

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE DE MEMBRANAS EM CONCRETO ARMADO

DEVELOPMENT OF A COMPUTATIONAL TOOL FOR THE ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE MEMBRANE ELEMENTS

Khrys Kathyllen da Silva de Medeiros¹
Jordilly Reydyson de Barros Silva²

RESUMO

Neste trabalho é estudado o comportamento de membranas de concreto armado, utilizados os modelos *Modified Compression Field Theory* (MCFT) e *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM), sendo esses baseados na solução de sistemas de equações não-lineares formulados com base em equações de equilíbrio, compatibilidade de deformações e os modelos constitutivos dos materiais. Primeiramente, as técnicas foram implementadas em linguagem *Python* e foi utilizado o modelo *Mohr Compatibility Truss Model* (MCTM) como estimativa inicial da solução. Posteriormente, o código computacional foi testado por meio de alguns exemplos e os resultados obtidos foram comparados com soluções numéricas e ensaios experimentais da bibliografia consultada, verificando assim a eficácia do método. Com isso, concluiu-se que ambos os modelos de análise apresentaram bons resultados, porém o MCFT se mostrou mais próximo da realidade, visto que em sua teoria é considerado o enrijecimento do concreto à tração, diferentemente do RA-STM. A implementação desenvolvida é uma abordagem simples, eficaz e de baixo custo computacional, para o auxílio na análise de painéis de concreto armado submetidos a esforços de membrana. Além disso, foi desenvolvida uma interface gráfica, podendo assim ser utilizada por profissionais e estudantes da área de Engenharia Civil independente da familiaridade do usuário com a linguagem computacional empregada. Assim, a ferramenta torna-se uma alternativa acessível em questão de projeto, uma vez que possibilita de forma fácil o teste de várias combinações de propriedades dos materiais para determinar a opção mais viável sem comprometer a produtividade.

Palavras-chave: MCFT; RA-STM; concreto armado; membrana; Python.

ABSTRACT

In this work, the behavior of reinforced concrete membranes is studied using the *Modified Compression Field Theory* (MCFT) and *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM), both based on the solution of non-linear equation systems formulated based on equilibrium equations, strains compatibility, and material constitutive models. Initially, the models were implemented in *Python* programming language, and the *Mohr Compatibility Truss Model* (MCTM) was used as the initial estimate for the solution. Subsequently, the computational

¹ Bacharelanda em Engenharia Civil pela Universidade Federal Rural de Pernambuco – Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, 2023.

² Doutor em Engenharia Civil pela Universidade Federal Rural de Pernambuco, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho.

code was tested through some examples, and the results obtained were compared with numerical solutions from the literature and experimental tests, thus verifying the effectiveness of the method. With this, it was concluded that both analysis models presented good results, but the MCFT technique was closer to reality since it considers the concrete tension stiffening, unlike RA-STM. The developed implementation is a simple, effective, and computationally low-cost approach for assisting in the analysis of reinforced concrete panels subjected to membrane forces. Additionally, a graphical user interface was developed, making it accessible to professionals and students in the field of Civil Engineering, regardless of their familiarity with the programming language used. Therefore, the tool becomes an affordable alternative in terms of design, as it easily allows testing various combinations of material properties to determine the most viable option without compromising productivity.

Keywords: MCFT; RA-STM; reinforced concrete. membrane; python.

INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, uma estrutura se refere a um conjunto de elementos conectados com a finalidade de suportar determinada carga. O projeto e a construção de estruturas devem ser pensados de forma a resistir às diversas solicitações impostas durante sua vida útil e atender a todas as necessidades para as quais foram construídas, satisfazendo condições de segurança, utilização, econômicas, estéticas, ambientais, construtivas e legais (MARTHA, 2010). Para isso, é fundamental que os engenheiros projetistas consigam prever corretamente a resposta das edificações a situações diversas.

A análise estrutural é a etapa do projeto em que o comportamento da estrutura é idealizado, sendo expresso em termos de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos correspondentes.

De maneira geral, é comum realizar a análise global do comportamento de edificações complexas e de larga escala, como plataformas offshore de petróleo, estruturas de pontes, vigas e paredes estruturais por exemplo, por meio de elementos menores e mais simples, como uma forma de facilitar a compreensão e avaliação do desempenho da estrutura como um todo. Exemplos desses elementos são as chapas, sendo essas componentes de superfície plana sujeitas principalmente a

ações contidas em seu plano (NBR 6118:2023).

O Modelo de Campo de Compressão Modificado (*Modified Compression Field Theory* - MCFT) foi introduzido por Vecchio e Collins (1986) como uma técnica precisa e eficaz para calcular a resposta de membranas de concreto armado. Desde então o MCFT tem sido otimizado e simplificado, sendo muito utilizado na engenharia. Dessa forma, com a base teórica do modelo, é possível prever a capacidade de carga, deformação e falha dos elementos, a partir da consideração dos efeitos não-lineares e interações entre o concreto e a armadura de aço.

Além do MCFT, outras técnicas foram desenvolvidas para analisar o comportamento de elementos de concreto armado, como o Modelo de Treliça com Amolecimento e Ângulo Variável (*Rotating-Angle Softened Truss Model* – RA-STM) que foi formulado por Hsu e Mo (1985) e o Modelo de Treliça Linear de Mohr-Coulomb (*Mohr Compatibility Truss Model* – MCTM) apresentado em Hsu e Mo (2010).

O presente trabalho aborda o desenvolvimento de uma ferramenta computacional em *Python*, com interface gráfica. Para isso, inicialmente foi utilizado o ambiente de notebooks colaborativos *Google Colab* (Google, 2023) para a análise de membranas em concreto armado por meio da aplicação do MCFT e do RA-

STM. Como estimativa inicial, foram utilizados os resultados da análise com comportamento linear obtidos pelo MCTM, tendo como base a estratégia de implementação apresentada por Silva e Horowitz (2015), e adotando técnicas de otimização para a solução do problema não-linear. Assim, a principal contribuição desse trabalho é a expansão e adaptação do procedimento apresentado por Silva e Horowitz (2015) para a análise de membranas de concreto originalmente via RA-STM, utilizando o MCFT.

MODELO DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADO - MCFT

O MCFT é um modelo de análise estrutural desenvolvido para prever o comportamento de elementos de membrana de concreto armado. Ele foi proposto como um aprimoramento do anterior Modelo de Campo de Compressão (*Compression Field Theory - CFT*) (MITCHELL; COLLINS, 1974) com o

objetivo de superar algumas limitações desse último e fornecer uma abordagem mais precisa para analisar esses elementos.

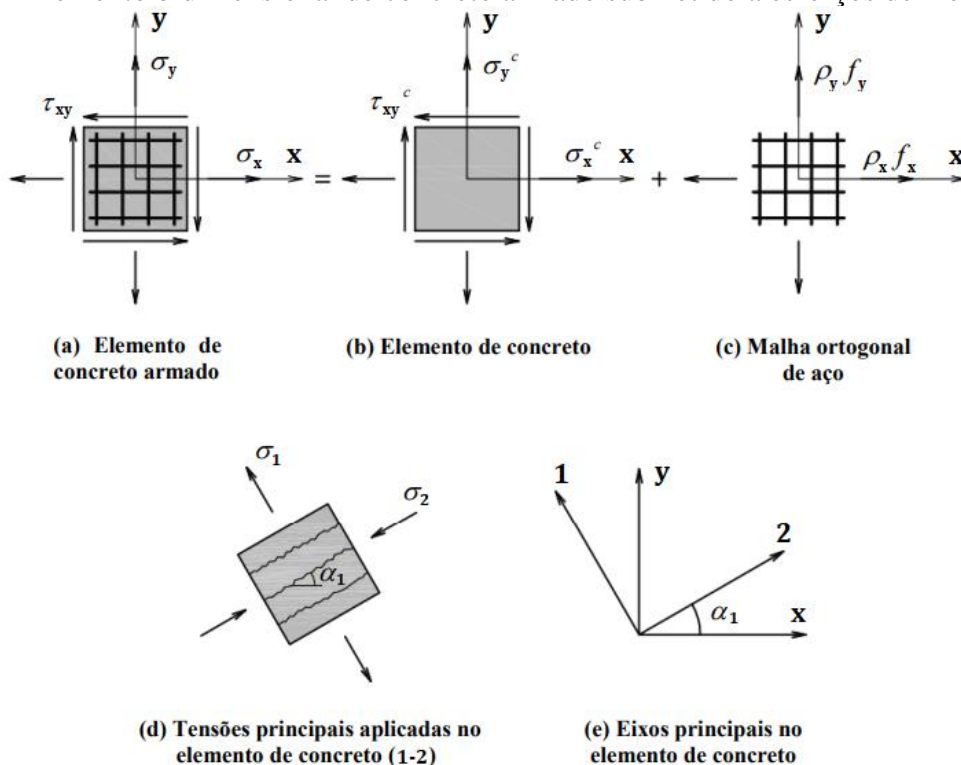
A teoria empregada no MCFT se baseia nos princípios da mecânica das estruturas: condições de equilíbrio, compatibilidade das deformações e relações constitutivas dos materiais.

Condições de equilíbrio

Nessa seção são apresentadas as condições de equilíbrio do MCFT, sendo posteriormente também adaptadas para o RA-STM, de acordo com Silva e Horowitz (2015).

Conforme ilustrado na Figura 1, as tensões em um elemento bidimensional de concreto armado submetido a esforços de membrana (σ_x , σ_y e τ_{xy}) podem ser divididas como uma contribuição das componentes atuantes no concreto (σ_x^c , σ_y^c e τ_{xy}^c) e as atuantes nas armaduras ($\rho_x f_{sx}$ e $\rho_y f_{sy}$), em que o sistema de coordenadas $x - y$ é estabelecido pela a direção das armaduras longitudinais e transversais.

Figura 1 – Elemento bidimensional de concreto armado submetido a esforços de membrana



Fonte: Adaptado de Silva e Horowitz, 2015.

A partir da Figura 1 e baseado nas premissas anteriores, a seguinte equação de equilíbrio pode ser estabelecida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^c \\ \sigma_y^c \\ \tau_{xy}^c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_x f_{sx} \\ \rho_y f_{sy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Nessa equação, σ_x e σ_y são as tensões normais, longitudinais e transversais, respectivamente, e τ_{xy} representa a tensão de cisalhamento. Em relação ao aço, ρ_x e ρ_y designam as taxas de armadura, enquanto f_{sx} e f_{sy} são as tensões correspondentes. No modelo, considera-se que as armaduras resistem apenas a esforços axiais, desprezando assim qualquer possível efeito de pino. Além disso, admite-se a existência de aderência perfeita entre o aço e o concreto.

Como ilustra a Figura 1(e), o ângulo α_1 , conhecido como ângulo variável, relaciona os sistemas de coordenadas x - y e 1 - 2 . Através desse ângulo e das tensões principais de tração e compressão (σ_{c1} e σ_{c2}), é possível definir as componentes dos esforços aplicados ao elemento de concreto (σ_x^c , σ_y^c e τ_{xy}^c). Além disso, o sistema de coordenadas 1 - 2 rotaciona de forma a garantir que a componente de tensão de cisalhamento seja sempre nula nesse eixo, assim sendo, o concreto não contribui nessa componente. Para o modelo em questão, as tensões e deformações admitidas são os valores médios ao longo das fissuras.

Pode-se obter a transformação entre as coordenadas x - y e 1 - 2 para o elemento de concreto a partir do círculo de Mohr das tensões no painel, conforme mostra a Eq. (2), em que c e s representam as funções trigonométricas $\cos(\alpha_1)$ e $\sin(\alpha_1)$, respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^c \\ \sigma_y^c \\ \tau_{xy}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{c2} \\ \sigma_{c1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Considerando a Eq. (1) e a equação de transformação, Eq. (2), pode-se

reescrever as expressões de equilíbrio em função das tensões principais (σ_{c1} e σ_{c2}) e do ângulo variável (α_1), conforme a Eq. (3):

$$\sigma_x = \sigma_{c2}c^2 + \sigma_{c1}s^2 + \rho_x f_x \quad (3a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{c2}s^2 + \sigma_{c1}c^2 + \rho_y f_y \quad (3b)$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_{c1} - \sigma_{c2})sc \quad (3c)$$

Vale destacar que foi adotada uma convenção de sinais para o cisalhamento oposta à formulação original do modelo, de forma a concordar com o RA-STM, discutido posteriormente.

Compatibilidade das deformações

Com a transformação de coordenadas do círculo de Mohr das deformações no painel, as componentes de deformação normais médias e de cisalhamento (ε_x , ε_y e γ_{xy}) podem ser relacionadas com as deformações principais médias de compressão e tração no sistema 1 - 2 (ε_2 e ε_1) e o ângulo variável (α_1) por meio da Eq. (4).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -2sc & 2sc & 2c^2 - 2s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Desenvolvendo essa equação, obtém-se a Eq. (5). Nesse trabalho, admite-se que os sistemas das tensões principais e deformações principais são coincidentes.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 \quad (5)$$

Modelos dos materiais

Nessa seção são discutidos os modelos constitutivos dos materiais utilizados no MCFT.

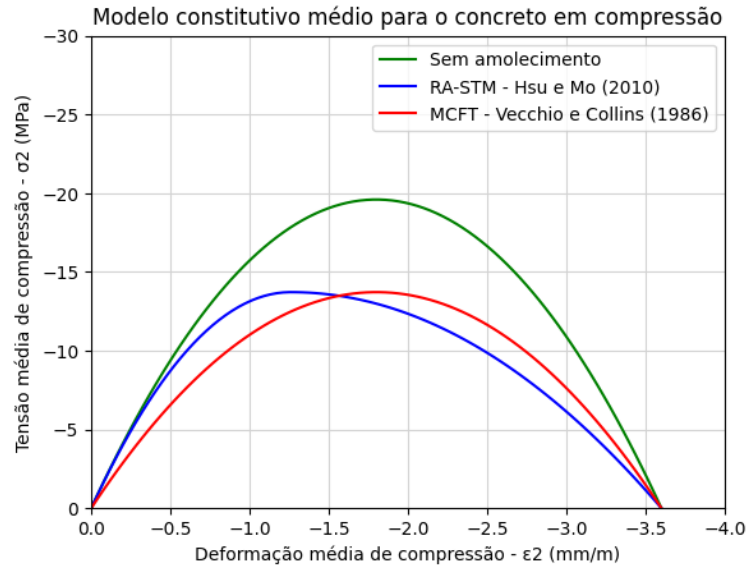
Concreto em compressão

O elemento de concreto pode sofrer amolecimento à compressão quando está suscetível a tensões biaxiais, em que a presença de esforços de tração perpendiculares a esforços de compressão reduz a resistência e a rigidez do concreto

em compressão em comparação com a obtida em ensaios de compressão uniaxiais

(CERQUIDO, 2017), conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Tensão-deformação do concreto em compressão com o efeito do amolecimento



Fonte: A autora, 2023.

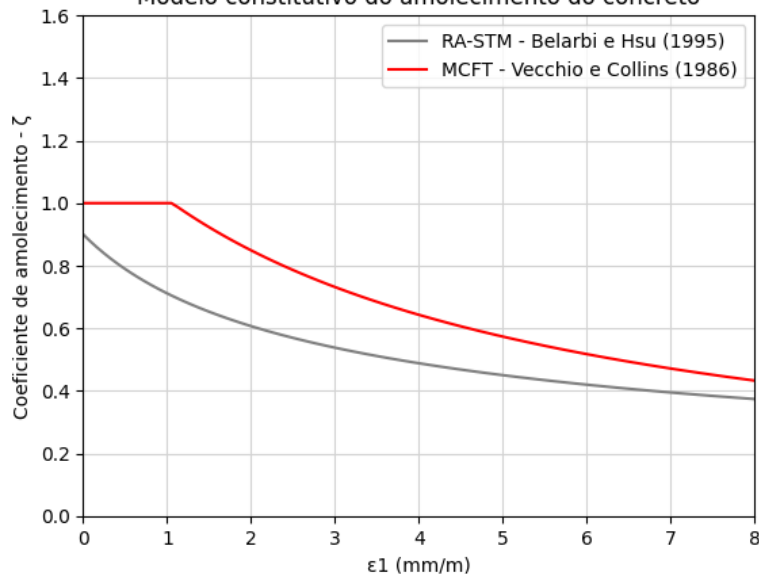
Devido ao amolecimento, é necessário incorporar o coeficiente ζ como uma forma de contabilizar a perda de resistência e rigidez do concreto. Para o MCFT, o coeficiente de amolecimento em questão é dado pela Eq. (6), em que o parâmetro ε_0 representa a deformação relativa à tensão de compressão de pico, geralmente sendo admitida como -2.0 mm/m.

$$\zeta = \frac{1}{0,8 - 0,34 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}, \text{ se } \zeta < 1 \quad (6a)$$

$$\zeta = 1, \text{ se } \zeta > 1 \quad (6b)$$

O efeito do amolecimento no concreto pode ser visualizado por meio da Figura 3, obtida através da Eq. (6).

Figura 3 – Curvas do efeito do amolecimento do concreto
Modelo constitutivo do amolecimento do concreto



Fonte: A autora, 2023.

Na geração do gráfico ilustrado na Figura 2, para possibilitar a visualização do efeito do amolecimento no concreto submetido à compressão, foram utilizados os valores constantes de ζ como 1, 0.5 e 0.5, respectivamente para as curvas: sem amolecimento, proposta por Hsu e Mo (2010), discutida posteriormente, e por Vecchio e Collins (1986).

Por fim, para o MCFT, a relação para determinar a tensão de compressão (σ_{c2}) utilizada foi a apresentada por Vecchio e Collins (1986), dada pela Eq. (7) e ilustrada na Figura 2. Além disso, tem-se que f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto.

$$\sigma_{c2} = \zeta f_{ck} \left(2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad (7)$$

Concreto em tração

Devido à aderência entre o concreto e a armadura de aço, após a fissuração, o material apresenta resistência à tração entre as fissuras. Assim, quando um elemento de concreto armado é submetido a esforços de tração, mesmo depois de fissurar, existe uma resistência à tração média no

concreto, fenômeno conhecido como enrijecimento à tração (*tension stiffening*).

O tensionamento das armaduras provoca um efeito de enrijecimento aparente, contudo, a distribuição dessa rigidez adicional pode variar dependendo de diversos fatores, como a qualidade do concreto, a quantidade de armadura e a aderência entre a armadura e o concreto, por exemplo.

A relação entre a tensão principal de tração do concreto (σ_{c1}) e a deformação principal média de tração (ε_1) é linear antes da fissuração, podendo ser expressa pela Eq. (8), de acordo com Vecchio e Collins (1986).

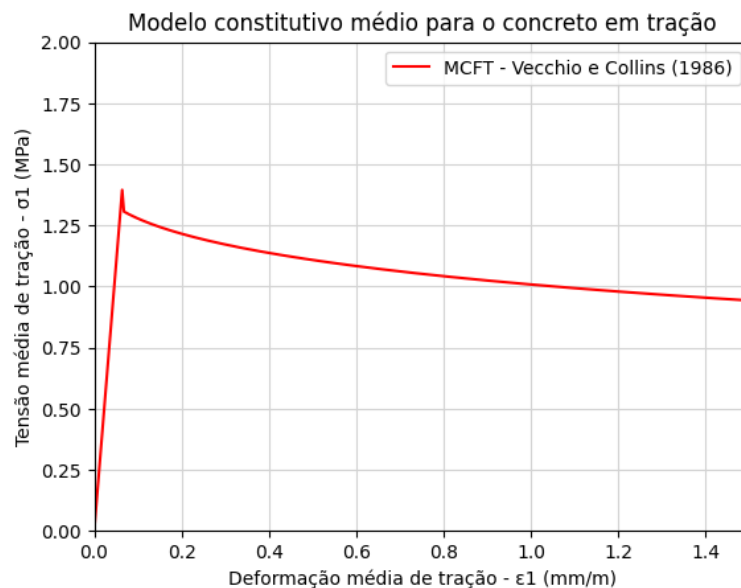
$$\sigma_{c1} = E_c \varepsilon_1 \quad (8)$$

Após a fissuração, é sugerida a Eq. (9), onde f_{cr} representa a resistência à fissuração do concreto.

$$\sigma_{c1} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_1}} \quad (9)$$

Ambas as equações Eq. (8) e Eq. (9) podem ser visualizadas graficamente por meio da Figura 4.

Figura 4 – Curva tensão-deformação do concreto fissurado sob tração



Fonte: A autora, 2023.

Aço em tração e compressão

Originalmente no MCFT foi adotada uma curva de tensão-deformação elasto-plástica perfeita, referente a uma barra de aço, ensaiada à tração uniaxial, descrita pela Eq. (10) e Figura 5. Além disso, por meio da Eq. (10) se pode representar tanto a armadura longitudinal como a transversal, por meio da substituição do índice s por x ou y , em que E_s é o módulo de elasticidade do material, ε_s e ε_{sy} retratam respectivamente a deformação no aço e a deformação de escoamento, o parâmetro f_s e representa a tensão no aço e o f_{sy} a tensão de escoamento.

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & , \text{ para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ f_{sy} & , \text{ para } \varepsilon_s > \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (10)$$

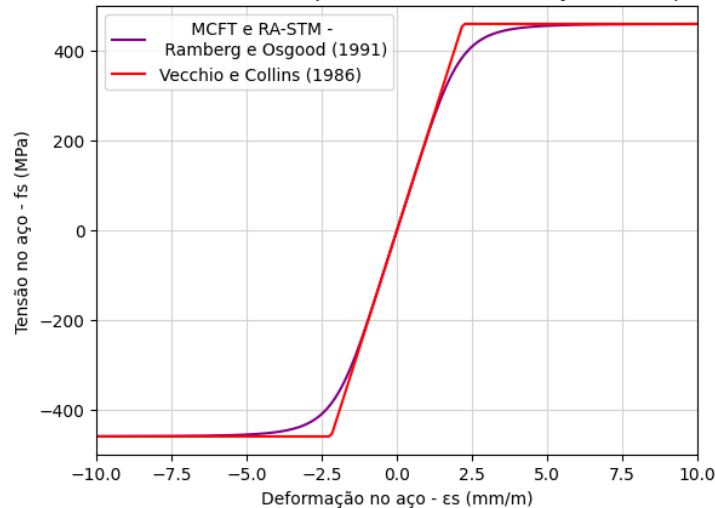
Contudo, para evitar problemas de convergência do método devido à

descontinuidade na primeira derivada no ponto de escoamento do aço, a curva elasto-plástica dada pela Eq. (10) foi regularizada, assim como em Silva e Horowitz (2015) e em Silva (2016), sendo apresentada na Eq. (11), função modificada de Ramberg e Osgood, Collins e Mitchell (1991). Dessa forma, a Eq. (11) e Figura 5 representam a curva compatibilizada utilizada, sendo a constante A adotada como 2×10^{-5} , com base em Silva (2016). Para facilitar a visualização do efeito da regularização da curva elasto-plástica, foi utilizado F como 4 na geração do gráfico, contudo, nos demais cálculos foi admitido como $F = 40$.

$$f_s = E_s \varepsilon_s \left\{ A + \frac{1 - A}{\left[1 + \left[(1 - A) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sy}} \right]^F \right]^{\frac{1}{F}}} \right\} \quad (11)$$

Figura 5 – Curvas tensão-deformação do aço

Modelo constitutivo médio para a armadura em tração ou compressão



Fonte: A autora, 2023

Transmissão de tensões nas fissuras

As fórmulas de tensão e deformação descritas anteriormente empregam valores médios e não fornecem informações a respeito das variações locais.

Segundo Vecchio e Collins (1986), na fissura as tensões de tração na armadura

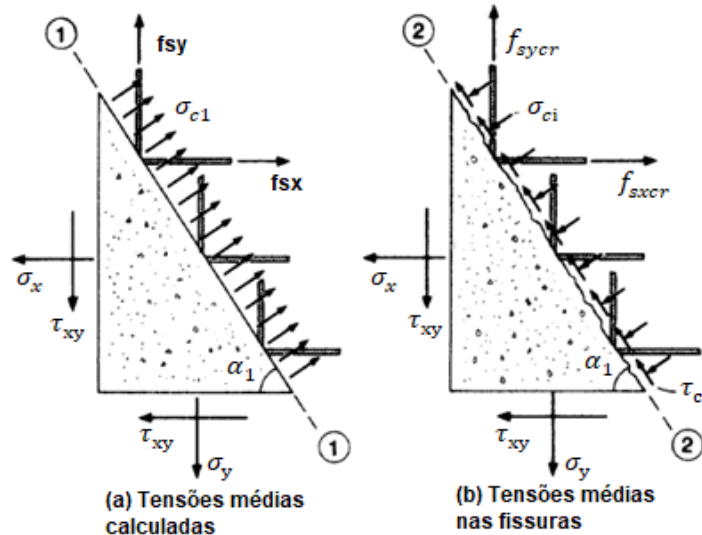
tendem a ser maiores do que os valores médios, enquanto em um ponto intermediário entre as fissuras essas tensões tendem a ser menores do que a média. Além disso, as tensões de tração do concreto apresentam valores nulos na fissura e maiores que a média em um ponto intermediário entre fissuras.

Assim sendo, essas variações locais se mostram importantes uma vez que a capacidade final de um elemento biaxialmente tensionado pode ser governada pela capacidade da armadura em transmitir tensões através de fissuras.

A Figura 6 compara as tensões

médias, Figura 6(a), com as tensões que realmente ocorreriam em um plano com fissuras, Figura 6(b). Por essa figura, tem-se σ_{c1} representando a tensão principal de tração do concreto, f_{sxc} e f_{syc} indicando as tensões na fissura nas direções x e y .

Figura 6 - Comparação entre as tensões médias calculadas e as tensões locais nas fissuras.



Fonte: Adaptado de Vecchio e Collins, 1986.

Para que os conjuntos de tensões mostrados na Figura 6 sejam estaticamente equivalentes, é necessário satisfazer a equação abaixo (WONG, VECCHIO, TROMMELS, 2013), onde $c\alpha_{nx}$ e $c\alpha_{ny}$ são as funções cosseno dos ângulos entre a normal à fissura e a armadura.

$$\sigma_{c1} = \rho_x(f_{sxc} - f_{sx})c\alpha_{nx}^2 + \rho_y(f_{syc} - f_{sy})c\alpha_{ny}^2 \quad (12)$$

Os ângulos α_{nx} e α_{ny} podem ser obtidos por meio do α_1 conforme mostram as equações Eq. (13) e Eq. (14).

$$\alpha_{ny} = \alpha_1 \quad (13)$$

$$\alpha_{nx} = \alpha_{ny} + 90^\circ \quad (14)$$

Já a relação da tensão de cisalhamento nas fissuras é dada pela Eq. (15) Wong, Vecchio e Trommels (2013).

$$\tau_{ci} = \rho_x(f_{sxc} - f_{sx})s\alpha_{nx}c\alpha_{nx} + \rho_y(f_{syc} - f_{sy})s\alpha_{ny}c\alpha_{ny} \quad (15)$$

Além disso, τ_{cimax} pode ser obtido pela Eq. (16), sendo a o tamanho máximo do agregado e w a largura média da fissura, dada pela Eq. (17).

$$\tau_{cimax} = \frac{\sqrt{-f_{ci}}}{0,31+24w/(a+26)} \quad (16)$$

$$w = \varepsilon_1 s_{\alpha 1} \quad (17)$$

O espaçamento médio perpendicular à fissura ($s_{\alpha 1}$) pode ser obtido a partir do espaçamento entre a fissura nas direções x (s_{mx}) e y (s_{my}) e das relações trigonométricas $\cos(\alpha_1)$ e $\sin(\alpha_1)$, conforme a equação abaixo:

$$s_{\alpha 1} = \frac{1}{\frac{c}{s_{mx}} + \frac{s}{s_{my}}} \quad (18)$$

MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO E ÂNGULO VARIÁVEL – RA-STM

O RA-STM é um modelo de análise não-linear desenvolvido por Belarbi e Hsu (1994) e Pang e Hsu (1995), também denominado de modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável devido à importância do efeito de amolecimento nas relações constitutivas do concreto em compressão. Essa técnica foi objeto de estudo no que diz respeito ao procedimento de solução do problema por Silva e Horowitz (2015), Silva (2016), Cerquido (2017) e Bernardo *et al.* (2018).

Assim, como o MCFT, o RA-STM utiliza os três princípios da mecânica das estruturas: condições de equilíbrio, compatibilidade das deformações e relações constitutivas dos materiais. As equações de equilíbrio e de compatibilidade são obtidas a partir da análise do círculo de Mohr, das tensões e das deformações, de forma análoga ao MCFT. Contudo, em relação ao equilíbrio, é desconsiderada a tensão principal de tração do concreto (σ_{c1}), assim obtendo a partir de Eq. (3), as equações Eq. (19):

$$\sigma_x = \sigma_{c2}c^2 + \rho_x f_x \quad (19a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{c2}s^2 + \rho_y f_y \quad (19b)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_{c2}sc \quad (19c)$$

As relações constitutivas do concreto e do aço também são baseadas nas relações médias de tensão e deformação obtidas em ensaios experimentais (HSU e MO, 2010), conforme discutido a seguir.

Modelos dos materiais

Para o modelo em questão, o painel está sujeito a um estado biaxial de tensões de tração e compressão. Assim, no RA-STM é utilizada a relação constitutiva do concreto em compressão proposta por Hsu e Mo (2010), na qual é considerado o efeito do amolecimento tanto para tensões quanto deformações, sendo expressa pela Eq. (20), conforme ilustrada na Figura 2.

Para $\varepsilon_2 \leq \zeta \varepsilon_0$:

$$\sigma_{c2} = \zeta f_{ck} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (20a)$$

Para $\varepsilon_2 > \zeta \varepsilon_0$:

$$\sigma_{c2} = \zeta f_{ck} \left[1 - \left(\frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} - 1 \right)}{\left(\frac{2}{\zeta} - 1 \right)} \right)^2 \right] \quad (20b)$$

Como mostrado na equação anterior, assim como no MCFT é necessário incorporar um coeficiente ζ na tensão de compressão, sendo o mesmo expresso por Eq. (21), Figura 2.

$$\zeta = \frac{0,9}{\sqrt{1 + 600\varepsilon_1}} \quad (21)$$

Assim como para o MCFT, o RA-STM foi utilizada a mesma relação proposta pela Eq. (11) para o aço em tração ou compressão.

PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Nessa seção são discutidos pontos adicionais da concepção implementada para a solução do problema, entre eles: a formulação para carregamento proporcional, o Modelo de Treliça Linear de Mohr-Coulomb – MCTM e o procedimento de solução não-linear, conforme proposto por Silva e Horowitz (2015).

Carregamento proporcional

O carregamento proporcional refere-se a uma condição em que a relação entre os esforços solicitantes permanece constante independentemente do estado de tensão ao qual o elemento é submetido (CERQUIDO, 2017).

Assim sendo, é possível relacionar os esforços de membrana aplicados nos elementos de concreto armado com a tensão principal de tração (σ_1) por meio de constantes de proporcionalidade (m_x , m_y e m_{xy}), como mostram as Eqs. (22), (23) e (24).

$$m_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_1} \quad (22)$$

$$m_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_1} \quad (23)$$

$$m_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1} \quad (24)$$

A partir do círculo de Mohr pode-se obter a tensão principal de tração de acordo com a Eq. (25):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (25)$$

Ao substituir as constantes de proporcionalidade nas equações de equilíbrio dadas pela Eq. (3), obtém-se:

$$m_x \sigma_1 - \rho_x f_x = \sigma_{c2} c^2 + \sigma_{c1} s^2 \quad (26)$$

$$m_y \sigma_1 - \rho_y f_y = \sigma_{c2} s^2 + \sigma_{c1} c^2 \quad (27)$$

$$m_{xy} \sigma_1 = -\sigma_{c2} sc + \sigma_{c1} sc \quad (28)$$

Combinando as equações Eq. (26) Eq. (27) e Eq. (28), é possível encontrar a seguinte equação quadrática:

$$(m_x \sigma_1 - \rho_x f_x)(m_y \sigma_1 - \rho_y f_y) = (m_{xy} \sigma_1)^2 + \sigma_{c2} \sigma_{c1} \quad (29)$$

Com base na Eq. (30) pode ser obtida a solução da Eq. (29), sendo os coeficientes S , B e C são calculados segundo as Eqs. (31), (32) e (33).

$$\sigma_1 = \frac{1}{2S} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4SC} \right) \quad (30)$$

$$S = m_x m_y - m_{xy}^2 \quad (31)$$

$$B = m_x \rho_y f_y + m_y \rho_x f_x \quad (32)$$

$$C = \rho_y f_y \rho_x f_x - \sigma_{c2} \sigma_{c1} \quad (33)$$

Essa solução é conhecida na literatura para análises via RA-STM, sendo apresentada em Hsu e Mo (2010), Silva e

Horowitz (2015) e em Silva (2016). Contudo, como nesse trabalho também é utilizado o MCFT, a componente σ_{c1} foi considerada, assim, a solução foi expandida para abranger também situações em que há enrijecimento à tração. Com isso, o parâmetro C , que era definido como o produto das tensões no aço pelas taxas de armadura, passou a receber também a subtração do produto das tensões principais no concreto (σ_{c1} e σ_{c2}).

Modelo de Treliça Linear de Mohr-Coulomb – MCTM

O MCTM (*Mohr Compatibility Truss Model*) é o modelo que será utilizado para realizar a estimativa inicial dos parâmetros ε_x e ε_y , de forma a facilitar a convergência dos resultados. Assim como o MCFT e RA-STM, o modelo de treliça elástico linear se baseia nos mesmos três princípios da mecânica das estruturas. Além disso, pode ser usado mesmo para carregamentos próximos ao início do escoamento da armadura e para cargas de serviço.

A diferença entre o MCTM às demais teorias é que nele o efeito do amolecimento do concreto é desconsiderado, assim como a resistência à tração do concreto, e é adotado como relação constitutiva para o concreto em compressão e aço um comportamento linear elástico perfeito, conforme mostram as Eqs. (34) e (35).

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad (34)$$

$$\sigma_{c2} = E_c \varepsilon_2 \quad (35)$$

Para realizar o procedimento de solução, são necessárias algumas equações adicionais como relações trigonométricas, a equação não-linear resolvida na estimativa inicial e o sistema de equações não-lineares, conforme Silva e Horowitz (2015). Com isso, esses tópicos serão apresentados a seguir resumidamente.

Equações adicionais

A partir do uso das equações de compatibilidade (Eq. 3) juntamente com as relações trigonométricas apresentadas a seguir nas Eqs. (36) a (38), é possível definir o ângulo α_1 por meio das deformações nos sistemas $x - y$ e 1-2.

$$\text{sen}^2(\alpha_1) = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (36)$$

$$\text{cos}^2(\alpha_1) = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (37)$$

Ao utilizar essas relações, o ângulo α_1 é eliminado das equações de equilíbrio e assim o procedimento alcança melhor estabilidade numérica. Após encontrar a solução, o ângulo α_1 pode ser determinado por meio da Eq. (38).

$$\alpha_1 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2}}\right) \quad (38)$$

Reescrevendo a Eq. (28) em função de σ_{c2} e substituindo nas Eqs. (26) e (27), pode-se obter:

$$f_x = \frac{m_x + m_{xy} \cot(\alpha_1)}{\rho_x} \sigma_1 \quad (39)$$

$$f_y = \frac{m_y + m_{xy} \tan(\alpha_1)}{\rho_y} \sigma_1 \quad (40)$$

$$\sigma_2 = \frac{-m_{xy}}{\text{sen}(\alpha_1) \text{cos}(\alpha_1)} \sigma_1 \quad (41)$$

Combinando essas equações de equilíbrio com as relações constitutivas elástico-lineares apresentadas nas Eqs. (34) e (35), obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{m_x + m_{xy} \cot(\alpha_1)}{E_s \rho_x} \sigma_1 \quad (42)$$

$$\varepsilon_y = \frac{m_y + m_{xy} \tan(\alpha_1)}{E_s \rho_y} \sigma_1 \quad (43)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-m_{xy}}{E_s \text{sen}(\alpha_1) \text{cos}(\alpha_1)} \sigma_1 \quad (44)$$

Assim, a partir da Eq. (38), é possível obter a equação não-linear da estimativa inicial, Eq. (45), sendo F_1 a função utilizada para estimar α_1 .

$$F_1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} - \tan^2(\alpha_1) = 0 \quad (45)$$

Após determinar α_1 como solução da equação acima, pode-se calcular as deformações ε_x , ε_y e ε_2 e utilizá-las como estimativa inicial para a solução do sistema de equações não-lineares resolvido no procedimento em questão.

Solução do sistema não-lineares

Pode-se obter o vetor que representa o sistema de equações não lineares de equilíbrio que é resolvido durante o procedimento de solução utilizado, mostrado na Eq. (46), combinando as Eqs. (26) e (27), que representa equações de equilíbrio.

$$F_2 = \begin{cases} \sigma_{c2} \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - m_x \sigma_1 + \rho_x f_x + \sigma_{c1} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \\ \sigma_{c2} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - m_y \sigma_1 + \rho_y f_y + \sigma_{c1} \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad (46)$$

No processo de solução por meio da equação acima, duas variáveis primárias foram selecionadas, sendo essas as duas deformações dos aços ε_x e ε_y , e normalizando seus valores por mil (10^{-3}) para evitar problemas numéricos.

Algoritmo de solução

O problema a ser resolvido consiste em encontrar a solução do sistema de duas equações não-lineares de duas incógnitas, Eq. (46), tanto para o MCFT quanto para o RA-STM, em que as estimativas iniciais das duas deformações ε_x e ε_y são determinadas utilizando o MCTM, conforme Silva (2016).

Dessa forma, as solicitações externas aplicadas no elemento (σ_x , σ_y e τ_{xy}) são conhecidas e pretende-se estimar o comportamento do painel para

tensões proporcionais às informadas, incrementando o valor de ε_2 , resolvendo o sistema não-linear para cada caso.

O processo iterativo é iniciado então pelo cálculo das tensões/deformações $\mu\sigma_x$, $\mu\sigma_y$ e $\mu\tau_{xy}$ utilizando o MCTM, onde é aplicado um fator redutor de escala $\mu = 10^{-3}$ para garantir que a estimativa seja próxima do regime elástico. Devido à essa linearidade do modelo, é possível calcular os valores iniciais de ε_x , ε_y e ε_2 , Eq. (45).

Já para as iterações posteriores, soma-se ao ε_2 um incremento de deformação $\Delta\varepsilon_2$ e como ponto inicial para a solução do sistema de equações novo são utilizados os resultados obtidos anteriormente. Assim, o processo se repete, para a Eq. (46), até a deformação ε_2 ser superior ao limite $\zeta\varepsilon_0$, o número máximo de pontos calculados ($n_{máx}$) ser atingido ou o critério de parada ser atingido, Eq. (12) e (15) a (17). Por fim, a partir desse procedimento é possível calcular o comportamento pré-pico da estrutura.

METODOLOGIA

Para estudar o comportamento de membranas em concreto armado pelos métodos do MCFT e RA-STM, foi desenvolvida uma ferramenta em linguagem *Python*, na qual o código produzido se encontra em anexo, implementada por meio de um notebook colaborativo do *Google Colab* (Google, 2023). Os cálculos implementados seguiram as equações mencionadas anteriormente e as saídas numéricas foram arredondadas para duas casas decimais.

Com relação às bibliotecas utilizadas, tem-se o NumPy (Python, 2023), o SciPy (SciPy, 2023) e o Matplotlib (Matplotlib Development Team, 2023). O NumPy fornece suporte para manipular conjuntos de dados e funções para realizar operações matemáticas eficientes, possuindo desde operações aritméticas básicas até funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, por exemplo. Já o SciPy

oferece uma ampla variedade de funcionalidades com destaque para computação científica avançada, incluindo módulos para otimização, processamento de sinais, interpolação, entre outros. Por fim, o Matplotlib possibilita a criação de gráficos, histogramas, diagramas de dispersão e outras formas de melhor visualizar dados em Python.

Para desenvolver a interface gráfica, foi utilizado o PySimpleGUI (PySimpleGUI, 2023), sendo uma biblioteca que permite criar com facilidade janelas, botões, caixas de texto entre outros elementos.

Uma vez aplicado o procedimento em linguagem Python, os resultados obtidos foram comparados entre os modelos do MCFT e RA-STM para os exemplos de validação do programa presentes na literatura.

EXEMPLOS DE ANÁLISE

Para a validação do programa, os exemplos de análise vão ser divididos em tópicos conforme a bibliografia de referência em: *Exemplo 1*, baseado nos estudos de Hsu e Mo (2010), Silva e Horowitz (2015) e em Silva (2016); *Exemplo 2*, baseado nos estudos de Vecchio e Collins (1986).

Exemplo 1

Para o primeiro problema tem-se os dados iniciais apresentados a seguir, para um elemento de concreto armado submetido a esforços de membrana, em que os resultados obtidos são comparados com os dados da análise na literatura por meio das Figuras 7, 8, 9, 10, 11, 12 e Tabelas 1 e 2:

- Taxas de armadura:

$$\rho_x = 1,03\%; \rho_y = 1,03\%$$

- Propriedades mecânicas dos aços:

$$E_s = 200 \text{ GPa}; f_{xy} = 413 \text{ MPa}; \\ f_{yy} = 413 \text{ MPa}$$

- Propriedades mecânicas do concreto:

$$E_c = 24,8 \text{ GPa}; f_{ck} = 27,6 \text{ MPa};$$

$$\varepsilon_{c0} = -2 \times 10^{-3}$$

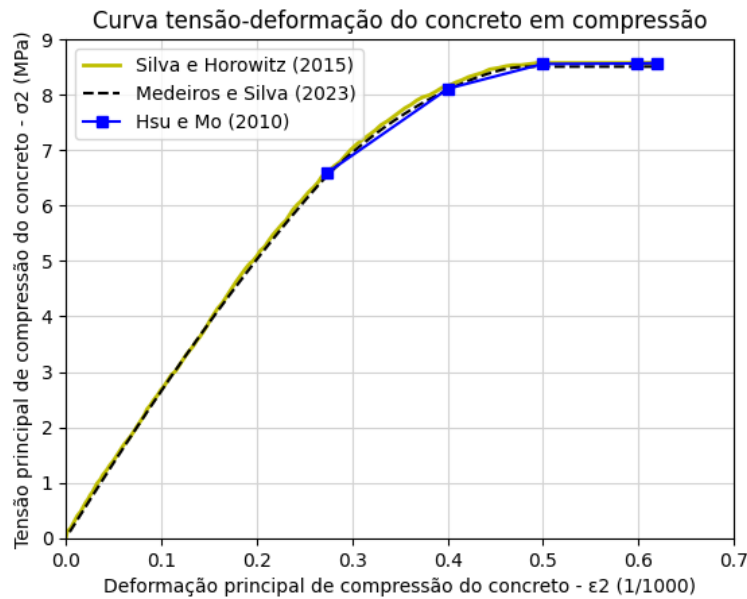
- Solicitações externas:
 $\tau_{xy} = -3,69 \text{ MPa};$
 $\sigma_x = 2,13 \text{ MPa}; \sigma_y = -2,13 \text{ MPa}$

Inicialmente, para o RA-STM é verificada a curva tensão-deformação do concreto comprimido. A Figura 7 compara os valores obtidos no procedimento (curva

tracejada) com os resultados de Hsu e Mo (2010) e Silva e Horowitz (2015). Com isso, pode-se observar uma grande proximidade entre os dados da literatura e as respostas do algoritmo em questão.

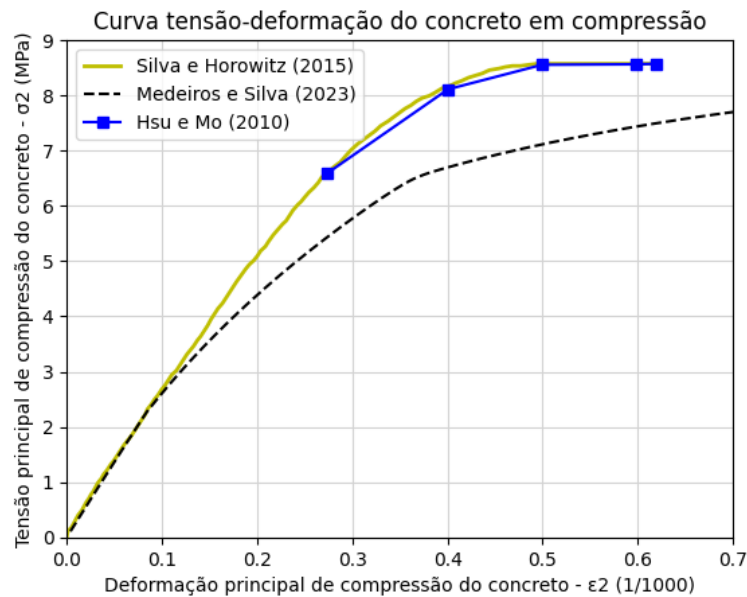
Já utilizando o MCFT, o gráfico obtido, mostrado na Figura 8, diferiu. Esse fato é atribuído à diferença entre o modelo do concreto comprimido no MCFT e no RA-STM, Figura 2.

Figura 7 – Curvas tensão-deformação do concreto em compressão pelo RA-STM



Fonte: A autora, 2023.

Figura 8 – Curvas tensão-deformação do concreto em compressão pelo MCFT

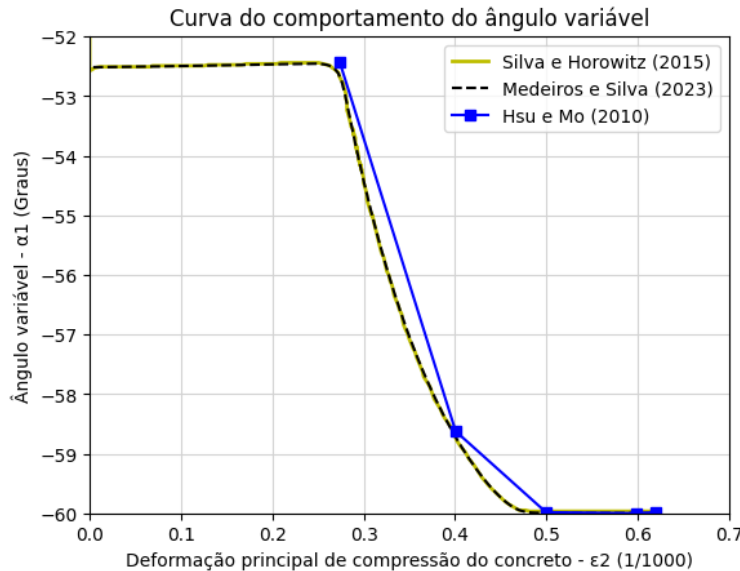


Fonte: A autora, 2023.

O estudo também analisou a variação do ângulo (α_1), em relação à deformação principal de compressão do concreto (ϵ_2), para o RA-STM e MCFT, conforme as Figuras 9 e 10. Novamente as curvas obtidas apresentaram respostas

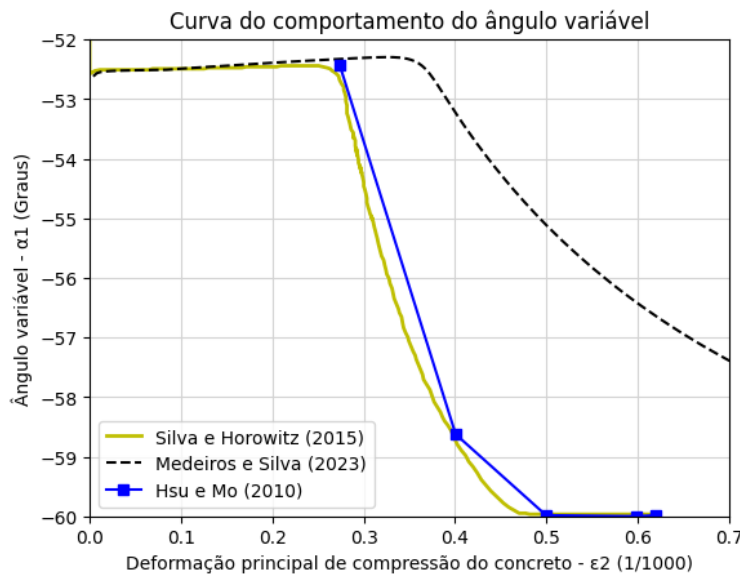
semelhantes, em que o ângulo tendeu a ser constante nos trechos inicial e final da curva, para o RA-STM. Para o MCFT pode-se perceber novamente um valor maior para a deformação principal do concreto.

Figura 8 – Curvas do comportamento do ângulo variável pelo RA-STM



Fonte: A autora, 2023.

Figura 10 – Curvas do comportamento do ângulo variável pelo MCFT



Fonte: A autora, 2023.

Por fim, pode-se observar nas Figuras 11 e 12 a tensão de cisalhamento τ_{xy} em função da deformação de corte γ_{xy} . Em ambas as curvas houve um comportamento linear e posteriormente um encurvamento gradual após o escoamento

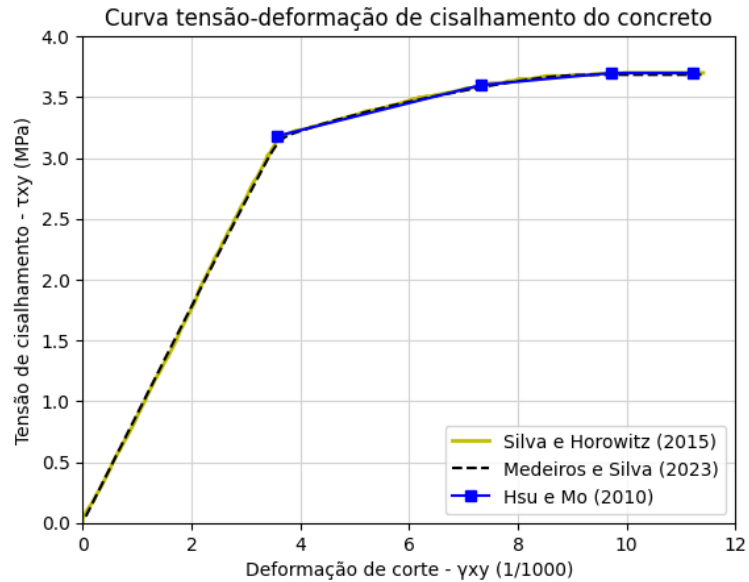
até atingir a resistência de pico. De acordo com a Figura 12, o gráfico para o MCFT apresentou resultados da tensão de cisalhamento inferiores ao RA-STM, isso se dá possivelmente devido às equações de amolecimento e do concreto comprimido

adotadas.

As Tabelas 1 e 2 resumem alguns dos valores da resposta calculada para o exemplo em questão, sendo geradas

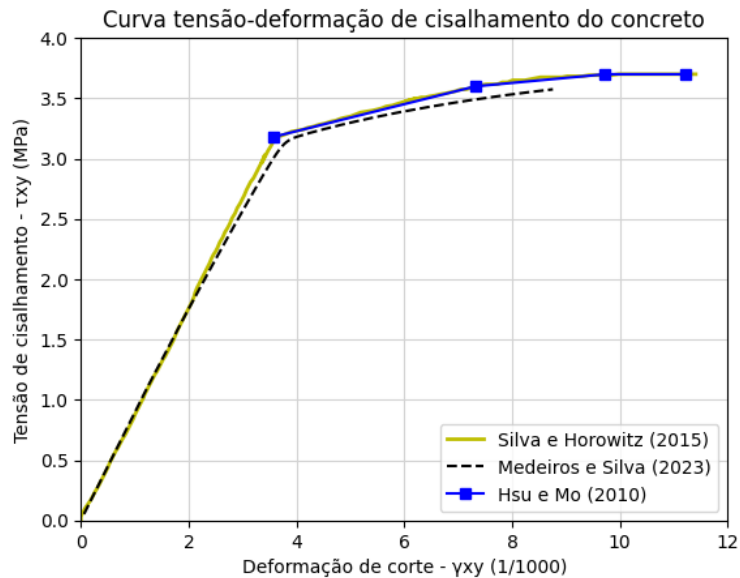
automaticamente pelo código e podendo ser armazenadas no computador em formato de planilha eletrônica.

Figura 11 – Curvas tensão-deformação de cisalhamento pelo RA-STM



Fonte: A autora, 2023.

Figura 12 – Curvas tensão-deformação de cisalhamento pelo MCFT



Fonte: A autora, 2023.

Tabela 1 – Resposta prevista para o Exemplo 1 pelo RA-STM

ϵX	ϵY	$\epsilon c2$	$\epsilon c1$	f_{sx}	f_{sy}	$\sigma c2$	$\sigma c1$	γ_{xy}	τ_{xy}
0,034	0,019	0,004	0,057	6,882	3,721	0,004	0,000	0,059	0,053
0,377	0,204	0,044	0,625	75,380	40,734	0,043	0,000	0,646	0,578
0,708	0,382	0,084	1,175	141,646	76,488	0,081	0,000	1,216	1,085
1,026	0,554	0,124	1,703	205,195	110,709	0,118	0,000	1,765	1,572
1,328	0,716	0,164	2,208	265,654	143,189	0,153	0,000	2,292	2,034
1,614	0,869	0,204	2,686	322,732	173,763	0,185	0,000	2,793	2,471
1,882	1,012	0,244	3,138	376,162	202,346	0,216	0,000	3,268	2,879
2,376	1,194	0,284	3,853	412,972	238,708	0,243	0,000	3,965	3,216
3,575	1,473	0,324	5,371	413,014	294,547	0,264	0,000	5,293	3,387
4,752	1,699	0,364	6,815	413,019	339,826	0,281	0,000	6,497	3,509
5,822	1,878	0,404	8,104	413,023	375,340	0,294	0,000	7,538	3,597
6,760	2,027	0,444	9,231	413,027	401,465	0,304	0,000	8,438	3,658
7,753	2,264	0,484	10,501	413,031	412,752	0,308	0,000	9,515	3,684
8,618	2,524	0,524	11,666	413,034	413,007	0,308	0,000	10,558	3,684
9,078	2,651	0,564	12,293	413,036	413,010	0,308	0,000	11,135	3,684
9,244	2,679	0,604	12,527	413,037	413,010	0,308	0,000	11,372	3,684

Fonte: A autora, 2023.

Tabela 2 – Resposta prevista para o Exemplo 1 pelo MCFT

ϵX	ϵY	$\epsilon c2$	$\epsilon c1$	f_{sx}	f_{sy}	$\sigma c2$	$\sigma c1$	γ_{xy}	τ_{xy}
0,034	0,018	0,004	0,056	6,808	3,644	0,004	0,002	0,058	0,053
0,378	0,204	0,044	0,626	75,569	40,811	0,043	0,001	0,647	0,580
0,714	0,386	0,084	1,183	142,785	77,103	0,082	0,001	1,224	1,095
0,973	0,523	0,124	1,620	194,530	104,671	0,112	0,001	1,685	1,490
1,201	0,644	0,164	2,009	240,191	128,811	0,138	0,001	2,100	1,838
1,406	0,752	0,204	2,362	281,228	150,351	0,161	0,001	2,481	2,150
1,593	0,849	0,244	2,686	318,579	169,820	0,182	0,001	2,834	2,434
1,765	0,938	0,284	2,986	352,886	187,584	0,202	0,001	3,164	2,694
1,925	1,020	0,324	3,269	384,433	203,950	0,220	0,001	3,477	2,933
2,112	1,100	0,364	3,577	409,527	220,018	0,235	0,001	3,808	3,134
2,476	1,194	0,404	4,074	413,003	238,892	0,243	0,001	4,291	3,218
2,862	1,282	0,444	4,587	413,011	256,339	0,250	0,001	4,777	3,274
3,238	1,360	0,484	5,082	413,013	271,965	0,256	0,001	5,240	3,321
3,605	1,430	0,524	5,559	413,014	286,057	0,261	0,001	5,681	3,363
3,962	1,494	0,564	6,020	413,016	298,836	0,266	0,001	6,104	3,400
4,308	1,552	0,604	6,464	413,017	310,475	0,270	0,001	6,509	3,432
4,644	1,606	0,644	6,893	413,019	321,112	0,274	0,001	6,898	3,461
4,969	1,654	0,684	7,308	413,020	330,861	0,278	0,001	7,272	3,487
5,284	1,699	0,724	7,707	413,021	339,813	0,281	0,001	7,631	3,510
5,589	1,740	0,764	8,093	413,022	348,046	0,284	0,001	7,977	3,531
5,884	1,778	0,804	8,466	413,024	355,624	0,287	0,001	8,311	3,550
6,168	1,813	0,844	8,825	413,025	362,600	0,289	0,001	8,633	3,567

Fonte: A autora, 2023.

Exemplo 2

Para o problema em questão, considerando também um elemento de concreto armado submetido a esforços de membrana, tem-se os seguintes dados iniciais, em que a comparação dos resultados com os dados da análise na literatura é ilustrada por meio das Figuras 13, 14 e Tabelas 3 e 4:

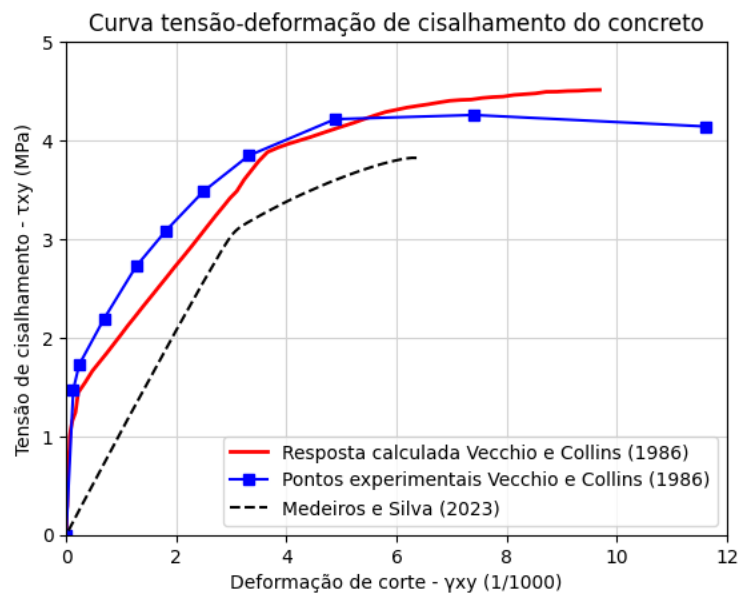
- Taxas de armadura:
 $\rho_x = 1,79\%$; $\rho_y = 0,89\%$
- Propriedades mecânicas dos aços:
 $E_s = 210 \text{ GPa}$; $f_{xy} = 460 \text{ MPa}$;
 $f_{yy} = 297 \text{ MPa}$
- Propriedades mecânicas do concreto:
 $E_c = 21,8 \text{ GPa}$; $f_{ck} = 19,6 \text{ MPa}$;
 $\epsilon_0 = -1,8 \times 10^{-3}$
- Solicitações externas:
 $\tau_{xy} = 1 \text{ MPa}$;
 $\sigma_x = 0 \text{ MPa}$; $\sigma_y = 0 \text{ MPa}$

Nas Figuras 13 e 14, tem-se novamente as curvas da tensão de cisalhamento τ_{xy} em função da deformação de corte γ_{xy} . Comparando os resultados obtidos pelo RA-STM e MCFT, é notável o efeito do enrijecimento do concreto à tração considerado no MCFT, visto que proporcionou um ganho de resistência e rigidez quando comparado ao RA-STM. Além disso, com base nessas figuras, utilizando o MCFT os resultados

se mostraram muito próximos aos apresentados por Vecchio e Collins (1986), contudo, a curva obtida para o RA-STM também foi satisfatória. Ademais, as curvas do RA-STM e MCFT foram interrompidas antes das demais, isso aconteceu devido ao critério de parada utilizado.

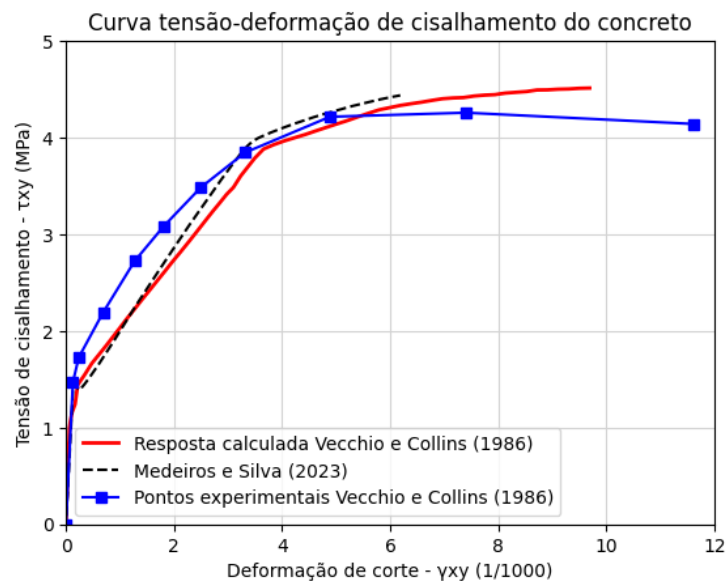
Por fim, nas Tabelas 3 e 4 encontram-se resumidos alguns dos valores da resposta calculada para esse exemplo.

Figura 13 – Curvas tensão-deformação de cisalhamento pelo RA-STM



Fonte: A autora, 2023.

Figura 14 – Curvas tensão-deformação de cisalhamento pelo MCFT



Fonte: A autora, 2023.

Tabela 3 – Resposta prevista para o Exemplo 4 pelo RA-STM

ϵX	ϵY	$\epsilon c2$	$\epsilon c1$	fsx	fsy	$\sigma c2$	$\sigma c1$	γxy	τxy
0,013	0,020	0,004	0,037	2,812	4,144	0,004	0,000	0,041	0,043
0,145	0,214	0,044	0,403	30,426	44,865	0,048	0,000	0,441	0,466
0,272	0,401	0,084	0,757	57,115	84,267	0,090	0,000	0,831	0,876
0,394	0,582	0,124	1,099	82,717	122,119	0,131	0,000	1,209	1,269
0,510	0,754	0,164	1,428	107,101	158,237	0,170	0,000	1,573	1,643
0,620	0,917	0,204	1,740	130,163	192,470	0,206	0,000	1,922	1,998
0,723	1,070	0,244	2,037	151,820	224,700	0,241	0,000	2,254	2,331
0,819	1,214	0,284	2,317	172,009	254,828	0,273	0,000	2,571	2,643
0,909	1,350	0,324	2,583	190,792	282,506	0,303	0,000	2,873	2,930
1,010	1,610	0,364	2,984	212,102	296,965	0,329	0,000	3,294	3,168
1,121	2,027	0,404	3,552	235,403	297,009	0,350	0,000	3,851	3,337
1,215	2,421	0,444	4,079	255,067	297,010	0,368	0,000	4,360	3,474
1,292	2,778	0,484	4,553	271,250	297,012	0,383	0,000	4,813	3,583
1,353	3,088	0,524	4,965	284,170	297,013	0,394	0,000	5,208	3,667
1,400	3,348	0,564	5,312	294,084	297,014	0,403	0,000	5,544	3,730
1,435	3,555	0,604	5,593	301,261	297,015	0,410	0,000	5,823	3,776
1,457	3,709	0,644	5,810	305,980	297,016	0,414	0,000	6,049	3,805
1,469	3,814	0,684	5,967	308,513	297,016	0,417	0,000	6,224	3,821
1,472	3,873	0,724	6,069	309,123	297,016	0,417	0,000	6,354	3,825

Fonte: A autora, 2023.

Tabela 4 – Resposta prevista para o Exemplo 4 pelo MCFT

ϵX	ϵY	$\epsilon c2$	$\epsilon c1$	fsx	fsy	$\sigma c2$	$\sigma c1$	γxy	τxy
0,000	0,000	0,004	0,004	0,000	0,000	0,004	0,087	0,008	0,087
0,000	0,000	0,044	0,044	-0,048	-0,052	0,048	0,948	0,088	0,947
0,101	0,121	0,084	0,305	21,122	25,324	0,091	1,183	0,389	1,483
0,248	0,321	0,124	0,693	52,051	67,481	0,133	1,075	0,814	1,834
0,382	0,514	0,164	1,060	80,267	107,962	0,174	1,010	1,217	2,196
0,476	0,653	0,204	1,333	100,033	137,152	0,203	0,973	1,527	2,462
0,561	0,779	0,244	1,583	117,715	163,568	0,230	0,944	1,814	2,706
0,637	0,894	0,284	1,815	133,735	187,706	0,254	0,921	2,083	2,931
0,707	1,000	0,324	2,030	148,377	209,922	0,277	0,901	2,336	3,139
0,771	1,098	0,364	2,232	161,843	230,482	0,298	0,885	2,576	3,332
0,830	1,189	0,404	2,422	174,287	249,587	0,317	0,870	2,804	3,512
0,885	1,274	0,444	2,603	185,831	267,364	0,335	0,857	3,022	3,680
0,936	1,356	0,484	2,776	196,617	283,556	0,351	0,846	3,233	3,835
0,986	1,458	0,524	2,968	207,082	295,075	0,366	0,834	3,460	3,963
1,037	1,616	0,564	3,217	217,697	296,971	0,375	0,819	3,736	4,040
1,083	1,783	0,604	3,470	227,524	297,007	0,384	0,805	4,014	4,101
1,126	1,945	0,644	3,715	236,468	297,008	0,391	0,793	4,281	4,155
1,165	2,102	0,684	3,951	244,624	297,009	0,398	0,781	4,539	4,204
1,200	2,254	0,724	4,178	252,070	297,009	0,404	0,771	4,787	4,247
1,233	2,400	0,764	4,397	258,876	297,010	0,410	0,762	5,027	4,286
1,262	2,541	0,804	4,608	265,098	297,011	0,415	0,753	5,258	4,321
1,289	2,677	0,844	4,810	270,785	297,011	0,420	0,745	5,482	4,353
1,314	2,807	0,884	5,006	275,979	297,012	0,425	0,738	5,697	4,381
1,337	2,932	0,924	5,193	280,715	297,012	0,429	0,731	5,905	4,407
1,357	3,052	0,964	5,373	285,027	297,013	0,432	0,725	6,106	4,430

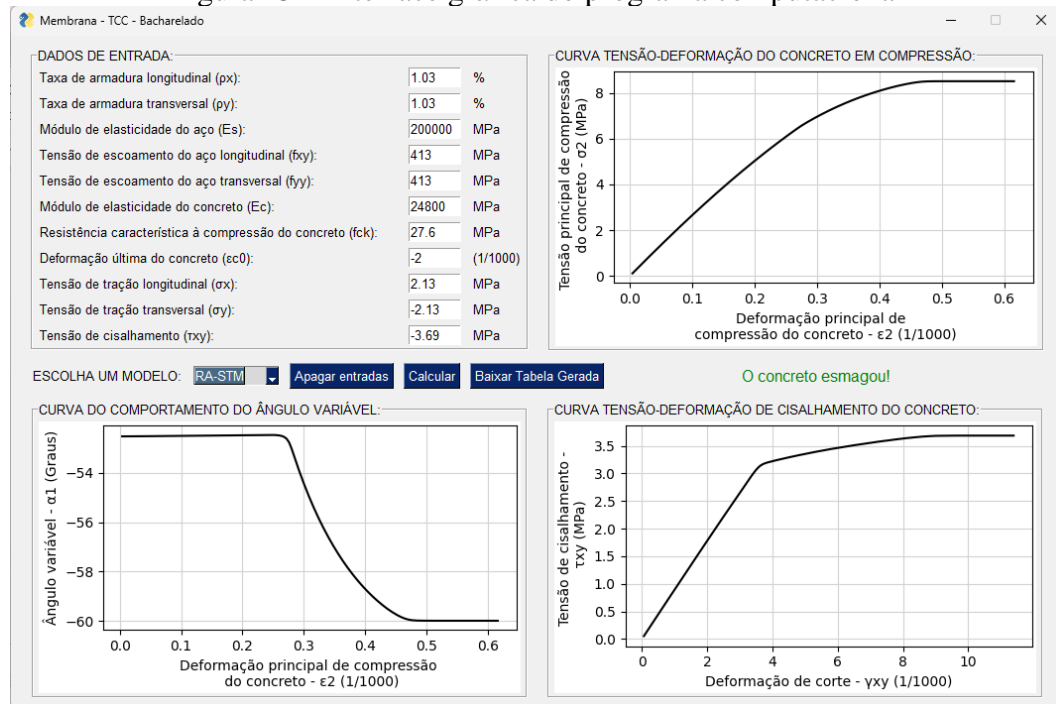
Fonte: A autora, 2023.

Interface gráfica

Para facilitar o uso da ferramenta e a visualização dos dados, foi desenvolvida uma interface gráfica composta por quatro

quadros, como mostrada na Figura 6, em que a tela foi obtida a partir da inserção das informações do *Exemplo 1*.

Figura 15 – Interface gráfica do programa computacional



Fonte: A autora, 2023.

O quadro intitulado “DADOS DE ENTRADA” é o local destinado à inserção dos dados de entrada que serão posteriormente utilizados nos cálculos. Ao escolher o modelo desejado e clicar no botão “Calcular”, as entradas adicionadas são utilizadas nos cálculos mencionados anteriormente. Depois, os quadros “CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO EM COMPRESSÃO”, “CURVA DO COMPORTAMENTO DO ÂNGULO VARIÁVEL” e “CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO DO CONCRETO” são atualizados com os gráficos obtidos e é gerada uma tabela com o resumo dos resultados de alguns dos parâmetros calculados, podendo esta ser armazenada no computador ao clicar no botão “Baixar Tabela Gerada”. Por fim, o botão “Apagar entradas” deleta todas as informações da tela.

CONCLUSÕES

Pode-se concluir que o procedimento apresentado se mostrou como uma alternativa viável para a análise

de painéis de concreto armado submetidos a esforços de membrana, visto que obteve, para os dois modelos utilizados, uma boa concordância com os resultados de análises previamente documentadas na literatura científica.

Além disso, o programa apresenta a vantagem de possibilitar o teste rápido de várias combinações de propriedades dos materiais afim de determinar a opção mais eficaz.

Por fim, a introdução de uma interface gráfica direta e intuitiva proporciona ao usuário uma melhor visualização e manipulação dos dados, dispensando a necessidade de realizar modificações frequentes no código fonte.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, quero agradecer ao meu orientador, Jordlly Silva, pela orientação valiosa, paciência e incentivo ao longo deste processo. Suas sugestões e feedback foram fundamentais para o

aprimoramento deste trabalho, e sou imensamente grata por sua orientação acadêmica.

Agradeço também à minha família e amigos, cujo apoio constante foi a força motriz por trás da minha jornada acadêmica. Suas palavras encorajadoras, compreensão e amor foram fontes de inspiração que me impulsionaram nos momentos desafiadores.

Por fim, agradeço à instituição de ensino por proporcionar um ambiente propício ao aprendizado e à pesquisa. Este trabalho é, em parte, reflexo do compromisso da instituição com a excelência acadêmica.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho, meu mais profundo agradecimento. Este é um marco significativo em minha jornada acadêmica, e sou grata por ter tido o privilégio de contar com o apoio de uma comunidade tão dedicada.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2023**. Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.

BELARBI, A.; HSU, T.T.C. Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened By Concrete. **ACI Structural Journal**, United States of America, v. 91, n. 4, p. 465-474, 1994. DOI:10.14359/4154. Disponível em: <https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal/m/details/id/4154>. Acesso em: 21 jun. 2023.

BERNARDO, L. F. A., CERQUIDO, B. M. D., SILVA, J. R. B., HOROWITZ, B. Efficient refined rotating-angle Softened truss model procedure to analyze reinforced concrete membrane elements. **International Federation for Structural Concrete**, Switzerland.p. 1-12, 2018. DOI:10.1002/suco.201800012. Disponível

em:

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/suco.201800012>. Acesso em: 10 jun. 2023.

CERQUIDO, B. M. D. **Análise de seções de concreto armado com base no modelo de treliça com amolecimento**: estudo de vigas sujeitas à torção combinada com flexão. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil e arquitetura, Universidade de Beira Interior, Covilhã, 2017. Disponível em: https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/7896/1/5470_11038.pdf. Acesso em: 21 jun. 2023.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. **Prestressed Concrete Structures**. Ontario: Response Publications, 1991. ISBN 9780968195802.

CONHEÇA o Colab. 2023. Disponível em: <https://colab.research.google.com/>. Acesso em: 13 ago. 2023.

HSU, T. T. C.; MO, Y. L. Softening of Concrete in Torsional Members – Theory and Tests. **ACI Journal Proceedings**, United States of America, v. 82, n. 3, p. 290–303, 1985. DOI:10.14359/10335.

HSU, T. T. C.; MO, Y. L. **Unified Theory of Concrete Structures**. United States of America: Wiley. 2010. ISBN 9780470688748. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470688892>. Acesso em: 10 jun. 2023.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. 560 p.

MATPLOTLIB: Visualization with Python. 2023. Disponível em: <https://matplotlib.org/>. Acesso em: 13 ago. 2023.

MITCHELL, D.; COLLINS, M. P. Diagonal Compression Field Theory – A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion. **ACI Journal Proceedings**, United States of America, v. 71, n. 8, p. 396-408, 1974. DOI: 10.14359/7103. Disponível em: <https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal.aspx?m=details&ID=7103>. Acesso em: 26 jun. 2023.

NUMPY: The fundamental package for scientific computing with Python. 2023. Disponível em: <https://numpy.org/>. Acesso em: 13 ago. 2023.

PANG, X. B; HSU, T. T. C. Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear. **ACI Structural Journal**, United States of America, v. 92, n. 6, p. 665-679, 1995. DOI: 10.14359/9661. Disponível em: <https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal/m/details/id/9661>. Acesso em: 26 jun. 2023.

SCIPY: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. 2023. Disponível em: <https://www.scipy.org/>. Acesso em: 13 ago. 2023.

SILVA, J. R. B.; HOROWITZ, B. Procedimento Eficiente Para Estimar o Comportamento Carga-Deformação de Painéis de Concreto Armado Submetidos a Esforços de Membrana Usando o Modelo de Treliça com Amolecimento e Ângulo Variável. *In: CILAMCE 2015 – XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2015, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: abmec, 2015. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2015-0483. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/284717617_Procedimento_Eficiente_para_Estimar_o_Comportamento_Carga-Deformacao_de_Paineis_de_Concreto_Armado_submetidos_a_Esforcos_de_Membr

[ana_usando_o_Modelo_de_Trelica_com_Amolecimento_e_Angulo_Variavel](#). Acesso em: 10 jun. 2023.

SILVA, J. R. B. **Procedimento eficiente para análise de seções em concreto armado usando o modelo de treliça com amolecimento**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17283>. Acesso em: 26 jun. 2023.

USER Interfaces for Humans. 2023. Disponível em: <https://pysimplegui.readthedocs.io/>. Acesso em: 13 ago. 2023.

VECCHIO, F.; COLLINS, M. P. The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. **ACI Journal Proceedings**, United States of America, v. 83, n. 2, p. 219-231. DOI: 10.14359/10416. Disponível em: <https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal.aspx?m=details&ID=10416>. Acesso em: 10 jun. 2023.

WONG, P. S.; VECCHIO, F. J.; TROMEELS, H. **Vector2 & Formworks User's Manual**. 2. ed. Toronto: Vector Analysis Group, 2013.

ANEXO A – Código em Python

▼ MEMBRANA - KHRYS

```
import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.optimize import fsolve
import matplotlib.pyplot as plt
```

▼ 1 - DADOS DE ENTRADA

▼ 1.1 - Exemplo de Hsu e Mo (2010) e Silva e Horowitz (2015):

```
# Taxas de armadura:
ro1x = 1.03/100          # Taxa de armadura longitudinal
ro1y = 1.03/100          # Taxa de armadura transversal

# Propriedades mecânicas dos aços (MPa):
Es = 200000              # Módulo de elasticidade do aço
fxy = 413                # Tensão de escoamento do aço longitudinal
fyy = 413                # Tensão de escoamento do aço transversal
exy = fxy/Es             # Deformação de escoamento longitudinal
eyy = fyy/Es             # Deformação de escoamento transversal

# Propriedades mecânicas do concreto (MPa):
Ec = 24800               # Módulo de elasticidade do concreto
fck = 27.6               # Resistência característica à compressão do concreto
ec0 = -2                 # Deformação última do concreto (1/1000)
fcr = np.sqrt(abs(fck))/3 # Tensão de fissuração do concreto
ecr = fcr/Ec             # Deformação de fissuração do concreto (1/1000)

# Solicitações base no elemento de concreto armado (MPa):
Sigma_max_ext = 2.13     # Tensão de tração longitudinal
Sigma_y_ext = -2.13     # Tensão de tração transversal
txy_ext = -3.69         # Tensão de cisalhamento

# Vetores com a solução de HSU e MO (2010):

### CURVA 1:
e2_HSU = np.array([0.2736, 0.4006, 0.4995, 0.5984, 0.6199])
Sigma2_HSU = np.array([6.5897, 8.1111, 8.5555, 8.5641, 8.5726])

### CURVA 2:
alfa_HSU = [-52.424, -58.624, -59.983, -60, -59.9835]

### CURVA 3:
gama_HSU = [3.586, 7.325, 9.729, 11.217]
tal_HSU = [3.181, 3.599, 3.699, 3.699]

# Vetores com a solução de Silva (2015):

### CURVA 1:
e2_Silva = [0, 0.001213, 0.004853, 0.007279, 0.009705, 0.012132, 0.015771, 0.018198, 0.020624, 0.02305, 0.025477, 0.027903, 0.030329,
Sigma2_Silva = [0, 0.116129, 0.174194, 0.251613, 0.329032, 0.406452, 0.483871, 0.561290, 0.638710, 0.69677, 0.774194, 0.832258, 0.909677,

### CURVA 2:
e2_Silva1 = [0, 0.00000, 0.00229, 0.0057471, 0.0114942, 0.0172413, 0.0206896, 0.0252873, 0.0298850, 0.035632, 0.040229, 0.044827, 0.0482
alfa_Silva = [0, -52.577, -52.560, -52.52653, -52.50955, -52.50955, -52.50955, -52.50955, -52.50955, -52.50955, -52.5095, -52.5095, -52.56

### CURVA 3:
gama_Silva = [0, 0.000000, 0.038156, 0.076312, 0.114467, 0.152623, 0.190779, 0.228935, 0.267091, 0.305246, 0.343402, 0.381558, 0.419714,
tal_Silva = [0, 0.033403, 0.066806, 0.100209, 0.125261, 0.150313, 0.175365, 0.208768, 0.242171, 0.267223, 0.300626, 0.334029, 0.367432,

def FuncaoPlotagem():

#####
# PLOTAGEM DAS CURVAS #
#####

#### CURVA 1 - TENSÃO X DEFORMAÇÃO NO CONCRETO:
```

```

# Curva tensão-deformação do concreto em compressão:
plt.plot(ε2_Silva, Sigma2_Silva, color='y', linewidth = 2, label = 'Silva e Horowitz (2015)')
plt.plot(ε2_vetor, Sigma2_vetor, color='black', linestyle = 'dashed', label = 'Medeiros e Silva (2023)')
plt.plot(ε2_HSU, Sigma2_HSU, color='blue', linestyle = '-', marker = 's', label = 'Hsu e Mo (2010)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Curva tensão-deformação do concreto em compressão")
plt.xlabel("Deformação principal de compressão do concreto - ε2 (1/1000)")
plt.ylabel("Tensão principal de compressão do concreto - σ2 (MPa)")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([0, 0.7, 0, 9])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

#### CURVA 2 - COMPORTAMENTO DO ÂNGULO VARIÁVEL NO CONCRETO:
plt.plot(ε2_Silva1, alfa_Silva, color='y', linewidth = 2, label = 'Silva e Horowitz (2015)')
plt.plot(ε2_vetor, alfa_vetor, color='black', linestyle = 'dashed', label = 'Medeiros e Silva (2023)')
plt.plot(ε2_HSU, alfa_HSU, color='blue', linestyle = '-', marker = 's', label = 'Hsu e Mo (2010)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Curva do comportamento do ângulo variável")
plt.xlabel("Deformação principal de compressão do concreto - ε2 (1/1000)")
plt.ylabel("Ângulo variável - α1 (Graus)")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([0, 0.7, -60, -52])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

#### CURVA 3 - TENSÃO X DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO NO CONCRETO:
plt.plot(gama_Silva, tal_Silva, color='y', linewidth = 2, label = 'Silva e Horowitz (2015)')
plt.plot(gama_vetor, tal_vetor, color='black', linestyle = 'dashed', label = 'Medeiros e Silva (2023)')
plt.plot(gama_HSU, tal_HSU, color='blue', linestyle = '-', marker = 's', label = 'Hsu e Mo (2010)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Curva tensão-deformação de cisalhamento do concreto")
plt.xlabel("Deformação de corte - γxy (1/1000)")
plt.ylabel("Tensão de cisalhamento - τxy (MPa)")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([0, 12, 0, 4])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

```

▼ 1.2 - Exemplo PV20 de Vecchio e Collins (1986):

```

# Taxas de armadura:
roIx = 1.79/100          # Taxa de armadura longitudinal
roIy = 0.89/100         # Taxa de armadura transversal

# Propriedades mecânicas dos aços (MPa):
Es = 210000             # Módulo de elasticidade do aço
fxy = 460               # Tensão de escoamento do aço longitudinal
fyy = 297               # Tensão de escoamento do aço transversal
εxy = fxy/Es            # Deformação de escoamento longitudinal
εyy = fyy/Es            # Deformação de escoamento transversal

# Propriedades mecânicas do concreto (MPa):
fck = 19.6              # Resistência característica à compressão do concreto
εc0 = -1.8              # Deformação última do concreto (1/1000)
Ec = 2*fck/εc0*1000     # Módulo de elasticidade do concreto

```

```

fcr = np.sqrt(abs(fck))/3 # Tensão de fissuração do concreto
εcr = fcr/Es*1000 # Deformação de fissuração do concreto (1/1000)
a = 6 # Tamanho máximo do agregado (mm)
smx = 47 # Indicador de controle das fissuras na direção x (mm)
smy = 44 # Indicador de controle das fissuras na direção y (mm)

# Solicitações base no elemento de concreto armado (MPa):
Sigmax_ext = 0 # Tensão de tração longitudinal
Sigmay_ext = 0 # Tensão de tração transversal
txy_ext = 1 # Tensão de cisalhamento

#Pontos experimentais - Vecchio e Collins (1986):
gama_exp_Vecchio = [0, 0.12903, 0.23655, 0.68817, 1.26881, 1.80645, 2.49462, 3.31182, 4.88172, 7.39784, 11.6129]
txy_exp_Vecchio = [0, 1.47245, 1.72669, 2.19279, 2.72245, 3.08262, 3.48516, 3.84533, 4.21610, 4.25847, 4.14194]

#Resposta calculada - Vecchio e Collins (1986):
gama_Vecchio = [0, 0.00644, 0.00644, 0.01950, 0.02266, 0.02266, 0.02599, 0.03347, 0.04968, 0.05833, 0.06409, 0.08602, 0.11184, 0.16859, 0.23655, 0.33118, 0.48817, 0.73978, 1.16129]
txy_Vecchio = [0, 0.10335, 0.23594, 0.29451, 0.39036, 0.49753, 0.58739, 0.69229, 0.79506, 0.87365, 0.99847, 1.08051, 1.15649, 1.24235, 1.33118, 1.42161, 1.51610, 1.61290]

def FuncaoPlotagem():
    ##### CURVA 3 - TENSÃO X DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO NO CONCRETO:
    plt.plot(gama_Vecchio, txy_Vecchio, color='red', linewidth = 2, label = 'Resposta calculada Vecchio e Collins')
    plt.plot(gama_vetor, tal_vetor, color='black', linestyle = 'dashed', label = 'Medeiros e Silva (2023)')
    plt.plot(gama_exp_Vecchio, txy_exp_Vecchio, color='blue', linestyle = '-', marker = 's', label = 'Pontos experimentais Vecchio e Collir')

    # Configurando o título e rótulos dos eixos:
    plt.title("Curva tensão-deformação de cisalhamento do concreto")
    plt.xlabel("Deformação de corte - γxy (1/1000)")
    plt.ylabel("Tensão de cisalhamento - τxy (MPa)")

    # Eixos do gráfico:
    plt.axis([0, 12, 0, 5])

    # Grid:
    plt.grid(color='lightgrey')

    # Exibindo o gráfico:
    plt.legend()
    plt.show()

```

▼ 2 - FUNÇÕES DOS MODELOS

▼ 2.1 - Função do MCTM

```

# Função da estimativa inicial (Comportamento linear - MCTM):
def MCTM(alfa1):

    # Variáveis globais:
    global Sigma1, mx, my, mxy, Es, rolx, roly, μ, εX, εY, ε2

    # Cálculo das deformações:
    εX = (mx + mxy/np.tan(alfa1))*Sigma1*μ/(Es*rolx)
    εY = (my + mxy*np.tan(alfa1))*Sigma1*μ/(Es*roly)
    ε2 = -mxy*Sigma1*μ/(Es*np.sin(alfa1)*np.cos(alfa1))
    εX, εY, ε2 = εX[0], εY[0], ε2[0]

    return (np.tan(alfa1)**2 - (εX - ε2)/(εY - ε2))

```

▼ 2.2 - Funções dos Modelos dos Materiais

▼ 2.2.1 - Amolecimento do Concreto

```

# Função do amolecimento do concreto Belarbi e Hsu (1995):
def SofteningBelarbiHsu95(ε1):
    global ζ
    ζ = 0.9/np.sqrt(1+600*ε1/1000)
    return ζ

# Função do amolecimento do concreto Vecchio e Collins (1986):
def SofteningVecchioCollins86(ε1):
    global ζ
    ζ = 1/(0.8 - 0.34*ε1/εc0)

```



```

if  $\zeta > 1$ :
     $\zeta = 1$ 
return  $\zeta$ 

# Plotagem da curva:
x = np.linspace(0, 8, 100)
y1 = np.array([SofteningBelarbiHsu95(xi) for xi in x])
y2 = np.array([SofteningVecchioCollins86(xi) for xi in x])
plt.plot(x, y1, color='gray', label = 'RA-STM - Belarbi e Hsu (1995)')
plt.plot(x, y2, color='red', label = 'MCFT - Vecchio e Collins (1986)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Modelo constitutivo do amolecimento do concreto")
plt.xlabel("ε1 (mm/m)")
plt.ylabel("Coeficiente de amolecimento - ζ")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([0, 8, 0, 1.6])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

```

▼ 2.2.2 - Concreto em compressão

```

# Função do modelo constitutivo médio para o concreto em compressão Hsu e Mo (2010):
def ConcreteCompressionHsuMo10( $\zeta$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_{c0}$ ):
    if  $\epsilon_2 > \zeta * \epsilon_{c0}$ :
        return  $-\zeta * f_{ck} * ((2 * \epsilon_2 / \zeta / \epsilon_{c0}) - (\epsilon_2 / \zeta / \epsilon_{c0}) ** 2)$ 
    else:
        return  $-\zeta * f_{ck} * (1 - ((\epsilon_2 / \zeta / \epsilon_{c0} - 1) / (2 * \zeta - 1)) ** 2)$ 

# Função do modelo constitutivo médio para o concreto em compressão Vecchio e Collins (1986):
def ConcreteCompressionVecchioCollins86( $\zeta$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_{c0}$ ):
    return  $-\zeta * f_{ck} * ((2 * \epsilon_2 / \epsilon_{c0}) - (\epsilon_2 / \epsilon_{c0}) ** 2)$ 

# Plotagem da curva:
x = np.linspace(0, -4, 100)
y1 = np.array([ConcreteCompressionHsuMo10(1, xi,  $\epsilon_{c0}$ ) for xi in x])
y2 = np.array([ConcreteCompressionHsuMo10(0.7, xi,  $\epsilon_{c0}$ ) for xi in x])
y3 = np.array([ConcreteCompressionVecchioCollins86(0.7, xi,  $\epsilon_{c0}$ ) for xi in x])

plt.plot(x, y1, color='green', label = 'Sem amolecimento')
plt.plot(x, y2, color='blue', label = 'RA-STM - Hsu e Mo (2010)')
plt.plot(x, y3, color='red', label = 'MCFT - Vecchio e Collins (1986)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Modelo constitutivo médio para o concreto em compressão")
plt.xlabel("Deformação média de compressão - ε2 (mm/m)")
plt.ylabel("Tensão média de compressão - σ2 (MPa)")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([0, -4, 0, -30])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

```

▼ 2.2.3 - Concreto em tração

```

# Função do modelo constitutivo médio para o concreto em tração:
def ConcreteTensionVecchioCollins86( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_{cr}$ ,  $E_c$ ):
    if  $\epsilon_1 < \epsilon_{cr}$ :
         $f_{c1} = E_c * \epsilon_1 / 1000$ 
    else:
         $f_{cr} = E_c * \epsilon_{cr} / 1000$ 
         $f_{c1} = f_{cr} / (1 + np.sqrt(200 * \epsilon_1 / 1000))$ 
    return  $f_{c1}$ 

# Plotagem da curva:

```

```

x = np.linspace(0, 4, 1000)
y = np.array([ConcreteTensionVecchioCollins86(xi, ecr, Ec) for xi in x])
plt.plot(x, y, color='red', label = 'MCFT - Vecchio e Collins (1986)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Modelo constitutivo médio para o concreto em tração")
plt.xlabel("Deformação média de tração -  $\epsilon_1$  (mm/m)")
plt.ylabel("Tensão média de tração -  $\sigma_1$  (MPa)")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([0, 1.5, 0, 2])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

```

▼ 2.2.4 - Aço em compressão ou tração

```

# Função do modelo constitutivo para a armadura em tração ou compressão RambergOsgood (1991):
def SteelRambergOsgood(Es,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_{xy}$ ):
    A = 2*10**-5
    F = 40 # Coeficiente utilizado como expoente
    fs = Es* $\epsilon_x$ /1000*(A+((1-A)/(1+((1-A)* $\epsilon_x$ / $\epsilon_{xy}$ )**F)**(1/F)))
    return fs

# Função do modelo constitutivo para a armadura em tração ou compressão Vecchio e Collins (1986):
def SteelVecchioCollins(fxy, Es,  $\epsilon_y$ ):
    fs = Es* $\epsilon_y$ /1000
    if abs(fs) >= fxy:
        return fxy*fs/abs(fs)
    else:
        return fs

# Plotagem da curva:
x = np.linspace(-10, 10, 200)
y1 = np.array([SteelRambergOsgood(Es, xi/1000,  $\epsilon_{xy}$ ) for xi in x])
y2 = np.array([SteelVecchioCollins(fxy, Es, xi) for xi in x])
plt.plot(x, y1*1000, color='purple', label = 'MCFT e RA-STM - \n Ramberg e Osgood (1991)')
plt.plot(x, y2, color='red', label = 'Vecchio e Collins (1986)')

# Configurando o título e rótulos dos eixos:
plt.title("Modelo constitutivo médio para a armadura em tração ou compressão")
plt.xlabel("Deformação no aço -  $\epsilon_s$  (mm/m)")
plt.ylabel("Tensão no aço - fs (MPa)")

# Eixos do gráfico:
plt.axis([-10, 10, -500, 500])

# Grid:
plt.grid(color='lightgrey')

# Exibindo o gráfico:
plt.legend()
plt.show()

```

▼ 2.2.5 - Função Membrana

```

def MEMBRANA(x):

    # Variáveis primárias:
     $\epsilon_X$ ,  $\epsilon_Y$  = x

    # Variáveis globais:
    global  $\epsilon_1$ , Sigmac2, fx, fy, S, B, C, Sigmac1, MODELO

    # Princípio da Invariância das deformações:
     $\epsilon_1$  =  $\epsilon_X$  +  $\epsilon_Y$  -  $\epsilon_2$ 

    # Tensões nas armaduras:
    fx = SteelRambergOsgood(Es,  $\epsilon_X$ ,  $\epsilon_{xy}$ )
    fy = SteelRambergOsgood(Es,  $\epsilon_Y$ ,  $\epsilon_{yy}$ )

    if MODELO == "RA-STM":

```

```

# Coeficiente de amolecimento:
ζ = SofteningBelarbiHsu95(ε1)

# Tensão de compressão principal do concreto:
Sigmac2 = ConcreteCompressionHsuMo10(ζ, ε2, εc0)

# Tensão de tração principal do concreto:
Sigmac1 = 0

elif MODELO == "MCF":

# Coeficiente de amolecimento:
ζ = SofteningVecchioCollins86(ε1)

# Tensão de compressão principal do concreto:
Sigmac2 = ConcreteCompressionVecchioCollins86(ζ, ε2, εc0)

# Tensão de tração principal do concreto:
Sigmac1 = ConcreteTensionVecchioCollins86(ε1, εcr, Ec)

else:
    print("Erro no nome do modelo!")

# Equação da tensão principal de tração:
S = mx*my - mxy**2
B = mx*roly*fy + my*rolx*fx
C = roly*fy*rolx*fx - Sigmac2*Sigmac1
Sigma1 = (1/2/S)*(B-np.sqrt(B**2-4*S*C))

# Cálculo da função (Comportamento não-linear - RA-STM):
F1 = Sigmac2*(εY - ε2)/(ε1 - ε2) - mx*Sigma1 + rolx*fx + Sigmac1*(εX - ε2)/(ε1 - ε2)
F2 = Sigmac2*(εX - ε2)/(ε1 - ε2) - my*Sigma1 + roly*fy + Sigmac1*(εY - ε2)/(ε1 - ε2)

return [F1, F2]

```

▼ 3 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

MODELO = "RA-STM"

▼ 3.1 - Procedimento

```

#####
# CÁLCULOS PRELIMINARES #
#####

exy = fxy/Es*1000 # Deformação de escoamento longitudinal
eyy = fyy/Es*1000 # Deformação de escoamento transversal
CentroMohr = (Sigmax_ext + Sigmay_ext)/2
RaioMohr = np.sqrt(((Sigmax_ext - Sigmay_ext)/2)**2 + txy_ext**2)
Sigma1 = CentroMohr + RaioMohr

# Coeficientes de proporção entre os esforços:
mx = Sigmax_ext/Sigma1
my = Sigmay_ext/Sigma1
mxy = txy_ext/Sigma1

# Fator multiplicador das solicitações:
μ = 10**-3

#####
# ESTIMATIVA INICIAL DA SOLUÇÃO #
#####

# Valor inicial de alfaR para a busca da raiz:
alfa1_0 = 0.01

# Cálculo da estimativa inicial:
alfa1 = fsolve(MCTM, alfa1_0)[0]

# Valor inicial das deformações/variáveis (1/1000):
ε2_0 = ε2*1000
εX0 = εX*1000
εY0 = εY*1000
estimativa = [εX0, εY0]

#####

```

```

# PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR #
#####

# Número máximo de pontos e tamanho do passo:
pontos = 500
passo = 2/pontos

# Inicialização dos vetores para plotagem:
Sigma2_vetor = []
ε2_vetor = []
alfa_vetor = []
tal_vetor = []
gama_vetor = []

# Vetores adicionais para o dataframe:
εX_vetor = []
εY_vetor = []
ε1_vetor = []
fx_vetor = []
fy_vetor = []
σc1_vetor = []
σc2_vetor = []

# Cálculo do comportamento carga-deformação:
for i in range(1, pontos):

    # Deformação de compressão no ponto 'i':
    ε2 = ε2_0 - passo*i

    # Solução do sistema:
    sol = fsolve(MEMBRANA, estimativa)

    # Nova estimativa:
    estimativa = sol

    # Cálculos adicionais:
    sin = np.sqrt((sol[0] - ε2)/(ε1 - ε2))
    cos = np.sqrt((sol[1] - ε2)/(ε1 - ε2))
    alfa = -np.arctan(sin/cos)*180/np.pi
    tal = (Sigma1 - Sigma2)*cos*sin
    gama = 2*(ε1 - ε2)*cos*sin

    # Critério de parada - Concreto esmagou!:
    if ε2 < ζ*εc0:
        print("Concreto esmagou!")
        break

    if MODELO == "MCFT":
        # Critério de parada - Verificação da limitação da tensão média de tração (Tração no concreto muito grande, o aço não aguenta transmi
        thetany = np.arccos(cos)
        thetanx = thetany + np.pi/2
        Sigma1max = rolx*(fy-fx)*np.cos(thetanx)**2 + roly*(fyy-fy)*np.cos(thetany)**2
        if Sigma1 > Sigma1max:
            print("Atingiu a tensão de tração máxima média no concreto!")
            break

    # Critério de parada - Verificação da tensão de cisalhamento na fissura (Atingiu o limite da tensão de cisalhamento):
    vci = rolx*(fy-fx)*np.cos(thetanx)*np.sin(thetanx) + roly*(fyy-fy)*np.cos(thetany)*np.sin(thetanx)
    scr = 1/(np.cos(alfa1)/smx + np.sin(alfa1)/smy) # Espaçamento da fissura (mm)
    w = ε1*scr/1000 # Largura média da fissura (mm)
    vcimax = np.sqrt(fck)/(0.31+24*w/(a + 26))
    if vci > vcimax:
        print("Atingiu a tensão de cisalhamento máxima na fissura!")
        break

    # Salvando a solução no vetor:
    Sigma2_vetor.append(-Sigma2)
    ε2_vetor.append(round(-ε2,3))
    alfa_vetor.append(round(alfa,3))
    tal_vetor.append(round(tal,3))
    gama_vetor.append(round(gama,3))
    εX_vetor.append(round(sol[0],3))
    εY_vetor.append(round(sol[1],3))
    ε1_vetor.append(round(ε1,3))
    fx_vetor.append(round(fx,3))
    fy_vetor.append(round(fy,3))
    σc1_vetor.append(round(Sigma1,3))
    σc2_vetor.append(round(-Sigma2/fck,3))

```

▼ 3.2 - DataFrame

```
# Definindo o valor dos intervalos segundo o tamanho da lista:
if len(ε2_vetor) <= 300:
    int = 10
else:
    int = 20

# Definindo os nomes das colunas
colunas = ["εX", "εY", "εc2", "ε1", "fsx", "fsy", "σc2", "σc1", "γxy", "txy"]

# Criando o DataFrame - Os pontos vão ser adicionados ao dataframe em intervalos de 20 em 20
df = pd.DataFrame(list(zip(εX_vetor[::int], εY_vetor[::int], ε2_vetor[::int], ε1_vetor[::int], fx_vetor[::int], fy_vetor[::int], σc2_vet
```

▼ 3.3 - Plotagem

```
FuncaoPlotagem()
```