
- Se $\mathcal{R}_0 x - 1 = 0$, então $x = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$, assim $\rho - \frac{\rho}{\mathcal{R}_0} - y = 0$ e $y = \rho - \frac{\rho}{\mathcal{R}_0}$. Desse modo $Q = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, \rho - \frac{\rho}{\mathcal{R}_0}\right)$ é ponto crítico.

Note que P é um ponto crítico livre de doenças e Q é um equilíbrio endêmico desde que $\mathcal{R}_0 > 1$, pois assim teremos que o número de infectados será positivo.

Para determinar a estabilidade local dos pontos críticos, consideramos a matriz jacobiana J aplicada em cada ponto crítico (x^0, y^0) .

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho - \mathcal{R}_0 y^0 & -\mathcal{R}_0 x^0 \\ \mathcal{R}_0 y^0 & \mathcal{R}_0 x^0 - 1 \end{pmatrix}$$

- Para $P = (1, 0)$: O sistema localmente linear que melhor se aproxima ao sistema (3.12) próximo de P é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & -\mathcal{R}_0 \\ 0 & \mathcal{R}_0 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz é triangular superior, os autovalores são as entradas diagonais da matriz. Então, os autovalores são $\lambda_1 = -\rho$ e $\lambda_2 = \mathcal{R}_0 - 1$. O primeiro autovalor é negativo. O segundo autovalor é negativo se $\mathcal{R}_0 < 1$. Neste caso, pelo Teorema 2.3 o ponto crítico P é um nó estável. O segundo autovalor λ_2 é positivo se $\mathcal{R}_0 > 1$. Neste caso, pelo Teorema 2.3, o ponto crítico P é instável e é um ponto uma sela.

- Para $Q = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, \rho - \frac{\rho}{\mathcal{R}_0}\right)$: O sistema localmente linear que melhor se aproxima ao sistema (3.12) próximo de P é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\mathcal{R}_0 & -1 \\ \rho(\mathcal{R}_0 - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o traço desta matriz é $Tr J = -\rho\mathcal{R}_0 < 0$. Como ρ é um quociente de taxas é portanto positivo. Por outro lado, para que o equilíbrio endêmico exista $\mathcal{R}_0 > 1$. Assim, o $\det J = \mathcal{R}_0\rho - \rho > 0$. Consequentemente, pelo Teorema 2.2, o ponto crítico é localmente assintoticamente estável.

Agora, queremos determinar qual o tipo do ponto crítico Q . Para isso, iremos encontrar os autovalores da matriz, considere a característica equação

$$\det \begin{pmatrix} -\rho\mathcal{R}_0 - \lambda & -1 \\ \rho\mathcal{R}_0 - \rho & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Expandindo o determinante, obtemos

$$\lambda^2 + \rho\mathcal{R}_0\lambda + \rho\mathcal{R}_0 - \rho = 0 \quad (3.13)$$

Portanto,

$$\lambda = \lambda_{1,2} = \frac{-\rho\mathcal{R}_0 \pm \sqrt{(\rho\mathcal{R}_0)^2 - 4\rho(\mathcal{R}_0 - 1)}}{2}.$$

Logo,

- Se $(\rho\mathcal{R}_0)^2 - 4\rho(\mathcal{R}_0 - 1) > 0$, a equação característica tem duas raízes reais negativas e pelo Teorema 2.3 o ponto crítico é um nó estável.
- Se $(\rho\mathcal{R}_0)^2 - 4\rho(\mathcal{R}_0 - 1) < 0$, então a equação característica tem duas raízes conjugadas complexas com parte real negativa e pelo Teorema 2.3 o ponto crítico neste caso é um ponto de espiral assintoticamente estável.

4 Estabilidade via Lyapunov

Neste capítulo, faremos a análise da estabilidade dos pontos críticos de alguns modelos epidemiológicos utilizando o método de Lyapunov. Esta análise será realizada a partir de composições adequadas das seguintes funções de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^0 - x_i^0 \ln \frac{x_i}{x_i^0} \right),$$

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2} (x_i - x_i^0)^2$$

e

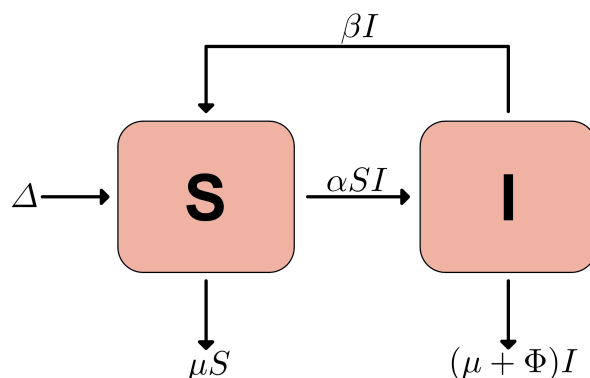
$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2,$$

sendo x_i^0 para $i = 1, \dots, n$, as componentes do ponto de equilíbrio do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

4.1 Uma variação do modelo SIS com N variável e dinâmica vital

Esta variação do modelo SIS descreve as doenças em que os indivíduos suscetíveis que as adquirirem, tornam-se infectados a uma taxa α e ao se recuperarem, ficam suscetíveis imediatamente a uma taxa β . Nele serão consideradas as taxas de nascimentos e imigrações Δ , as taxas de mortes por causas naturais μ e as taxas de mortes pela doença ϕ . E a população N é variável. Abaixo segue a sua representação em diagrama.

Figura 22 – Diagrama do molo SIS com N variável e dinâmica vital.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Portanto, este modelo compartimental é descrito pelo sistema

$$\begin{cases} S'(t) = \Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I \\ I'(t) = \alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I \end{cases} \quad (4.1)$$

com $\alpha, \beta, \mu, \Delta, \phi > 0$ e $N(t) = S(t) + I(t)$ variável. Denotando $S(0) = S_0$ e $I(0) = I_0$ e fazendo $S'(t) = I'(t) = 0$ para determinar os pontos críticos, temos que

$$\begin{cases} \Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I = 0 \\ \alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Segue da segunda equação de (4.2) que,

$$(\alpha S - \beta - \mu - \phi)I = 0.$$

Assim, $I = 0$ ou $S = \frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha}$.

- Para $I = 0$ na primeira equação de (4.2), temos que $S = \frac{\Delta}{\mu}$.
- Para $S = \frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha}$, obtemos $I = \frac{\alpha\Delta - \mu(\beta + \mu + \phi)}{\alpha(\mu + \phi)}$.

Com isso, os pontos críticos do modelo são

$$\begin{aligned} P &= (S_1, I_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0 \right) \\ Q &= (S_2, I_2) = \left(\frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{\alpha\Delta - \mu(\beta + \mu + \phi)}{\alpha(\mu + \phi)} \right). \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{R}_0 = \left(\frac{\alpha\Delta}{\mu(\beta + \mu + \phi)} \right)$ e substituindo em Q , temos

$$Q = \left(\frac{S_1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu(\beta + \mu + \phi)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\alpha(\mu + \phi)} \right).$$

Note que para $I = 0$, isto é, na ausência da doença, $N(t)$ converge para $\frac{\Delta}{\mu}$. Sendo assim, consideramos a região:

$$\Omega = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}.$$

Agora, analisaremos a estabilidade destes pontos críticos.

- Para $P = (S_1, I_1)$, defina a função

$$U : \{(S, I) \in \Omega : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$U(S, I) = \frac{1}{2}[(S - S_1) + I]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} I.$$

Perceba que U é uma função de Lyapunov. De fato, U é de classe C^1 no interior de Ω , $U(S_1, I_1) = 0$ e P é um mínimo global¹ de U em Ω . Logo, determinando a derivada de U em relação a t , temos

$$\begin{aligned} U'(t) &= [(S - S_1) + I](S - S_1 + I)' + \frac{\phi + 2\mu}{\alpha} I' \\ &= [(S - S_1) + I][\Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I + \alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I] \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} [\alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I] \\ &= [(S - S_1) + I][\Delta - \mu(S + I) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} [\alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I]. \end{aligned}$$

Além disso, fazendo $\Delta = \mu S_1$, então $U'(t)$ torna-se

$$U'(t) = -\mu(S - S_1)^2 - (\mu + \phi)I^2 - (\phi + 2\mu) \left(\frac{(\beta + \mu + \phi)}{\alpha} - S_1 \right) I.$$

Assim, $U'(t)$ em função de \mathcal{R}_0 é dado por

$$U'(t) = -\mu(S - S_1)^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{(\phi + 2\mu)(\beta + \mu + \phi)}{\alpha} (1 - \mathcal{R}_0)I.$$

Portanto, se $\mathcal{R}_0 \leq 1$, então $U'(t)$ é definida negativa, e com isso, pelo Teorema 2.5, P é assintoticamente estável.

- Para $Q = (S_2, I_2)$, seja a função V definida por:

$$V : \{(S, I) \in \Omega : S, I > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$V(S, I) = \frac{1}{2}[(S - S_2) + (I - I_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right).$$

Então, V é de classe C^1 no interior de Ω , $V(S_2, I_2) = 0$ e Q é um mínimo global de V em Ω . Determinando a derivada de V em relação a t , temos que

$$\begin{aligned} V'(t) &= [(S - S_2) + (I - I_2)](S + I)' + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} I' \\ &= [(S - S_2) + (I - I_2)][\Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I + \alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I] \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} [\alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I] \\ &= [(S - S_2) + (I - I_2)][\Delta - \mu(S + I) - \phi I] \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} [\alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I]. \end{aligned}$$

¹ Seja f uma função e $P \in D_f$. P é mínimo global de f se, para todo $X \in D_f$ $f(X) \geq f(P)$.

Com isso, fazendo $(\beta + \mu + \phi) = \alpha S_2$ e $\Delta = \mu(S_2 + I_2)$, temos

$$\begin{aligned} V'(t) &= [(S - S_2) + (I - I_2)]\{-\mu[(S - S_2) + (I - I_2)] - \phi(I - I_2)\} \\ &\quad + (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) \\ &= -\mu(S - S_2)^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2. \end{aligned}$$

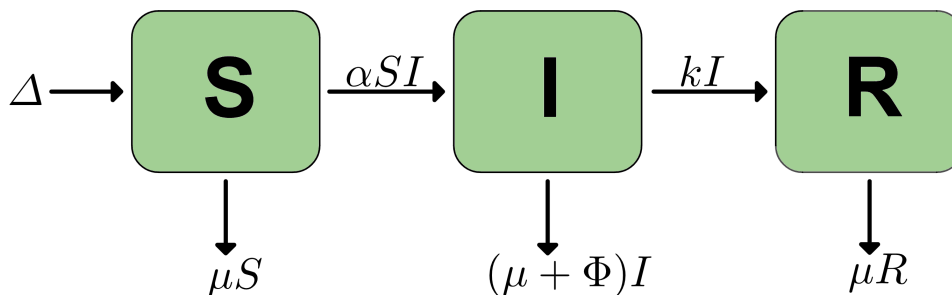
Logo, $V'(t)$ é definida negativa e, portanto, é uma função de Lyapunov e pelo Teorema 2.5, Q é assintoticamente estável. Ou seja, se $\mathcal{R}_0 > 1$, Q é biologicamente viável e é assintoticamente estável.

Observamos que para este modelo SIS (com população total variável), na ausência de infectados, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Enquanto que no caso do modelo SIS com população constante apresentado no capítulo anterior, o ponto de equilíbrio deste tipo é instável.

4.2 Uma variação do modelo SIR com N variável e dinâmica vital

Este modelo é um modelo do tipo *SIR* que descreve doenças tais que os indivíduos suscetíveis que as adquirirem, tornam-se infectados a uma taxa α e os recuperados obtêm imunidade a uma taxa k . Neste modelo também consideramos taxas de nascimentos e imigrações Δ , taxas de mortes por causas naturais μ e taxas de morte por causa da doença ϕ . Abaixo segue o diagrama que o representa.

Figura 23 – Diagrama do modelo SIR com N variável e dinâmica vital.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

O sistema de equações diferenciais que o descreve é:

$$\begin{cases} S'(t) = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ I'(t) = \alpha SI - (k + \mu + \phi)I \\ R'(t) = kI - \mu R \end{cases} \quad (4.3)$$

com $\alpha, \mu, \Delta, \phi, k > 0$ e $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ variável. Considere $S(0) = S_0, I(0) = I_0$ e $R(0) = 0$. Para encontrar os pontos críticos deste modelo consideramos o sistema

$$\begin{cases} \Delta - \alpha SI - \mu S = 0 \\ \alpha SI - (k + \mu + \phi)I = 0 \\ kI - \mu R = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo a segunda equação, obtemos

$$(\alpha S - (k + \mu + \phi))I = 0.$$

Logo, $I = 0$ ou $S = \frac{k + \mu + \phi}{\alpha}$.

- Para $I = 0$, temos que $S = \frac{\Delta}{\mu}$ e $R = 0$.
- Para $S = \frac{k + \mu + \phi}{\alpha}$, temos que

$$I = \frac{\alpha\Delta - \mu(k + \mu + \phi)}{\alpha(k + \mu + \phi)} \quad \text{e} \quad R = \frac{k[\alpha\Delta - \mu(k + \mu + \phi)]}{\alpha\mu(k + \mu + \phi)}.$$

Desse modo, os pontos críticos do modelo são

$$\begin{aligned} P &= (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0 \right) \\ Q &= (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{k + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{\alpha\Delta - \mu(k + \mu + \phi)}{\alpha(k + \mu + \phi)}, \frac{k[\alpha\Delta - \mu(k + \mu + \phi)]}{\alpha\mu(k + \mu + \phi)} \right). \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha\Delta}{\mu(k + \mu + \phi)}$, podemos reescrever Q da seguinte forma:

$$Q = \left(\frac{S_1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu^2(k + \mu + \phi)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\alpha\mu[k + (\phi + \mu)]}, \frac{\mu k(k + \mu + \phi)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\alpha\mu[k + (\phi + \mu)]} \right).$$

Como $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, de (4.3), na ausência da doença, $N(t)$ converge para $\frac{\Delta}{\mu}$.

Logo, para analisar a estabilidade dos pontos críticos consideramos a região

$$\Omega = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : S \geq 0, I \geq 0, S + I + R \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}.$$

- Para o ponto $P = (S_1, I_1, R_1)$, seja a função U definida por

$$U : \{(S, I, R) \in \Omega : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^3$$

$$U(S, I, R) = \frac{1}{2}[(S - S_1) + I + R]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha}I + \frac{(\phi + 2\mu)}{2k}R^2.$$

Note que U é uma função de Lyapunov. Ela é de classe C^1 no interior de Ω , $U(S_1, I_1, R_1) = 0$ e P é um mínimo global de U em Ω . Ademais, encontrando a derivada de U em relação a t , temos

$$\begin{aligned} U'(t) &= [(S - S_1) + I + R](S + I + R)' + \frac{\phi + 2\mu}{\alpha}I' + \frac{\phi + 2\mu}{k}RR' \\ &= [(S - S_1) + I + R][\Delta - \alpha SI - \mu S + \alpha SI - (k + \mu + \phi)I + kI - \mu R] \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{k}[\alpha SI - (k + \mu + \phi)I] + \frac{\phi + 2\mu}{k}R[kI - \mu R] \\ &= [(S - S_1) + I + R][\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha}[\alpha SI - (k + \mu + \phi)I] \\ &\quad + \frac{\phi + 2\mu}{k}R[kI - (\mu + \gamma)R]. \end{aligned}$$

Então, fazendo $\Delta = \mu S_1$, encontramos

$$\begin{aligned} U'(t) &= -\mu[(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{k}R^2 \\ &\quad - (\phi + 2\mu) \left[\frac{(k + \mu + \phi)}{\alpha} - S_1 \right] I. \end{aligned}$$

Assim, a derivada de U em função de \mathcal{R}_0 é:

$$\begin{aligned} U'(t) &= -\mu[(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{k}R^2 \\ &\quad - \frac{(\phi + 2\mu)(k + \mu + \phi)}{\alpha}(1 - \mathcal{R}_0)I. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$, então $U'(t)$ é definida negativa e pelo Teorema 2.5, P é assintoticamente estável.

- Para o ponto $Q = (S_1, I_2, R_2)$, seja a função de Lyapunov V definida por

$$V : \{(S, I, R) \in \Omega : S, I, R > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^3$$

$$\begin{aligned} V(S, I, R) &= \frac{1}{2}[(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right) \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{2k}(R - R_2)^2. \end{aligned}$$

Assim, V é de classe C^1 no interior de Ω , $V(S_2, I_2, R_2) = 0$ e Q é um mínimo global de V em Ω . Derivando V com relação a t , então

$$\begin{aligned}
V'(t) &= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)](S + I + R)' + \frac{(\phi + 2\mu)(I - I_2)}{\alpha} I' \\
&\quad + \frac{\phi + 2\mu}{k}(R - R_2)R' \\
&= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)][\Delta - \alpha SI - \mu S + \alpha SI - (k + \mu + \phi)I \\
&\quad + kI - \mu R] + \frac{(\phi + 2\mu)(I - I_2)}{\alpha} [\alpha SI - (k + \mu + \phi)I] \\
&\quad + \frac{\phi + 2\mu}{k}(R - R_2)[kI - \mu R] \\
&= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)][\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I] \\
&\quad + \frac{(\phi + 2\mu)(I - I_2)}{\alpha} [\alpha SI - (k + \mu + \phi)I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{k}(R - R_2)(kI - \mu R).
\end{aligned}$$

Usando $(k + \phi + \mu) = \alpha S_2$ e $\Delta = \mu(S_2 + I_2 + R_2) + \phi I_2$, obtemos que

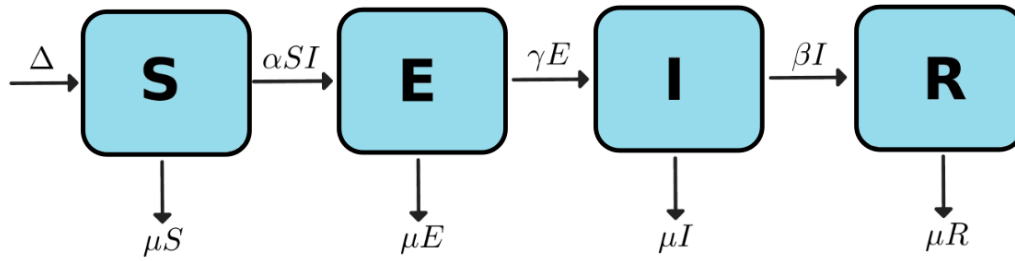
$$\begin{aligned}
V'(t) &= -[(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)]\{\mu[(S - S_2) + (R - R_2)] + (\phi + \mu)(I - I_2)\} \\
&\quad + (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) + (R - R_2)[k(I - I_2) - \mu(R - R_2)] \\
&= -\mu[(S - S_2) + (R - R_2)]^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{k}(R - R_2)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $V'(t)$ é definida negativa. Logo, V é uma função de Lyapunov e pelo Teorema 2.5, Q é assintoticamente estável.

4.3 Modelo SEIR (Suscetível - Exposto - Infectado - Removido)

Embora o modelo SEIR não seja uma variação do SIS ou do SIR, resolvemos colocá-lo neste capítulo por apresentar técnicas matemáticas relevantes que justificam a aplicação do Segundo Método de Lyapunov. O modelo SEIR também é um modelo compartimental, ele descreve as doenças em que os indivíduos suscetíveis que as adquirirem, tornam-se indivíduos expostos, $E(t)$, onde os indivíduos estão infectados, mas não infecciosos, logo após tornam-se infectados a uma taxa α e depois os recuperados obtêm imunidade a uma taxa β . Neste modelo, também consideraremos as taxas de nascimentos e imigrações (Δ), de mortes por causas naturais (μ) e pela doença (ϕ), mostrados no seguinte diagrama:

Figura 24 – Diagrama do modelo SEIR.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

O modelo é descrito pelo sistema

$$\begin{cases} S' = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ E' = \alpha SI - (\mu + \gamma)E \\ I' = \gamma E - (\mu + \beta)I \\ R' = \beta I - \mu R \end{cases} \quad (4.4)$$

com $\Delta, \alpha, \beta, \mu, \gamma > 0$ e $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ variável. Suponha $S(0) = S_0, E(0) = 0, I(0) = I_0$ e $R(0) = 0$.

Para determinar os pontos críticos deste sistema, buscamos as soluções do sistema abaixo.

$$\begin{cases} \Delta - \alpha SI - \mu S = 0 \\ \alpha SI - (\mu + \gamma)E = 0 \\ \gamma E - (\mu + \beta)I = 0 \\ \beta I - \mu R = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

- Para $I = 0$, encontramos o primeiro ponto crítico $P = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0, 0\right)$, que também pode ser chamado de equilíbrio livre de doenças.
- Para $I \neq 0$, da terceira equação do sistema (4.5), obtemos

$$E = \frac{\mu + \beta}{\gamma} I.$$

Substituindo na segunda equação, encontramos

$$S = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)}{\alpha \gamma}.$$

Da primeira equação, conseguimos que

$$I = \frac{\Delta}{\alpha S} - \frac{\mu}{\alpha}.$$

Portanto, determinamos o segundo ponto crítico Q do sistema (4.4), ou seja,

$$Q = \left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)}{\alpha\gamma}, \frac{\mu + \beta}{\gamma} \left(\frac{\Delta\gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)} - \frac{\mu}{\alpha} \right), \frac{\Delta\gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)} - \frac{\mu}{\alpha}, \frac{\Delta\gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)} - \frac{\mu}{\alpha} \right).$$

Definindo $\mathcal{R}_0 = \frac{\Delta\alpha\gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)\mu}$ e escrevendo Q em função de \mathcal{R}_0 , obtemos

$$Q = \left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \beta)}{\alpha\gamma}, \frac{\mu + \beta}{\gamma} \frac{\mu}{\alpha} (\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\mu}{\alpha} (\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\beta}{\alpha} (\mathcal{R}_0 - 1) \right).$$

Note que se $\mathcal{R}_0 > 1$, então Q será o único equilíbrio endêmico do modelo.

Como $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, de (4.4), na ausência da doença, $N(t)$ converge para $\frac{\Delta}{\mu}$. Consideraremos o modelo SEIR apenas no espaço das três primeiras variáveis (S, E, I) , pois se o equilíbrio livre de doença para as três primeiras equações for globalmente estável², então $R(t) \rightarrow 0$, e o equilíbrio livre de doença para o modelo SEIR completo é globalmente estável. E definimos a região

$$\Omega = \left\{ (S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 : S \geq 0, I \geq 0, E \geq 0, S + E + I \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}.$$

- Para o ponto crítico $P = (S_1, E_1, I_1)$, seja a função U definida por

$$U : \{(S, E, I) \in \Omega : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^3$$

$$U(S, E, I) = k \left(S - S_1 - S_1 \ln \frac{S}{S_1} \right) + \frac{1}{\mu + \gamma} E + \frac{1}{\gamma} I$$

em que $k > 0$.

Temos que U é uma função de Lyapunov. Ela é de classe C^1 no interior de Ω , $U(S_1, E_1, I_1) = 0$ e P é um mínimo global de U em Ω . Desse modo, derivando U

² Um equilíbrio é chamado globalmente estável se for estável para todas as condições iniciais, não apenas para aquelas próximas a ele, ler mais em [5].

em relação a t , obtemos

$$\begin{aligned}
U'(t) &= k \left(S' - S_1 \left(\left(\ln \frac{S}{S_1} \right)' \left(\frac{S}{S_1} \right)' \right) \right) + \frac{1}{\mu + \gamma} E' + \frac{1}{\gamma} I' \\
&= k \left(S' - S_1 \left(\frac{S_1 S'}{S S_1} \right) \right) + \frac{1}{\mu + \gamma} E' + \frac{1}{\gamma} I' \\
&= k \left(S' - S_1 \left(\frac{S'}{S} \right) \right) + \frac{1}{\mu + \gamma} E' + \frac{1}{\gamma} I' \\
&= k \left(S' - \frac{S_1 S'}{S} \right) + \frac{1}{\mu + \gamma} E' + \frac{1}{\gamma} I' \\
&= k \left(1 - \frac{S_1}{S} \right) S' + \frac{1}{\mu + \gamma} E' + \frac{1}{\gamma} I' \\
&= k \left(1 - \frac{S_1}{S} \right) [\Delta - \alpha SI - \mu S] + \frac{1}{\mu + \gamma} (\alpha SI - (\mu + \gamma)E) + \frac{1}{\gamma} (\gamma E - (\mu + \beta)I) \\
&= 2k\Delta - \alpha kSI - k\mu S - \frac{\Delta^2 k}{\mu S} + \frac{\Delta \alpha k}{\mu} I + \frac{\alpha}{\mu + \gamma} SI - \frac{\mu + \beta}{\gamma} I.
\end{aligned}$$

Fazendo $k = 1/(\mu + \gamma)$ e colocando U em função de \mathcal{R}_0 , encontramos

$$U'(t) = -k\Delta \left(\frac{\Delta}{\mu S} + \frac{\mu S}{\Delta} - 2 \right) + \frac{\mu + \beta}{\gamma} (\mathcal{R}_0 - 1)I.$$

Note que o último termo é não positivo, já que estamos trabalhando com o equilíbrio livre de doenças, logo $\mathcal{R}_0 < 1$. Analisando o primeiro termo, para isso definimos $a = \Delta/(\mu S)$, então

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a - 1)^2}{a} > 0.$$

Logo, $U'(t) < 0$, ou seja, $U'(t)$ é definida negativa e, portanto, pelo Teorema 2.5 P é localmente assintoticamente estável.

- Para o ponto $Q = (S_2, E_2, I_2, R_2)$: Consideramos novamente apenas os três primeiros componentes do sistema. Então, seja a função V definida por

$$V : \{(S, E, I) \in \Omega : S, E, I > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^3$$

$$V(S, E, I) = k_1 \left(S - S_2 - S_2 \ln \frac{S}{S_2} \right) + k_2 \left(E - E_2 - E_2 \ln \frac{E}{E_2} \right) + k_3 \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right),$$

onde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ e $k_3 > 0$.

Note que V também é uma função de Lyapunov. De fato, V é de classe C^1 no interior de Ω , $V(S_2, E_2, I_2) = 0$ e Q é um mínimo global de V em Ω . Por fim, derivando V

em relação a t , temos que

$$\begin{aligned} V'(t) &= k_1 \left(1 - \frac{S_2}{S}\right) S' + k_2 \left(1 - \frac{E_2}{E}\right) E' + k_3 \left(1 - \frac{I_2}{I}\right) I' \\ &= k_1 \left(1 - \frac{S_2}{S}\right) (\Delta - \alpha SI - \mu S) + k_2 \left(1 - \frac{E_2}{E}\right) (\alpha SI - (\mu + \gamma)E) \\ &\quad + k_3 \left(1 - \frac{I_2}{I}\right) (\gamma E - (\mu + \beta)I). \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \alpha S_2 I_2 + \mu S_2$.

$$\begin{aligned} V'(t) &= -k_1 \frac{(S - S_2)^2}{S} + k_1 \alpha S_2 I_2 - k_1 \alpha SI - k_1 \alpha \frac{S_2^2 I_2}{S} + k_1 \alpha S_2 I + k_2 \alpha SI \\ &\quad - k_2 (\mu + \gamma)E - k_2 \alpha \frac{E_2 SI}{E} + k_2 (\mu + \gamma)E_2 + k_3 \gamma E - k_3 (\mu + \beta)I - k_3 \gamma \frac{I_2 E}{I} \\ &\quad + k_3 (\mu + \beta)I_2. \end{aligned}$$

Considerando $k_1 = k_2$ onde temos frações, multiplicando e dividindo pelas coordenadas do valor de equilíbrio, então

$$\begin{aligned} V'(t) &= -k_1 \frac{(S - S_2)^2}{S} + k_1 \alpha S_2 I_2 - k_1 \alpha \frac{S_2^2 I_2}{S} + k_1 \alpha S_2 I - k_2 (\mu + \gamma)E \\ &\quad - k_2 \alpha S_2 I_2 \frac{E_2 SI}{E S_2 I_2} + k_2 (\mu + \gamma)E_2 + k_3 \gamma E - k_3 (\mu + \beta)I - k_3 \gamma E_2 \frac{I_2 E}{I E_2} \\ &\quad + k_3 (\mu + \beta)I_2. \end{aligned}$$

De $k_1 = k_2$, obtemos $\beta S_2 I_2 = (\mu + \gamma)E_2$. Escolhendo k_3 tal que

$$k_3 (\mu + \beta)I_2 = k_2 (\mu + \gamma)E_2 \Rightarrow k_3 = k_2 \frac{\mu + \gamma}{\gamma}$$

e evidenciando $k_1 \alpha S_2 I_2$ nos termos, temos

$$\begin{aligned} V'(t) &= -k_1 \frac{(S - S_2)^2}{S} + k_1 \alpha S_2 I_2 \left[3 - \frac{S_2}{S} - \frac{E_2 SI}{E S_2 I_2} - \frac{I_2 E}{I E_2} \right] \\ &\quad + (k_1 \alpha S_2 - k_3 (\mu + \beta))I + (k_3 \gamma - k_2 (\mu + \gamma))E. \end{aligned}$$

Como $k_3 = k_2 (\mu + \gamma) / \gamma$, os dois últimos termos da equação são zero. Escolhendo $k_1 = k_2 = 1$, temos que

$$k_3 = \frac{\mu + \gamma}{\gamma}.$$

E assim,

$$V'(t) = -\frac{(S - S_2)^2}{S} + \alpha S_2 I_2 \left[3 - \frac{S_2}{S} - \frac{E_2 SI}{E S_2 I_2} - \frac{I_2 E}{I E_2} \right].$$

O primeiro termo é negativo a menos que $S = S_2$. Para a análise do segundo termo, considere

$$x_1 = \frac{S_2}{S}, \quad x_2 = \frac{E_2 SI}{E S_2 I_2}, \quad x_3 = \frac{I_2 E}{I E_2}.$$

Note que $x_1x_2x_3 = 1$. Sabendo que a média aritmética é maior que a média geométrica, temos

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} &\geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} &\geq \sqrt[3]{1} \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{S_2}{S} + \frac{E_2SI}{ES_2I_2} + \frac{I_2E}{IE_2} \geq 3.$$

E assim, $V'(t) < 0$, isto é $V'(t)$ é definida negativa. Portanto, pelo Teorema 2.5, Q é localmente assintoticamente estável.

5 Modelos SIR para a *COVID-19* em Pernambuco

Em dezembro de 2019, foi registrado na cidade de Wuhan, na China, uma nova cepa do coronavírus chamado inicialmente de 2019-nCoV e posteriormente de SARS-CoV-2 que caracterizou um surto, no qual centenas de pessoas foram infectadas pela *Covid-19*, doença proveniente desse vírus. Com a grande quantidade de casos assintomáticos e a transmissão sendo realizada pelo ar, o número de casos da *Covid-19* cresceu de maneira exorbitante levando, em março de 2020, a uma pandemia e, conseqüentemente, a indicação de isolamento social para contenção da doença.

Para compreender como acontece, na prática, a utilização dos modelos matemáticos apresentados no Capítulo 3, apresentaremos aqui o estudo da evolução da Pandemia do *Covid-19* no estado de Pernambuco, por meio do modelo SIR com tamanho de população constante e sem dinâmica vital que foram vistos na Seção 3.2.1 deste trabalho, analisamos os dados de 2020 e 2021 retirados de [8]. Usamos um algoritmo evolucionário [4] para encontrar os parâmetros, α e β , que melhor aproximam este modelo SIR dos dados reais e observamos o valor de reprodutividade basal assim como o número máximo de infectados pela doença.

5.1 Descrição da modelagem

Para modelar a pandemia no estado de Pernambuco foram escolhidos os meses de maio de 2020 devido à sua proximidade com o início da pandemia e pela melhor consistência dos dados, fevereiro de 2021 por conta do início da vacinação no estado e novembro de 2021 em razão da marca de 50% da população com o ciclo de vacinação completo. Todos os dados foram obtidos no portal da transparência do governo do estado de Pernambuco disponível em [8]. Além disso foi escolhido o modelo SIR sem dinâmica vital e população total constante, em que S representa o compartimento dos *suscetíveis*, I o compartimento dos *infectados* e R o compartimento dos *removidos*. Descrito pelo sistema

de equações abaixo.

$$\begin{cases} S' &= -\alpha SI \\ I' &= \alpha SI - \beta I \\ R' &= \beta I \end{cases}$$

tal que $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I + R$ é constante. As condições iniciais para este modelo são:

$$\begin{cases} R(0) &= 0 \\ I(0) &= I_0 \\ S(0) &= N - I_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

em que I_0 corresponde ao percentual de infectados no primeiro dia do mês e N corresponde a população do estado de Pernambuco no ano em questão. Além disso, consideramos que os grupos S, I e R representam o percentual da população do ano em função do tempo e a unidade de tempo escolhida foi dia. Deste modo as unidades das constantes passam a ser $\frac{1}{[dia]}$ para o β e para o α tem-se $\frac{1}{[\text{percentual da população}][\text{dia}]}$.

Nosso objetivo é encontrar valores para α e β de modo que descreva uma boa aproximação para a curva dos infectados $I(t)$. Para isso, utilizamos um algoritmo evolucionário que avalia pares (α, β) como a soma das distâncias dos dados reais para a solução gerada pelas equações com os parâmetros α e β . Em seguida, executa mutações, isto é, variações nos valores de α e β que possuem a menor avaliação. Executando esse procedimento uma quantidade suficiente de vezes para cada mês analisado, encontramos uma boa aproximação para os valores de α e β .

Tabela 3 – Valores obtidos por algoritmo evolucionário.

height	Data	α	β	Avaliação
05/2020		0.731356244618187	0.666228621582044	0.24025569567227
02/2021		0.0431729297347669	0.036160591634192	0.196204659689401
11/2021		0.00860251299204555	0.00755142828486957	0.225256038693714

Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Em posse dos dados da Tabela 3 calculamos os valores de \mathcal{R}_0 e I_{max} para cada par (α, β) conforme descrito na Seção 3.2.1.

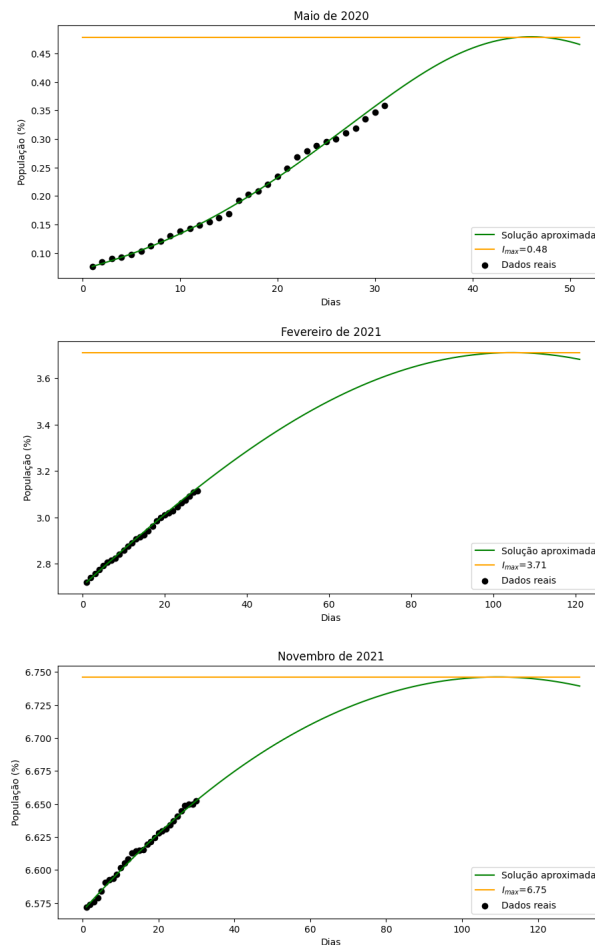
Tabela 4 – Valores aproximados para I_{max} e \mathcal{R}_0 .

Data	I_{max}	\mathcal{R}_0
05/2020	0.48	1.10
02/2021	3.71	1.16
11/2021	6.75	1.06

Fonte: Autora deste trabalhos, 2023.

Ao observar os valores de I_{max} conseguimos determinar o limite em que o modelo descreve os dados reais tendo em vista que ele é o máximo global de $I(t)$. Com isso, o modelo não descreve a pandemia como um todo. Porém, para os dados utilizados, o modelo descreve a população até t_1 , quando $I(t_1) = I_{max}$. Desse modo, para os meses de maio de 2020, fevereiro de 2021 e novembro de 2021 os valores aproximados de t_1 são 45, 105 e 110 dias, respectivamente.

Figura 25 – Gráficos das aproximações obtidas.



Fonte: Autora deste trabalho, 2023.

Com base na análise dos valores de $\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha S_0}{\beta}$ sendo $S_0 = (N - I_0)/N$ que se encontra em [3], para cada par (α, β) , nos meses de maio de 2020 e fevereiro de 2021 ocorreu uma variação de 0.06 para mais no valor de \mathcal{R}_0 . Isso se justifica devido ao aumento da população de infectados. Já para os meses de fevereiro e novembro de 2021 o valor de \mathcal{R}_0 declinou em 0.1 provavelmente em decorrência do percentual da população com o ciclo de vacinação completo.

Embora as vacinas possam não prevenir completamente contra a doença, os dados podem indicar que elas reduzem o número de casos graves e mortes, garantindo assim, que o sistema de saúde não fique sobrecarregado. Dessa forma, com o modelo constatamos que as vacinas são essenciais e é indispensável que sejam difundidas como uma medida de saúde pública, pois são um importante instrumento no combate à pandemia.

Conclusão

Nos capítulos 1 e 2, nos deparamos com conceitos e ferramentas matemáticas que permeiam o estudo dos modelos matemáticos epidemiológicos. De modo que estabelecemos as definições e teoremas necessários para podermos nos aprofundar nesses assuntos.

No capítulo 3, apresentamos variações dos modelos do tipo SIS e SIR, nos quais foram considerados população constante e variável, e em alguns casos dinâmica vital. Analisamos a estabilidade desses modelos utilizando as características do traço e dos autovalores que representam a matriz do sistema, assim percebemos que esse processo é trabalhoso.

Já no capítulo 4, trabalhamos com os modelos SIS, SIR e SEIR, tal que todos possuem população variável e dinâmica vital. No entanto, nesses modelos analisamos a estabilidade utilizando o Segundo Método de Lyapunov, embora para o uso desse método não seja necessário determinar as soluções do modelo, uma grande desvantagem é que não existe uma forma geral que determine uma função de Lyapunov.

Por último, no capítulo 5, analisamos três fases da pandemia do *Covid-19* no estado de Pernambuco, maio de 2020, fevereiro de 2021 e novembro de 2021. Com essa aplicação, conseguimos observar o comportamento da doença durante a pandemia e fazer um paralelo com a realidade. Pois, é possível observar a diferença do \mathcal{R}_0 nesses três períodos, dado que inicialmente ocorreu o isolamento social e após a vacinação houve o afrouxamento desse isolamento, logo, as pessoas começaram a ter mais contato e conseqüentemente, existe o aumento do \mathcal{R}_0 , visto que a vacina previne o agravamento dos casos, mas não previne a transmissão do vírus.

Com isso, destacamos a importância da modelagem matemática, sobretudo em situações epidêmicas, já que com ela podemos entender como a doença funciona e decidir qual a melhor forma de prevenção e combate.

Referências

- 1 BESSA, G. Ramos. *Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies*. 2011.
- 2 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno*, 10. ed., LTC Editora, Rio de Janeiro, 2010.
- 3 LUIZ, M. H. R. *Modelos matemáticos em epidemiologia*. 2012.
- 4 GOUVÊA JÚNIOR, M. M. *Algoritmo evolucionário adaptativo em problemas multimodais dinâmicos*. 2009.
- 5 MARTCHEVA, M. *An introduction to mathematical epidemiology*. Vol. 61. New York: Springer, 2015.
- 6 Organização Pan-Americana da Saúde. *Perguntas frequentes: vacinas contra a COVID-19 - OPAS/OMS*. Disponível em: <<https://www.paho.org/pt/vacinas-contracovid-19/perguntas-frequentes-vacinas-contracovid-19?adgroupsurvey=>>>. Acesso em: 5 abr. 2023.
- 7 *Phase Plane-Differential Equations*. Disponível em: <<https://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/phaseplane.aspx>>. Acesso em: 04 maio 2023.
- 8 PORTAL DA TRANSPARENCIA *Painel geral Covid-19 em dados*. Disponível em: <<https://app.powerbi.com/view?r=eyJrIjoiY2QwMzkxMDItZjcxOS00ZGZlLTNmOWEtZDNmZjlkNDU4MWQwIiwidCI6IjA5NWY4NjAxLTRhOWEtNDQ5\Mc1hODBkLWJmMTA4NTliODkxMCJ9&pageName=ReportSection59e9d3b77e33c5dd75bd>>. Acesso em: 04 maio 2023.
- 9 VARGAS-DE-LEÓN, C. On the global stability of SIS, SIR and SIRS epidemic models with standard incidence. *Chaos, Solitons and Fractals*. Elsevier ltda, v. 44, p. 1106–1110, 2011.