



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Coordenação de Licenciatura em Matemática

**Lucas Henrique Mendes de Souza**

**Princípios Básicos de Mecânica Celeste**

RECIFE  
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Coordenação de Licenciatura em Matemática

**Lucas Henrique Mendes de Souza**

## **Princípios Básicos de Mecânica Celeste**

Monografia de graduação apresentada a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos.

RECIFE  
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- L933p Souza, Lucas Henrique Mendes de  
Princípios Básicos de Mecânica Celeste / Lucas Henrique Mendes de Souza. - 2019.  
61 f.
- Orientador: Marcelo .  
Inclui referências e anexo(s).
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2020.
1. Mecânica Celeste. 2. Leis de Kepler. 3. Leis de Newton. I. , Marcelo, orient. II. Título

CDD 510

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Lucas Henrique Mendes de Souza**

**Princípios Básicos de Mecânica Celeste**

Monografia de graduação apresentada a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 19 de Dezembro de 2019.

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Orientador)

---

Prof. Dra. Anete Soares Cavalcanti

---

Prof. Dr. Adriano Régis Rodrigues

# Abstract

This work discusses the basic concepts for the study of the Celestial Mechanics. Assuming the three Newton's Laws we demonstrate Kepler's Laws. In addition, some specific concepts that arise from Celestial Mechanics, are also studied, such as the areal speed, system angular momentum, orbit classification.

**Keywords:** Celestial Mechanics, Kepler Laws, Newton Laws.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação vetorial do movimento curvilíneo . . . . .	23
Figura 2 – Mudança do vetor tangente unitário no movimento curvilíneo . . . . .	24
Figura 3 – Vetores unitários radiais e transversos . . . . .	26
Figura 4 – Aumento da área no movimento curvilíneo . . . . .	29
Figura 5 – Trabalho Feito pela força no movimento curvilíneo . . . . .	33
Figura 6 – Potencial devido a massa do ponto . . . . .	35
Figura 7 – Potencial no ponto externo na esfera . . . . .	36
Figura 8 – Sistema de Partículas . . . . .	38
Figura 9 – Posição relativa ao centro de massa . . . . .	39
Figura 10 – Movimento curvilíneo da força central . . . . .	43
Figura 11 – Velocidade Linear no movimento de Força Central . . . . .	45
Figura 12 – Parâmetros de uma órbita elíptica . . . . .	50

# Introdução

A Mecânica Celeste, estuda o movimento dos corpos celestes, em particular, o movimento dos planetas no Sistema Solar através das iterações dos planetas pela ação da força gravitacional.

O desenvolvimento do estudo da Mecânica Celeste se deu principalmente a partir do século XVII sendo os babilônicos, egípcios e gregos os precursores. Esses povos estavam interessados principalmente em formular calendários. Foi nessa corrida ao conhecimento astronômico, que a teoria da Mecânica Celeste foi mais desenvolvida. O auge do estudo grego, por exemplo, foi na publicação da obra *Almagesto*, de Claudius Ptolomeu no ano 100 d.C, que viveu em Alexandria-Egito. Nessa obra, Ptolomeu defende o modelo geocêntrico, ou seja, a terra sendo o centro de tudo. Ela inicialmente era chamada de *Syntaxis matematica*, no entanto, devido ao grande sucesso que o livro fez à época da publicação, surgiu, na Árabia, o nome pelo qual nós conhecemos a obra hoje, “Almagesto = o maior”. O nome da obra de Ptolomeu que conhecemos hoje também se deu pelo fato de que o *Almagesto* se distinguiu de outros tratados astronômicos feito por outros autores, (Aristarco, inclusive). O “Almagesto” de Ptolomeu era chamada de “maior” e a de Aristarco e outros de “menor”, (BOYER , 1996, p.112). (1)

Podemos afirmar o “Almagesto” foi escrito devendo muito ao método de *Cordas num círculo*, de Hiparco, mas o tamanho dessa dívida não pode ser calculada. Sabe-se, no entanto que Ptolomeu fez uso do catálogo das posições estelares, legado que Hiparco deixou, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu faziam uso ou não dos resultados descobertos por Hiparco, não se pode saber.

Ainda falando no que Ptolomeu afirmava, podemos destacar o seguinte: A teoria que Ptolomeu utilizava até a publicação do *Almagesto* era uma teoria geocêntrica, ou seja, ele acreditava que a terra era o centro do movimento, pois uma terra móvel parecia acarretar em dificuldades, tais como a aparente falta de paralaxe<sup>1</sup> estelar e aparente inconsistência com os fenômenos da dinâmica terrestre (BOYER, 1996, p.112)

As ideias do astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571- 1630) surgiu a partir da refutação da teoria dos epiciclos <sup>2</sup>, proposta por Ptolomeu. Tycho Brahe (1546 - 1601) fez observações que fizeram com que o estudo dos epiciclos fosse abandonado. No entanto, Kepler, com ajuda de Tycho Brahe, aceitando a teoria heliocêntrica que Nicolau Copérnico propôs, desenvolveu os seus estudos tendo nas órbitas dos planetas seu principal interesse. Foi a partir daí que, em 1609, Kepler enunciou as suas 2 primeiras leis, que são:

<sup>1</sup> Paralaxe é o deslocamento de um objeto quando se muda o ponto de observação.

<sup>2</sup> O epiciclo, é quando o planeta se move ao longo de um pequeno círculo, cujo centro se move em um círculo maior chamado deferente.

**Primeira Lei de Kepler.** *Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o sol sendo um dos focos. Essa lei é conhecida também como **Lei das Órbitas**.*

**Segunda Lei de Kepler.** *A reta que une o planeta ao sol varre áreas iguais no plano da órbita de um planeta em intervalos de tempos iguais. Essa lei é conhecida como a **Lei das Áreas**.*

Kepler percebeu que, as suas duas primeiras leis tratavam dos planetas individualmente, mas a partir de uma observação mais detalhada e comparando as órbitas de vários planetas, em 1619 conseguiu formular sua terceira lei, que é:

**Terceira Lei de Kepler.** *O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita. Essa lei é conhecida como **Lei dos Períodos** e que também pode ser representada através da fórmula (2, pág. 41,42) :*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

**Observação 1.** *As letras  $T_i$  e  $R_i$ , com  $i = [1, 2]$ , são o período e a distância ao sol do planeta  $i$ , respectivamente.*

O desenvolvimento do estudo da Mecânica Celeste antes da Teoria da Relatividade, se deu tendo o principal objetivo saber se os fenômenos astronômicos são explicados por si só com as Leis de Newton, afirma Poincaré (apud Hildeberto, (3)). É possível afirmar também que, as teorias desenvolvidas da Mecânica Celeste tratam do comportamento dinâmico do Sistema Solar, como também a sua formação e evolução até hoje.

Contemporâneo de Kepler, Galileu Galilei (1564 - 1642) se debruçou também no estudo da Mecânica e foi a partir de seus estudos e de experimentos, que ele conseguiu enunciar a **Lei da Inércia** hoje como conhecida como **Primeira Lei de Newton** enunciada logo mais.

É importante observar que, apesar de Galileu ter contribuições no estudo do movimento dos corpos na superfície da Terra (contribuiu com a lei da inércia, a queda livre de corpos, etc), ele estava interessado no movimento dos corpos celestes, tanto que deve-se a ele o descobrimento dos quatro maiores satélites de Júpiter, provando a existência de mundos girando em torno de outro mundos, onde, dessa forma, reforçou a teoria heliocêntrica proposta por Copérnico. (VIDAL, C.; CABRAL, H. 1999, p.7).

Além de Kepler, outro cientista famoso que ajudou no desenvolvimento do estudo da Mecânica Celeste. Estamos falando do inglês Isaac Newton Kepler (1643 - 1727), que criou suas leis através do estudo dos movimentos de corpos na Terra, ou movimentos de corpos celestes através da gravidade. Newton formulou suas três leis fazendo uso da demonstração matemática que ele propôs das leis de Kepler.

As Leis de Newton são:



**Primeira Lei de Newton.** *Se nenhuma força resultante atua sobre o corpo a velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer aceleração. Esta lei é também conhecida como **Princípio da Inércia**;*

**Segunda Lei de Newton.** *A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração. Esta lei é conhecida como **Princípio Fundamental da Dinâmica**;*

**Terceira Lei de Newton.** *Quando dois corpos interagem, as forças que cada corpo exerce sobre o outro são iguais em módulo e têm sentidos opostos. Esta lei é conhecida como **Princípio da Ação e Reação**.*

Podemos ver uma abordagem mais específica dessas Leis na referência (2, pág. 91, 95, 102). Assim como na Mecânica clássica, Newton tem um papel importante dentro do desenvolvimento do estudo da Astronomia. Um dos marcos para o desenvolvimento desse estudo foi a publicação da obra *Principia* em 1687. Nessa obra, "Newton estava interessado também em estudar a dinâmica de sistemas de corpos massivos sob a ação de forças de atração gravitacional com o intuito de entender/explicar o movimento daqueles corpos"(4, pág. 6). Nesta obra, são formuladas teorias que auxiliam no estudo da Mecânica Celeste partindo do princípio que o comportamento no universo seria semelhante.

Podemos dizer ainda que, a Mecânica Celeste é o corpo de conhecimentos resultantes de duas leis da natureza, o Princípio Fundamental da Dinâmica, que é a 2º Lei de Newton, como também a Lei da Gravitação Universal. A Lei da Gravitação Universal nos diz que:

**Lei da Gravitação Universal.** *Toda partícula atrai outras partículas com uma força gravitacional que é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias. (2, pág.29)*

Não foram só os teóricos citados acima que contribuíram para o estudo da Mecânica Celeste, mas podemos citar que Leibniz, Halley, Euler, Clairaut, D'Alembert, Delaunay, Lambert, Cauchy, Lagrange, Laplace, Liouville, Legendre, Clairaut, Poisson, Gauss, Jacobi, Weierstrass, Dirichlet, Hamilton, Hermite, Poincaré, Painlevé, Birkhoff, Lyapunov, Gylden, Chazy, Tisserand, Hill e Sundman, além de outros cientistas deram sua parcela de contribuição para o desenvolvimento do tema, se não de forma direta, mas de forma indireta, através da formulação de teoremas que ajudaram a provar diversos resultados.

# 1 Capítulo 1: Preliminares

Neste capítulo, e ao longo de todo o texto, seguimos de perto a referência (5).

## 1.1 Cinemática do Movimento Curvilíneo

Seja  $P(x, y, z)$  um ponto no  $\mathbb{R}^3$ , que se move sobre a curva  $C$ , num caminho cujo comprimento de arco será denotado por  $s$ . Sendo  $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$ . As funções  $x, y, z$  dependem da variável  $t$ , que é o tempo, então a posição da partícula  $P$  é descrita da seguinte forma, como mostra a figura 1 :

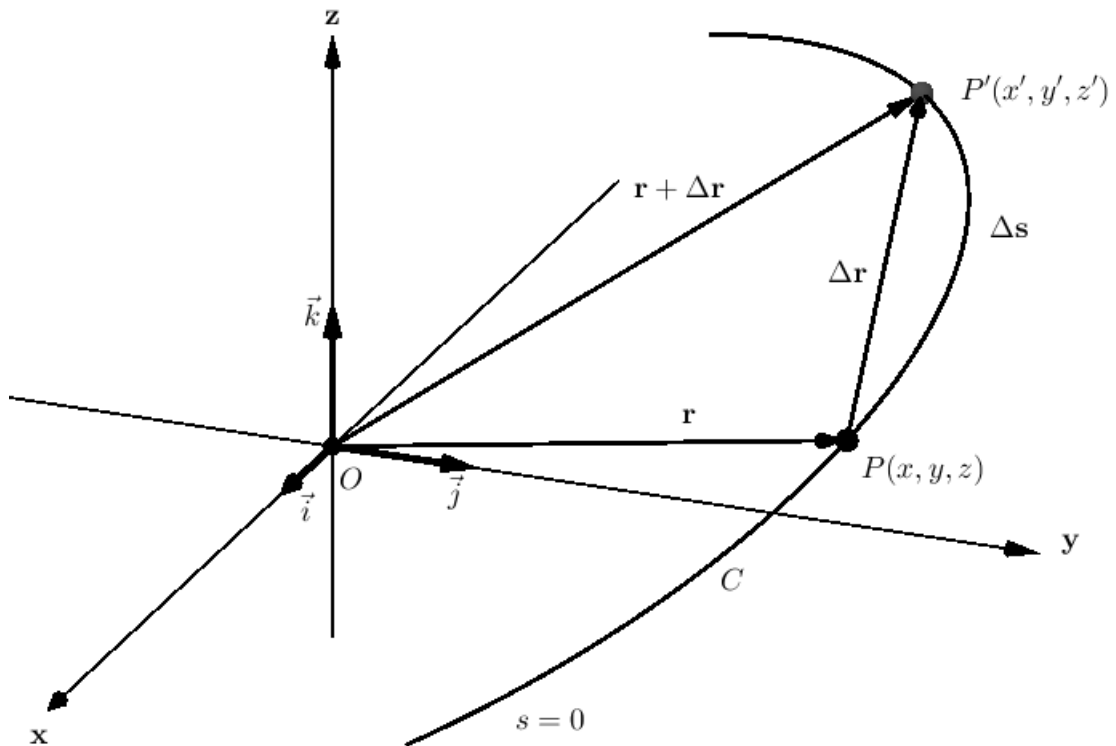


Figura 1 – Representação vetorial do movimento curvilíneo

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.1)$$

A velocidade e a aceleração são definidas como:

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}. \quad (1.3)$$

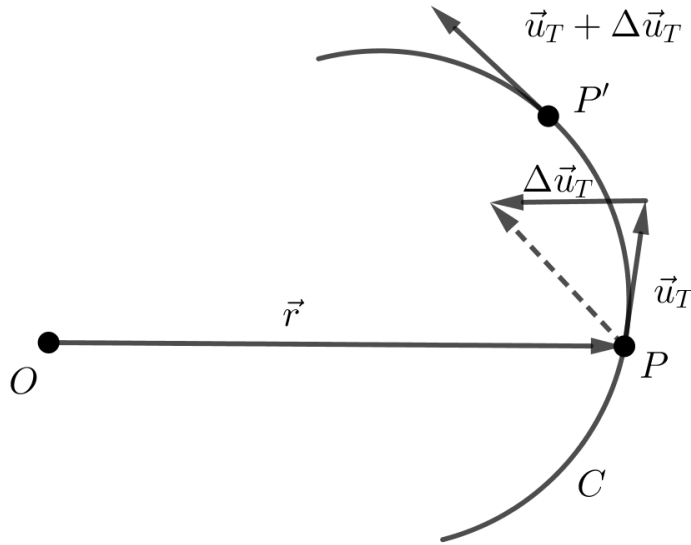


Figura 2 – Mudança do vetor tangente unitário no movimento curvilíneo

Nas relações acima,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  são os vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^3$ , e os pontos é a notação Newtoniana para as derivadas tomadas com relação ao tempo.

Suponha que a  $P$  se mova até  $P'$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Então  $\mathbf{r}$  muda a intensidade e a direção. Por definição,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right). \quad (1.5)$$

Da equação (1.4), podemos escrever:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right) \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right).$$

O vetor  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right)$  é o tangente unitário de  $C$  no ponto  $P$  e o denotaremos por  $\vec{u}_T$ .

Também chamamos o escalar  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \dot{s} = v$  de velocidade da partícula em  $P$ , neste caso é a velocidade escalar. Consequentemente,  $\mathbf{v}$  é o vetor tangente para  $C$  e com intensidade  $v$ , portanto:

$$\mathbf{v} = v \vec{u}_T. \quad (1.6)$$

Note que a velocidade escalar  $v$  é o módulo da velocidade vetorial  $\mathbf{v}$ . A existência de  $\mathbf{v}$  implica na diferenciabilidade de  $\mathbf{r}$  como uma função de  $t$ . Novamente, pela equação

(1.6), temos que:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\vec{u}_T + v\dot{\vec{u}}_T. \quad (1.7)$$

Como  $P$  move-se até  $P'$  ao longo da curva  $C$ ,  $\vec{u}_T$  varia por um acréscimo  $\Delta\vec{u}_T$ , portanto o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  resulta em  $\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} \rightarrow \dot{\vec{u}}_T$ . Note que  $\dot{\vec{u}}_T$  é um vetor perpendicular a  $\vec{u}_T$ . Com efeito, pois:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_T\| = 1 &\Rightarrow \|\vec{u}_T\|^2 = 1 \Rightarrow \langle \vec{u}_T, \vec{u}_T \rangle = 1 \\ &\Rightarrow 2\langle \vec{u}_T, \dot{\vec{u}}_T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{u}_T, \dot{\vec{u}}_T \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \vec{u}_T \perp \dot{\vec{u}}_T. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\dot{\vec{u}}_T = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left( \frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta s} \right) \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v \frac{d\vec{u}_T}{ds}.$$

Mas,

$$\left| \frac{d\vec{u}_T}{ds} \right|,$$

é por definição a intensidade da curvatura  $C$  em  $P$  (6, pág. 770). A recíproca da curvatura é o raio da curvatura  $\rho$ . Portanto, nós temos:

$$\dot{\vec{u}}_T = \frac{v}{\rho} \vec{u}_N. \quad (1.8)$$

onde  $\vec{u}_N$  é o vetor normal a curva em direção ao lado côncavo.

Finalmente, da equação (1.7) nós encontramos:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N. \quad (1.9)$$

Portanto a aceleração  $\mathbf{a}$  está em função das componentes tangenciais e normais ao longo da curva. É claro, da equação (1.9), que uma partícula movendo-se ao longo de um círculo com velocidade escalar constante, experimenta uma aceleração que faz mudar a direção da velocidade vetorial. Se  $\dot{v} = 0$ , a aceleração é  $\left(\frac{v^2}{\rho}\right) \vec{u}_N$ , e é direcionada radialmente no sentido para o centro do círculo.

Tendo como base o mesmo raciocínio, é interessante observar o comportamento do movimento das partículas usando coordenadas polares. Observe a figura 3 e faça a seguinte consideração: Seja uma partícula na posição  $P$ , supomos que a posição  $P$  está na direção transversal à curva na direção de crescimento de  $\theta$ . Seja  $\vec{u}_r$  vetor unitário ao longo do vetor posição  $\mathbf{r}$  e  $\vec{u}_\theta$  vetor unitário perpendicular a  $\vec{u}_r$ .

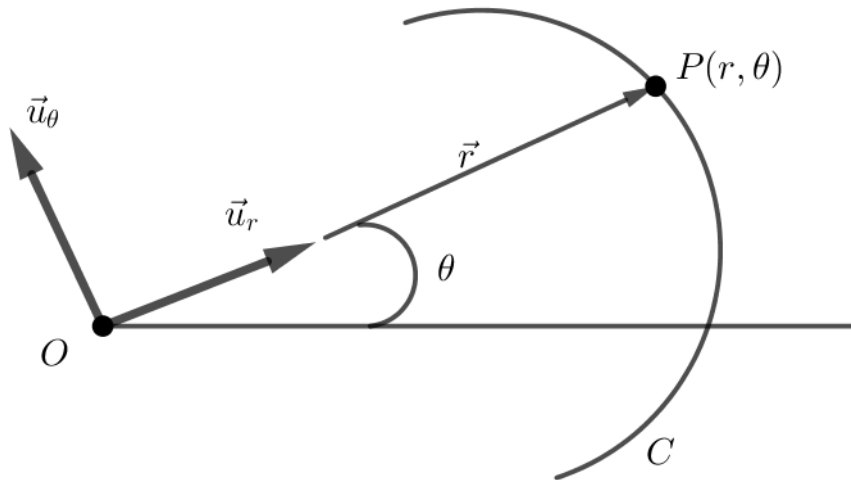


Figura 3 – Vetores unitários radiais e transversos

Da relação  $\mathbf{r} = r \vec{u}_r$ , temos que:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\vec{u}}_r, \quad (1.10)$$

onde  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

**Afirmção 1.**  $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

*Demonstração.* Note que, como  $\vec{u}_r$  é vetor tangente unitário ao longo de  $\mathbf{r}$ , temos que:

$$\vec{u}_r = \frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}. \quad (1.11)$$

Mas,  $\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sen \theta(t))$ , então:

$\|\mathbf{r}(t)\| = r(t)$ , assim

$$\vec{u}_r = \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} = (\cos \theta(t), \sen \theta(t)).$$

Logo

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}_r(t) &= (-\sen \theta(t) \dot{\theta}(t), \cos \theta(t) \dot{\theta}(t)), \\ &= \dot{\theta}(t) (-\sen \theta(t), \cos \theta(t)); \\ &= \dot{\theta}(t) (-\sen \theta(t), \cos \theta(t)); \\ &= \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

□

**Observação 2.** *Aqui, e no que segue, por abuso de notação, vamos considerar que  $\theta(t) = \theta$ ,  $\sen \theta(t) = \sen \theta$ ,  $\cos \theta(t) = \cos \theta$ .*

Logo, da equação (1.10), temos que:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta. \quad (1.12)$$

Derivando a equação (1.12), temos que:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta. \quad (1.13)$$

**Afirmção 2.**  $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$ .

*Demonstração.* Sendo  $\vec{u}_\theta$  vetor tangente unitário e perpendicular a  $\vec{u}_r$ , temos que:

$$\vec{u}_\theta = (-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta) \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\theta = (-\text{cos}\theta(t)\dot{\theta}(t), -\text{sen}\theta(t)\dot{\theta}(t)) = -\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

□

Assim, substituindo na equação (1.13) temos que:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta. \quad (1.14)$$

As equações (1.12) e (1.14) são soluções de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  através dos componentes radial e transversal.

## 2 Capítulo 2 - Conceitos da Mecânica Celeste

### 2.1 Velocidade Areal

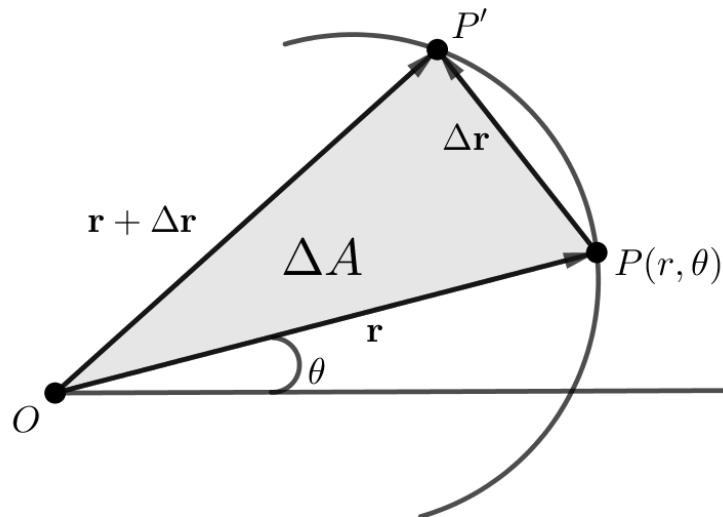


Figura 4 – Aumento da área no movimento curvilíneo

Agora, introduziremos alguns conceitos específicos da Mecânica Celeste.

**Definição:** O raio vetor que une o planeta ao sol varre uma área. Definimos velocidade areal como a área varrida por unidade de tempo pelo raio vetor.

Suponha que o ponto  $P(x,y,z)$  move-se no plano  $xy$  e tem coordenadas polares  $(r,\theta)$  no tempo  $t$ . Vamos denotar como  $\Delta A$  a representação vetorial da área do triângulo  $OPP'$  varrido pelo raio vetor no tempo  $\Delta t$ ; a área  $\Delta A$  é considerada positiva no sentido anti-horário, de  $\mathbf{r}$  para  $(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ . Então:

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}.$$

Conseqüentemente, temos que:

$$\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Quando tomamos o limite de  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos que:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

A Figura 4 representa a velocidade areal em P. Este vetor é perpendicular ao plano contendo  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$ , e apontando para o plano do leitor do papel (lembrar da Regra da mão direita) na figura 4.

Colocando a equação (2.1) no contexto de coordenadas polares e fazendo  $\mathbf{r} = r\vec{u}_r$  e  $\mathbf{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ , teremos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{2} (r\vec{u}_r) \times (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \vec{u}_A. \quad (2.2)$$

Onde  $u_A$  é um vetor unitário na direção de  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ . A intensidade da velocidade areal é portanto  $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ .

Se o movimento não está no plano  $xy$ , as projeções da velocidade areal sobre os três planos fundamentais são usadas. Da equação (2.1), com  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  em coordenadas cartesianas, temos que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = (\dot{A}_x, \dot{A}_y, \dot{A}_z).$$

Com,

$$\begin{aligned} \dot{A}_x &= \frac{1}{2} (y\dot{z} - z\dot{y}); \\ \dot{A}_y &= \frac{1}{2} (z\dot{x} - x\dot{z}); \\ \dot{A}_z &= \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Podemos interpretar o vetor velocidade areal de tal forma que nos permitiria reescrever a Segunda Lei de Kepler, onde, em palavras, ela ficaria da seguinte forma:

“Um planeta move-se ao redor do sol com velocidade areal constante”

Nesse caso,  $r^2\dot{\theta} = c$ , onde  $c$  é constante, o que segue da equação (1.14) que, a componente transversal da aceleração do raio vetor é zero.

## 2.2 Dinâmica do movimento curvilíneo

Assumimos que o movimento de uma partícula de massa  $m$  é dado pela aplicação da força  $\mathbf{F}$ . Da Segunda Lei de Newton, nós teremos:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad (2.4)$$



onde por definição,  $mv = p$  é o *momento linear*. É assumido aqui que, tanto  $\mathbf{v}$  quanto  $\mathbf{F}$  estão referenciado a uma origem suficientemente fixa no espaço para que a equação (2.4) seja mantida. Tal sistema de coordenadas está designado como um sistema de inercial.

O sistema de coordenadas fixado na terra, por exemplo, não é um sistema de inercial <sup>1</sup>, porque faz parte do movimento rotacional e orbital da Terra.

Suponha que duas massas  $m_1$  e  $m_2$  interagem entre si. Seja a força de  $m_1$  em  $m_2$ ,  $\mathbf{F}_{12}$  seja a força de  $m_2$  em  $m_1$   $\mathbf{F}_{21}$ . Então, pela Terceira Lei de Newton, podemos expressar matematicamente esta expressão da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.5)$$

Por definição, o momento angular da massa  $m$  movendo-se na curva  $C$  é:

$$\vec{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  são os vetores posição e velocidade respectivamente, da partícula no tempo  $t$ . Derivando a equação (2.6), com respeito ao tempo, nós encontramos:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \vec{N}. \quad (2.7)$$

Onde o último produto vetorial segue a equação (2.4). O vetor  $\vec{N}$  é o *torque* ou o *momento* de  $\mathbf{F}$  sobre a origem  $O$ . É o vetor perpendicular ao plano definido por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$ .

A equação (2.7) que expressa a Segunda Lei de Newton para o movimento rotacional, afirma que *a taxa do movimento da mudança do momento angular é igual ao torque*.

No geral, a força  $F$  pode ser dada em função da posição, da velocidade, do tempo ou das três grandezas.

**Observação 3.** *Em muitas das aplicações, a força será independente da velocidade, explicitando o tempo.*

Seja uma partícula de massa  $m$  se movendo pela ação da força  $F$  ao longo da curva  $C$ . Então:  $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$ , fazendo o produto interno por  $\mathbf{v}$  dos dois lados da igualdade, nós encontramos:

$$\langle m\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{v}, F \rangle.$$

Conseqüentemente, de  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = v^2$ , nós escrevemos:

$$m\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{v}, F \rangle \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} = \langle \mathbf{v}, F \rangle. \quad (2.9)$$

A quantidade  $\frac{1}{2}mv^2$  damos o nome de energia cinética  $T$  <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Sistema inercial é um sistema em que corpos livres (sem forças aplicadas), não têm seu estado de movimento alterado, ou seja, corpos livres não sofrem acelerações quando não há forças exercidas.

<sup>2</sup> A energia cinética de um objeto é a energia que ele possui devido ao seu movimento

**Afirmção 3.** A quantidade  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$  é a taxa do trabalho feito através da aplicação da força  $\mathbf{F}$  no corpo de massa  $m$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \mathbf{F} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \cdot \tau \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\tau}{\Delta t} \right).$$

□

A partir desse fato, se integrarmos os dois lados da equação (2.9), teremos:

$$\int \frac{d(mv^2 \cdot \frac{1}{2})}{dt} dt = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dt. \quad (2.10)$$

Mas  $v dt$  é elemento do arco  $ds$ , ou seja,  $v dt$  representa a variação da posição da partícula, que vai do ponto  $P_1(t_1, v_1, s_1)$  até o ponto  $P_2(t_2, v_2, s_2)$ , na curva  $C$ . Portanto a integral acima se resume da seguinte forma:

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Por definição, sabemos que essa é a integral de linha ao longo de  $C$  e representa o trabalho feito por  $\mathbf{F}$  no movimento da partícula de massa  $m$  a partir de  $P_1$  até  $P_2$ . Podemos ver isso na referência (6, pág.960)

**Afirmção 4.** O trabalho feito pela força  $\mathbf{F}$  no intervalo de  $s_1$  até  $s_2$  é igual a variação da energia cinética no movimento da partícula de massa  $m$  feito de  $P_1$  até  $P_2$ , ou seja,

$$\frac{1}{2} m (v_{t_2}^2 - v_{t_1}^2) = \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{F} \rangle dt. \quad (2.11)$$

*Demonstração.* Sabemos que, da definição de integral de linha, vamos ter que, se  $\mathbf{r}$  é uma curva com trajetória  $C$ , então:

$$\int_C \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \rangle dt.$$

Pela Segunda Lei de Newton temos que,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m \cdot \mathbf{a}(t).$$

Assim, sabemos que o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  sobre a partícula de massa  $m$  para deslocá-la de  $s_1$  até  $s_2$  é dado por:

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \cdot \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle dt.$$

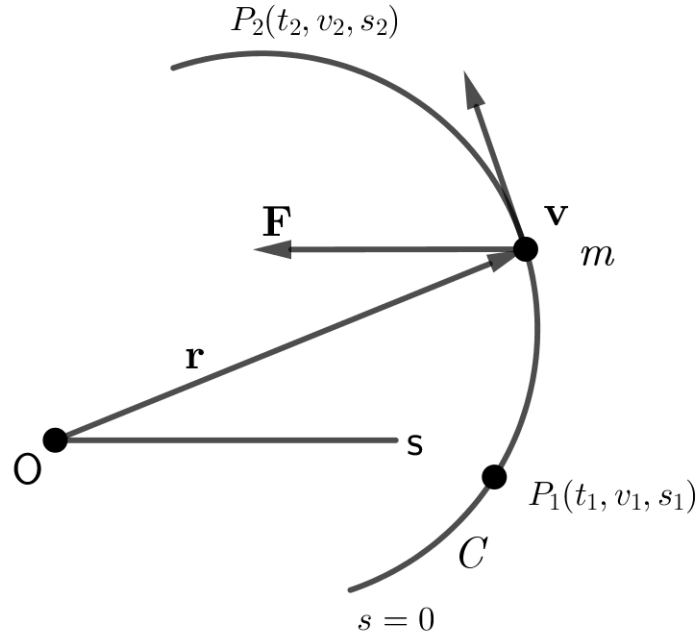


Figura 5 – Trabalho Feito pela força no movimento curvilíneo

Onde  $s(t_1) = s_1$  e  $s(t_2) = s_2$ . Mas, note que:

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{v}(t)\|^2) = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) \right\rangle = \langle 2\mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle. \quad (2.12)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= m \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{(\|\mathbf{v}(t)\|^2)}{2} dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}(t)\|^2) dt = \frac{m}{2} [\|\mathbf{v}(t)\|^2]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{m}{2} (v_{t_2})^2 - \frac{m}{2} (v_{t_1})^2. \end{aligned}$$

□

Se a  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  é independente de caminho em  $P_1$  até  $P_2$ , então existe uma função escalar  $V$ , da posição definida por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V(s_1) - V(s_2). \quad (2.13)$$

Isso é chamado de *função de energia potencial*. A expressão  $V(s)$  denota o valor da energia potencial no ponto cujo o comprimento do arco ao longo de  $C$ , medido em  $s = 0$ , é  $s$ .

Usando esse valor, podemos escrever a equação (2.11) da seguinte forma:

$$V(s_2) + \frac{1}{2} m v_{t_2}^2 = \frac{1}{2} m v_{t_1}^2 + V(s_1). \quad (2.14)$$

Essa equação expressa a conservação de energia com o movimento da partícula de massa  $m$ . Em outras palavras, que a soma da energia cinética com a energia potencial do sistema, permanece constante durante o movimento. Isso é conhecido como o Princípio da Conservação de Energia.

Nesse ponto, é conveniente fazer tudo para coordenadas cartesianas. Tome  $F = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  e tome  $ds = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ . Aqui,  $X, Y, Z$  são funções de  $x, y, z$ . Logo, a integral em (2.13) se torna:

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Xdx + Ydy + Zdz = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2).$$

**Afirmção 5.** *Assumindo a integral acima, temos que:*

$$X = \frac{-\partial V}{\partial x}; \quad Y = \frac{-\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{-\partial V}{\partial z}.$$

*Demonstração.* Iremos fazer para o caso  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Xdx$ , pois o desenvolvimento do cálculo para as integrais  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Ydy$  e  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Zdz$  é análogo.

Sabemos que, do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos que:

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Xdx = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2).$$

Mas,  $V(x_1, y_1, z_1)$  é constante, pois é a origem do movimento. Logo,

$$X(x, y, z) = \frac{-\partial V}{\partial x}.$$

□

Agora, o gradiente de  $V(x, y, z)$ , pode ser definido como:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = -F. \quad (2.15)$$

Quando esta relação existe entre a força  $F$  e todos os pontos do espaço e correspondendo  $V(x, y, z)$ , nós dizemos que o campo de forças é *conservativo*. Pode-se mostrar que é condição necessária e suficiente para a existência de  $V(x, y, z)$  é:

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0. \quad (2.16)$$

Não faremos a demonstração desse resultado por não ser o foco do trabalho, mas podemos ver essa demonstração na referência (6, pág. 978).

## 2.3 Potencial devido a uma esfera

Um resultado importante provado por Newton é que a esfera que é homogênea (ou seja, tem a massa bem distribuída) em camadas concêntricas atrai um ponto exterior de massa como se toda massa da esfera estivesse concentrada no centro. Esse resultado é fundamental e nos permite considerar que a atração entre a Terra e o Sol, por exemplo, é equivalente a atração de dois pontos de massa.

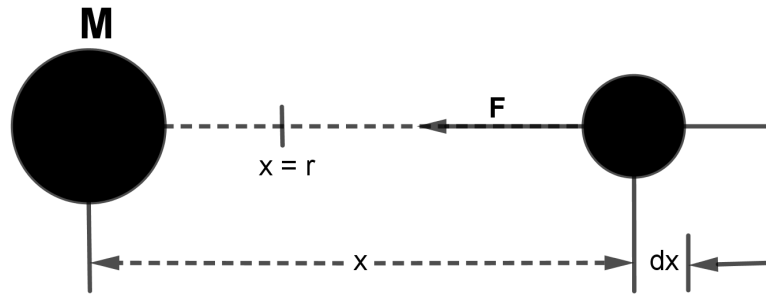


Figura 6 – Potencial devido a massa do ponto

A força, por unidade de massa em qualquer ponto, uma distância  $x$  do corpo de massa  $M$  é dada pela *Lei da Gravitação de Newton*, como:  $\frac{-GM}{x^2}$ .

**Observação 4.** *No Sistema Internacional de unidades, a constante  $G$  foi obtida experimentalmente, e seu valor é dado por:*

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Como a partícula se move de  $x = r$  até  $x = \infty$ , o trabalho feito contra o campo de forças é:

$$-GM \int_r^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{-GM}{r} = U. \quad (2.17)$$

Isso, por definição, é a energia potencial de  $\mathbf{F}$ .

**Observação 5.** *A energia potencial de um corpo representa a capacidade dele de produzir a energia cinética.*

A diferença de potencial entre dois pontos  $x = r_1$  e  $x = r_2$  vai ser:

$$-GM \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.18)$$

A partir daí, nós observamos que este é o trabalho feito pela força  $\mathbf{F}$  no movimento por unidade de massa de  $x = r_1$  e  $x = r_2$ . Comparando com a equação (2.13), isto é observado como sendo uma equivalência entre a mudança da energia potencial por unidade de massa durante o movimento. Fica claro a relação entre o potencial da distância  $r$  a partir do corpo de massa  $M$  e a força que existe, onde essa relação é dada por:

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr} \vec{u}_r. \quad (2.19)$$

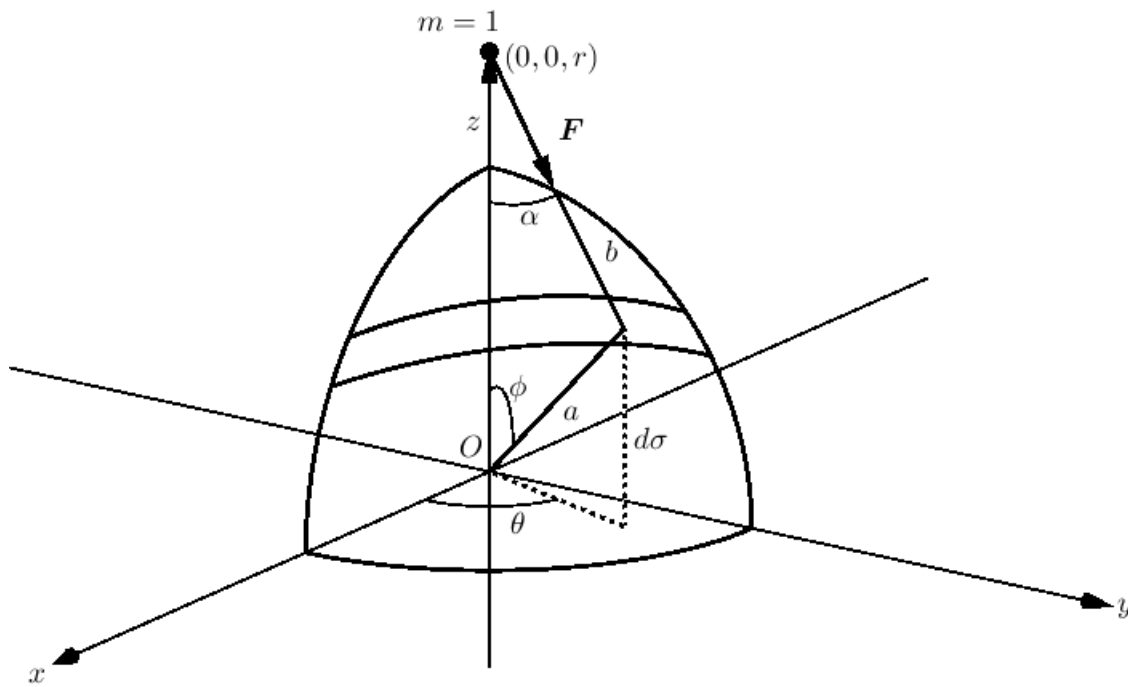


Figura 7 – Potencial no ponto externo na esfera

Uma seção com uma concha esférica do raio  $a$  e a unidade de espessura é retratada na figura 7.

A densidade  $\rho$  da concha é constante. O elemento de área (Jacobiano) da concha é dado por:

$$d\mathbf{F} = -\frac{G\rho d\sigma}{b^2}$$

onde  $b$  é a distância entre o elemento e o ponto  $(0, 0, r)$ . Os componente  $z$  são somados. Consequentemente para a força total no ponto  $(0, 0, r)$  devido a concha, nós temos:

$$F_z = -\int_S \frac{G\rho \cos \alpha d\sigma}{b^2}. \quad (2.20)$$

A integral (2.20) pode ser calculada usando  $b$  como uma variável.

**Observação 6.** Derivando a lei dos cossenos implicitamente, teremos que:

$$b^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi \Rightarrow 2bdb = 2arsen\phi d\phi \Rightarrow bdb = arsen\phi d\phi.$$

Multiplicando por  $a$  os dois lados da equação, depois dividindo por  $r$  e multiplicando por  $d\theta$  os dois lados da mesma equação, temos que:

$$abdb = a^2 sen\phi d\phi \Rightarrow \frac{abdbd\theta}{r} = a^2 \sin \phi d\phi d\theta = d\sigma$$

**Observação 7.** Sabemos que, da figura (1-7) e utilizando as relações trigonométricas, temos que:

$$\cos \alpha = \frac{r - z}{b} = \frac{r - a \cos \phi}{b} = \frac{r - \left( \frac{b^2 - a^2 - r^2}{2r} \right)}{b} = \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2rb}.$$

Resolvendo a integral (2.20), utilizando as observações 7 e 8, nós teremos que:

$$\begin{aligned} F_z &= - \int_S \frac{G\rho \cos \alpha d\sigma}{b^2} = - \int_0^{2\pi} \int_{r-a}^{r+a} G\rho \left( \frac{abdbd\theta}{r} \cdot \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2rb} \right) \\ &= - \frac{G\rho a}{2r^2} \int_0^{2\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{r^2 + b^2 - a^2}{b^2} dbd\theta. \end{aligned}$$

Agora, vamos resolver primeiro a integral  $\int_{r-a}^{r+a} \frac{r^2 + b^2 - a^2}{b^2} db$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{r-a}^{r+a} \frac{r^2 + b^2 - a^2}{b^2} db &= \int_{r-a}^{r+a} \left[ (r^2 - a^2) \cdot b^{-2} + 1 \right] db = \left[ (r^2 - a^2) \left( -\frac{1}{b} \right) + b \right]_{r-a}^{r+a} = \\ &= \frac{-(r^2 - a^2)}{r+a} + (r+a) + \frac{(r^2 - a^2)}{r-a} - r + a \\ &= 4a. \end{aligned}$$

Logo,

$$F_z = \frac{G\rho a}{2r^2} \int_0^{2\pi} 4ad\theta \Rightarrow F_z = -\frac{4\pi G\rho a^2}{r^2}. \quad \square \quad (2.21)$$

Para uma esfera sólida de raio  $R$  no qual a densidade é função unicamente da distância do centro, a força por unidade de massa num ponto exterior é:

$$F = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^R \rho a^2 da. \quad (2.22)$$

Mas  $\int_0^R 4\pi \rho a^2 da$  é a massa da esfera, logo a equação (2.22) vai ser apresentada da seguinte forma:

$$F = -\frac{GM}{r^2}.$$

## 2.4 Sistema de Partículas

Sejam  $n$  partículas possivelmente de diferentes massas que estão localizadas a partir de uma origem  $O$  pelos seus vetores posição, como mostrado na figura a seguir:

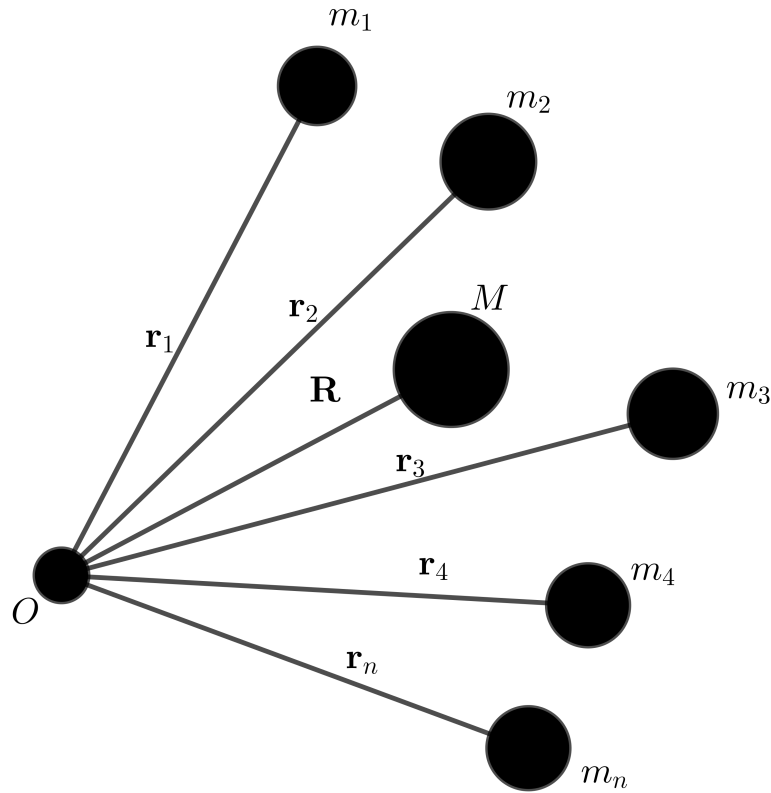


Figura 8 – Sistema de Partículas

A partir do que foi dito acima, podemos fazer algumas observações:

**Observação 8.**  $M$  denota a massa total do sistema, ou seja,

$$M = \sum_{j=1}^n m_j.$$

**Observação 9.** O centro de massa das  $M$  partículas é definido por:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j. \quad (2.23)$$

Note que, se o vetor posição tiver coordenadas  $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $\mathbf{R} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$ , tendo a mesma origem  $O$ , então a equação (2.23) seria equivalente as seguintes equações:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j x_j; \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j y_j; \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j z_j;$$



A teoria que é usada aqui para o desenvolvimento do cálculo do centro de massa pode ser encontrada na referência (2). No geral, a força agindo em cada partícula consiste de uma parte externa é  $F_j$  e o total das forças internas de cada partícula agindo uma sobre a outra é dado por:  $\sum_k f_{j,k}$  ( $j \neq k$ ). Por conta da  $j$ -ésima partícula, portanto, pela segunda Lei de Newton, temos que:

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = F_j + \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n f_{j,k}, \quad (2.24)$$

onde o somatório se estende sobre as  $n - 1$  partículas do sistema. Aplicando a segunda Lei de Newton no sistema todo, teremos que:

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n F_j + \sum_{j,k=1}^n f_{j,k} (j \neq k). \quad (2.25)$$

Mas, pela Terceira Lei de Newton, as forças internas estão sujeitas a relação  $f_{j,k} = -f_{j,k}$ . Conseqüentemente:

$$\sum_{j,k}^n f_{j,k} = 0.$$

Além disso, por comparação com o lado esquerdo da equação (2.25) com a equação (2.23), temos que:

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = M \ddot{\mathbf{R}}.$$

Portanto,

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^n F_j = F. \quad (2.26)$$

Onde  $F$  é por definição a resultante de todas as forças agindo no grupo de partículas. Essa relação afirma que o movimento do centro de massa é o mesmo como se toda a massa do sistema estivesse concentrada lá.

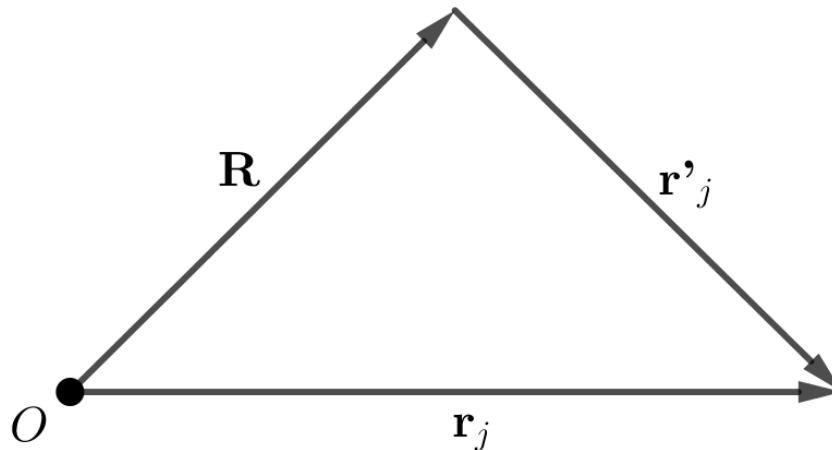


Figura 9 – Posição relativa ao centro de massa

**Observação 10.** O vetor  $\mathbf{r}'_j$  representa a posição da partícula em relação ao centro de massa.

Por definição (2.6), o momento angular total do sistema de partículas sobre  $O$  é:

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j. \quad (2.27)$$

Similarmente, se nós denotarmos o momento angular sobre o centro de massa por  $L_c$  teremos que:

$$\mathbf{L}_c = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j. \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{r}'_j$  é o vetor posição da partícula de massa  $m_j$  com relação ao centro de massa. Note que, da Figura 9, temos a seguinte implicação:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_j.$$

Substituindo essas igualdades na equação (2.27), temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_j) \times m_j (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_j) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_j) \times (m_j \dot{\mathbf{R}} + m_j \dot{\mathbf{r}}'_j) \\ &= \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{r}}'_j) + \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{R}}) + \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j). \end{aligned} \quad (2.29)$$

**Afirmção 6.**  $\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j = 0$  e  $\sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}'_j = 0$ .

*Demonstração.* Vamos fazer o caso de  $\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j = 0$  e o desenvolvimento da prova que  $\sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}'_j = 0$  vai sair de forma análoga. Note que, da definição de centro de massa, teremos que:  $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j$ . Mas pela figura 1-9, temos que  $\mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_j$ , logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_j) \Rightarrow M\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{R} + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \mathbf{R} m_j = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{R} - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

Além disso,  $\sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}$ . Por definição, este é o momento angular do sistema como concentrado no centro de massa. O segundo e o terceiro termo da equação (2.29) são nulos por conta do resultado que acabamos de provar. Portanto,

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j. \quad (2.30)$$

O último termo da equação (2.30) é o momento angular  $L_c$  do sistema sobre o centro de massa. Isso nos leva a uma propriedade fundamental do movimento rotacional, que é:

“O momento angular sobre um ponto fixado  $O$  é dado pela soma dos momentos angulares sobre  $O$ , da posição da partícula com relação ao centro de massa mais o momento angular do centro de massa com relação a origem”.

Derivando a equação (2.30) temos que:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \dot{\mathbf{R}} \times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{L}}_c. \quad (2.31)$$

O primeiro termo da equação (2.31) vai ser nulo, pois é o produto vetorial de dois vetores paralelos. Além disso, da figura 1- 9 podemos concluir que  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j$ . Substituindo na equação (2.31) e usando a equação (2.26), teremos que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{L}}_c &\Rightarrow \dot{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{R} \times \sum_{j=1}^n F_j + \dot{\mathbf{L}}_c = \sum_{j=1}^n \mathbf{R} \times F_j + \dot{\mathbf{L}}_c \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times F_j - \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times F_j + \dot{\mathbf{L}}_c \Rightarrow \dot{\mathbf{L}}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times F_j = \dot{\mathbf{L}}_c - \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times F_j. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mas por definição,  $\sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times F_j = N_0$  é o torque das forças externas do sistema sobre  $O$ .

Similarmente,  $\sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times F_j = N_c$  é o torque sobre o centro de massa. Portanto, a equação (2.32) torna-se:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 - N_0 = \dot{\mathbf{L}}_c - N_c. \quad (2.33)$$

Pela Segunda Lei de Newton (equação (2.7)),  $\dot{\mathbf{L}}_0 - N_0 = 0$ . Além disso,  $\dot{\mathbf{L}}_c - N_c = 0$ . Assim, a razão do momento angular para o movimento relativo ao centro de massa é igual ao torque sobre o centro de massa. Isso é verdade se o centro de massa está em repouso ou no movimento de translação relativa a uma primeira coordenada inercial fixa do sistema.

Esse resultado é muito importante, pois permite que nós estudemos as propriedades rotacionais do sistema de pontos de massa independente do grupo de translação, desde que descrevamos o movimento do seu centro de massa.

Seja um sistema de partículas de massa  $m$ , que estão rigidamente conectadas, onde suas distâncias entre as partículas permanece fixa. E considere a rotação do sistema no eixo instantâneo através da origem  $O$ , com velocidade angular  $\omega$ .

**Observação 11.** *Velocidade angular é a taxa com que a posição angular está variando; é a razão entre o deslocamento angular e o tempo necessário para fazer esse deslocamento.*

A definição de velocidade angular foi observada a partir da referência (7). Logo, qualquer velocidade instantânea linear da massa  $m_j$  na posição  $m_j$  é dada por:  $\omega \times r_j$ . Logo, o momento angular é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_j \times m_j v_j = m_j [\mathbf{r}_j \times (\omega \times \mathbf{r}_j)].$$

A expansão desse triplo produto vetorial resultará na seguinte expressão:

$$\mathbf{L} = m_j [(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_j].$$

e conseqüentemente, o momento angular do sistema é:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j^2 - \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_j. \quad (2.34)$$

o que nos leva a concluir que o momento angular do sistema pode ser calculado em função da velocidade angular, da massa e também da posição da partícula.

Estudamos nesse capítulo propriedades como a velocidade areal e angular, como também o momento angular das partículas podendo ser calculado de várias maneiras diferentes. Isso vai nos ajudar no estudo do capítulo seguinte, onde vamos estudar o movimento de força Central.

## 3 Capítulo 3 - Movimento de Força central

Quando a força resultante que causa o movimento acelerado de uma partícula de massa  $m$  sempre aponta para um ponto fixo, o movimento resultante é chamado de *movimento de força central*. O ponto fixo é o *centro da força*.

Esse é o movimento característico dos planetas, quando eles se movem ao redor do Sol (ponto fixo ou centro da força), em órbitas elípticas, parabólicas ou hiperbólicas, que é o que vamos ver mais adiante.

### 3.1 Lei das áreas

Considere uma partícula de massa  $m$  na posição  $\mathbf{r}$ , relativa a uma origem fixa  $O$ , representada na figura a seguir:

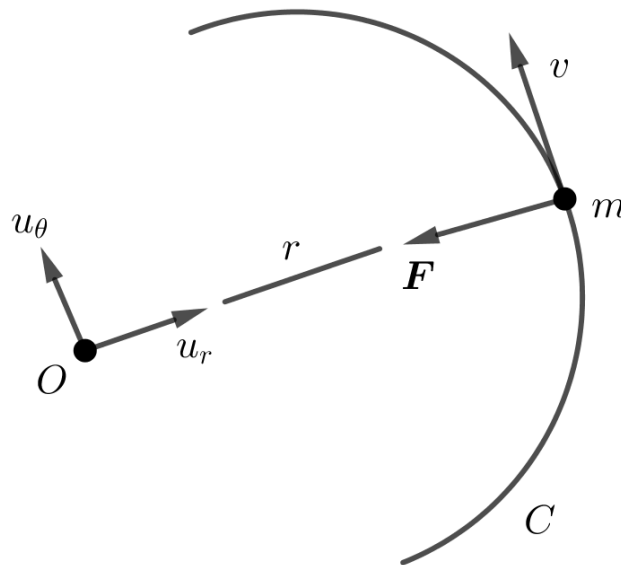


Figura 10 – Movimento curvilíneo da força central

Seja a partícula que descreve a curva  $C$  sobre a ação da força central  $\mathbf{F}$ , no qual pode ser em direção a  $O$  ou apontando na direção contrária. Nós podemos denotar  $\mathbf{F}$  por  $F\vec{u}_r$ , onde  $\vec{u}_r$  é um vetor unitário ao longo de  $r$ . Então, pela Segunda Lei de Newton para massa constante, temos que:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}\vec{u}_r.$$

e

$$\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times F\vec{u}_r = \mathbf{0}.$$

pois  $\mathbf{r}$  e  $\vec{u}_r$  são colineares. Agora, pela equação (2.1) (velocidade areal), a velocidade areal  $\dot{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ . Consequentemente:

$$\ddot{A} = \frac{1}{2}[(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}] = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

Portanto  $\dot{A} = a$  é constante. A equação (2.2) (velocidade areal em coordenadas polares), mostra, contudo, que a velocidade areal é:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\vec{u}_A, \quad (3.1)$$

onde  $\vec{u}_A$  é um vetor unitário perpendicular a  $\mathbf{r}$  e a  $\mathbf{v}$ , que é perpendicular ao plano definido por esses vetores. Por conta que  $\vec{u}_A$  é o vetor constante, nós concluímos que a massa da partícula, movendo-se sob uma força central, descreve uma órbita que está no plano.

Seja a intensidade da constante de velocidade areal  $\frac{1}{2}h$ . Então a área descrita no tempo  $t$  é dada por:

$$A = \frac{1}{2}ht + c, \quad (3.2)$$

onde  $c$  é uma constante de integração.

A análise acima nos afirma que "Para qualquer força central, a Segunda Lei de Kepler se mantém.", que é "A área varrida pelo raio vetor é diretamente proporcional ao tempo". Isso é a Lei das Áreas.

O inverso disso também é verdade, a saber, se a área varrida pelo raio vetor é diretamente proporcional ao tempo, a força é central. Pois, assumindo  $A = pt + q$ , onde  $p$  e  $q$  são constantes, nós temos  $\dot{A} = p$ , e pela equação (2.2),  $r^2\dot{\theta} = 2p$ . Portanto,

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0. \quad (3.3)$$

Mas pela equação (1.14),  $(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$  é a aceleração perpendicular ao vetor radial. Já que isso desaparece pelo que afirma a equação (3.3), não existe aceleração e consequentemente, não existe força perpendicular a  $\mathbf{r}$ . A linha de ação de toda a aceleração, ou força, passa pela origem.

## 3.2 Velocidade angular e linear

Outros dois resultados da cinemática seguem do fato de que a força, ou aceleração, é central.

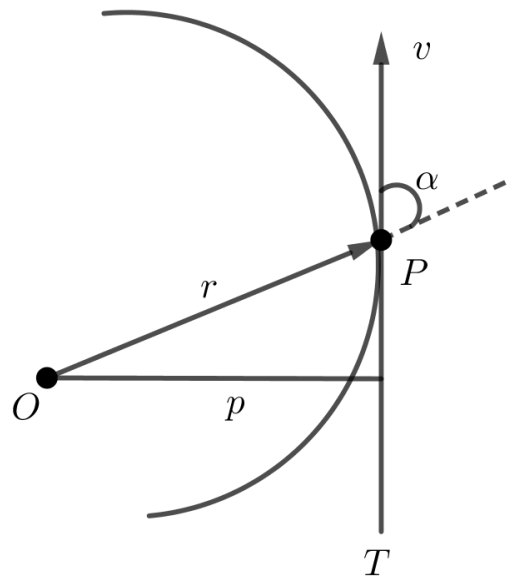


Figura 11 – Velocidade Linear no movimento de Força Central

Seja  $p$  na figura (11) denotando a distância perpendicular da origem  $O$  para a tangente  $T$  da curva a um dado ponto  $P$ . Pelas equações (2.1) (velocidade areal) e (3.2), nós temos;

$$2\dot{A} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = h\vec{u}_A.$$

Mas, da definição de produto vetorial:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = r v \sin\alpha \vec{u}_A,$$

e

$$r v \sin\alpha = p.$$

Portanto,

$$v = \frac{h}{p}, \quad (3.4)$$

a velocidade linear  $v$  da partícula movendo-se de um ponto  $P$  sob a ação da força central é inversamente proporcional a distância perpendicular da origem  $O$  para a tangente instantânea da órbita de  $P$ .

A velocidade angular da partícula é dada por:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}. \quad (3.5)$$

Nós observamos que a velocidade angular da partícula movendo-se sob a ação da força central varia de modo inverso ao quadrado da distância da origem para a partícula.

### 3.3 Integral do Momento Angular e da Energia

Seja a equação do movimento de uma partícula de massa  $m$  sendo dada por:

$$m\dot{\mathbf{v}} = F\vec{u}_r. \quad (3.6)$$

onde  $F$  denota a intensidade da força central e  $\mathbf{u}_r$  é o vetor unitário ao longo de  $\mathbf{r}$ , como se observa na figura 10. Então, da equação (2.7) (derivada do momento angular) e da equação (3.6) teremos que:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times F\vec{u}_r = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Isso implica que o momento angular  $\mathbf{L}$  da partícula movendo-se sob a ação de uma força central se mantém constante em intensidade e direção. O vetor  $L$  é perpendicular ao plano orbital (plano determinado por  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{v}}$ ). Comparando as equações (2.6) (momento angular), (2.1) (velocidade areal) e (2.2) (velocidade areal em coordenadas polares), nós vemos que:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = 2m\dot{A} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_A.$$

Então, a intensidade do momento angular é:

$$mr^2\dot{\theta} = mh. \quad (3.8)$$

Portanto, uma integral das equações do movimento da partícula de massa  $m$  é a constante de momento angular,  $mh$ .

Mais uma vez, da equação (3.6), fazendo o produto interno por  $\mathbf{v}$  nos dois lados da equação, nós temos:

$$\langle m\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \langle F\mathbf{v}, \vec{u}_r \rangle. \quad (3.9)$$

Mas,

$$\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right),$$

e, pela equação (1.12) (equação da velocidade em coordenadas polares), e também por  $\vec{u}_r$  ser perpendicular a  $\vec{u}_\theta$ , então:

$$\langle \mathbf{v}, \vec{u}_r \rangle = \langle (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta), \vec{u}_r \rangle = \dot{r}.$$

Portanto, da equação (3.9), então:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = F \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3.10)$$

Agora, suponha que  $F$  depende unicamente do comprimento do vetor radial, que é,  $F = F(r)$ . Então, ao integrar a equação (3.10), nós temos:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int F(r) dr + E, \quad (3.11)$$



onde  $E$  é a constante de integração na qual depende da condição inicial do movimento.

A integral (3.11) é o trabalho feito na mudança de posição da partícula ao longo da órbita. Quando a forma analítica para  $F(r)$  é dada, a integral pode ser calculada. O campo  $F = F(r)\vec{u}_r$  é conservativo. Logo, existe uma energia potencial  $V(r)$  tal que  $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ . Consequentemente, podemos reescrever a equação (3.11) na forma:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E. \quad (3.12)$$

A equação (3.12) afirma que *a energia cinética mais a energia potencial de uma partícula, move-se sob a ação de uma força central que é constante*. Isto é o que diz o *Princípio da Conservação de Energia* para o sistema, e  $E$  constitui uma segunda integral da equação do movimento.

Outra propriedade do movimento de força central é demonstrado pela equação (3.12). Explicitando o  $v$  temos que:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}. \quad (3.13)$$

Desde que a raiz quadrada dependa unicamente de  $r$ . Através da função  $V(r)$ , nós vemos que a velocidade em todas as órbitas da mesma energia total, independentemente de suas formas, é a mesma a uma dada distância  $r$  do centro de força.

### 3.4 A equação da órbita

Seja a força denotada por  $F(r)$ . Então, as equações do movimento obtidas pela Segunda Lei de Newton são:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r), \quad (3.14)$$

$$mr^2\dot{\theta} = mh. \quad (3.15)$$

Note que, para obter a primeira equação, temos que usar a Segunda Lei de Newton ( $m\dot{v} = F(r)$ ) e substituir a componente radial da velocidade tirada da equação (1.14).

Para obter a segunda equação, basta considerar o seguinte: A equação (1.14) nos mostra que:

$$\mathbf{a} = (r - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta.$$

Sabemos que a aceleração  $\mathbf{a}$  é o resultado da soma dos seus componentes radial e transversal, ou seja:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta$ . No entanto, como da Segunda Lei de Newton temos que  $\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r$ , logo:

$$\|F_r\| = m|a_r| = m(r - r\dot{\theta}^2).$$

Note que, as equações (3.14) e (3.15) são dadas pelas equações (1.14) (equação da aceleração em coordenadas polares) e (3.8) (intensidade do momento angular). Nas suas formas originais, estas equações diferenciais são cada uma de segunda ordem, conseqüentemente suas soluções completas pode resultar em quatro constantes de integração. Mas nós temos duas dessas na forma de momento angular e da energia integral. Mais duas constantes irá resultar na solução das equações (3.14) e (3.15).

Duas condições iniciais são requeridas, portanto, para fixar a órbita completa. Agora seja  $u = \frac{1}{r}$  o módulo do vetor radial. Nós podemos concluir, da equação (3.15) que:  $\dot{\theta} = hu^2$ .

### Afirmção 7.

$$\dot{r} = -h \left( \frac{du}{d\theta} \right) \quad e \quad \ddot{r} = -h^2 u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right).$$

*Demonstração.* Vamos desenvolver primeiro o cálculo para chegar na equação  $\dot{r} = -h \left( \frac{du}{d\theta} \right)$ .

Note que  $u = \frac{1}{r}$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{r^2} \cdot \left( \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \dot{r} \\ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} \cdot \dot{\theta} r^2 &= -\dot{r} \Rightarrow \left( -\dot{\theta} r^2 \right) \frac{du}{d\theta} = \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}. \end{aligned}$$

Agora vamos desenvolver o cálculo para chegar na equação  $\ddot{r} = -h^2 u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right)$ . Note que, da equação  $\dot{r} = -h \left( \frac{du}{d\theta} \right)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -h \left( \frac{du}{d\theta} \right) \Rightarrow -\frac{1}{h} \cdot \dot{r} = \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \\ \frac{1}{h^2} \cdot \dot{r}^2 &= \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{h^2} \cdot 2\dot{r} \frac{d\dot{r}}{d\theta} &= 2 \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{h^2} \cdot 2\dot{r} \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} &= 2 \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Utilizando a Regra da Cadeia e simplificando:

$$\frac{1}{h^2} \dot{r} \cdot \ddot{r} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} \ddot{r} = -u^2 \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} \Rightarrow \ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

□

Podemos dizer ainda que, a equação (3.14) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2}. \quad (3.16)$$

Pois, utilizando o fato de que  $\ddot{r} = -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$  e substituindo na equação (3.14), então,

$$\begin{aligned} m \left[ -h^2u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) - r\dot{\theta}^2 \right] &= F(r) \Rightarrow -mh^2u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \\ - \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) - \frac{r\dot{\theta}^2}{h^2u^2} &= \frac{F(r)}{mh^2u^2} \Rightarrow \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) + u = -\frac{F(r)}{mh^2u^2}. \end{aligned}$$

Essa equação diferencial de segunda ordem para  $u$  como função de  $\theta$  produz a equação polar da órbita quando a lei da força apropriada, expressas em termos de  $u$ , é substituída.

Suponha que a força é aquela que varia como uma potência de  $n$  da distância:  $F(r) = \alpha r^n$ . Então  $F\left(\frac{1}{u}\right) = \alpha u^{-n}$  e a equação (3.15) torna-se:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\alpha u^{-n-2}}{mh^2}. \quad (3.17)$$

Essa equação pode ser integrada diretamente. Multiplicando ambos lados por  $2\left(\frac{du}{d\theta}\right)$ , nós temos:

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = -\beta u^{-(n+2)} \frac{du}{d\theta},$$

onde  $\beta = \frac{2\alpha}{mh^2}$ . Integrando, teremos que:

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{\beta u^{-(n+1)}}{n+1} + C, \quad (n \neq 1), \quad (3.18)$$

onde  $C$  é constante de integração. Integrando uma segunda vez, nós temos que:

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{c - u^2 + \frac{\beta u^{-(n+1)}}{(n+1)}}} = \theta - \theta_0, \quad (n \neq 1), \quad (3.19)$$

onde as coordenadas  $(u_0, \theta_0)$  define um ponto de partida inicial da órbita. Quando  $n$  é dado, a equação (3.19) define  $u$  como uma função de  $\theta$ , denominada a equação polar da órbita. Para  $n = -1$ , um logaritmo em  $u$  substitui a energia de  $u$  no lado direito da equação (3.18).

A integral na equação (3.19) é da forma:

$$\int (a + bu^2 + cu^{(-n-1)})^{-\frac{1}{2}} du, \quad (3.20)$$

onde  $n$  é inteiro, e pode ser mostrada, da tabela das integrais que, substituição trigonométrica irá resolver a integral.

Quando  $n = 1$ , a integral (3.20) assume a forma:

$$\int (au^2 + bu^4 + C)^{-\frac{1}{2}} u du.$$

Uma substituição  $v = u^2$  e  $dv = 2u du$  reduz a integral acima a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \int (av + bv^2 + C)^{-\frac{1}{2}} dv,$$

a qual pode ser integrada por funções trigonométricas. Conseqüentemente, nós concluímos que quando uma força central varia como  $r^n$ , a equação polar da órbita pode ser expressa em termos de funções trigonométricas.

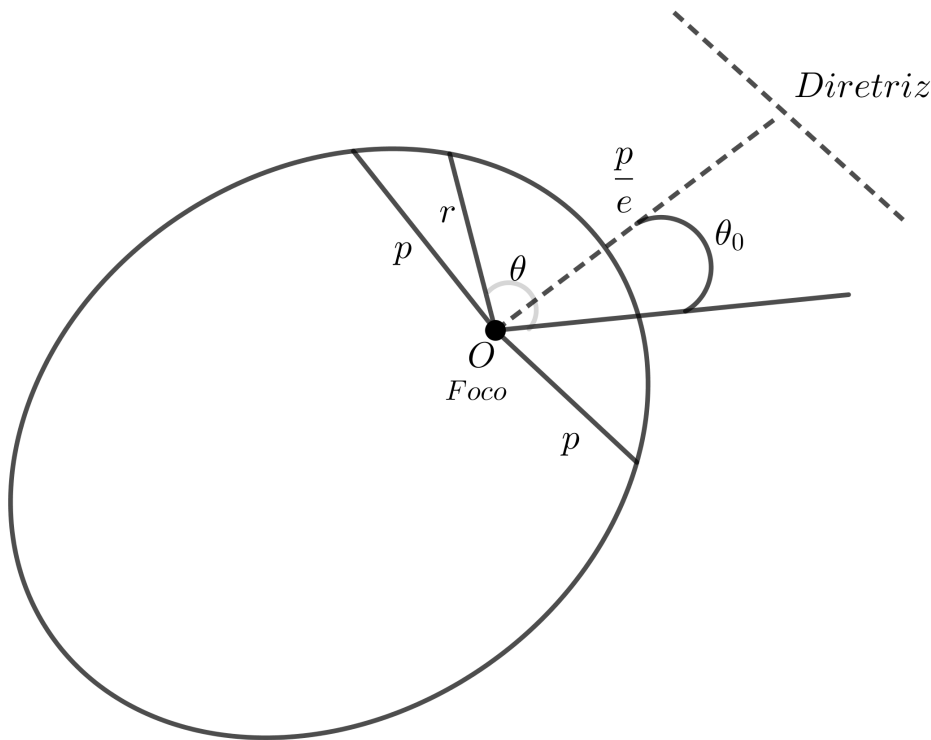


Figura 12 – Parâmetros de uma órbita elíptica

### 3.5 A força do inverso quadrado

As órbitas em muitas aplicações astronômicas surgem da força do inverso quadrado postulado por Newton. Nós podemos ilustrar, da análise da seção 2-4, usando  $F(r) = -Gm\frac{m}{r^2}$ , onde  $Gm$  é a intensidade da força central e  $m$  é a massa sendo acelerada. As equações do movimento reduzida por essa lei de força rendem a órbita:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}. \quad (3.21)$$

Resolvendo a equação diferencial acima, utilizando a teoria encontra na referência (8), teremos que as soluções da equação homogênea associada são da forma:

$$u_H(\theta) = c_1 \cos(\theta) + c_2 \text{sen}(\theta).$$

Pondo  $c_1$  e  $c_2$  em coordenadas polares temos que:

$$c_1 = K \cos(\theta_0) \text{ e } c_2 = K \text{sen}(\theta_0).$$

Logo, teremos que:

$$u_H(\theta) = K \cos(\theta_0) \cos(\theta) + K \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\theta) = K (\cos(\theta_0 - \theta)).$$

A solução do sistema não homogêneo é  $u(\theta) = \frac{GM}{h^2}$ , sendo a solução geral da equação da forma:  $u_G(\theta) = u(\theta) + u_H(\theta)$ , assim:

$$u_G(\theta) = \frac{GM}{h^2} + K \cos(\theta_0 - \theta). \quad (3.22)$$

A partir da solução apresentada acima e também notando que  $\theta_0$  e  $K$  são constantes de integração, temos que conseqüentemente:

$$r = \frac{\left(\frac{h^2}{GM}\right)}{1 + \left(\frac{Kh^2}{GM}\right) \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (3.23)$$

A equação acima é chamada **equação polar da Órbita** e que pode ser reorganizada como uma equação de uma seção cônica.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (3.24)$$

onde  $e$  é a excentricidade e  $p$  é a distância do foco para a diretriz. (6)

Comparando as equações (3.23) e (3.24), teremos que:

$$p = \frac{h^2}{GM} \quad \text{e} \quad e = \frac{Kh^2}{GM}.$$

Os parâmetros  $e$  e  $p$  determinam o tipo de cônica. Nós sabemos que, da Geometria Analítica:

- $e < 1$ , a cônica é uma elipse;
- $e = 1$ , a cônica é uma parábola;
- $e > 1$ , a cônica é uma hipérbole.

Estes parâmetros geométricos dependem da constante de integração  $A$  e das constantes físicas do sistema  $h$ ,  $G$ ,  $M$ . Com relação a equação (3.18), podemos mostrar que para a força do inverso quadrado:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2GMu}{h^2} + C. \quad (3.25)$$

Essa equação tem uma interpretação física. As componentes da velocidade na órbita são:

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta} \text{ e } r\dot{\theta} = hu.$$

Consequentemente, a velocidade  $v$  é:

$$\left[\left(h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + h^2u^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,  $\frac{-GM}{r} = -GMu$  é a energia potencial por unidade de massa. Portanto, a equação (3.25) afirma que a energia total do sistema permanece constante, isso é:

$$\frac{1}{2}mv^2 - GMmu = \frac{1}{2}h^2cm = E, \quad (3.26)$$

onde  $E$  é a energia total. Também temos que  $c = \frac{2E}{mh^2}$ .

Por fim, do eixo transversal da cônica  $\dot{r} = -h\left(\frac{du}{d\theta}\right) = 0$ . Da equação (3.25), portanto,

$$u^2 - \frac{2GMu}{h^2} - \frac{2E}{mh^2} = 0,$$

e, resolvendo a equação para  $u$ , temos que:

$$u = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}\right)}\right] \text{ e } u = \frac{GM}{h^2} \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}\right)}\right]. \quad (3.27)$$

Os valores de  $u$  assim encontrados são aqueles nas extremidades dos eixos transversos da cônica. Da equação (3.22) e (3.27), nós encontramos:

$$u_{\max} = \frac{GM}{h^2} + A = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}\right)}\right],$$

$$u_{\min} = \frac{GM}{h^2} - A = \frac{GM}{h^2} \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}\right)}\right].$$

Consequentemente:

$$A = \frac{GM}{h^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}\right)}.$$

mas  $e = \frac{Ah^2}{GM}$ , portanto nós chegamos numa relação fundamental entre a excentricidade e a energia total da partícula, a saber,

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}\right)}. \quad (3.28)$$

A partir daí, temos as seguintes condições:

- $E = 0$ ,  $e = 1$  a órbita é uma parábola;
- $E < 0$ ,  $e < 1$  a órbita é uma elipse;
- $E > 0$ ,  $e > 1$  a órbita é uma hipérbola;

Vamos fazer uma abordagem em cada tipo de órbita.

#### Caso 1:

$E = 0$ ,  $e = 1$  A *parábola*. Seja  $q$  a distância do foco ao vértice. Então:

$$p = \frac{h^2}{GM} = 2q.$$

Então, a equação da órbita é:

$$r = \frac{2q}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (3.29)$$

**Afirmção 8.** A velocidade na órbita da distância  $r$  do centro da força é dada pela equação (3.26):

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (3.30)$$

*Demonstração.* Note que a equação (3.26) afirma que:

$$\frac{1}{2}mv^2 - GMmu = E.$$

No entanto, neste caso, temos que  $E = 0$ , logo:

$$\frac{1}{2}mv^2 - GMmu = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = GMu.$$

Mas como  $u = \frac{1}{r}$ , então:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

□

**Caso 2:**  $E < 0$ ,  $e < 1$ . A *elipse*. Seja  $q$  denotando o vetor radial do vértice da elipse próximo a origem (veja a Figura 12), seja  $q'$  denotando o raio vetor na máxima distância da origem. A origem é, de fato, o foco. Seja o eixo maior da elipse  $2a$ . Então:

$$q = \frac{p}{1+e} \quad \text{e} \quad q' = \frac{p}{1-e},$$

e temos também que, da definição da elipse,  $q + q' = 2a$ . Então, das equações acima, podemos fazer a seguinte afirmação:

**Afirmção 9.**  $p = a(1 - e^2)$ .

*Demonstração.* De fato, pois, somando as equações acima, temos que:

$$q + q' = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{(1-e^2)}.$$

No entanto,  $q + q' = 2a$ , logo,

$$\frac{2p}{(1-e^2)} = 2a \Rightarrow p = a(1 - e^2).$$

□

Pela afirmação acima, temos que:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (3.31)$$

Além disso, se  $p = \frac{h^2}{GM}$ , a constante de velocidade areal será dada por:

$$h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}. \quad (3.32)$$

Substituindo esse valor na equação (3.28) e simplificando, nós encontramos a fórmula da energia total na seguinte forma:

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

A equação (3.26) mostra então que, para a velocidade orbital numa distância  $r$  do centro da força, temos que:

$$v^2 = GM \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]. \quad (3.33)$$

Estamos agora na posição de deduzir uma expressão para o período no movimento elíptico. Seja  $A$  que denota a área varrida pelo vetor radial no tempo  $t$ . Então, pelas equações (3.2) e (3.22), então:

$$A = \frac{1}{2} \left( \sqrt{GMa(1 - e^2)} \right) t + C,$$

onde  $C$  é constante de integração. Em um período  $P$ , o vetor radial varre uma área:

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} \sqrt{GMa(1 - e^2)} P.$$

Aqui,  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . Portanto, podemos fazer a seguinte afirmação:



**Afirmção 10.**

$$P = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}. \quad (3.34)$$

*Demonstração.* De fato, pois,

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} \sqrt{GMa(1 - e^2)} P \Rightarrow P = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{GMa(1 - e^2)}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}.$$

□

Esta é a Terceira Lei de Kepler quando ampliada ao sistema planetário. Nessa aplicação  $M$  é quase a mesma para cada planeta e é aproximadamente a massa do sol. É importante observar que dois planetas com períodos  $P_1$  e  $P_2$  e órbitas com o semi-eixo maior  $a_1$  e  $a_2$  cumpre a relação que afirma a Lei dos Períodos de Kepler, que é representada pela seguinte razão:

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2.$$

**Caso 3:**

$E > 0$  e  $e > 1$ . A *hipérbole*. Mais uma vez, seja  $2a$  denotando o eixo transversal da cônica. Então,  $p = a(e^2 - 1)$ . Assim, a equação da órbita ficaria da seguinte forma:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (3.35)$$

a constante de velocidade areal será:

$$h = \sqrt{GMa(e^2 - 1)}, \quad (3.36)$$

e a energia total será:

$$E = \frac{GMm}{2a}.$$

**Observação 12.** Para deduzir essa fórmula, basta substituir a equação (3.36) na equação (3.28) e fazer as simplificações necessárias. Basta usar o mesmo raciocínio que foi usado na afirmação que foi provada no caso 2.

À uma distância  $r$  do centro de força, a velocidade será dada por:

$$v^2 = GM \left[ \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right]. \quad (3.37)$$

Nos dedicamos neste capítulo a estudar o movimento de força central, o que nos deu condições, por exemplo, de classificar as órbitas dos planetas explicitando as características das cônicas. Podemos dizer que isso tudo decorreu em consequência das três leis de Kepler.

# Conclusão

Neste trabalho buscou-se abordar algumas considerações iniciais para todo aquele que queira desenvolver seu estudo na Mecânica Celeste. Com relação a parte histórica, citamos algumas considerações que grandes estudiosos como Ptolomeu, Hiparco, Copérnico, Kepler e Newton fizeram. Observamos daí o avanço constante dos estudos nessa área e a grande contribuição que a Física e a Matemática deram. Podemos dizer ainda que cada estudo complementou o outro e por isso chegamos onde estamos hoje.

É importante notar também que este trabalho focou nas definições básicas que são importantes para o estudo na Mecânica Celeste. Definições como a de posição, velocidade e aceleração no contexto físico, além das suas respectivas associações com o plano polar foram também importantes para o desenvolvimento do trabalho. Essas definições foram acompanhadas de algumas afirmações sobre o movimento dos corpos celestes e a parti daí, suas demonstrações nos deram um sentido para aquilo que nós estávamos estudando.

Foi a partir dos conceitos físicos apresentados que começamos a nos deter na Mecânica Celeste em si, onde abordamos os conceitos que vão desde a velocidade areal até conceitos que envolvem as órbitas dos planetas (por exemplo, suas equações). Vale ressaltar a conexão que os assuntos tinham um com o outro, o que evidencia a linearidade que tivemos no estudo inicial da Mecânica Celeste.

Por fim, essa área produz um interesse muito grande de quem escolhe estudá-la, pois trata de assuntos variados que tem aplicações na realidade dos movimentos estelares, o que pode despertar ainda mais a curiosidade de quem quer mais ainda estudá-la.

# Referências

- 1 BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.
- 2 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de física, vol. 1 e 2. Editora LTC,, 2009.
- 3 CABRAL H. ; VIDAL, C. Introdução à Mecânica Celeste. Recife: Notas de aula, 1999.
- 4 VOLCHAN, S. B. Uma Introdução à Mecânica Celeste. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- 5 MCCUSKEY, S. W. Introduction to celestial mechanics. London: Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co.[1963], 1963.
- 6 STEWART, J. Calculo multivariable, vol. 2. São Paulo: Thomson, 2013.
- 7 SILVA, R. T. d. Notas de aula de Física sobre Rotação. Paraíba: UFPB, 2002.
- 8 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.