



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Licenciatura em Matemática

**Maria Fernanda Pires da Silva**

**Introdução à compressão fractal de imagens através de sistemas de funções  
iteradas**

RECIFE  
2023





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Licenciatura em Matemática

**Maria Fernanda Pires da Silva**

**Introdução à compressão fractal de imagens através de sistemas de funções iteradas**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tarciana Maria Santos da Silva

RECIFE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S586i Silva, Maria Fernanda Pires da  
Introdução à compressão fractal de imagens através de sistemas de funções iteradas / Maria Fernanda Pires da Silva. -  
2023.  
53 f. : il.
- Orientadora: Tarciana Maria Santos da Silva.  
Inclui referências.
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em  
Matemática, Recife, 2023.
1. Fractais. 2. Transformações afins. 3. Sistemas de funções iteradas. 4. Teorema do ponto fixo de Banach. I. Silva,  
Tarciana Maria Santos da, orient. II. Título

MARIA FERNANDA PIRES DA SILVA

**INTRODUÇÃO À COMPRESSÃO FRACTAL DE IMAGENS ATRAVÉS  
DE SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS**

Monografia de graduação, apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como componente optativo para a obtenção do grau de licenciatura.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tarciana Maria Santos da Silva  
DM - UFRPE  
Presidente/Orientadora

---

Prof. Dr. Clessius Silva  
DM – UFRPE

---

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza  
DM - UFRPE

RECIFE  
2023



*Dedico este trabalho à minha avó, Maria José da Silva.*





# Agradecimentos

À minha mãe, Feliciano Pires da Silva, que sempre me apoiou e a quem devo tudo que sou hoje.

Ao meu namorado, Emanuel Victor Pinto Cardoso, que é meu porto seguro e nunca me deixou desistir. Obrigada pelo carinho e pelas palavras de incentivo.

Aos meus amigos de curso, Beatriz, Dayvid, Jonathas, Lídio e Paulo, que me acompanharam durante esta jornada. Em especial, à minha amiga Alice Cristina Bezerra de Andrade, que é uma pessoa incrível com quem dividi muitos momentos especiais desde o primeiro dia na graduação.

Aos professores do Departamento de Matemática e do Departamento de Educação da UFRPE que participaram da minha formação.

À minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tarciana Maria Santos da Silva, pela paciência, compreensão e por ter me conduzido desde o início pelos melhores caminhos.

A todos aqueles que acreditaram no meu potencial para a realização deste trabalho.



*"Faça aquilo que vem do coração - disse ele. - Fazendo, não ficará insatisfeito, não sentirá inveja, não estará aspirando a bens que pertencem a outros. Pelo contrário, ficará assombrado com o que receberá de volta."(A Última Grande Lição - Mitch Albom)*



# Resumo

O objeto de estudo deste trabalho é o método de compressão fractal de imagens através de sistemas de funções iteradas. Esta técnica consiste em descrever, através de transformações afins, fractais que possuem uma característica especial: a autossimilaridade. Para compreender este método de compressão, fazemos uma breve explicação sobre a geometria fractal, iniciamos um estudo sobre as transformações lineares e definimos as transformações afins no plano. Em seguida, nos debruçamos sobre os conceitos de Espaços Métricos necessários para compreensão do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que é a chave para a aplicação dos sistemas de funções iteradas na construção de fractais autossimilares. Apresentamos a distância de Hausdorff, pois esta é utilizada na compressão de imagens reais que possuem pouca ou nenhuma similaridade e, por fim, mostramos a aplicação na prática construindo dois fractais muito importantes: o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski.

**Palavras-chave:** Fractais. Transformações afins. Sistemas de funções iteradas. Teorema do ponto fixo de Banach.



# Abstract

The study object of this work is the fractal image compression method through systems of iterated functions. This technique consists of describing, through affine transformations, fractals that have a special characteristic: self-similarity. To understand this method of compression, we make a brief explanation about fractal geometry, start a study on linear transformations and define affine transformations in the plane. Then, we focus on the concepts of Metric Spaces necessary for understanding Banach's Fixed Point Theorem, which is the key for the application of systems of iterated functions in the construction of self-similar fractals. We present the Hausdorff distance, as it is used in the compression of real images that have little or no similarity and, finally, we show the application in practice by building two very important fractals: the Sierpinski Triangle and the Sierpinski Carpet.

**Keywords:** Fractals. Affine transformations. Iterated function systems. Banach's Fixed Point Theorem.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Tapete de Sierpinski. . . . .	20
Figura 2 – Construção do Triângulo de Sierpinski. . . . .	21
Figura 3 – Construção do Floco de neve de Koch. . . . .	21
Figura 4 – Curva de Koch. . . . .	21
Figura 5 – Homotetia. . . . .	24
Figura 6 – Cisalhamento na direção do eixo $x$ . . . . .	25
Figura 7 – Cisalhamento na direção do eixo $y$ . . . . .	26
Figura 8 – Projeção no eixo $x$ . . . . .	27
Figura 9 – Projeção no eixo $y$ . . . . .	27
Figura 10 – Reflexão em torno do eixo $x$ . . . . .	28
Figura 11 – Reflexão em torno do eixo $y$ . . . . .	29
Figura 12 – Reflexão em torno da origem. . . . .	29
Figura 13 – Reflexão em torno da reta $y = x$ . . . . .	30
Figura 14 – Rotação por um ângulo $\theta$ . . . . .	31
Figura 15 – Translação na direção de $u$ . . . . .	32
Figura 16 – Triângulo de Sierpinski. . . . .	47
Figura 17 – $C_0$ e as quatro primeiras iteradas. . . . .	48
Figura 18 – $B_0$ e as quatro primeiras iteradas. . . . .	48
Figura 19 – $D_0$ e as duas primeiras iteradas. . . . .	50



# Sumário

	<b>Introdução</b> .....	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES AFINS NO PLANO</b> .....	<b>23</b>
<b>1.1</b>	<b>Homotetias</b> .....	<b>24</b>
<b>1.2</b>	<b>Cisalhamentos</b> .....	<b>25</b>
<b>1.3</b>	<b>Projeções</b> .....	<b>26</b>
<b>1.4</b>	<b>Reflexões</b> .....	<b>28</b>
<b>1.5</b>	<b>Rotação</b> .....	<b>30</b>
<b>1.6</b>	<b>Translação</b> .....	<b>32</b>
<b>2</b>	<b>ESPAÇOS MÉTRICOS</b> .....	<b>35</b>
<b>2.1</b>	<b>Definição e exemplos</b> .....	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Espaços métricos completos</b> .....	<b>37</b>
<b>2.3</b>	<b>Sistemas de funções iteradas</b> .....	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Pontos fixos</b> .....	<b>40</b>
<b>2.5</b>	<b>A distância de Hausdorff</b> .....	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES</b> .....	<b>47</b>
	<b>Conclusão</b> .....	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>53</b>



# Introdução

Devido ao avanço da tecnologia, o desenvolvimento das câmeras fotográficas e dos celulares, as pessoas passaram a colecionar cada vez mais imagens digitais. Surge então a necessidade da implementação de métodos que tornem o armazenamento de imagens mais eficiente, uma vez que as imagens com maior resolução podem tornar a navegação mais lenta. Aplicando métodos de compressão, busca-se eliminar informações redundantes da imagem gerando uma nova representação em que as alterações são imperceptíveis, o que ocupa menos espaço de armazenamento.

Existem várias técnicas de compressão de imagens. Uma das mais utilizadas é a do algoritmo *Joint Photographic Experts Group* (JPEG), que faz uso de técnicas de transformada de Fourier discreta e se tornou padrão para imagens digitais. É importante destacar que existem dois tipos de compressão de imagens: com perdas e sem perdas, uma consiste em trazer resultados idênticos à imagem original enquanto a outra consiste em trazer uma perda mínima de informações advindas da imagem original. Ambas possuem vantagens e desvantagens. A compressão sem perdas é a única técnica aceitável em certos casos, devido à sua fidelidade com a imagem original, porém as suas taxas de compressão são baixas, enquanto a compressão com perdas apresenta taxas de compressão maiores.

Os estudos acerca do método abordado neste trabalho foram iniciados pelo matemático Michael Barnsley na década de 80. Os objetos centrais da compressão fractal de imagens são conjuntos de transformações afins, denominados sistemas de funções iteradas (SFI) ([BARNSELEY, 1993](#)). A técnica se manteve mais experimental, pois buscar por meio de comparações e aplicações às imagens, um conjunto de transformações que não altere a imagem original pode se tornar uma tarefa exaustiva. Apesar disso, este tema continua sendo alvo de pesquisas e tentativas de aprimoramentos, visando melhorar taxas de compressão e o tempo de processamento.

Mesmo com esse aspecto negativo, optamos por introduzir tais métodos, pois os estudos sobre compressão fractal de imagens englobam diversos temas como autossimilaridade, transformações afins no plano, espaços métricos completos, a distância de Hausdorff e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. De maneira simples, mostraremos a construção de fractais autossimilares via SFI.

O termo fractal, do latim *fractus*, que significa algo irregular ou quebrado foi proposto no ano de 1975 pelo matemático francês Benoît Mandelbrot (1924 - 2010). Os estudos acerca de objetos fractais foram importantes ao ponto de permitir o desenvolvimento de uma nova geometria, a Geometria Fractal, que segundo ([MANDELBROT, 1989](#)), é "o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau em todas as escalas". Na natureza podemos observar

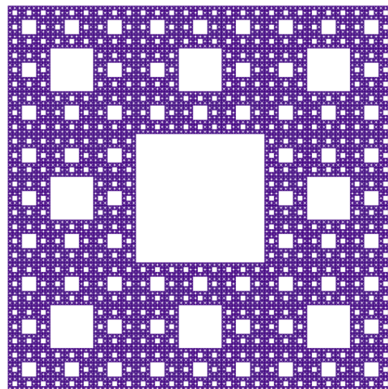
particularidades de fractais em nuvens, fumaças, montanhas, árvores, folhas e diversos outros objetos.

Os fractais possuem características que os diferenciam de figuras geométricas tradicionais, uma delas é conservar o nível de detalhamento independente do grau de ampliação. A autossimilaridade é outra característica atribuída a estes objetos e consiste em apresentar partes exata, aproximada ou estatisticamente iguais quando observadas em diferentes escalas.

Fractais aproximadamente autossimilares possuem partes iguais à figura inicial com mínimas deformações. Já os fractais estatisticamente autossimilares são aqueles que apresentam aleatoriedades na sua representação e possuem medidas numéricas (ou estatísticas) que são preservadas nas suas diferentes escalas. A autossimilaridade, quando exata, fornece representações de fractais cujas partes são idênticas ao todo, como podemos observar nos seguintes exemplos:

Este fractal foi descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969). A construção do Tapete de Sierpinski parte de um quadrado que, após ser dividido em nove partes e removida a parte central, resulta em oito quadrados menores. Este processo pode ser repetido infinitamente.

Figura 1 – Tapete de Sierpinski.



Fonte: ([WIKIMEDIA](#), 2023a)

Este fractal também foi descrito pelo matemático Waclaw Sierpinski. A construção do Triângulo de Sierpinski parte geralmente de um triângulo equilátero. Determinando os pontos médios de cada um dos lados e unindo os pontos obtemos quatro triângulos menores, então removemos o triângulo central. Este processo pode ser repetido infinitamente.

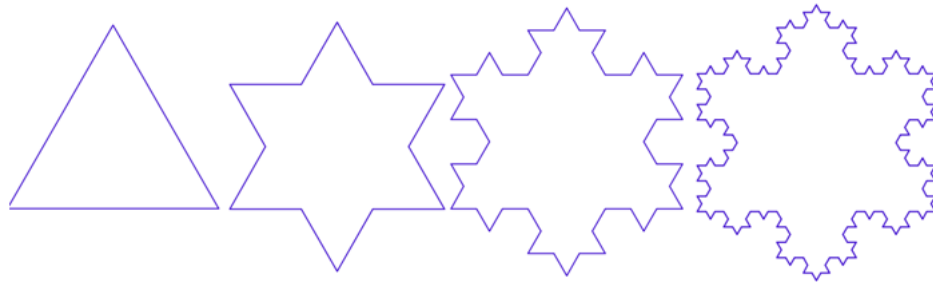
Figura 2 – Construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: (WIKIMEDIA, 2023b)

Proposto pelo matemático sueco Niels Fabian Helge Von Koch (1870 - 1924), o floco de neve de Koch é construído à partir de um triângulo equilátero, dividindo cada um dos seus lados em três partes iguais e construindo um novo triângulo equilátero em cada segmento do meio.

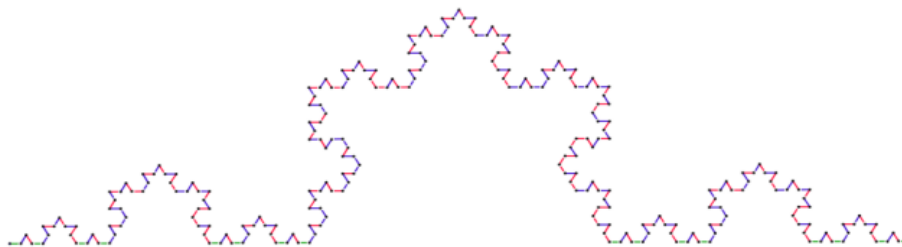
Figura 3 – Construção do Floco de neve de Koch.



Fonte: (WIKIMEDIA, 2023c)

A curva de Koch segue a mesma construção, porém seu ponto de partida é um segmento de reta.

Figura 4 – Curva de Koch.



Fonte: (FUZZO; SANTOS; FERREIRA, 2011)

Estamos interessados especificamente nos fractais que possuem estas características, pois são definidos por sistemas de funções iteradas. Estes sistemas consistem em aplicar repetidamente uma ou mais transformações em determinada figura no plano e cada repetição deste processo é denominada uma iteração.

De acordo com (ANTON; RORRES, 2012), um subconjunto fechado e limitado do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  é dito autossimilar se puder ser escrito da seguinte forma:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k$$

em que  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  são conjuntos não sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de  $S$  de mesmo fator  $s$  ( $0 < s < 1$ ). Nesse sentido, os autores expressam o processo iterativo que constrói um fractal, pois o subconjunto  $S$  é a união de todas as contrações iterativas. Estes termos serão esclarecidos posteriormente.

Este trabalho está organizado de modo que o conteúdo dos capítulos se complementam. O primeiro capítulo traz, de maneira breve, conceitos sobre transformações afins no plano que são necessários para entender a composição de um SFI. O segundo capítulo traz a fundamentação de espaços métricos, e a definição mais formal de SFI. O terceiro e último capítulo traz as aplicações de SFI na construção de dois fractais mais conhecidos. O *Geogebra* foi utilizado como suporte para desenvolver os gráficos e os fractais que aparecem no decorrer deste trabalho.



# 1 Transformações afins no plano

Tendo em vista que o método de compressão por meio de sistemas de funções iteradas é baseado nas transformações afins, o objetivo deste capítulo é disponibilizar ferramentas necessárias para a compreensão deste tipo de transformação. Apresentaremos de maneira sucinta os conceitos básicos acerca de transformações lineares, bem como exemplos de transformações que são utilizadas na construção de fractais.

A seguir temos a definição de um tipo de função (aplicação) em que o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Este tipo de função possui duas características importantes: a preservação da soma e da multiplicação por escalar. Este capítulo foi fundamentado em (BOLDRINI et al., 1980), (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987) e (LIMA, 2007)

**Definição 1.1.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais. Uma aplicação  $T : V \longrightarrow W$  é dita uma *transformação linear* de  $V$  em  $W$  se, para quaisquer  $u, v \in V$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades forem satisfeitas.

- i)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ ;
- ii)  $T(\alpha \cdot u) = \alpha T(u)$ .

Vejam alguns exemplos de transformações lineares.

**Exemplo 1.2.** Seja  $V$  um espaço vetorial, a Transformação Identidade  $I : V \longrightarrow V$  tal que  $I(v) = v$  é linear.

Mostraremos que a aplicação satisfaz as propriedades de linearidade.

- i) Sejam  $u, v \in V$ , por definição temos  $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$ .
- ii) Sejam  $v \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , por definição segue que  $I(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot v = \alpha I(v)$ .

Concluimos que a aplicação é uma transformação linear.

**Exemplo 1.3.** A transformação nula, dada por  $T : V \longrightarrow W$  tal que  $T(v) = 0$ , é linear.

De fato,

- i)  $T(u + v) = 0 = 0 + 0 = T(u) + T(v)$ .
- ii)  $T(\alpha \cdot u) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha T(u)$ .

**Definição 1.4.** Sejam  $T_1 : V \longrightarrow W$  e  $T_2 : W \longrightarrow U$  transformações lineares. Denomina-se a *composição* de  $T_1$  com  $T_2$  a transformação linear  $T_2 \circ T_1 : V \longrightarrow U$  tal que  $(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$ , para todo  $v \in V$ .

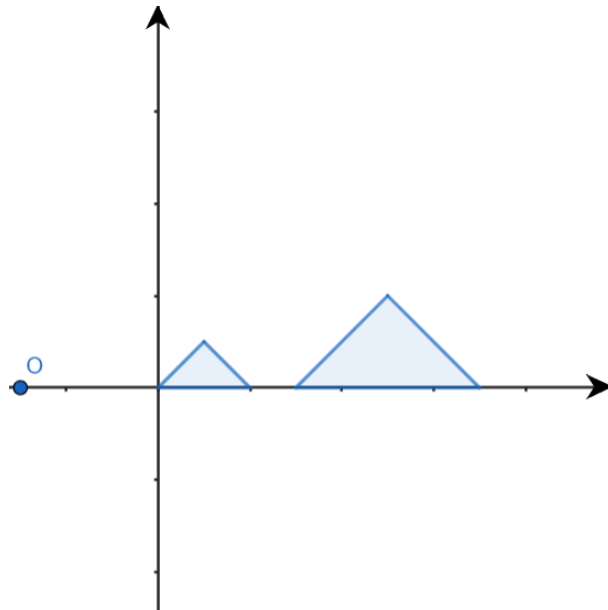
Mostraremos a seguir exemplos de transformações  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , visando explorar suas propriedades geométricas.

## 1.1 Homotetias

Dado um ponto  $O = (x_0, y_0)$  e um número real  $k \neq 0$ , definimos a homotetia de centro  $O$  e razão  $k$  como a transformação  $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  que associa um ponto  $P$  a um ponto  $P'$  de maneira que  $|\overrightarrow{OP'}| = k \cdot |\overrightarrow{OP}|$ . Esta transformação amplia ou reduz figuras geométricas preservando suas proporções.

É fácil observar que quando  $k > 1$ , os vetores que compõem a figura no plano são ampliados e quando  $0 \leq k < 1$ , obtemos reduções nas figuras. Em alguns casos é conveniente considerar as homotetias com razão  $k < 0$ , que consistem em homotetias  $H$  de centro  $O$  compostas com a reflexão em torno de  $O$ . Na Figura 5, temos um exemplo de homotetia com razão positiva e centro fora da origem.

Figura 5 – Homotetia.



Fonte: Produzido pela autora.

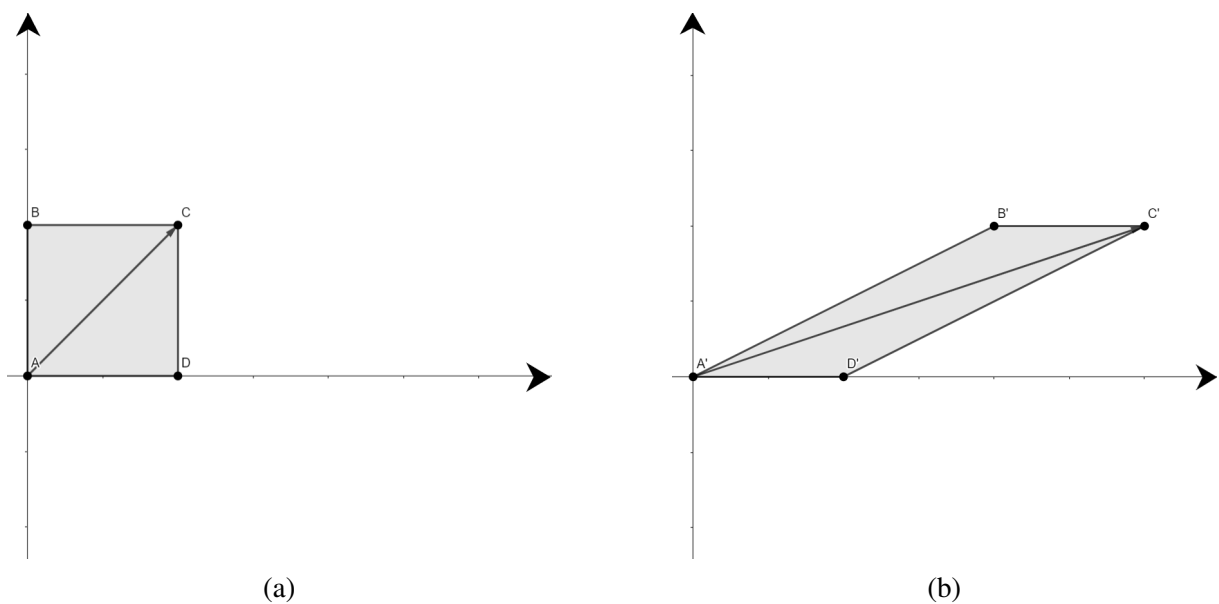
Em qualquer sistema  $OXY$  de eixos ortogonais com origem no centro  $O$  da homotetia  $H$ , as coordenadas do vetor  $P'$  podem ser obtidas através aplicação  $H(x, y) = (kx, ky)$  com  $P = (x, y)$ . Na forma matricial:

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Cisalhamentos

A transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x + ky, y)$  é denominada um cisalhamento de fator  $k$  na direção do eixo  $x$ . Estas transformações lineares deslocam horizontalmente os pontos de um plano de maneira que as figuras são deformadas. Observe a Figura 6:

Figura 6 – Cisalhamento na direção do eixo  $x$ .

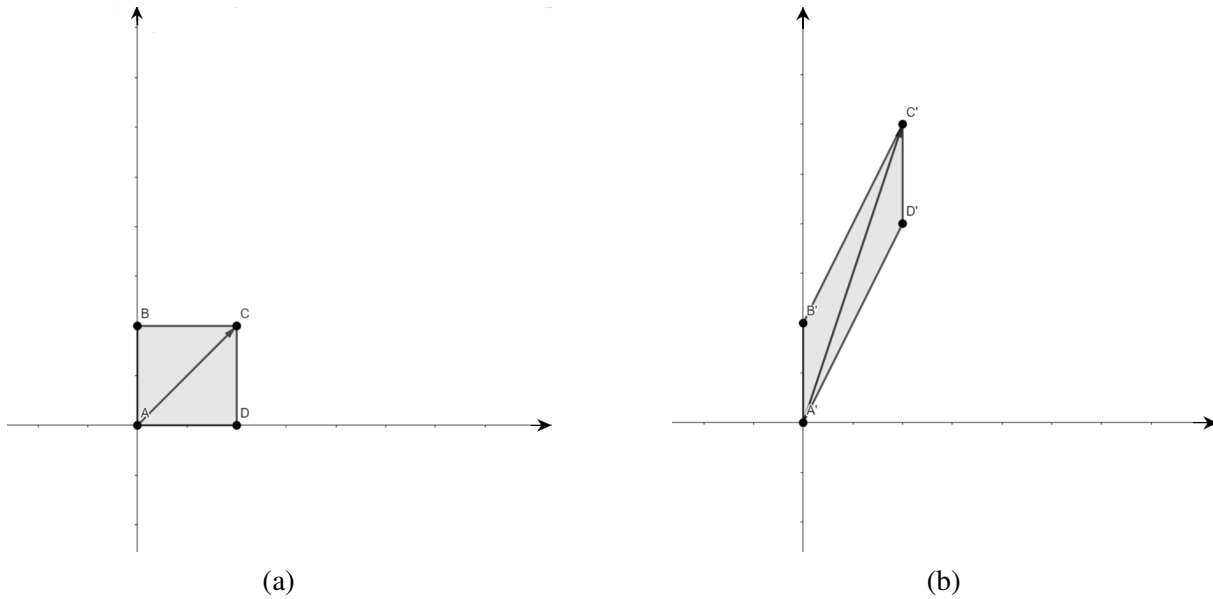


Fonte: Produzido pela autora.

Na forma matricial, temos

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Analogamente, a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x, kx + y)$  é denominada um cisalhamento de fator  $k$  na direção do eixo  $y$ . Observe a Figura 7:

Figura 7 – Cisalhamento na direção do eixo  $y$ .

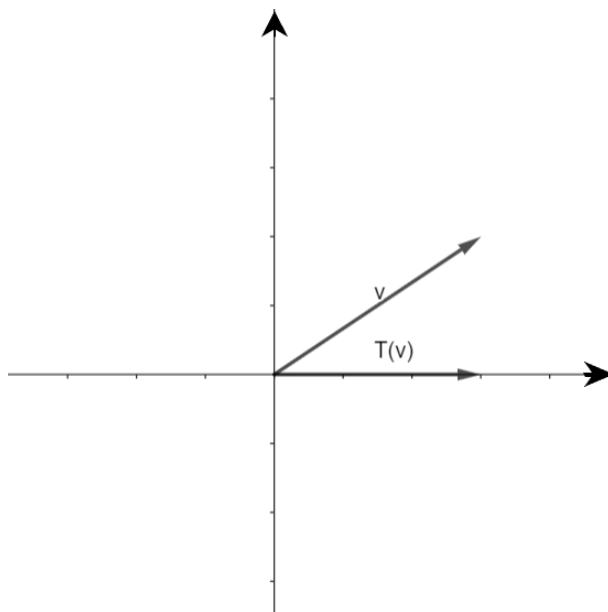
Fonte: Produzido pela autora.

Na forma matricial, temos

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

### 1.3 Projeções

Uma projeção é uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que aplica cada ponto em sua projeção ortogonal numa reta ou ponto fixado. Em relação ao eixo  $x$ , uma projeção ortogonal pode ser representada por  $T(x, y) = (x, 0)$ . Observe a Figura 8:

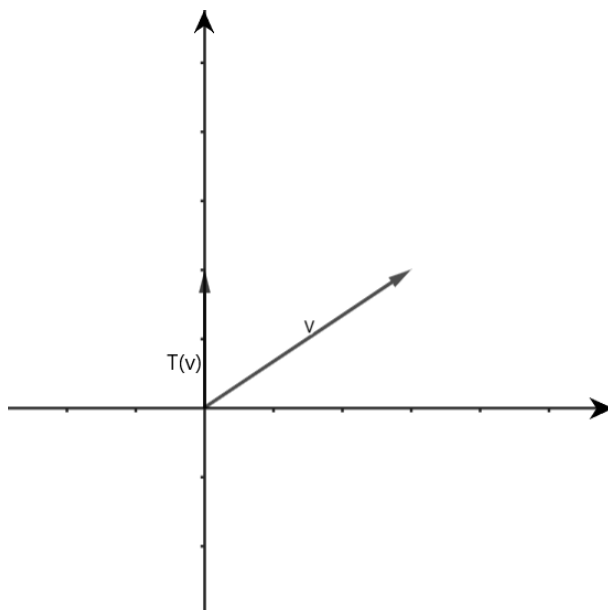
Figura 8 – Projeção no eixo  $x$ .

Fonte: Produzido pela autora.

A matriz desta transformação é dada por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Já em relação ao eixo  $y$ , uma projeção ortogonal pode ser representada por  $T(x, y) = (0, y)$ . Observe a Figura 9:

Figura 9 – Projeção no eixo  $y$ .

Fonte: Produzido pela autora.

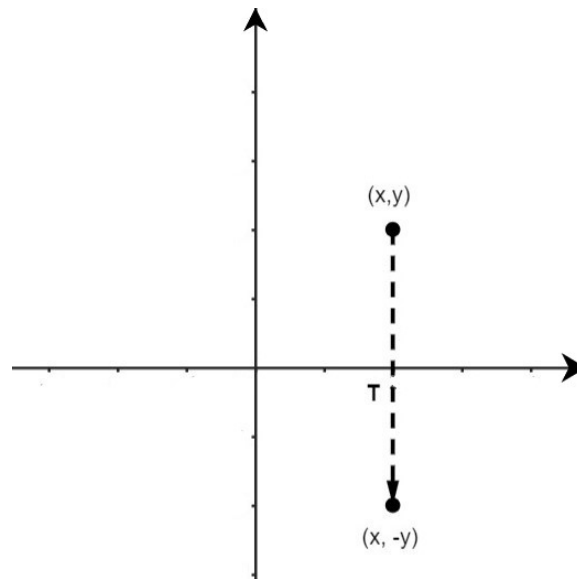
Sua representação matricial é feita da seguinte forma:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

## 1.4 Reflexões

Uma reflexão é uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que aplica cada ponto na sua imagem simétrica em relação a algum ponto ou reta fixada. Em torno do eixo  $x$ , temos a seguinte interpretação geométrica:

Figura 10 – Reflexão em torno do eixo  $x$ .

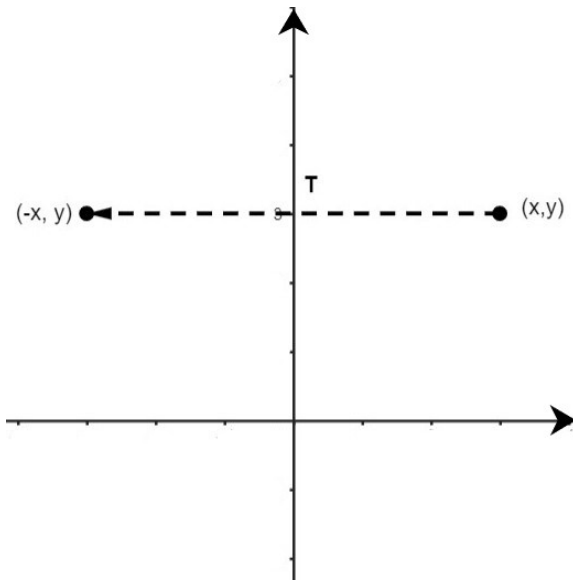


Fonte: Produzido pela autora.

Pode ser representada por  $T(x, y) = (x, -y)$  ou em sua forma matricial:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Já em torno do eixo  $y$ , a interpretação geométrica será feita do seguinte modo:

Figura 11 – Reflexão em torno do eixo  $y$ .

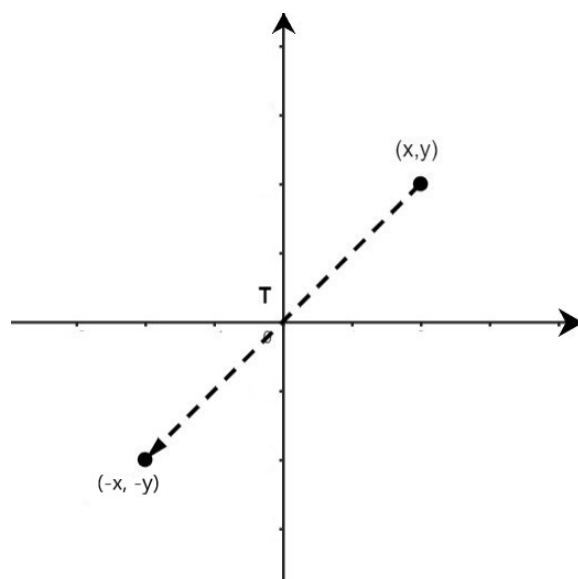
Fonte: Produzido pela autora.

Neste caso, a transformação será representada por  $T(x, y) = (-x, y)$  e na forma matricial por:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Em torno da origem, temos

Figura 12 – Reflexão em torno da origem.



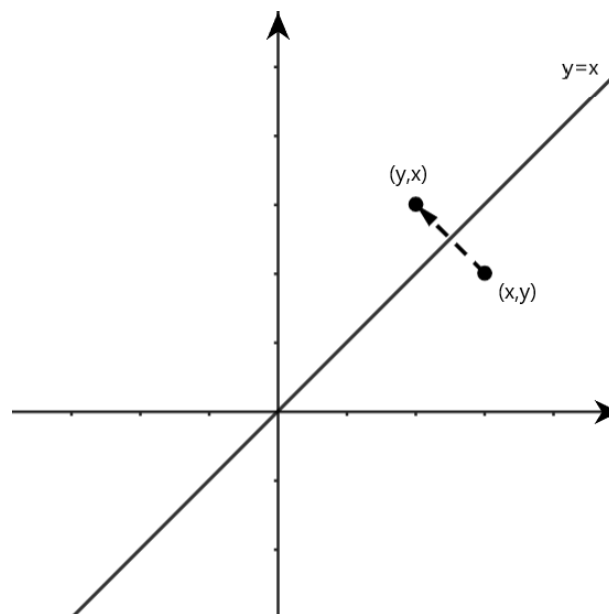
Fonte: Produzido pela autora.

Pode ser representada por  $T(x, y) = (-x, -y)$ , ou ainda, na forma matricial

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Por fim, na Figura 13 temos a transformação em torno da reta  $y = x$ :

Figura 13 – Reflexão em torno da reta  $y = x$ .



Fonte: Produzido pela autora.

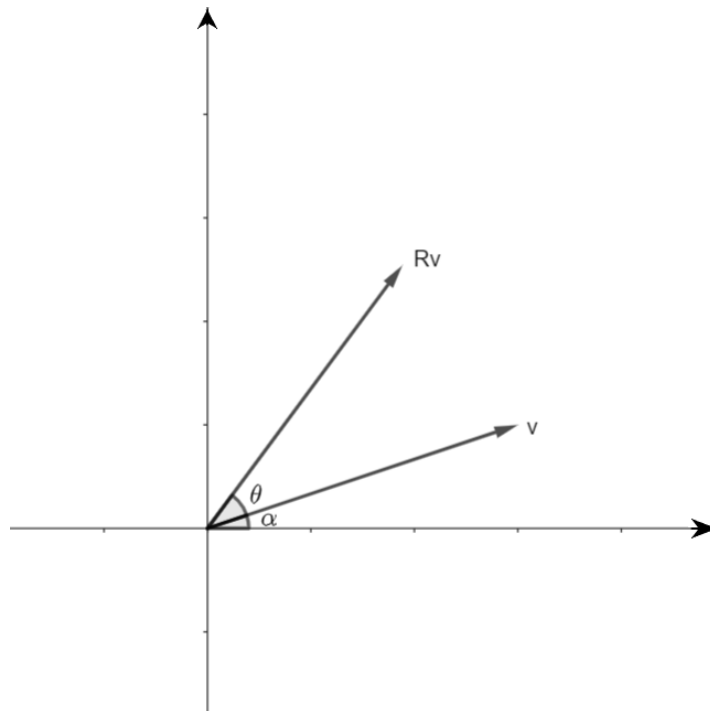
Pode ser representada por  $T(x, y) = (y, x)$  ou escrevendo na forma matricial

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

## 1.5 Rotação

Uma rotação no plano em torno da origem por um ângulo  $\theta$  é uma transformação linear  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que faz corresponder a cada  $v = (x, y)$  o vetor  $R_v = (x', y')$ . Observe a seguinte figura:



Figura 14 – Rotação por um ângulo  $\theta$ .

Fonte: Produzido pela autora.

Note que,

$$x = |v| \cos \alpha \text{ e } y = |v| \sin \alpha$$

O ângulo da rotação  $Rv$  com o eixo  $x$  será dado por  $\alpha + \theta$ , logo

$$x' = |v| \cos(\alpha + \theta) \text{ e } y' = |v| \sin(\alpha + \theta)$$

Como sabemos,

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta,$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \cos \theta.$$

Substituindo o valor de  $\cos(\alpha + \theta)$  em  $x'$ , temos:

$$\begin{aligned} x' &= |v| \cos(\alpha + \theta) \\ &= |v|(\cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta) \\ &= |v| \cos \alpha \cdot \cos \theta - |v| \sin \alpha \cdot \sin \theta \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta. \end{aligned}$$

De maneira análoga, substituindo o valor de  $\sin(\alpha + \theta)$  em  $y'$ :

$$\begin{aligned} y' &= |v| \sin(\alpha + \theta) \\ &= |v|(\cos \alpha \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \cos \theta) \\ &= |v| \cos \alpha \cdot \sin \theta + |v| \sin \alpha \cdot \cos \theta \\ &= x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Portanto, a rotação de ângulo  $\theta$  pode ser representada por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

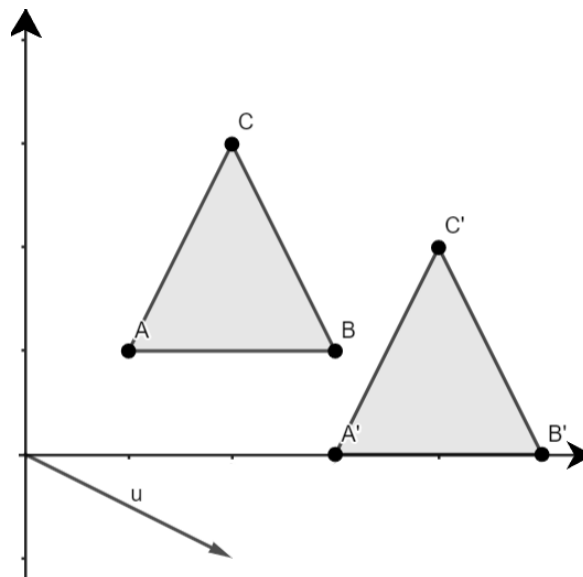
Ou na forma matricial,

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

## 1.6 Translação

Sejam  $u$  e  $v$  vetores do plano tais que  $v = (x, y)$  e  $u = (e, f)$ . A translação é uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x + e, y + f)$ . Na Figura 15, temos a translação do triângulo ABC na direção do vetor  $u = (2, -1)$ .

Figura 15 – Translação na direção de  $u$ .



Fonte: Produzido pela autora.

Podemos representar esta transformação na forma matricial:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar que esta transformação não é linear quando  $(e, f) \neq (0, 0)$ , pois não satisfaz as condições de linearidade. De fato, sejam  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ , temos

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \\ &= (x_1 + x_2 + e, y_1 + y_2 + f) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (e, f) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(u) + T(v) &= T[(x_1, y_1)] + T[(x_2, y_2)] \\ &= (x_1 + e, y_1 + f) + (x_2 + e, y_2 + f) \\ &= (x_1 + x_2 + 2e, y_1 + y_2 + 2f) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + 2(e, f) \end{aligned}$$

Vemos que  $T$  não preserva a soma se  $(e, f)$  é diferente do vetor nulo, logo a translação não é linear. No entanto, esta transformação é um movimento útil para deslocar figuras no plano devido a sua simplicidade.

Apresentaremos agora a definição de transformações afins no plano.

**Definição 1.5.** Uma *transformação afim no plano* é uma aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  representada por  $T(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$ . É a composição de uma transformação linear  $S_1(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  com uma translação  $S_2(x, y) = (x + e, y + f)$ . Na forma matricial:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Como as transformações afins são especificadas pelos seis parâmetros  $a, b, c, d, e, f$ , serão necessárias seis equações lineares para determinar univocamente uma transformação afim dada. Os parâmetros  $a, b, c, d$  determinam rotação, escala e distorção e os parâmetros  $e, f$  determinam a translação.

**Teorema 1.6.** *Existe uma única transformação afim que aplica três pontos não colineares  $P_1, P_2, P_3$  a três pontos  $Q_1, Q_2, Q_3$ .*

*Demonstração.* Sejam  $P_i(x_i, y_i)$  e  $Q_i(X_i, Y_i)$  com  $i = 1, 2, 3$ . Queremos encontrar os parâmetros  $a, b, c, d, e, f$  tais que  $T(x_i, y_i) = (X_i, Y_i)$ . Isto nos diz que,

$$ax_i + by_i + e = X_i,$$

$$cx_i + d_i + f = Y_i,$$

com  $i = 1, 2, 3$ . Note que, os parâmetros serão solução dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + e = X_1 \\ ax_2 + by_2 + e = X_2 \\ ax_3 + by_3 + e = X_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} cx_1 + dy_1 + f = Y_1 \\ cx_2 + dy_2 + f = Y_2 \\ cx_3 + dy_3 + f = Y_3 \end{cases}$$

e os sistemas estão sob a mesma matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que  $\det A \neq 0$ , pois  $P_1, P_2$  e  $P_3$  não estão alinhados. Com efeito, os três pontos são colineares se, e somente se os vetores

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

são paralelos e isto acontece se o seguinte determinante é nulo:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Calculando o determinante de  $A$  e subtraindo a primeira linha da segunda e da terceira, segue que

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Portanto,  $\det A = 0$  quando os pontos são colineares. Caso  $\det A \neq 0$ , os sistemas têm solução única.  $\square$

A compressão através de sistemas de funções iteradas consiste em aplicar a cada região do fractal uma transformação afim. Prosseguindo dessa forma, obtemos cópias reduzidas da imagem que nos permitem descrevê-la por inteiro através de um número finito de imagens fractais. O método do teorema anterior pode ser utilizado para encontrar as transformações que descrevem os fractais. Para tanto, é preciso especificar os eixos coordenados e medir as coordenadas dos pontos  $P_i$  e  $Q_i$  e assim resolver o sistema associado, porém em alguns casos as transformações são evidenciadas por construção.

## 2 Espaços métricos

Neste capítulo vamos estudar o conceito de métrica (ou distância) e suas principais propriedades em um conjunto  $M$ . Estamos familiarizados com este conceito em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  e alguns até em  $\mathbb{R}^n$ , porém veremos este conceito de forma mais geral, fundamentados em (LIMA, 2014).

### 2.1 Definição e exemplos

**Definição 2.1.** Uma *métrica* num conjunto  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$  chamado distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

- d1.  $d(x, x) = 0$ ;
- d2. Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ;
- d3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- d4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**Definição 2.2.** Um *espaço métrico* é um par  $(M, d)$  onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $M$ .

Vejamos agora alguns exemplos de espaços métricos.

**Exemplo 2.3.** A métrica "zero-um".

Seja  $M$  um conjunto qualquer. Podemos definir a função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Esta função é uma métrica e a verificação é imediata. Podemos concluir que qualquer conjunto  $M$  munido da métrica zero-um é um espaço métrico.

**Exemplo 2.4.** A métrica induzida.

Seja  $M$  um espaço métrico e  $d$  uma métrica em  $M$ . Qualquer subconjunto  $S \subset M$  pode ser definido como um espaço métrico. Basta usar entre os elementos de  $S$  a mesma distância que possuíam em  $M$ , isto é, considerar a restrição de  $d$  a  $S \times S$ . Nesses termos, diz-se que  $S$  é um *subespaço* de  $M$  e  $d$  é *induzida* pela métrica de  $M$ .

**Exemplo 2.5.** A reta  $\mathbb{R}$ .

Seja  $M = \mathbb{R}$  e considere a função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d(x, y) = |x - y|$ . Usando as propriedades elementares do módulo de um número real, mostraremos que  $d$  satisfaz as quatro propriedades que definem uma métrica.

Sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

d1) Para  $x = y$ , é imediato que  $d(x, y) = |x - y| = 0$ ;

d2) Para  $x \neq y$ , é imediato que  $d(x, y) = |x - y| > 0$ ;

d3) A simetria é válida, pois  $d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$ ;

d4) Pela desigualdade triangular,  $|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|$  logo  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Concluimos que o par  $(\mathbb{R}, d)$  é um espaço métrico. A função  $d$  é denominada a métrica usual da reta.

**Exemplo 2.6.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  pontos de  $\mathbb{R}^n$ , onde cada uma das coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  é um número real. A distância entre os pontos  $x$  e  $y$  pode ser definida das seguintes formas:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2};$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As funções  $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são métricas.

As propriedades que definem uma métrica são imediatas para  $d'$  e  $d''$ . Mostraremos que são válidas para a função  $d$ .

d1) Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 0.$$

d2) Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , se  $x \neq y$  então, para algum  $i$ ,  $x_i \neq y_i$ , logo

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0.$$

d3) Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

d4) Esta propriedade decorre da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a qual afirma que para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Isto é,

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

A demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser encontrada em (LIMA, 2014).

Continuando, para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\begin{aligned} d[(x, z)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \cdot (y_i - z_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d[(x, z)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right)^2 \\ &= [d(x, y) + d(y, z)]^2. \end{aligned}$$

Então,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  e concluímos que  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Espaços métricos completos

Para prosseguir o estudo, precisaremos da noção de bolas abertas e fechadas. Sendo assim, definimos:

**Definição 2.7.** Seja  $a$  um ponto no espaço métrico  $M$  e dado  $r > 0$  real. A *bola aberta* de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ . Ou seja, o conjunto

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

A *bola fechada* de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

**Definição 2.8.** Uma sequência  $(x_n)$  no espaço métrico  $M$  é dita *limitada* quando existe  $c > 0$  tal que  $d(x_m, x_n) \leq c$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , ou seja, quando o conjunto dos seus termos é limitado.

**Definição 2.9.** Seja  $(x_n)$  uma sequência no espaço métrico  $M$ . O ponto  $a \in M$  é denominado *limite* de  $(x_n)$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, pode-se obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Quando  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$  existir, diremos que  $(x_n)$  é *convergente*.

**Proposição 2.10.** *Toda sequência convergente é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  num espaço métrico  $M$ . Tomando  $\varepsilon = 1$ , obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; 1).$$

Logo o conjunto dos valores da sequência está contido em  $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$ , que são dois conjuntos limitados.  $\square$

A recíproca da proposição anterior não é verdadeira. Por exemplo, a sequência  $(x_n) = (-1)^n$  em  $\mathbb{R}$  é limitada porém não é convergente.

**Proposição 2.11.** *Se  $\lim x_n = a$  então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para  $a$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$ . Existe também  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{k_0} > n_0$ . Logo

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a.$$

$\square$

**Definição 2.12.** Uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$  chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

De maneira equivalente, podemos mostrar que uma sequência é de Cauchy ao chamar de  $n$  o menor dos números da definição acima e escrever o índice  $m = n + p$  com  $p \in \mathbb{N}$ . Em outros termos, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ . Isto significa que os termos de uma sequência de Cauchy aproximam-se uns dos outros à medida que cresce o índice  $n$ .

**Proposição 2.13.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*



*Demonstração.* Seja  $\lim x_n = a$  num espaço métrico  $M$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2$ . Se tomarmos  $m, n > n_0$  teremos  $d(x_m, a) < \varepsilon/2$  e  $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ , logo

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,  $(x_n)$  é de Cauchy. □

A recíproca da proposição anterior não é válida, ou seja, uma sequência de Cauchy em  $M$  pode não convergir em  $M$ . Considere, por exemplo, a sequência de números racionais  $x_n = (1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; \dots)$  com  $\lim x_n = \sqrt{2}$ . Esta sequência é de Cauchy mas não converge em  $\mathbb{Q}$ .

**Proposição 2.14.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy num espaço métrico  $M$ . Para  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$ . Logo o conjunto  $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado e possui diâmetro  $\leq 1$ . Como  $\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$  também é limitado, segue que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

é limitado. Isso conclui a demonstração. □

Nem toda sequência limitada é de Cauchy. A sequência dada por  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  em  $\mathbb{R}$  é um exemplo. Esta sequência, embora limitada, não é de Cauchy já que  $d(x_n, x_{n+1}) = 1$  para todo  $n$ .

**Definição 2.15.** Diz-se que o espaço métrico  $M$  é *completo* quando toda sequência de Cauchy em  $M$  é convergente.

Como vimos anteriormente, algumas sequências de Cauchy não são convergentes no espaço  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, portanto este espaço não é completo. Vejamos então alguns exemplos de espaços métricos completos:

1. Todo espaço  $M$  munido da métrica zero-um, pois nesse espaço toda sequência de Cauchy é convergente à partir de algum termo.
2. A reta real, com a distância proveniente do módulo.
3.  $\mathbb{R}^n$  com a distância euclidiana.
4. Seja  $K$  o conjunto de todos os conjuntos fechados e limitados (compactos) de  $\mathbb{R}^2$ . Munido da distância de Hausdorff, que será definida na seção 2.5,  $K$  é um espaço métrico completo.

## 2.3 Sistemas de funções iteradas

Antes de definir o sistema de funções iteradas, precisamos entender a definição de contração, pois estes conceitos estão interligados.

**Definição 2.16.** Uma transformação afim  $f : V \rightarrow V$  será uma *contração* se existir  $k \in [0, 1)$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

para quaisquer  $x, y \in V$ . Em outras palavras, a distância euclidiana entre a imagem de dois pontos pela transformação afim é estritamente menor do que a distância euclidiana original entre estes pontos.

Não é difícil verificar que toda contração é (uniformemente) contínua, pois dados  $a \in M$  e  $\varepsilon > 0$  quaisquer, tomando  $\delta = \varepsilon$  obtemos

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq k \cdot d(x, a) < d(x, a) < \delta = \varepsilon.$$

**Definição 2.17.** Denominamos *sistema de funções iteradas* (SFI) um conjunto de contrações afins  $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  definidas em um espaço métrico completo.

**Definição 2.18.** O *atrator* de um sistema de funções iteradas  $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  será o único objeto geométrico  $A$  tal que  $A = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_m(A)$ . Se tivermos um fractal  $A$  representado por uma união de contrações afins aplicadas nele mesmo e que satisfaz  $W(A) = A$ , então o conjunto  $A$  é um *ponto fixo* do operador  $W$ .

No Capítulo 3 mostraremos de maneira prática que dado um conjunto das contrações afins  $\{T_1, \dots, T_m\}$ , ou seja, um SFI, podemos construir um operador  $W$  que atua num subconjunto  $C$  do plano mapeando-o em outro subconjunto  $W(C)$ , da maneira que segue:

$$W(C) = T_1(C) \cup T_2(C) \cup \dots \cup T_m(C) \tag{2.1}$$

Mostraremos no Teorema 2.28 que  $W$  é uma contração, e isso garante a existência e unicidade do conjunto  $A$  que chamamos de atrator.

## 2.4 Pontos fixos

Nesta seção, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, um resultado acerca de espaços métricos completos que possui diversas aplicações na Matemática, sendo uma das mais clássicas na prova da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias (EDO's) satisfazendo uma condição de Lipschitz. Primeiramente vamos definir um ponto fixo de uma aplicação em um espaço métrico  $M$ .

**Definição 2.19.** Um *ponto fixo* de uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  é um ponto  $x \in M$  tal que  $f(x) = x$ .

**Teorema 2.20.** (*Teorema do ponto fixo de Banach*). Se  $M$  é um espaço métrico completo, toda contração  $f : M \rightarrow M$  possui um único ponto fixo em  $M$ . Mais precisamente, se escolhermos um ponto  $x_0 \in M$  qualquer e pusermos  $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$  a sequência  $(x_n)$  converge em  $M$  e  $a = \lim x_n$  é o único ponto fixo de  $f$ .

*Demonstração.* Iniciaremos provando a unicidade do ponto fixo de  $f$ . Suponha que  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ . Como  $f$  é uma contração, segue que

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k \cdot d(a, b); 0 \leq k < 1.$$

Então,

$$(1 - k) \cdot d(a, b) \leq 0.$$

Como  $1 - k > 0$ , podemos concluir que  $d(a, b) = 0$ , ou seja,  $a = b$ .

Agora precisamos provar a existência de  $a$ . Afirmamos que  $(x_n)$  é de Cauchy em  $M$ . Primeiro, note que

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1), \\ d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq k \cdot d(x_1, x_2) \leq k^2 \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Generalizando, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k \cdot d(x_{n-1}, x_n)$$

Portanto,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para quaisquer  $n, p \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq k^n \cdot d(x_0, x_1) + k^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) + \dots + k^{n+p-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= [k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &= k^n [1 + k + \dots + k^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n \cdot \frac{1}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1) = \frac{k^n}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ , então para  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  resulta em

$$|k^n - 0| = |k^n| < \frac{\varepsilon(1 - k)}{d(x_0, x_1)}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \frac{\varepsilon(1-k)}{1-k} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\varepsilon(1-k)}{1-k} \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{d(x_0, x_1)} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por fim, perceba que como  $M$  é completo e  $(x_n)$  é de Cauchy, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  e afirmamos que  $a$  é o ponto fixo de  $f$ . Pelo fato de  $f$  ser contínua, a imagem de uma sequência convergente  $(x_n)$  com limite  $a$  também é convergente e possui limite  $f(a)$ . Assim,

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Portanto,  $f$  possui um único ponto fixo. □

O teorema do ponto fixo de Banach prova imediatamente tanto a existência quanto a unicidade do atrator  $A$  de um sistema de funções iteradas.

## 2.5 A distância de Hausdorff

A prova do Teorema 2.20 usa a definição de métrica como ferramenta para discutir convergência e a proximidade entre dois elementos de  $M$ . Fundamentados em (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015), queremos discutir nesta seção a noção de proximidade entre dois conjuntos  $B_1$  e  $B_2$ . Primeiramente, vamos definir a distância entre um ponto e um conjunto.

**Teorema 2.21.** *Se  $M$  é compacto, toda função real contínua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em  $M$ . Mais precisamente, existem  $x_0, x_1 \in M$  tais que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para qualquer  $x \in M$ .*

*Demonstração.* O Teorema de Weierstrass será apenas enunciado, pois este teorema garante a existência dos valores mínimos que vamos estudar adiante. A sua demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 2014). □

**Definição 2.22.** Seja  $B$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $v \in \mathbb{R}^2$ . A distância de  $v$  ao subconjunto  $B$  será definida como o número real

$$d(v, B) = \min_{w \in B} d(v, w)$$

Quando pensamos na quantificação da distância entre dois conjuntos, queremos encontrar uma maneira de evidenciar quando dois conjuntos estão a uma distância  $\varepsilon$  um do outro. Basicamente, queremos que

$$d_H(B_1, B_2) < \varepsilon \iff (B_1 \subset B_2(\varepsilon), B_2 \subset B_1(\varepsilon)).$$

Em que

$$B_1(\varepsilon) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists w \in B_1; d(v, w) < \varepsilon\},$$

$$B_2(\varepsilon) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists w \in B_2; d(v, w) < \varepsilon\}.$$

Essas ideias ajudam na compreensão da distância de Hausdorff, a qual afirma que

**Definição 2.23.** A distância de Hausdorff entre dois subconjuntos compactos  $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^2$ , denotada por  $d_H(B_1, B_2)$ , será dada por:

$$\max \left( \max_{v \in B_1} d(v, B_2), \max_{w \in B_2} d(w, B_1) \right)$$

Como os subconjuntos  $B, B_1, B_2$  são compactos, o Teorema de Weierstrass 2.21 garante que os máximos existam. Além disso, como

$$\max(a, b) < \varepsilon \iff (a < \varepsilon, b < \varepsilon),$$

temos

$$d_H(B_1, B_2) < \varepsilon$$

se, e somente se

$$\max_{v \in B_1} d(v, B_2) < \varepsilon \text{ e } \max_{w \in B_2} d(w, B_1) < \varepsilon.$$

O que, por sua vez, acontece se

$$B_1 \subset B_2(\varepsilon) \text{ e } B_2 \subset B_1(\varepsilon).$$

**Teorema 2.24.** Seja  $K$  o conjunto de todos os subconjuntos compactos do plano. Então a distância de Hausdorff sobre  $K$  é uma métrica. Além disso, munido desta distância,  $K$  é um espaço métrico completo.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em (BARNESLEY, 1993). □

Tomando o operador  $W : K \rightarrow K$ , definido em 2.1. Para aplicar o Teorema do ponto fixo de Banach 2.20, devemos mostrar que  $W$  é uma contração. Antes iremos definir o fator de contração  $r$ .

**Definição 2.25.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma contração afim. Então,

- i. Um número real  $r \in (0, 1)$  é um fator de contração para  $T$  se, para todo  $v, w \in \mathbb{R}^2$  tivermos

$$d(T(v), T(w)) \leq rd(v, w).$$

ii. Um fator de contração  $r$  é *exato* se, para todo  $v, w \in \mathbb{R}^2$  tivermos

$$d(T(v), T(w)) = rd(v, w).$$

É importante destacar que apenas transformações afins cuja parte linear é composição de uma homotetia, rotação ou reflexão ao redor de uma reta possuem fatores de contração exatos. Enunciaremos dois lemas a respeito da distância de Hausdorff que auxiliam na demonstração do Teorema 2.28.

**Lema 2.26.** *Sejam  $B, C, D, E \in K$  subconjuntos compactos do plano e  $K$  um espaço métrico completo munido da distância de Hausdorff. Então,*

$$d_H(B \cup C, D \cup E) \leq \max(d_H(B, D), d_H(C, E)).$$

**Lema 2.27.** *Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma contração afim com fator de contração  $r \in (0, 1)$ , a aplicação  $T : K \rightarrow K$ , definida por*

$$T(B) = \{T(v) : v \in B\}$$

*é uma contração em  $K$  com o mesmo fator de contração  $r$ .*

As demonstrações dos lemas anteriores podem ser encontradas em (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015).

**Teorema 2.28.** *Seja  $\{T_1, \dots, T_m\}$  um sistema iterado de funções tal que  $T_i$  possui fator de contração  $r_i \in (0, 1)$ . Então, o operador  $W$ , definido em 2.1, é uma contração com fator  $r = \max(r_1, \dots, r_m)$ .*

*Demonstração.* Vamos provar por hipótese de indução. Mostraremos que se  $T_i$  com  $i = 1, \dots, m$  são contrações com fator de contração  $r_i$ , então  $W$  é uma contração com fator  $r = \max(r_1, \dots, r_m)$ . O caso  $m = 1$  decorre do Lema 2.27. Dados os conjuntos  $B$  e  $C$ , sob as condições do Teorema 2.24, segue que se  $m = 2$ ,  $W(B) = T_1(B) \cup T_2(B)$ .

$$\begin{aligned} d_H(W(B), W(C)) &= d_H(T_1(B) \cup T_2(B), T_1(C) \cup T_2(C)) \\ &\leq \max [d_H(T_1(B) \cup T_2(B)), d_H(T_1(C) \cup T_2(C))] \\ &\leq \max (r_1 d_H(B, C), r_2 d_H(B, C)) \\ &= \max (r_1, r_2) d_H(B, C), \end{aligned}$$

ao aplicar os Lemas 2.26 e 2.27 sucessivamente. Suponha agora que o resultado seja válido para um sistema iterado com  $m$  funções, vamos mostrar que também é válido para  $m + 1$ , ou seja,

$W(B) = T_1(B) \cup \dots \cup T_{m+1}(B)$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 d_H(W(B), W(C)) &= d_H(T_1(B) \cup \dots \cup T_{m+1}(B), T_1(C) \cup \dots \cup T_{m+1}(C)) \\
 &= d_H\left(\left(\bigcup_{i=1}^m T_i(B)\right) \cup T_{m+1}(B), \left(\bigcup_{i=1}^m T_i(C)\right) \cup T_{m+1}(C)\right) \\
 &\leq \max\left(d_H\left(\bigcup_{i=1}^m T_i(B), \bigcup_{i=1}^m T_i(C)\right), d_H(T_{m+1}(B), T_{m+1}(C))\right) \\
 &\leq \max(\max(r_1, \dots, r_m)d_H(B, C), r_{m+1}d_H(B, C)) \\
 &\leq \max(r_1, \dots, r_{m+1})d_H(B, C)
 \end{aligned}$$

□

O Teorema 2.28 garante que, independente do conjunto compacto  $B$  em  $\mathbb{R}^2$ , a distância de Hausdorff decrescerá a medida que  $n$  cresce, já que

$$d_H(W^n(B), W^{n+1}(B)) \leq r d_H(W^{n-1}(B), W^n(B)) \leq \dots \leq r^n d_H(B, W(B)),$$

com  $r \in (0, 1)$ . No entanto, isso não permite concluir nada a respeito da distância entre  $B$  e o atrator  $A$ . Nesse sentido, (BARNSELY, 1993) propôs o seguinte teorema:

**Teorema 2.29.** (Teorema da colagem de Barnsley). *Seja  $\{T_1 \dots T_m\}$  um sistema iterado de funções com fator de contração  $r \in (0, 1)$  e atrator  $A$ . Considere o conjunto  $B$  e  $\varepsilon > 0$  de modo que*

$$d_H(B, T_1(B) \cup \dots \cup T_m(B)) \leq \varepsilon.$$

Então,

$$d_H(B, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-r}.$$

*Demonstração.* Usando parte da prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach para estimar a distância  $d_H(B, W^n(B))$  e a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
 d_H(B, W^n(B)) &\leq d_H(B, W(B)) + \dots + d_H(W^{n-1}(B), W^n(B)) \\
 &\leq (1 + r + \dots + r^{n-1})d_H(B, W(B)) \\
 &\leq \frac{1-r^n}{1-r}d_H(B, W(B)) \\
 &\leq \frac{1}{1-r}d_H(B, W(B)) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{1-r}.
 \end{aligned}$$

Considere  $\mu > 0$  arbitrário. Como  $W^n(B) \rightarrow A$ , existe  $N$  tal que, se  $n > N$ ,  $d_H(W^n(B), A) < \mu$ . Logo,

$$d_H(B, A) \leq d_H(B, W^n(B)) + d_H(W^n(B), A) < \frac{\varepsilon}{1-r} + \mu.$$

Como a desigualdade vale para todo  $\mu > 0$ , concluímos que

$$d_H(B, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - r}$$

□

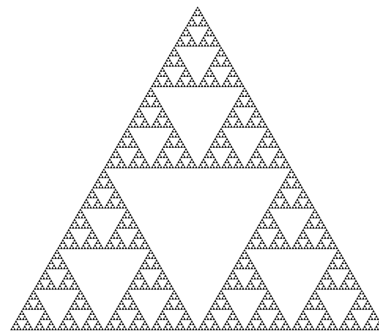
O Teorema da colagem de Barnsley é geralmente aplicado para fotografias reais, quando não existe correlação entre as contrações afins do SFI. Por exemplo, se tivéssemos uma fotografia real  $B$  e não existe correlação entre as contrações  $\{T_1, \dots, T_m\}$  tais que  $B = T_1(B) \cup \dots \cup T_m(B)$ . O conjunto  $B$  será aproximadamente igual a algum conjunto  $C$  resultante do SFI. Se quisermos construir o atrator  $A$  do SFI usando algum *software* e se  $d_H(B, C) \leq \varepsilon$ , o Teorema da colagem de Barnsley garantirá que  $A$  se assemelha ao conjunto  $B$ .



### 3 Aplicações

Considere um triângulo de Sierpinski equilátero com lados medindo 1, como na Figura 16. A construção deste fractal consiste, de maneira resumida, em determinar os pontos médios dos lados e remover o triângulo central dos quatro triângulos resultantes quando são unidos os pontos médios.

Figura 16 – Triângulo de Sierpinski.



Fonte: ([WIKIMEDIA, 2023b](#)).

Note que um triângulo  $A$  é a união de três cópias menores dele mesmo. Assim,  $A = T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A)$ . Supondo que a origem está situada no vértice inferior esquerdo do triângulo, podemos escrever as equações das contrações afins. Nesse caso,

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Isto é,  $T_1$  é a homotetia de razão  $k = \frac{1}{2}$  e  $T_2, T_3$  são composições de  $T_1$  com translações. Como o triângulo possui base e altura medindo 1, então  $T_2$  é  $T_1$  composta com a translação pelo vetor  $u = (\frac{1}{2}, 0)$  e  $T_3$  é a composta de  $T_1$  com a translação pelo vetor  $v = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ . Logo,

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O triângulo de Sierpinski em questão está contido no quadrado  $C_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ . Os conjuntos que representam a construção do triângulo serão dados por:

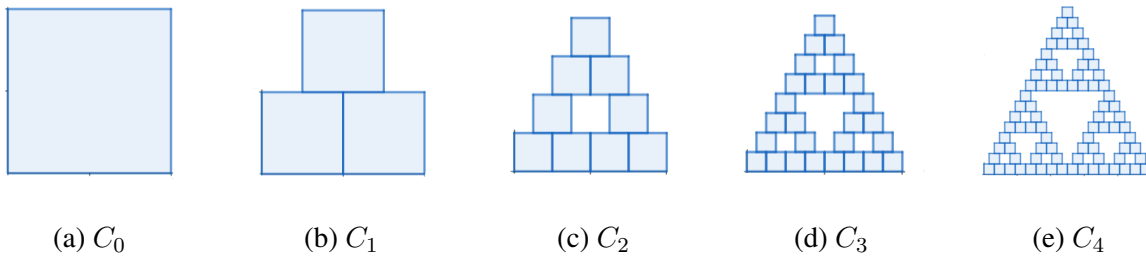
$$C_1 = T_1(C_0) \cup T_2(C_0) \cup T_3(C_0),$$

$$C_2 = T_1(C_1) \cup T_2(C_1) \cup T_3(C_1),$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 C_n &= T_1(C_{n-1}) \cup T_2(C_{n-1}) \cup T_3(C_{n-1}), \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Observe a seguinte figura:

Figura 17 –  $C_0$  e as quatro primeiras iteradas.



Fonte: Produzido pela autora.

Para  $n$  suficientemente grande, o conjunto  $C_n$  assemelha-se ao conjunto  $A$ . O conjunto  $C_n$  é chamado a  $n$ -ésima iterada do conjunto inicial sob o operador

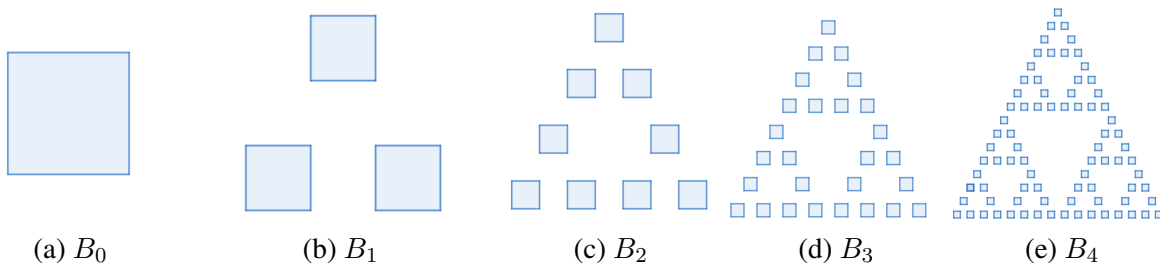
$$C \mapsto W(C) = T_1(C) \cup T_2(C) \cup T_3(C),$$

que mapeia um conjunto  $C$  num conjunto  $W(C)$ . Neste caso usamos o quadrado unitário  $C_0 = [0, 1] \times [0, 1]$  como o conjunto inicial e definimos a sequência  $(C_n)_{n \geq 0}$  usando a recorrência  $C_{n+1} = W(C_n)$ . Analisando a Figura 17, percebemos que o conjunto  $A$  é o limite da sequência  $(C_n)$  porém, se tivéssemos iniciado com qualquer conjunto inicial não vazio diferente de  $C_0$ , por exemplo,

$$B_0 = \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \times \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right],$$

obteríamos a sequência  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  tal que  $B_{n+1} = W(B_n)$  que também converge para  $A$ , logo o limite ainda seria o triângulo de Sierpinski, como mostra a Figura 18:

Figura 18 –  $B_0$  e as quatro primeiras iteradas.



Fonte: Produzido pela autora.

É por esse motivo que  $A$  é um atrator do sistema iterado de funções.

Considere agora o Tapete de Sierpinski como na Figura 1 sob o quadrado unitário do plano  $xy$ . Podemos descrever as iterações deste fractal de modo análogo ao Triângulo de Sierpinski. Nesse caso, o conjunto  $S$  é a união de oito subconjuntos congruentes e não sobrepostos devido ao seu processo de construção, que já foi abordado. Então,  $S = \bigcup T_i(S)$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ .

Tomando a origem novamente no vértice inferior esquerdo, podemos escrever as equações das contrações afins. Sendo assim,  $T_1$  é dada por

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja, a homotetia de razão  $k = 1/3$ . As demais contrações  $T_2, T_3, T_4, \dots, T_8$  são definidas por composições de  $T_1$  com translações, como segue:

$$T_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

com  $i = 2, 3, \dots, 8$ . Os valores de  $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$  são dados pelas seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

O tapete está sob o quadrado  $D_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ , com diferente notação apenas para evitar ambiguidades na descrição dos conjuntos. A Figura 19 representa o quadrado unitário e as duas primeiras iteradas e a construção do fractal será representada por:

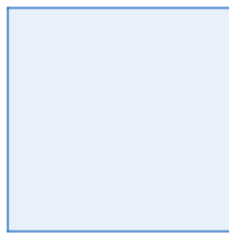
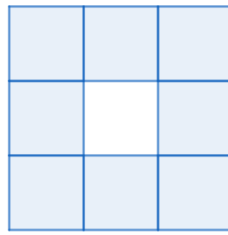
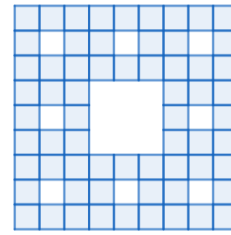
$$D_1 = T_1(D_0) \cup T_2(D_0) \cup T_3(D_0), \dots, T_8(D_0),$$

$$D_2 = T_1(D_1) \cup T_2(D_1) \cup T_3(D_1), \dots, T_8(D_1),$$

⋮

$$D_n = T_1(D_{n-1}) \cup T_2(D_{n-1}) \cup T_3(D_{n-1}), \dots, T_8(D_{n-1})$$

⋮

Figura 19 –  $D_0$  e as duas primeiras iteradas.(a)  $D_0$ (b)  $D_1$ (c)  $D_2$ 

Fonte: Produzido pela autora.

Este processo pode ser adaptado para compressão de imagens reais, caso possuam características fractais. Em seu trabalho, Barnsley observou que em muitos casos, com um SFI adequado, partes maiores de uma imagem se assemelham à suas partes menores. Outro estudo nesse sentido foi feito por (KOMINEK, 1997).

# Conclusão

Os métodos apresentados trazem uma aplicação interessante do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que neste trabalho foi discutida de maneira acessível para o entendimento do leitor. Os conceitos apresentados podem permitir até a abordagem superficial de geometria fractal no ensino médio, aliado ao estudo das transformações geométricas visando desenvolver a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular.

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). ([BRASIL, 2018](#))

Além disso, introduzimos ideias sobre fractais e a sua construção, o que pode auxiliar no estudo de compressão de imagens reais, já que a compressão fractal de imagens consiste em procurar autossimilaridades entre as regiões dessas imagens.



# Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. 10a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. ISBN 978-85-407-0170-0.
- BARNESLEY, M. *Fractals Everywhere*. 2a. ed. San Diego, CA: Academic Press, 1993.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3a. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- FUZZO, R. A.; SANTOS, T. S. d.; FERREIRA, L. *Fractais e o Geogebra: Construindo a curva de Koch*. 2011. In: XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Disponível em: <[https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/1791/992](https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1791/992)>. Acesso em: 15 abril. 2023.
- KOMINEK, J. *Advances in fractal compression for multimedia applications*. [S.l.]: Multimedia Systems 5, 1997. Pp. 255–270.
- LIMA, E. L. *Coordenadas no plano*. 4a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- LIMA, E. L. *Espaços métricos*. 1a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. E-ISBN 978-85-244-0374-3.
- MANDELBROT, B. *Objetos Fractais*. 3a. ed. Lisboa: Gradiva, 1989. Tradução de: Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima.
- ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Compressão de Imagens: Sistemas iterados de funções*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. In: Matemática e Atualidades - Volume 2 (Coleção PROFMAT).
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2a. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- WIKIMEDIA. 2023. Tapete de Sierpinski. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Tapete\\_de\\_Sierpinski](https://pt.wikipedia.org/wiki/Tapete_de_Sierpinski)>. Acesso em: 20 fev. 2023.
- WIKIMEDIA. 2023. Triângulo de Sierpinski. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Triângulo\\_de\\_Sierpinski](https://pt.wikipedia.org/wiki/Triângulo_de_Sierpinski)>. Acesso em: 20 fev. 2023.
- WIKIMEDIA. 2023. Von Koch Curve. In: WIKIMEDIA COMMONS, a midiateca livre. Flórida: Wikimedia Foundation. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von\\_Koch\\_curve.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von_Koch_curve.gif)>. Acesso em: 20 fev. 2023.