UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ensino e aprendizagem dos polígonos regulares: Uma abordagem lúdica sobre os movimentos de simetria no ensino fundamental

Welisson de Almeida Amorim

Orientador Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Welisson de Almeida Amorim

Ensino e aprendizagem dos polígonos regulares: Uma abordagem lúdica sobre os movimentos de simetria no ensino fundamental

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A524e Amorim , Welisson de Almeida
Ensino e aprendizagem dos polígonos regulares: Uma abordagem lúdica sobre os movimentos de simetria no ensino fundamental / Welisson de Almeida Amorim . - 2022.
61 f. : il.

Orientador: Thiago Dias Oliveira Silva.
Inclui referências e anexo(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. Polígonos . 2. Ensino . 3. Geometria . I. Silva, Thiago Dias Oliveira, orient. II. Título

CDD 510

Welisson de Almeida Amorim

Ensino e aprendizagem dos polígonos regulares: Uma abordagem lúdica sobre os movimentos de simetria no ensino fundamental

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

RECIFE, 19 de Outubro de 2022:

BANCA EXAMINADORA

Dr. Thiago Dias Oliveira Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Me. Wanderson Aleksander da Silva Oliveira
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Me. Wagner Rodrigues Costa
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Este trabalho é dedicado a todos e a todas que acreditam na educação como principal meio de mudança para um Brasil justo e igualitário

Agradecimentos

Os primeiros agradecimentos vão para meus familiares. Juliane de Almeida Amorim, minha irmã. William Gomes da Silva, meu irmão. Ulisses Félix de Amorim Neto, meu pai. Em especial minha mãe, Juliana de Almeida Amorim, por todo carinho, atenção e paciência que me propôs em toda minha caminhada, desde quando muito pequeno até a finalização deste trabalho. Agradeço também aos meus amigos Abdeel Roberto Alves da Silva, Luís Eduardo Rangel Batinga de Oliveira, Adriana Jacqueline Ferreira de Oliveira e Ana maria ferreira do monte Lima, que sempre me ajudaram, deram conselhos e me incentivaram, também, à escrita deste devido trabalho.

Agradecimentos especiais a UFRPE que sem ela, nada disso teria sido realidade. Além disso, meus gratos agradecimentos ao meu professor orientador Dr. Tiago Dias Oliveira Silva, por todo o seu empenho, paciência e profissionalismo. Levarei suas dicas e ensinamentos para toda a minha vida.

Agradeço a todos os professores que participaram da minha formação como cidadão. Em especial, quero agradecer a professora Ana Cristina, minha primeira professora e homenagens póstumas a professora Beth e ao professor Josemir. Além disso, quero agradecer as minhas equipes que participei ao longo da minha vida em especial a toda equipe do ENSINA MAIS - Paulista (PE), particularmente, minha ex coordenadora e amiga Maria Cibely Rodrigues dos Santos, que influenciou diretamente na minha formação profissional. E não devo me esquecer de agradecer a todos os meus alunos e alunas que contribuíram para a minha formação como professor.

Modernizar o passado, é uma evolução musical
Cadê as notas que estavam aqui? Não preciso delas!
Basta deixar tudo soando bem aos ouvidos. O medo dá origem ao mal
O homem coletivo sente a necessidade de lutar
o orgulho, a arrogância, a glória, enche a imaginação de domínio
São demônios, os que destroem o poder bravio da humanidade
Viva Zapata! Viva Sandino! Viva Zumbi!
Antônio Conselheiro! Todos os panteras negras
Lampião, sua imagem e semelhança
Eu tenho certeza, eles também cantaram um dia.
(Chico Science & Nação Zumbi, Monólogo ao pé do ouvido)

Resumo

O ensino da geometria no ensino fundamental está atrelada a visualização do objeto geométrico e a noções matemáticas essenciais. Quando possível, deve-se co-relacionar objetos físicos com a teoria, afim de estabelecer um melhor entendimento para com os estudantes. Dessa forma, esse trabalho usa desse argumento para sua construção e aborda uma relação íntima com o uso de objetos físicos e a teoria. Este trabalho tem como foco apresentar processo de ensino e aprendizagem dos polígonos regulares sobre os seus movimentos de simetria. Dado de forma sistemática, esse processo é dado através da relação com a teoria de grupos diedrais e o uso de materiais lúdicos que permeiam o cotidiano infantil. Em especial, tais materiais são relacionados com o personagem "Patrick Estrela"do seriado infantil "Bob Esponja" e um jogo infantil de tabuleiro chamado de "Tábua geométrica". Afim de que sua utilização esteja relacionada não só aos polígonos regulares mas também as suas características. Falando nisso, uma característica muito importante dos polígonos regulares é sua forma invariante quando aplicados movimentos de rotação e reflexão. Daí, este trabalho utiliza dessa propriedade e dos objetos físicos/lúdicos já citados para estabelecer uma melhor assimilação no ensino e aprendizagem sobre os polígonos regulares. Quando formuladas, tais relações serão aplicadas em uma turma do 6° ano do ensino fundamental, explanando ao final, todos os resultados da intervenção.

Palavras-chave: Polígonos, regulares, ensino e aprendizagem.

Abstract

The teaching of geometry in elementary school is linked to the visualization of the geometric object and essential mathematical notions. When possible, one should co-relate physical objects with the theory in order to establish a better understanding for the students. Thus, this work uses this argument for its construction and addresses an intimate relationship with the use of physical objects and theory. This work focuses on presenting the teaching and learning process of regular polygons about their symmetry movements. Given in a systematic way, this process is given through the relationship with the theory of dihedral groups and the use of playful materials that permeate children's daily lives. In particular, such materials are related to the character "Patrick Estrela" from the children's series "SpongeBob" and a children's board game called "Gometric board". regular polygons but also their characteristics. Speaking of which, a very important characteristic of regular polygons is their invariant form when rotation and reflection movements are applied. Hence, this work uses this property and the physical/playful objects already mentioned to establish a better assimilation in the teaching and learning about regular polygons When formulated, such relationships will be applied in a 6th grade elementary school class, explaining at the end all the results of the intervention.

Keywords: Polygons, regular, teaching and learning.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O estudo da geometria no ensino fundamental, em especial, o estudo da geometria plana, necessita que o estudante se aproprie de dezenas de teoremas, definições e axiomas importantes que são essenciais para aprendizagem. Sua abrangência é tamanha, que não se limitou aos Parâmetros Curriculares Nacionais - (BRASIL, 1998) e segue presente no Banco Nacional Curricular Comum - (BRASIL, 2018). Esta última, estabelece diretrizes e habilidades que partem do 1° ano ao 9° ano do ensino fundamental. Em especial, a habilidade EF06MA18 chama a atenção pois “propõe reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulo, e classificá-los em regulares e não regulares” (BRASIL, 2018). Resumidamente falando, esta habilidade propõe o ensino e aprendizagem dos polígonos estabelecendo uma série de detalhes importantes para sua assimilação e compreensão plena. Esta habilidade se faz presente neste trabalho como principal ponto de partida para o ensino de geometria.

Se tratando do ensino e aprendizagem de polígonos, tal conteúdo é visto de formas diferentes nas diversas fases escolares. Nos anos iniciais, a assimilação das figuras planas mais simples é dada por meio da quantidade de lados e suas características básicas. Por exemplo, o quadrado é uma figura geométricas plana de quatro lados iguais, ou seja, de mesma medida. O mesmo vale para o triângulo, em que na sua ideia mais primitiva, pode ser considerado como uma figura geométrica plana de três lados apenas. E isso, perpassa para outras figuras simples, como trapézio, círculo, retângulo e losango, por exemplo.

Porém, com o passar dos níveis escolares, as noções e assimilações são associadas a tópicos mais complexos e partes mais técnicas da geometria. Uma dessas associações é a linguagem:

> Outras entidades presentes no trato com a geometria são os termos da linguagem verbal que são relacionados, de forma intrínseca e constitutiva, [...]. Neste complexo domínio, o da linguagem, há um leque amplo de possibilidades que se estende desde a linguagem materna coloquial, até a linguagem matemática simbólica. (CARVALHO; LIMA, 2006)

Com isso, representações geométricas que eram usadas de uma forma no início do ensino fundamental, são modificadas em níveis sucessores, como é o caso dos polígonos. Na mesma linha de raciocínio que apresentamos para as figuras geométricas planas, vamos adotar modificações na linguagem e uso de sinais. Por exemplo, o quadrado é um polígono composto de lados congruentes onde seus pares de lados opostos são paralelos. Por um pouco mais de detalhismo e alguns nuances geométricos, podemos retratar como um polígono regular de quatro lados. Portanto, quanto mais se avança nos níveis escolares, mais necessária é a integração entre a linguagem e os objetos geométricos.

Então, de modo geral, o ensino e aprendizagem de assuntos básicos da geometria são dados de modo intuitivo, através da assimilação de formas e suas características:

> No ensino inicial, tem sido recomendado que procuremos valorizar a geometria associado a movimentos corporais - giros, mudanças de direção ou de sentido, entre outros, além de incentivar atividades de manuseio e de visualização de objetos do mundo físico. (CARVALHO; LIMA, 2006)

Com isso, elaboramos uma pesquisa de técnicas lúdicas, baseadas nas referências e habilidades já mencionadas, voltadas ao ensino dos polígonos regulares e suas propriedades. Com isso, trazendo métodos baseados na teoria de grupos de simetria dos polígonos regulares abrangendo relações dos movimentos de rotação e reflexão. Aplicando em uma turma do 6° ano do ensino fundamental, este trabalho conta com o objetivo de propor uma sequência didática simples, relacionando os giros de figuras geométricas palpáveis e lúdicas e a preservação das formas dos polígonos regulares.

Vale salientar que no estudo e aprendizado dos polígonos regulares, aplicações de teoremas e noções sobre triângulos são indispensáveis, como por exemplo, propriedades do triângulo equilátero. Consequentemente, no desenvolvimento das ideias deste trabalho, serão necessários alguns termos e noções geométrico/matemáticas simples, porém, não serão demonstrados ou provados no mesmo. Neste caso, estamos falando de noções de congruência de triângulos, como os casos: lado-ângulo-lado (LAL), ângulo-lado-ângulo (ALA) e lado-lado-lado (LLL).

1 Simetria e a relação com os polígonos regulares

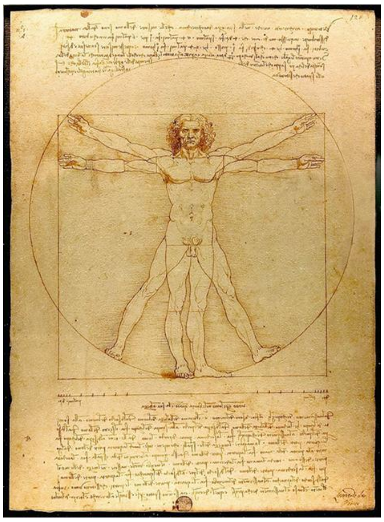
A definição da palavra simetria está atrelada ao seu contexto ou propósito. Usamos esta palavra para situações que envolvem a matemática, fatos ou fenômenos da natureza e até mesmo construções humanas, sejam elas esculturas, edificações, entre outros. Porém, a palavra simetria pode ser entendida de duas maneiras, de acordo com (ROHDE, 1997):

> A noção de simetria está, atualmente, ligada a duas representações. Uma representação geométrico-matemática, envolvendo as invariantes descobertas nas ciências naturais e outra representação, a social visual, notadamente apresentada pelas artes visuais e sem o rigor formal da ciência.

Portanto, é de extrema importância distinguirmos cada uma delas, para que possamos nos aprofundarmos em nosso trabalho. Começando pelo viés menos formal, de acordo com os dicionários brasileiros, em seu sentido figurado, simetria é a harmonia e regularidade de proporções. De acordo com (AMANHÃ, 2018), "um objeto é simétrico quando existe uma "harmonia de proporções" de suas partes em relação ao todo: altura, largura e comprimento têm uma relação equilibrada entre si". Um exemplo clássico é a obra do pintor Leonardo Da Vinci, "O homem Vitruviano". Em sua busca pela construção da figura do homem perfeito, ele estabelece, referências da relação de cada parte do corpo entre si, retratadas através das palavras de (MARTINS, 2017):

> 4 dedos formam 1 palmo e 4 palmos formam 1 pé, 6 palmos formam um côvado; 4 côvados formam a altura de um homem. 4 côvados formam 1 passo, e 24 palmos formam um homem. O comprimento dos braços estendidos de um homem é igual à sua altura. Das raízes de seus cabelos à ponta do seu queixo é a décima parte da altura do homem; da ponta do queixo até o topo da cabeça é um oitavo da sua altura; do topo do peito às raízes do cabelo será a sétima parte do homem inteiro; dos mamilos ao topo da cabeça será a quarta parte do homem. A maior largura dos ombros contém em si a quara parte do homem; do cotovelo até a ponta da mão será a quinta parte do homem; e do cotovelo até o ângulo da axila será a oitava parte do homem. A mão inteira será a décima parte do homem. A distância da ponta o queixo até o nariz e das raízes dos cabelos até as sobrancelhas, é, em todos os casos, e como o ouvido, um terço da face.

Figura 1 – Representação da obra "O homem Vitruviano" de Leonardo Da Vinci



Fonte: (MARTINS, 2017)

Fugindo um pouco da figura humana, podemos estender essa relação harmônica de simetria na natureza como plantas e animais. A simetria das asas abertas da borboleta coruja é um ótimo exemplo. Quando abertas, se passa por despercebida, muitas vezes confundida com uma coruja, afastando animais maiores e predadores. Podemos visualizá-la na figura abaixo:

Figura 2 – Representação da borboleta coruja

Fonte: (ROCHA, 2013)

Porém, em matemática, o conceito de simetria vai muito além do apelo estético e harmônico. Não basta apenas "fazer sentido" ou estar "parecido". Diante disso, (ROHDE, 1997) traduz simetria, com foco geométrico-matemático como: "[...] expressa a propriedade pela qual um ente, objeto ou forma exibe partes correspondentes (ou congruentes) quando submetida a uma operação específica, denominada operação de simetria". (BASTOS, 2006) complementa estabelecendo, também, a definição da palavra "figura" e consequentemente a definição de simetria de um modo mais amplo, abrangendo figuras do plano e do espaço:

> Um subconjunto de pontos do plano ou espaço, conforme o contexto em que nos encontramos a trabalhar. Sendo assim, podemos falar de simetria, ou simetrias, de uma recta, de um rectângulo, de uma esfera ou de um dodecaedro rômbico, por exemplo, mas também de um desenho artístico ou de uma escultura, desde que entendidos como subconjunto de pontos do plano, no primeiro caso, ou do espaço, no segundo caso. (BASTOS, 2006, p. 9 - 10)

De modo geral, podemos perceber que a simetria do ponto de vista mais formal, exige apresentações de outros conteúdos como noções de pontos e eixos de simetria, por exemplo.Portanto, a ideia de simetria está intimamente ligada a partes ou ao todo de uma figura, seja ela no plano ou no espaço, que se encaixam por operações específicas: reflexão, rotação e translação. Outro aspecto importante no estudo das simetrias das figuras planas é a existência de eixos de simetria, ou seja, uma representação de uma reta que corta uma figura em duas partes iguais. De modo geral, o aprendizado dos eixos de simetria, no ensino básico, é dado a partir do 7° ano do ensino fundamental, como diz a habilidade EF07MA21, da BNNC:

> Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 309)

Porém, diferentemente da habilidade relatada acima, a habilidade EF06MA18 não propõe o estudo e aprendizado da simetria nem aplicado em polígonos regulares ou qualquer outro conteúdo geométrico curricular, consequentemente não citando o estudo de eixos de simetria, rotações e reflexões de figuras simétricas, por exemplo. Com isso, para a construção, adequação à turma e aplicação deste trabalho, serão utilizados algumas noções básicas de eixos de simetria e rotações de poligonos regulares, mas adaptada ao ensino do 6° ano do ensino fundamental, basendo não apenas na habilidade EF06MA18 também da habiliadde EF07MA21. Sabendo disso, vamos desenvolver a ideia de polígonos regulares e após isso incrementar conceitos específicos de simetria, relatando as suas operações e aplicações nos polígonos regulares.

Das palavras de (BARBOSA, 2008):

> Um polígono regular é um polígono que é equilátero equiangular. Com isto queremos dizer que todos os seus lados são congruentes (equilátero) e também todos os seus ângulos são congruentes (equiangular).

Resumidamente falando, polígonos regulares são polígonos que apresentam lados e ângulos internos congruentes, ou seja, lados com mesma medida e ângulos também.

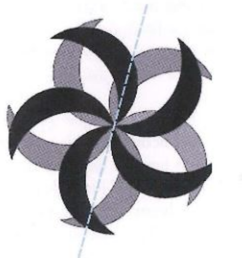
Através desse fato, a presença de eixos de simetria se torna mais cômoda e viável. Em especial, os polígonos regulares apresentam a quantidade de lados igual a quantidade de eixos de simetria. Mesmo assim, não é condição exclusiva para o restante dos polígonos, muito menos para figuras geométricas planas fechadas.

Primeiramente, vamos tratar do primeiro caso de operações em simetria, a rotação. A operação de rotação pode ser entendida da seguinte forma:

> A rotação igualmente constitui simetria simples, conhecida como "cíclica" ou "rotatória". A forma, depois de percorridos os 360 graus em torno do eixo de rotação, exibe n vezes posição congruente no espaço. A ordem do eixo de rotação é dada por n. (ROHDE, 1997, p. 15)

Exemplificando o referido caso, vamos supor a seguinte figura:

Figura 3 – representação de um polígono fechado



Fonte: (BASTOS, 2006, p. 10)

> [...] A figura 3 tem simetrias de rotação, isto é, se fizermos uma rotação do plano com centro no ponto O e ângulo de 72° (ou 144°, ou 216°, ou 288°, ou ainda 360°), a figura transformada é exatamente a mesma que a original. Dizemos, por isso, que as rotações de centro O e ângulos 72°, 144°, 216°, 288° e 360° são simetrias da figura, ou que a figura tem 5 simetrias com centro em O, ou ainda que O é um centro de simetria de ordem 5. (BASTOS, 2006, p. 10-11)

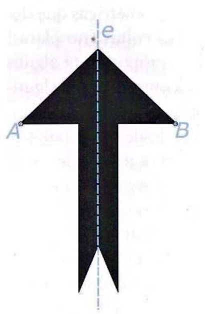
Com isso, podemos concluir que uma figura quando aplicados movimentos de rotação em torno de seu próprio centro de gravidade, possui simetrias rotacionais, onde a quantidade de simetrias está relacionadas a quantidade de rotações que preservam a figura.

Outra operação de simetria é a reflexão, comumente relacionada ao espelho devido apresentar o reflexo de algo, alguém ou alguma coisa. De modo mais amplo, a simetria de reflexão é dada como:

> A simetria de reflexão é a simetria bilateral obtida colocando-se um objeto diante de um espelho e considerando se a forma e sua imagem. Uma forma com simetria de reflexão possui um plano imaginário que o divide em duas partes idênticas, de natureza especular (enantiomorfas). (ROHDE, 1997, p. 12)

É percebido, então, que a simetria de reflexão é a simetria dada pela rotação em torno dos eixos. Se uma figura qualquer tiver apenas um eixo de simetria, ou seja, uma reta que à divide em duas figuras idênticas, então a mesma possui apenas um movimento de reflexão. O mesmo vale para mais eixos de simetria. Na figura abaixo, temos um polígono que contém apenas um eixo de simetria, vejamos:

Figura 4 – representação de um polígono fechado



Fonte: (BASTOS, 2006, p. 10)

> A figura tem um eixo de simetria porque se fizermos uma reflexão do plano segundo esse eixo, a figura é transformada nela própria, embora cada ponto da figura seja, em geral, transformado num outro ponto. O ponto A é transformado no ponto B pela reflexão segundo o eixo e, mas o conjunto de pontos que constitui a figura fica globalmente invariante para a reflexão (do plano) segundo o eixo e. Dizemos então que a figura tem uma simetria de reflexão, de eixo e, ou que a reflexão de eixo e é uma simetria da figura. (BASTOS, 2006, p. 10)

Por fim, vamos retratar mais uma operação de simetria abordada no ensino fundamental e citada anteriormente neste trabalho pela habilidade EF07MA21, a translação. Podemos entender simetria de translação da seguinte forma:

> A translação constitui operação simples de simetria e corresponde à repetição periódica de um motivo que se desloca em uma direção. O período é a menor distância em que o motivo precisa ser deslocado para que haja superposição sobre o eixo. (ROHDE, 1997, p. 10)

Figura 5 – Simetria de translação em uma ornamentação de um palácio de Dario, em Susa

Fonte: (ROHDE, 1982, p. 17)

Figura 6 – Representação da simetria por translação

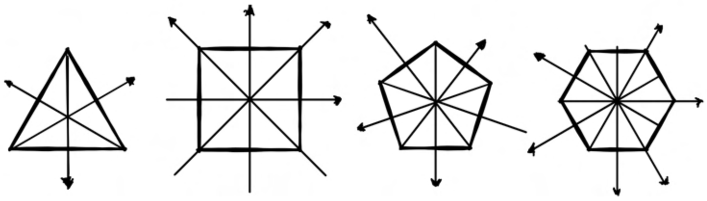
Fonte: (BASTOS, 2006, p. 11)

> A figura 6, que vamos supor prolongada indefinidamente para os dois lados, como se o rasto de pagadas continuasse sempre na mesma direção, não tem simetrias de reflexão nem de rotação. Mas tem simetrias de translação, isto é, se fizermos uma translação do plano segundo o vector AB, a figura, no seu conjunto, é transformada nela própria, embora nenhum ponto da figura seja invariante para essa transformação. (BASTOS, 2006)

Quando analisamos a simetria aplicada nos polígonos regulares, podemos perceber que apresentam simetria rotacional em torno do próprio centro de gravidade e simetrias de reflexão em torno de seus eixos de simetria. Já a simetria de translação não será aplicada aos polígonos regulares, pois é uma figura fechada (não apresenta separação por partes repetitivas) e não é necessária para a nossa pesquisa analisar o deslocamento dessas figuras por um vetor. Com isso, de modo geral, os polígonos regulares apresentam duas operações de simetria relevantes, as simetrias de rotação e reflexão.

Vejamos agora a representação de um fato mencionado anteriormente que todos polígonos regulares possuem a quantidade de eixos de simetria igual a quantidade de seus lados (onde tal fato será demonstrado ainda neste tópico):

Figura 7 – Retas imaginárias como eixos de simetria em alguns polígonos regulares



Fonte: Autoria própria

Observe que o triângulo na figura 7 possui 3 eixos de simetria. Já o quadrado possui 4 eixos, seguindo com o pentágono com 5 e o hexágono com 6 eixos de simetria. Poderíamos ter adicionado à figura 7 outros polígonos regulares como o heptágono, octógono, entre outros. Porém, o objetivo é perceber intuitivamente que os polígonos regulares possuem a quantidade de eixos de simetria igual a quantidade de seus lados. De fato, isto está relacionado ao fato de que todo polígonos regular está inscrito em um círculo. A princípio, vamos propor um processo de aprendizagem da igualdade de eixos de simetria para seus lados através de polígonos mais simples, no caso, o triângulo e o quadrado. E por fim, mostrar que é válido para quaisquer polígono regular.

O triângulo equilátero é um polígono regular composto por 3 lados e ângulos congruentes. Neste podemos cortar em partes simétricas que cortam exatamente seu centro de gravidade, em apenas 3 retas. Mas o que é um centro de gravidade? De uma forma simples o centro de gravidade ou também chamado de baricentro de um triângulo, é o ponto de encontro das medianas. Por sua vez, mediana é um segmento que parte de um dos vértices do triângulo e intersecta o seu respectivo lado oposto exatamente no ponto médio deste lado. Para enfatizar e concluir a ideia da existência do centro de gravidade no triângulo, vejamos o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *As medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto em seu interior, dividindo a mediana no ponto $\frac{2}{3}$ da vértice correspondente.*

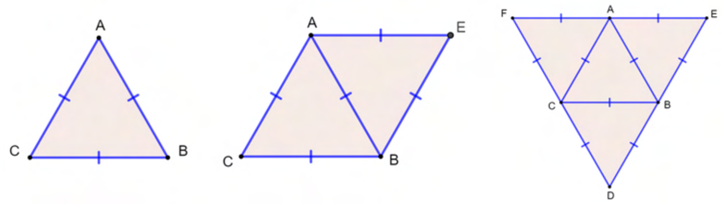
Demonstração. Seja dado $\triangle$ABC e considere os pontos médios E e F dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Como os ângulos internos de quaisquer triângulo são menores que 180°, logo suas medianas se intersectam entre si. Daí, seja G a intersecção das medianas $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Agora suponha o prolongamento $\overline{AH}$ tal que $\overline{AG} = \overline{GH}$, como mostra na figura 8. Como F e G são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$ de $\triangle$ABH, temos que $\overline{FG}$ é paralelo a $\overline{BH}$ e $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{BH}$. Da mesma forma, como G e E são pontos médios dos lados $\overline{AH}$ e $\overline{AC}$ de $\triangle$AHC, $\overline{GE}$ é paralelo a $\overline{CH}$ e $\overline{GE} = \frac{1}{2}\overline{CH}$. Como $\overline{GC}$ é paralelo a $\overline{BH}$ e $\overline{BG}$ é paralelo a $\overline{CH}$, o quadrilátero GBHC é um paralelogramo e consequentemente, $\overline{BH} = \overline{GC}$ e $\overline{HC} = \overline{BG}$. Logo, $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{GC}$ e $\overline{GE} = \frac{1}{2}\overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{BG}$. Agora note que o prolongamento de AG cortam outro no meio. Além disso, $\overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{AG}$. Logo, todas as medianas cruzam no mesmo ponto *que é uma distância $\frac{2}{3}$ dos vértices correspondentes)(MASSAGO, 2010) $\square$

1.1 Eixos de simetria do triângulo equilátero

Proposição 1.2. *Todo triângulo equilátero possui três eixos de simetria que concorrem a um único ponto chamado de baricentro ou centro de gravidade.*

Demonstração. Suponha o triângulo equilátero △ACB. Dele, construímos um quadrilátero □ACBE, tal que $\overline{AC} \parallel \overline{EB}$ e $\overline{AE} \parallel \overline{CB}$, ou seja, um paralelogramo. Através do segmento $\overline{AB}$, temos a formação dos triângulos △ABE e o já existente △ACB. Note que por construção, temos que o quadrilátero □ACBE é um paralelogramo, logo $\overline{AE} \equiv \overline{CB}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{EB}$. E como o triângulo △ACB é equilátero, por hipótese, então temos que o triângulo △ABE é equilátero também. De modo análogo, podemos propor a formação de mais dois quadriláteros, são eles □FCBA e □ACDB. Observe a evolução das construções já relatadas através da figura a seguir:

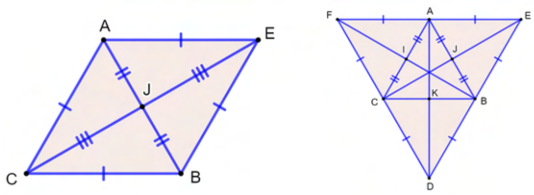
Figura 8 – Representação da construção da demonstração



Fonte: Autoria própria

Tomemos mais uma vez o paralelogramo □ACBE e tracemos a diagonal $\overline{CE}$. A intersecção com a diagonal $\overline{AB}$ será denotado por J. Note que o segmento $\overline{CJ}$ da origem a dois triângulos, que são △ACJ e △JCB. Além disso, como o triângulo △ACB é equilátero, logo $\hat{A} = \hat{B}$ e $\overline{AC} = \overline{CB}$. Por fim, perceba que o lado $\overline{CJ}$ está em comum aos triângulos △ACJ e △JCB. Então, pelo caso de congruência (LAL), os triângulos △ACJ ≡ △JCB. Com isso, J é ponto médio de $\overline{AB}$. Como J é ponto médio de $\overline{AB}$ então pelo caso de congruência (LLL), temos que △ACJ ≡ △JCB. Daí, $\overline{CJ}$ é uma das medianas de △ACB. De modo análogo, quando aplicados os mesmos processos nos quadriláteros □FCBA e □ACDB, obtemos $\overline{IB}$ e $\overline{AK}$, as outras duas medianas de △ACB.

Figura 9 – Representação da construção da demonstração



Fonte: Autoria própria

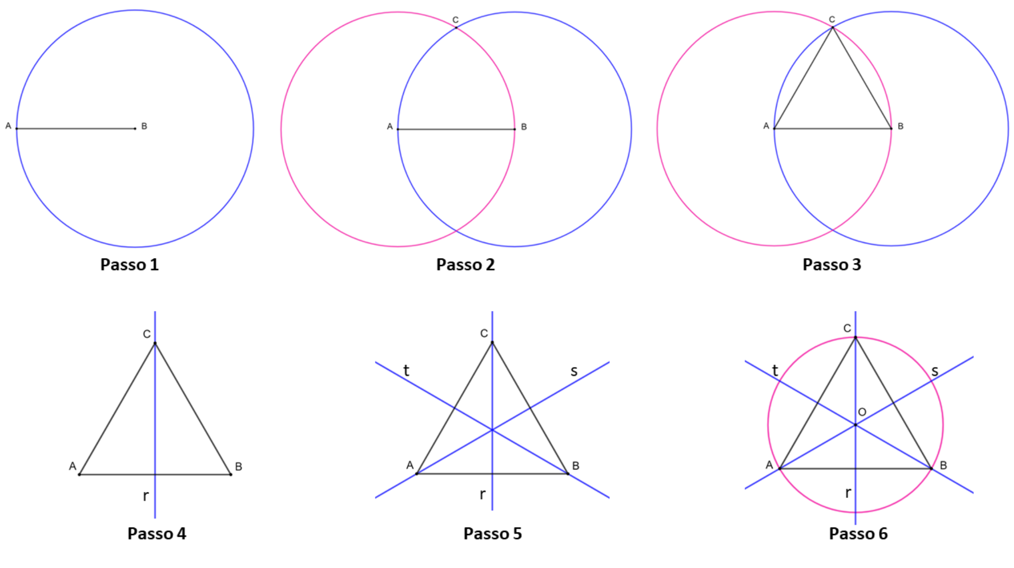
□

1.2 Construção do triângulo equilátero e seus eixos de simetria utilizando régua e compasso

Uma outra forma mais simples de demonstrar a existência dos 3 eixos de simetria do triângulo equilátero, é utilizando os materiais de desenho. Para isso, por construção, vamos encontrar o baricentro e mostrar que nele intersectam-se apenas 3 eixos de simetria.

- Passo 1: Com auxílio de régua tracemos um segmento $\overline{AB}$. Após isso, com ajuda do compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$, com centro em B.
- Passo 2: Construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ com centro em A. Daí, temos dois pontos de intersecção entre elas, denotando por C, a intersecção superior.
- Passo 3: Agora, com auxílio de régua, ligue os pontos de tal forma que obtemos os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Dessa forma, temos a formação do triângulo $\triangle$CAB.
- Passo 4: Com auxílio do compasso, construa a mediatriz r relacionada ao lado $\overline{AB}$.
- Passo 5: De modo análogo ao passo 4, construa as mediatrizes s e t, relacionadas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.
- Passo 6: Por construção, temos a formação dos eixos de simetria, onde passam por apenas um único ponto (baricentro). Além disso, a distância entre o ponto O e quaisquer vértices do triângulo resulta em um raio da circunferência.

Figura 10 – Passos da construção geométrica dos eixos de simetria do triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria

1.3 Eixos de simetria do quadrado

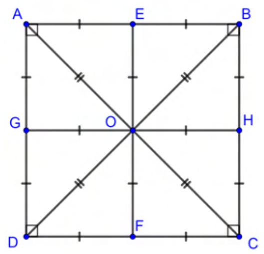
O mesmo é aplicado ao quadrado, um polígono regular composto por 4 lados congruentes com todos os seus ângulos internos medindo 90 graus. A proposição a seguir mostra que de fato, o quadrado possui 4 eixos de simetria. Como dois deles são diagonais, basta apenas encontrar o restante, que como foi mencionado anteriormente, estão atrelados a relações triangulares.

Proposição 1.3. *Quadrado tem 4 eixos de simetria*

Demonstração. Suponha o quadrado □ABCD e a diagonal $\overline{AC}$, logo há a formação de dois triângulos, △ADC e △ACB. Pelo caso de congruência (LLL), os triângulos △ADC ≡ △ACB são congruentes. Daí, temos $\overline{AC}$, um eixo de simetria do quadrado. como ambos os triângulos são isósceles, temos que os ângulos $B\hat{A}C \equiv B\hat{C}A \equiv C\hat{A}D \equiv A\hat{C}D$. Agora, traçamos a diagonal $\overline{BD}$, cuja intersecção com a diagonal $\overline{AC}$ será denotado por O. Note que $A\hat{O}B \equiv D\hat{O}C$ são congruentes por serem opostos pelo vértice. Logo, pelo caso de congruência (ALA), os triângulos △AOB ≡ △ADOC são congruentes. Daí, temos que o ponto O é o ponto médio das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.E assim, temos agora $\overline{BD}$, o segundo eixo de simetria.

Como as diagonais de um quadrado são congruentes e O é ponto médio, então $\overline{AO} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{BO} \equiv \overline{OD}$. Consequentemente temos que os triângulos △AOB ≡ △BOC ≡ △COB ≡ △DOC são congruentes. Além disso, esses triângulos citados são isósceles, logo os ângulos B$\hat{A}$O ≡ A$\hat{B}$O ≡ C$\hat{B}$O ≡ O$\hat{C}$B ≡ D$\hat{C}$O ≡ C$\hat{D}$O ≡ O$\hat{D}$A ≡ D$\hat{A}$O. E com isso, temos que todos esses ângulos citados anteriormente medem 45°. Suponha agora o segmento $\overline{EF}$, tal que $\overline{EF} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ e intersecte o ponto O, conforme representado na figura 11. Note que, A$\hat{E}$O ≡ B$\hat{E}$O ≡ D$\hat{F}$O ≡ C$\hat{F}$O. Daí, pelo caso de congruência (LAL), temos que os triângulos △AEO ≡ △BEO ≡ △DFO ≡ △OFC. Com isso, $\overline{AE} \equiv \overline{EB} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{FC}$. E consequentemente temos o terceiro eixo de simetria do quadrado. E por fim, análogo ao terceiro eixo de simetria, podemos encontrar o quarto eixo de simetria supondo o segmento $\overline{GH}$, tal que $\overline{GH} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Figura 11 – Eixos de simetria do quadrado



Fonte: Autoria própria

□

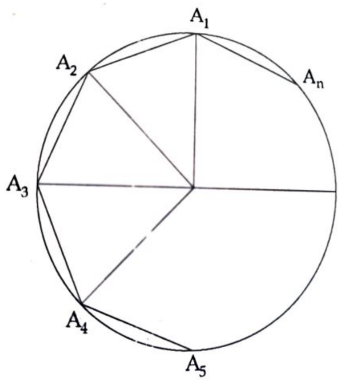
Para outros polígonos como pentágono, hexágono e afins, temos procedimentos análogos. Ao longo deste capítulo, percebemos e provamos que o triângulo equilátero apresenta 3 eixos de simetria, já o quadrado, 4 eixos. Intuitivamente podemos supor que o mesmo vale para o restante dos polígonos regulares, ou seja, o número de lados dos polígonos regulares é igual ao número de eixos de simetria.

Mas para provar esse fato, precisamos provar que todo polígono inscrito em uma circunferência tem seu ponto de gravidade coincidente ao ponto central da circunferência. Consequentemente, há diâmetros que dividem o polígono ao meio, encontrando os eixos de simetria.

Proposição 1.4. *Todo polígono regular está inscrito em um círculo*

> *Demonstração.* Seja $A_1, A_2, ..., A_n$ um polígono regular. Tracemos o círculo que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3. Seja O o centro deste círculo. Como $\mathrm{O}A_2 = \mathrm{O}A_3$ então o triângulo $\mathrm{O}A_2A_3$ é isósceles e logo $\mathrm{O}\hat{A}_2A_3 = \mathrm{O}\hat{A}_3A_2$. Como o polígono é regular, todos os seus ângulos internos têm a mesma medida. Portanto, $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_4$. Logo, $A_1\hat{A}_2O = O\hat{A}_3A_4$. Como além disso, $A_2A_3 = A_3A_4$ (lados de um polígono regular são congruentes) e $\mathrm{O}A_2 = \mathrm{O}A_3$, então triângulos OA_1A_2 e OA_4A_3 são congruentes. Daí, obtém-se $OA_4 = OA_1$. Portanto, A_4 também é um ponto do círculo. O mesmo raciocínio pode agora ser repetido para provar que A_4 também pertence ao círculo, e assim sucessivamente. Como resultado final obtém-se que todos os vértices do polígono pertencem ao círculo. (BARBOSA, 2008, p. 139 - 140) □

Figura 12 – Representação do polígono de n lados inscritos em uma circunferência qualquer



Fonte: (BARBOSA, 2008, p. 139)

Agora, vamos nos aprofundar no conhecimento mais técnico que envolvem os polígonos regulares, o estudo dos grupos diedrais e seu impacto nos polígonos regulares. Para isso, vamos iniciar através de uma breve introdução à teoria de grupos.

2 Teoria de grupos diedrais e a relação com os polígonos regulares

Definição 2.1. Um conjunto G não vazio dotado de uma operação

$$G \times G \to G$$
$$(a, b) \to a \cdot b$$

é chamado de grupo se satisfaz 3 condições: a operação é associativa, existe elemento neutro e que todo elemento de G possui elemento inverso. Vejamos a seguir tais condições:

a) A operação é associativa:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\ a \in G$$

b) Existe elementos neutro

$$\text{Existe } e \text{ em } G \text{ tal que } a \cdot e = e \cdot a = a, \forall\ a \in G$$

Observação 2.2. O elemento neutro é único

Suponha $e, e' \in G$, elementos neutros de G. Com isso, temos:

$$e = e \cdot e', \text{ pois } e' \text{ é elemento neutro, logo } e = e'$$

c) Existe elemento inverso:

$$\forall\ a \in G, \text{ existe } b \in G \text{ tal que } a \cdot b = b \cdot a = e$$

Observação 2.3. O elemento inverso é único. De fato, seja $a \in G$, e sejam $b, b' \in G$ dois elementos inversos de a, temos:

$$b = b \cdot e = b \cdot (a \cdot b'), \text{ pois } b' \text{ é inverso de } a.$$

$$\text{Logo, } b = (b \cdot a) \cdot b' = e \cdot b' = b'. \text{ Daí, } b \text{ é inverso de } a.$$

Observação 2.4. Sobre a composição interna, "quando a lei de composição considerada for uma adição diremos que o grupo em questão é um grupo aditivo ao passo que se a lei for uma multiplicação nos referimos a ele como grupo multiplicativo "(DOMINGUES; IEZZI, 1982)

Definição 2.5. Chamamos de grupo abeliano ou comutativo se a operação é comutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$$

Complementando mais uma vez através das palavras de Iezzi (1982):

> Quando se desenvolve a teoria dos grupos comutativos a notação usada para indicar a lei de composição interna é usualmente, a aditiva. A razão disso é que nos modelos mais importante dessa situação (grupo abeliano) as operações são adições. (DOMINGUES; IEZZI, 1982)

Com todas as informações passadas até aqui, vejamos alguns exemplos de grupos:

- Grupo aditivo dos inteiros ($\mathbb{Z}$,$+$).
- Grupo aditivo dos racionais ($\mathbb{Q}$, $+$).
- Grupo aditivo dos reais ($\mathbb{R}$, $+$).
- Grupo aditivo dos complexo ($\mathbb{C}$, $+$)
- Grupo multiplicativo dos racionais ($\mathbb{Q}^*$, $\cdot$).
- Grupo multiplicativo dos reais ($\mathbb{R}^*$, $\cdot$).
- Grupo multiplicativo dos complexos ($\mathbb{C}^*$, $\cdot$).

O estudo do grupo das simetrias espaciais dos polígonos regulares está inteiramente ligado a permutações. De um modo simplista, podemos estabelecer que uma permutação de um dado conjunto T pode ser relacionada com formas de ordenações de seus elementos. Vamos supor uma situação do nosso cotidiano, como por exemplo, a escolha de peças de roupas para os 7 dias da semana. Suponha que Thiago tenha que escolher uma camisa diferente entre 7, para cada dia da semana. Suponha ainda que a cada semana, ele escolhe uma sequencia de camisas que nunca tenha usado anteriormente. Quantas semanas se passarão para que seja forçado a usar uma sequência de camisas da primeira semana? Permutações são comumente vistas em análise combinatória, no ensino médio. De certa forma, não é um cálculo tão complicado a se responder, basta apenas calcularmos $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$, ou seja, Thiago voltará a usar a mesma sequência de camisas após 5040 semanas. É esse tipo de pensamentos que devemos levar para o estudo e aprendizado dos grupos de simetrias espaciais dos polígonos regulares, mas para isso, temos que nos apegar à noções um processo mais sólido. Vamos supor o conjunto $T = \{A, B, C\}$, adquirindo apenas 6 permutações:

$$\{A,B,C\},\{A,C,B\},\{B,A,C\},\{B,C,A\},\{C,B,A\},\{C,A,B\}$$

Hungerford (2013) sintetiza que a permutação do conjunto T como uma função bijetora de T a T. Por exemplo, selecionando uma ordenação avulsa, $\{C,B,A\}$, podemos associa-la a uma função $f : T \to T$, tal que $f(A) = C$, $f(B) = B$ e $f(C) = A$. Agora vamos selecionar a ordenação $\{C,A,B\}$. Note que essa associação determina uma função $g(A) = C$, $g(B) = B$ e $g(C) = A$, então podemos concluir que as ordenações determinam uma função bijetora no conjunto.

Mais geralmente, seja C um conjunto qualquer. Considere o conjunto

$$\text{Bij}(C)\colon \{f\colon C \to C \text{ tal que } f \text{ é bijeção}\}$$

temos que (Bij (C), $\circ$) é grupo onde $\circ$ denota a composição de funções. De fato;

1. $\circ$ é associativa: $f \circ (g \circ h)(x) = f\ (g\ (h(x)) = f \circ g\ (h(x)) = (f \circ g)\ h(x), \forall\ x \in C$.
2. $\circ$ possui elemento neutro. Seja:

$$\begin{array}{c} i : C \to C\ \ f \circ i(x) = f(x), \forall\ x \in C \\ x \to x\ \ i \circ f(x) = i(f(x)) = f(x), \forall \in C. \end{array}$$

   Logo, $f \circ i = i \circ f = f$

3. $\circ$ possui elemento inverso:

   Dada f bijeção existe $f^{-1}C \to C$ tal que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ (f^{-1} é chamada de inversa de f). Assim:

$$\begin{array}{c} f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y, \forall\ y \in C \\ f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\ (y) = x, \forall\ x \in C \end{array}$$

"Caso o conjunto C tenha um número finito n de elementos, Bij (C) será denotado por S_n e será chamado grupo simétrico ou grupo das permutações de n letra"(GARCIA; LEQAUIN, 2008).

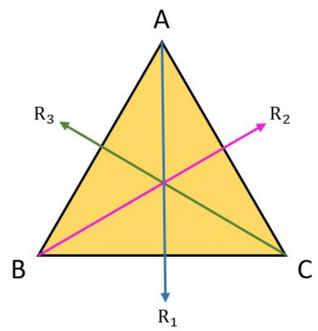
Os grupos de permutação serão a base matemática para o restante do trabalho e serão detalhados na próxima secção. Veremos os elementos desses grupos não como funções mas sim de movimentos (rotações e reflexões) dos polígonos regulares. Os polígonos regulares que estudaremos são triângulo equilátero, quadrado e pentágono. Este último servirá como polígono base para as aplicações em sala de aula. Por isso, é de extrema importância seu detalhamento sobre o seu grupo de simetria. Primeiramente, vejamos o grupo de simetria do triângulo equilátero.

2.1 Grupo de simetria do triângulo equilátero

Para $n \geq 3$, o grupo diedral, ou grupo das simetrias, D_n do polígono regular com n lados é definido como sendo o conjunto dos movimentos rígidos (rotações e reflexões) que levam o polígono nele mesmo com a operação de composição.

Vimos em tópicos anteriores, que o triângulo equilátero possui 3 eixos de simetria. Então, seja um triângulo $\triangle$ABC, cujo seus eixos de simetria sejam denotados por E_1, E_2 e E_3. Tais eixos são bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, intersectam os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ em seus respectivos pontos médios (medianas) e intersectam o centro de gravidade, denotado pelo ponto O. Vejamos na figura a seguir:

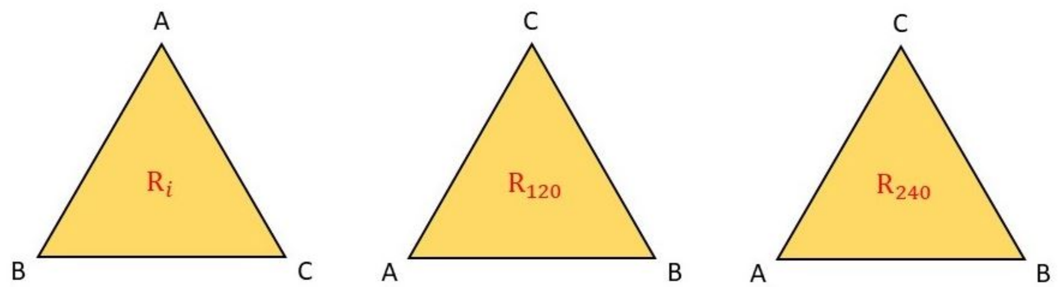
Figura 13 – Representação do triângulo equilátero identidade com seus eixos de simetria



Fonte: Autoria própria

Dado que o triângulo equilátero possui ângulos internos congruentes, ou seja, cada um mede 60°, temos que movimentos de rotação medindo 0°, 120° e 240° preservará a forma do mesmo, através do cálculo do ângulo externo (360/n, onde n é a quantidade de lados). Com isso, os seguintes movimentos no sentido anti-horário, em torno do centro de gravidade, preservarão sua forma: R_i (identidade), R_{120} e R_{240}. Observe abaixo a representação desses movimentos:

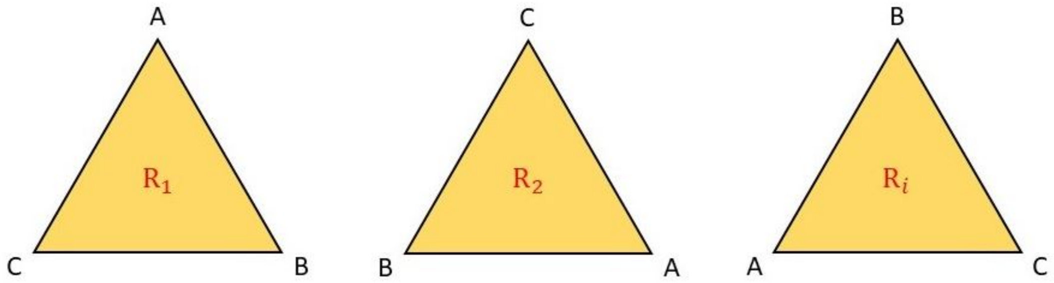
Figura 14 – Representação dos movimentos de rotação possíveis em torno do centro de gravidade do triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria

Já quando aplicados movimentos em torno dos eixos de simetria (E_1, E_2 e E_3), ou seja, movimentos de reflexão, obtemos a preservação do triângulo equilátero em mais 3 configurações distintas: R_1, R_2 e R_3. Vejamos abaixo tais configurações:

Figura 15 – Representação dos movimentos de reflexão possíveis em torno dos eixos de simetria do triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria

Com isso, temos que o grupo de simetria do triângulo equilátero, denotado por $S_\triangle$ é dado por:

$$S_\triangle = \{R_i, R_{120}, R_{240}, R_1, R_2, R_3\}.$$

$S_\triangle$ é um grupo pois dada composições entre os movimentos, admite operação associativa, existência de elemento neutro e existência de inverso.

Observe a seguir uma tabela contendo todas as composições dos movimentos do triângulo equilátero.

Figura 16 – Representação das combinações dos movimentos do triângulo equilátero

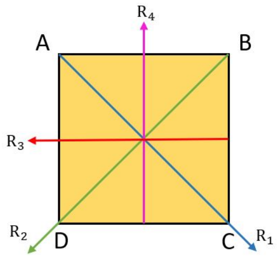
	Ri	**R120**	**R240**	**R1**	**R2**	**R3**
Ri	Ri	R120	R240	R1	R2	R3
R120	R120	R240	Ri	R2	R3	R1
R240	R240	Ri	R120	R3	R1	R2
R1	R1	R3	R2	Ri	R3	R120
R2	R2	R1	R3	R120	Ri	R240
R3	R3	R2	R1	R240	R120	Ri

Fonte: Autoria própria

2.2 Grupo de simetria do quadrado

Suponha o quadrado □ABCD. Dados em tópicos anteriores, o quadrado possui 4 eixos de simetria, denotado por E_1, E_2, E_3 e E_4. Os eixos de simetria são caracterizados, neste caso, como as diagonais e dois eixos que intersectam as medianas dos lados paralelos entre si. Assim, temos que há dois eixos que são as próprias diagonais e há outros dois eixos que intersectam as medianas de AB ∥ CD e BC ∥ AD. A intersecção entre os eixos de simetria forma o centro de gravidade, que denotaremos pelo ponto O.

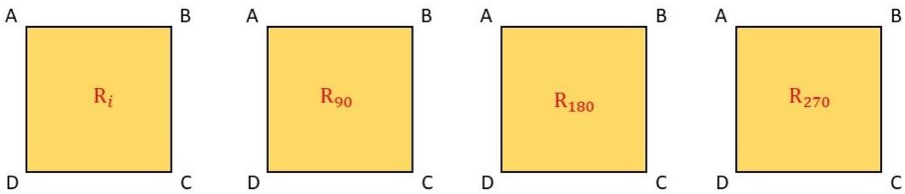
Figura 17 – Representação do quadrado inicial e seus eixos de simetria



Fonte: Autoria própria

Dado que o quadrado possui ângulos internos e externos medindo 90°, temos que movimentos de rotação no sentido anti-horário através do ângulo de 90°, preservam a sua forma. Tais movimentos são denotados por R_i, R_{90}, R_{120} e R_{270}, dados na figura abaixo:

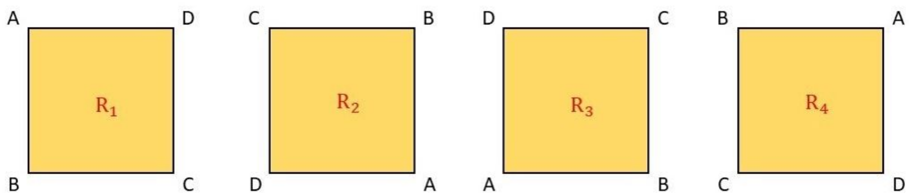
Figura 18 – Representação dos movimentos de rotação preservados



Fonte: Autoria própria

Quando aplicados movimentos em torno dos eixos de simetria (E_1, E_2 e E_3), ou seja, movimentos de reflexão, temos a preservação do quadrado em 4 configurações distintas:

Figura 19 – Representação dos movimentos de reflexão preservado



Fonte: Autoria própria

Com isso, temos que o grupo de simetria do quadrado denotado por S quadrado é dado por: $S_{\square} = \{R_i, R_{90}, R_{180}, R_{270}, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

Por fim, podemos aplicar permutações entre os possíveis movimentos já mencionados ($S_{\square}$), em forma de tabelas, temos a seguinte configuração:

Figura 20 – Representação das permutações dos movimentos que preservam a forma do quadrado

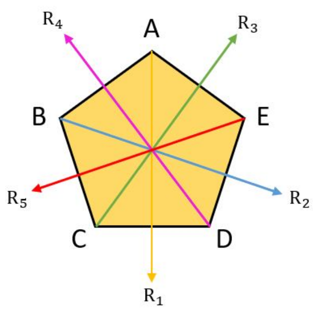
	Ri	**R90**	**R180**	**R270**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**
Ri	Ri	R90	R180	R270	R1	R2	R3	R4
R90	R90	R180	R270	Ri	R3	R4	R1	R2
R180	R180	R270	Ri	R90	R2	R1	R4	R3
R270	R270	Ri	R90	180	R3	R4	R2	R1
R1	R1	R3	R2	R4	Ri	R180	R90	R270
R2	R2	R4	R1	R3	R180	Ri	R270	R90
R3	R3	R2	R4	R1	R270	R90	Ri	R180
R4	R4	R1	R3	R2	R90	R270	R180	Ri

Fonte: Autoria própria

2.2.1 Grupo de simetria do pentágono

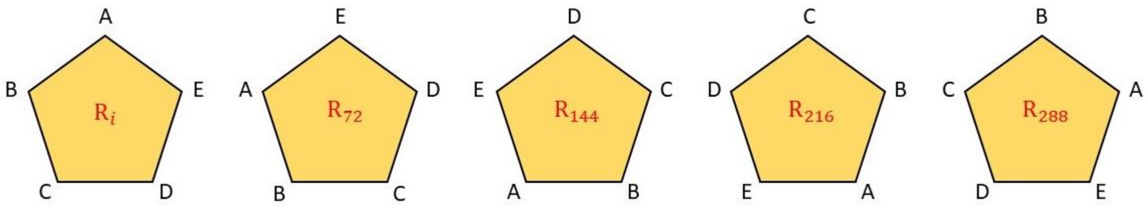
Suponha o pentágono ABCDE, tal que seus eixos de simetria sejam denotados por E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5. Diferentemente dos eixos de simetria do quadrado, os eixos de simetria do pentágono não são relacionados com as diagonais. Segundo, temos que a intersecção dos eixos de simetria forma o centro de gravidade, que denotaremos pelo ponto O.

Figura 21 – Representação dos eixos de simetria do pentágono regular



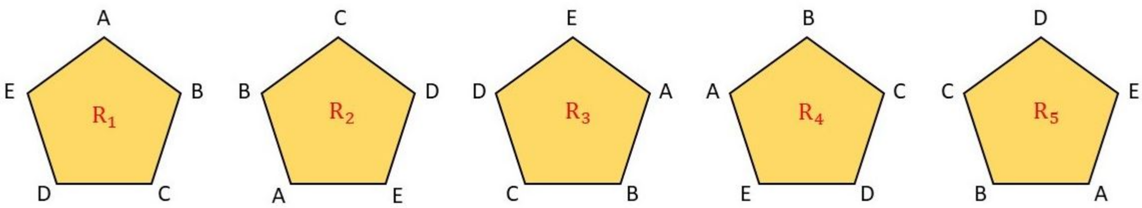
Sabendo que o pentágono possui seus ângulos internos medindo 108° graus, então seus ângulos externos medem 72° graus cada. Daí, temos que movimentos de rotação no sentido anti-horário através do ângulo de 72°, preservam a sua forma. No caso, tais movimentos são denotados por R_i, R_{72}, R_{144}, R_{216} e R_{288}, mostrado na figura a seguir:

Figura 22 – Representação dos movimentos de rotação do pentágono regular



Quando aplicados movimentos em torno dos eixos de simetria (E_2, E_3, E_4 e E_5) ou seja, movimentos de reflexão, obtemos a preservação do pentágono em mais 5 configurações distintas:

Figura 23 – Representação dos movimentos de reflexão do pentágono regular



Com isso, temos que o grupo de simetria do pentágono, denotado por S pentágono é dado por: S pentágono $= \{R_i, R_{72}, R_{144}, R_{216}, R_{288}\ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$

Por fim, podemos aplicar permutações entre os possíveis movimentos já mencionados, em forma de tabelas, temos a seguinte configuração:

Figura 24 – Representação das pertubações dos movimentos que preservam a forma do pentágono

	Ri	**R72**	**R144**	**R216**	**R288**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**
Ri	Ri	R72	R144	R216	R288	R1	R2	R3	R4	R5
R72	R72	R144	R216	R288	Ri	R3	R4	R5	R1	R2
R144	R144	R216	R288	Ri	R72	R5	R1	R2	R3	R4
R216	R216	R288	Ri	R72	R144	R2	R3	R4	R5	R1
R288	R288	Ri	R72	R144	R216	R4	R5	R1	R2	R3
R1	R1	R4	R2	R5	R3	Ri	R144	R288	R72	R216
R2	R2	R5	R3	R144	R4	R216	Ri	R144	R288	R72
R3	R3	R1	R4	R2	R5	R72	R216	Ri	R144	R288
R4	R4	R2	R5	R3	R1	R288	R72	R216	Ri	R144
R5	R5	R3	R1	R4	R2	R144	R288	R72	R216	Ri

Fonte: Autoria própria

Poderíamos estender esta secção apresentando os grupos de permutações do hexágono, heptágono, entre outros. Porém, não há necessidade para tal. Propositadamente paramos no pentágono, pois este polígono regular servirá como base para o uso e aplicação de algumas ferramentas didáticas nas próximas secções.

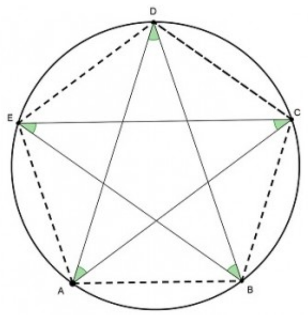
2.3 Relação entre estrela de 5 pontas e o pentágono: uma generalização para outros polígonos regulares

Iniciamos o uso dos recursos pedagógicos lúdicos utilizando a figura de um personagem de desenho animado (Bob esponja), o "Patrick Estrela". Este é caracterizado como uma estrela do mar comum, ou seja, uma estrela de 5 pontas. E qual a relação com os grupos diedrais? Para relacionarmos a esse tópico, vamos refletir sobre a estrela de 5 pontas.

De acordo com Clube de Matemática da OBMEP "A estrela de cinco pontas, também denominada estrela pentagonal ou pentagrama, é de origem pitagórica e pode ser construída com seus vértices sobre um pentágono regular" (OBMEP, s.d). De fato, dado um pentágono regular, quando traçamos suas diagonais, temos a formação de uma estrela de 5 pontas.

O pentagrama é uma estrela 5 pontas construída a partir das diagonais de um pentágono regular, inscrito em uma circunferência. As suas 5 extremidades são equidistantes em relação ao centro de gravidade. De fato, pela proposição 1.4 deste devido trabalho, cada extremidade está a um raio de distância do centro da circunferência. Além disso, temos que quando ligamos as extremidades consecutivas (pontos consecutivos) obtemos um pentágono regular, como mostra na figura a seguir:

Figura 25 – Representação do pentagrama



Fonte: (OBMEP, s.d)

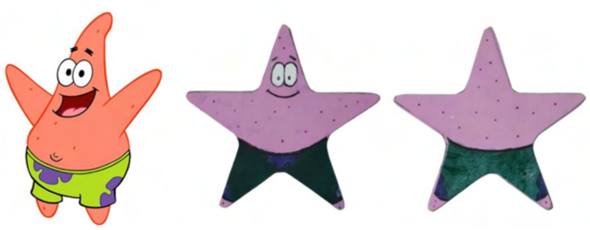
Note que, os segmentos tracejados, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ formam o pentágono através da estrela de 5 pontas inscrita na circunferência dada. Além disso, perceba que por definição, seus vértices pertencem a circunferência, logo a estrela de 5 pontas possui suas medidas de lados congruentes. Com isso, podemos utiliza-la sem perda de generalização. Para relacionarmos esse conteúdo de forma mais prática e simples para o ensino básico, vamos utilizar a estrela de 5 pontas com a forma do personagem do "Patrick Estrela". Com isso, mostrando que quando submetida a movimentos de rotação e reflexão, sua forma continua preservada.

2.3.1 Apresentação da ferramenta didática

Adentrando nas ferramentes didáticas, vamos começar descrevendo a primeira delas, chamada de “Patrick Estrela”. O “Patrick Estrela” é um dos personagens da série de animação infantil “Bob Esponja Calça Quadrada”, criada pelo biólogo marinho e cartunista Stephen Hillenburg, em 01 de maio de 1999. Mesmo sendo uma série de 23 anos da sua criação, ela ainda é bem popular no público infantil da atualidade, estando presente não só em sistemas de streaming mas também em bens de consumo como roupas e calçados, por exemplo. O “Patrick Estrela”, na série, é caracterizado como uma estrela do mar (estrela de 5 pontas) de cor rosa, possuindo olhos, boca e calça verde. Porém, realizamos algumas modificações na construção do personagem mas sem perder a sua caracterização original. Tais modificações são relacionadas à adequação da forma do personagem à uma estrela de 5 pontas regular.

Assim, com auxílio de materiais básicos como emborrachados de cor rosa, materiais de desenho geométrico, tintas e canetas coloridas, conseguimos fazer tais adequações. Vale salientar que as alterações foram feitas baseada no personagem como um todo, incluindo as caracterizações de "frente e verso", devido a proposta da atividade que veremos na subsecção seguinte. Vejamos na figura a seguir a caracterização do personagem e as devidas modificações adotadas:

Figura 26 – Representação do “Patrick Estrela”



Fonte: Autoria própria

2.3.2 Proposta de aplicação da ferramenta didática

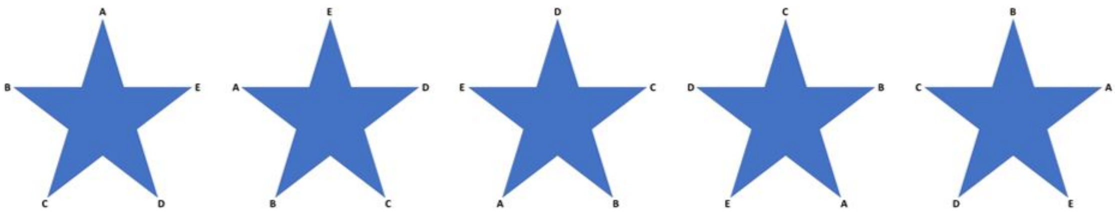
Já descrita a ferramenta didática, agora vamos relacioná-la a uma proposta para seu uso em sala de aula. Dado que o “Patrick Estrela” é uma estrela de 5 pontas regular, podemos utilizar de sua forma para estabelecer um relação com seus movimentos de rotação e reflexão. Para entendermos melhor, vamos propor que os estudantes decalquem o personagem em uma folha de papel. Utilizando primeiramente apenas a “frente” do “Patrick Estrela”, os alunos são levados a rotacioná-lo e perceberem que o mesmo apresenta movimentos de simetria de rotação. Por esse processo, podemos concluir que por construção e experimentação, o personagem possui 5 movimentos de rotação que são simétricos, como mostra na figura a seguir:

Figura 27 – Representação dos movimentos de rotação possíveis do “Patrick Estrela”

Fonte: Autoria própria

Porém, vale salientar que o personagem não obedece integralmente a relação de simetria, pois como já mencionado na seção 1.0 deste devido trabalho, a simetria abrange toda a caracterização de uma figura, incluindo seu contorno e todos os detalhes internos. Observe que os movimentos de rotação do “Patrick Estrela” tem algumas observações que fazem não ser integralmente conformes a definição de simetria, no caso, são as posições dos olhos, da boca e da calça. Esses são detalhes muito importantes que devem ser passados aos estudantes quando iniciado o processo de aplicação da proposta da ferramenta didática. Trazendo para a figura base em que o personagem é inspirado, o resultado é ainda mais expressivo. Vamos supor uma estrela de 5 pontas em que suas pontas são representadas por ABCDE. De modo geral, pelo mesmo processo apresentado para o “Patrick Estrela”, obtemos para a estrela de 5 pontas a seguinte configuração:

Figura 28 – Representação dos movimentos de rotação da estrela de 5 pontas



Fonte: Autoria própria

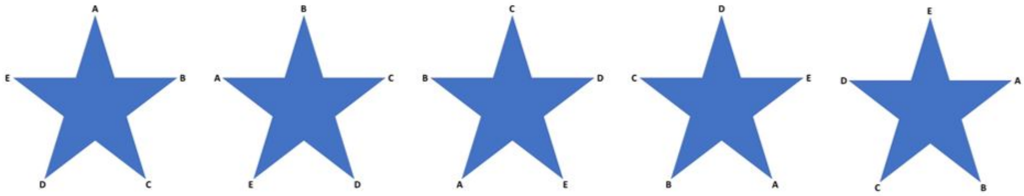
E se fizéssemos com o verso do personagem, ou seja, a parte de trás? A resposta é: “A mesma coisa”. Salientando mais uma vez que na ideia formal de simetria, deve-se desconsiderar as caracterizações do “Patrick Estrela” como, no seguinte caso, as calças.

Figura 29 – Representação dos movimentos rotação do “Patrick Estrela” em torno do seu próprio centro de gravidade quando refletido

Fonte: Autoria própria

Agora, com relação a estrela de 5 pontas, temos a mesma situação da proposta anterior. Neste caso, utilizamos movimentos de reflexão (espelho). Com isso, obtemos a seguinte configuração:

Figura 30 – Representação dos movimentos de reflexão da estrela de 5 pontas



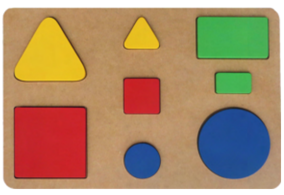
Fonte: Autoria própria

Daí, conseguimos perceber que através do "Patrick Estrela", o mesmo apresenta sua forma preservada por movimentos de rotação e reflexão. E como o personagem é inspirado em uma estrela de 5 pontas, então o resultado é o mesmo. Com todas essas informações, podemos encarar uma construção muito importante que é consequência de qualquer estrela de n pontas. Dado qualquer estrela regular, ou seja, que possui lados congruentes, de 5 pontas ou mais, podemos inscrever um polígono regular dentro do mesmo. E além disso, quando ligados suas pontas à pontas adjacentes, temos a formação do mesmo polígono. Essa informação é de extrema importância para a próxima secção, onde abordaremos uma generalização da aplicação dos movimentos de rotação e reflexão do "Patrick Estrela".

2.4 Tábua geométrica e a preservação dos polígonos regulares através de um jogo infantil de encaixe

A "tábua geométrica" é uma espécie jogo de tabuleiro que apresenta furações específicas que recebem polígonos diversos. Esse jogo é destinado a crianças de 1 a 4 anos de idade, por se tratar de um jogo bem simples e intuitivo, onde a única regra é encaixar o polígono respectivo ao seu espaço na tábua. Há várias variações no mercado, como por exemplo, tábuas que compreendem polígonos ou também tábuas que compreendem não só polígonos, mas figuras circulares como o círculo. Mas como são jogos feitos para crianças, os polígonos disponíveis são em geral os mais simples. Observe em um exemplo a seguir:

Figura 31 – Representação de uma tábua geométrica no mercado

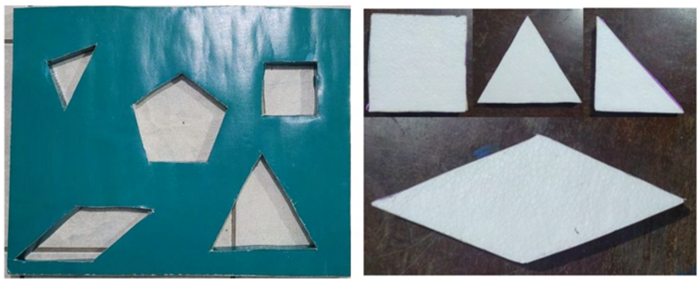


Fonte: (7, s.d)

2.4.1 Apresentação da ferramenta didática

Como o devido trabalho está direcionado à aplicações lúdicas destinas a uma turma do 6°ano e levando em consideração que sua faixa etárias varia entre 10 e 12 anos de idade, então realizamos algumas modificações na forma da "Tábua geométrica". Tais modificações estão relacionadas ao uso de polígonos regulares e irregulares. Destinada a ser um ferramenta didática "acessível", a "Tábua geométrica" foi construída com materiais de baixo custo, e facilmente encontrados em lojas de materiais pedagógicos. Neste caso, foram utilizadas folhas de isopor, papéis coloridos e cola. Apenas com esses materiais e muito esforço, foi-se desenvolvida a "Tábua gométrica" e seus respectivos polígonos regulares. Todas as imagens respectivas a esta ferramenta estão disponíveis em ANEXO C deste devido trabalho. Observe na figura a seguir dois exemplos das devidas construções:

Figura 32 – Representação da construção da tábua geométrica e dos polígonos

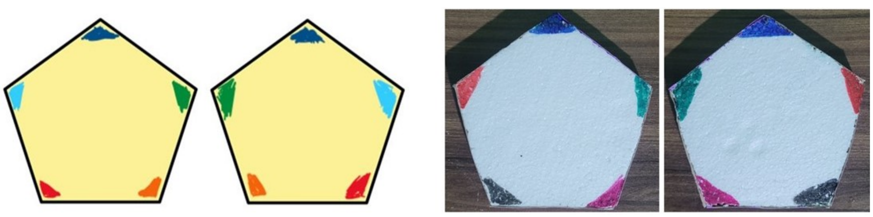


Fonte: Autoria própria

2.4.2 Proposta de aplicação da ferramenta didática

A proposta de aplicação desta ferramenta é de reforçar a ideia a preservação da forma do pentágono regular através de movimentos de rotação e reflexão. Para isso, a turma é dividia em grupos menores, para que se obtenha maior participação de todos. Podemos perceber na figura 32, que a tábua geométrica contem 5 polígonos encaixáveis. Porém, na figura não está representada o pentágono regular, justamente o polígono que deverá ser encaixado no centro da tábua geométrica. Isso se dá pelo fato de que o processo de aplicação será executado em torno deste polígono. Observe a seguir as representações digital e real do pentágono regular da ferramenta.

Figura 33 – Representação da pintura dos vértices do pentágono regular (digital)



Fonte: Autoria própria

Note que o pentágono apresenta cores diferentes em suas extremidades, desde a sua frente e seu verso (parte de frente e a parte de trás). O objetivo é que cada grupo deverá encaixar o pentágono de diferentes formas. E os diferentes encaixes serão anexados através das posições das cores nas extremidades do polígono. De modo geral, temos 10 possibilidades diferentes de encaixar o pentágono na tábua geométrica. No caso, são 5 movimentos de rotação e 5 movimentos combinando rotações e reflexões. A seguir, vejamos a fundo as consequências desse jogo.

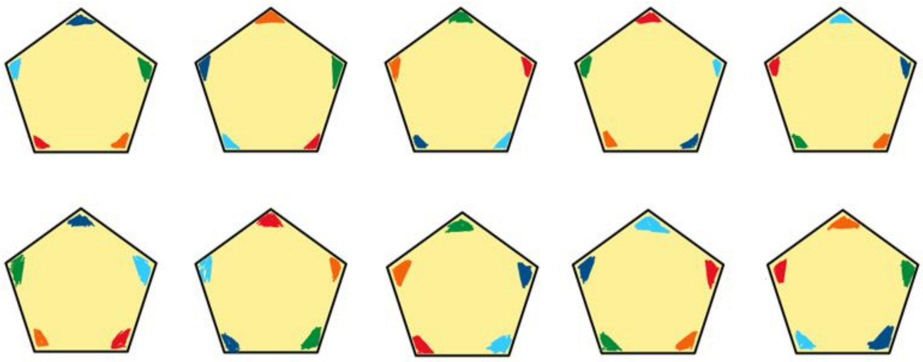
2.4.3 Consequências e generalizações

Como vimos nas secções 2.1, 2.2 e 2.3 deste trabalho, os polígonos regulares tem suas formas preservadas quanto a movimentos de rotação e reflexão, podendo ser catalogados através de uma tabela em teoria dos grupos. Porém, sabemos que o ensino dessas técnicas não é apropriado a níveis primários da educação básica, no caso, 6° ano do ensino fundamental.

O processo didático se dá na tarefa de mostrar que podemos encaixar esse polígono de várias formas diferentes, onde cada "ponta colorida" estará em posições diferentes na tábua. Isso por rotação, ou seja, quando girados por um certo ângulo em torno do seu centro de gravidade, e por reflexão, ou seja, em torno de seus eixos de simetria.

Este tópico será experimental e não constar o uso de tabelas ou gráficos. Sabendo disso, as possibilidades de encaixe através do pentágono regular, já comentado como o escolhido para esta atividade alguns motivos, são exatas 10. Vejamos a representação na figura a seguir:

Figura 34 – Representação das possibilidades de rotação e reflexão do pentágono regular



Fonte: Autoria própria

3 Ensino e aprendizagem dos polígonos regulares

Nesse capítulo, vamos abordar o processo de elaboração das aulas, discutindo conteúdos, recursos didáticos e possíveis resultados de suas aplicações. O ensino e aprendizagem de polígonos regulares exige conceitos básicos a respeito de polígonos, por isso, as aulas foram elaboradas de forma gradual, revisando os conteúdos básicos sobre polígonos e posteriormente, iniciar o ensino dos polígonos regulares. O ensino e aprendizagem de polígonos regulares perpassa por conceito básicos, a priori, de apenas polígonos.

Iniciamos em induzir o entendimento prévio de polígonos a partir de meios físicos e visíveis como objetos em sala de aula, imagens do dia a dia ou pinturas e quadros famosos. De certa forma, este ato está fundamentado na percepção e comparação de figuras com aspectos retangulares, retos ou sem curvas, em detrimento a imagens sem tal apego geométrico. Quando aplicada tal comparação, é de extrema importância resgatar, revisar conceitos aprendidos em situações passadas pelos alunos, seja o conceito básico de polígonos ou até mesmo de tipos de linhas (linhas abertas, linhas fechadas, linhas simples, não simples e poligonal). Um polígono pode ser entendido como uma linha poligonal simples, fechada. Além disso, a habilidade EF05MA17 no 5° ano do ensino fundamental, sugere também a abordagem de polígonos da seguinte forma: " Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais" (BRASIL, 2018). Iniciamos o primeiro material desenvolvido para as aulas, convertendo os aprendizados dos polígonos por meio de assimilação de recortes de papel, comparando-os em polígonos ou não polígonos. O objetivo deste material é de ilustrar para os alunos algumas diferenças visuais entre polígonos e não polígonos, como a presença de curvas e composição de segmentos de reta, por exemplo. As figuras utilizadas estão disponíveis no Anexo A deste devido trabalho.

A partir daí temos a abrangência de vários outros tópicos de polígonos que são de extrema importância para o aprendizado de geometria de um aluno do ensino fundamental. Em especial, temos os conceitos de polígonos côncavos e convexos, partes de um polígono, seja vértices, lados, ângulos internos, ângulos externos e arestas. Ao fim de tais conceitos, é iniciado o ensino de tipos de polígonos, mais precisamente, polígonos regulares e não regulares. Para isso, este trabalho tem como aparatos, o uso de materiais didáticos como a estrela de cinco pontas na forma de um personagem de desenho animado (Patrick Estrela), a "tábua geométrica", construções feitas em papel colorido e o uso de um Quis interativo como forma de avaliação final. Em especial, temos o a "Gincana dos polígonos", que será designado para ser proposto ao final da execução das aulas.

A “Gincana dos polígonos” será uma competição entre os alunos para realização da atividade avaliativa. Tal competição será aplicada ao final da respectiva aplicação das aulas propostas neste trabalho. A gincana usará de um formulário eletrônico interativo, mais conhecido com Quis. Este, terá como objetivo avaliar os conteúdos apresentados durante as aulas e seus resultados serão utilizados como discussão para este trabalho. De modo geral, o Quis foi construído através da plataforma QUIZIZZ, uma plataforma online e gratuita que fornece a possibilidade de criações de jogos interativos, formulários, apresentações, pequenas aulas, resumos, entre outros.

O Quis designado para a gincana terá 10 questões, contendo questões básicas sobre polígonos e questões específicas sobre temas que serão abordados nos planos de aula 1 e 2, deste devido trabalho. Ainda sobre a gincana, a mesma proporcionará premiações de acordo com as classificações finais de cada participante (aluno). Neste caso, como a turma contém 28 alunos, então será combinado que os 5 primeiros colocados ganharão 2 pontos extras nas avaliações de matemática. Já do 6° colocado ao 10° ganharão 1,5 pontos e da 11° posição em diante ganharão 1,0 ponto. A gincana funcionará da seguinte forma: O professor disponibilizará um código online para que cada aluno, individualmente, entre no quis e no tempo estabelecido, responderá as perguntas disponibilizadas. Vejamos agora as seguintes perguntas que estarão presentes no Quis:

1. Marque a alternativa que corresponde a um polígono côncavo

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Todo polígono regular apresenta as medidas de seus ângulos internos congruentes

a) Verdadeiro

b) Falso

3. Marque a alternativa que corresponde ao nome do polígono regular ao lado:

a) Heptágono

b) Hexágono

c) Octógono

d) Pentágono

4. É correto afirmar que qualquer polígono regular permanece inalterável quando sofre de movimentos de reflexão?

   a) Falso
   b) Verdadeiro

5. É correto afirmar que os polígonos regulares não apresentam o número de lados igual ao número de seus eixos de simetria?

   a) Verdadeiro
   b) Falso

6. Classifique os seguintes polígonos em convexos e côncavos, pela ordem da esquerda para a direita

   a) convexo, não convexo, não convexo, convexo, não convexo, convexo.
   b) convexo, não convexo, não convexo, convexo, convexo, convexo.
   c) convexo, convexo, não convexo, convexo, não convexo, não convexo.
   d) convexo, não convexo, não convexo, convexo, convexo, não convexo.

7. Existe um polígono que possui o número de lados igual ao número de diagonais. O nome desse polígono é:

   a) Quadrado
   b) Heptágono
   c) Hexágono
   d) Pentágono

8. É correto dizer que as diagonais são eixos de simetria?

   a) Não
   b) Sim

9. “Os polígonos regulares apresentam o número de eixos de simetria igual ao número de seus lados”. Por exemplo, o hexágono possui 6 lados e 6 eixos de simetria.

   a) Verdadeiro
   b) Falso

10. Quantos movimentos de rotação podemos realizar no hexágono, preservando a sua forma?

   a) 5
   b) 7
   c) 8
   d) 6

4 Planos de aula e suas aplicações

Englobando todas as informações já mencionadas neste trabalho, daremos inicio à apresentação de dois planos de aula que buscam sistematizar os passos do ensino e aprendizagem sobre os polígonos regulares numa turma do 6° ano do ensino fundamental. Na fase escolar em questão, a BNCC estabelece por meio da habilidade (EF06MA18) "Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classifica-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros" (BRASIL, 2018).

De certo modo, deve-se ser feita a integração e sistematização de todas as secções relatadas por meio de tal habilidade em torno dos polígonos regulares (no referido trabalho). Para isso, os planos de aula foram esquematizados através de duas propriedades básicas dos polígonos regulares que são: 1. Todo polígono regular tem a medida de seus lados congruentes e a quantidade de seus lados, ângulos internos, ângulos externos e vértices iguais a quantidade de seus eixos de simetria; 2. Todo polígono regular possui forma invariante através de seus movimentos de rotação e reflexão em torno de seus próprios eixos de simetria. As propriedades em questão podem ser complementadas através das diretrizes do Parâmetro Curricular Nacional (PCN) onde ainda tem seu cargo valioso para a elaboração de planejamento e aulas para muitos professores.

> Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados. [...] Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície) (BRASIL, 1998, p. 73).

Diferenciadas as propriedades, foram elaboradas os devidos planos, pensados e organizados de forma que alunos do 6° ano do ensino básico compreendam tais propriedades e saibam distinguir com exatidão os polígonos regulares de não regulares.

De forma planejada, os planos de aula foram elaborados através de ideias já mencionadas, a principal delas é de (CARVALHO; LIMA, 2006), relacionando as 4 entidades presentes no ensino e aprendizagem de geometria no ensino básico. Porém, com menor rigor aos seus princípios, vamos nos apropriar de apenas os objetos geométricos, a linguagem matemática e os objetos físicos.

Começando das noções básicas sobre figuras geométricas planas abertas e fechadas, o devido plano de aula inicia aplicando o básico, retratado em níveis escolares anteriores. Isso se dá pelo fato de preservar e garantir a interação do aluno no conteúdo. Além disso, adicionando objetos geométricos e físicos, a adoção de revisão de temas básicos e a construção de uma base sólida para o ensino e aprendizagem dos polígonos regulares (plano de aula 2).

Se tratando do segundo e último plano de aula, será observado a adoção das técnicas lúdicas de ensino e aprendizagem sobre polígonos regulares como o uso da simetria em forma de dobraduras de papel para mostrar a propriedade 1, já mencionada; a relação do personagem de desenho animado "Patrick estrela" na rotação e reflexão dos polígonos regulares e também, o uso da tábua geométrica como reforço das ideias de preservação dos polígonos regulares e sua distinção dos polígonos não regulares. Por fim, vejamos abaixo os planos de aula e avaliemos, após isso, os resultados das aplicações em sala de aula.

4.1 Plano de aula 1

Tema: Introdução à ideia de polígonos;

Objetivos Gerais: Definir os parâmetros para iniciação do conteúdo em questão, levando em consideração as informações antes vistas neste trabalho.

Objetivos Específicos: Detalhar a ideia de polígono por meio de definições, conceitos básicos e técnicas lúdicas de aprendizagem (construções geométricas, exemplos do dia a dia e pinturas de quadro famosos).

Conteúdos: Noções de polígonos

Duração: 100 minutos (2 aulas)

Recursos didáticos: Quadro branco, projetor de imagem e vídeo, construções em papel, lápis grafite (lápide de cor) e papel.

Metodologia

- Definições e conceitos básicos - duração: 40 minutos

  Inicialmente, serão passadas através de uma apresentação via projeção (slides), de algumas noções de figuras geométricas planas, através de situações do dia a dia e quadros famosos; e, posteriormente, apresentadas diferenciações entre figuras fechadas e abertas. De mesmo modo, afunilando em figuras geométricas planas fechadas, haverá a distinção entre figuras geométricas fechadas constituídas por segmentos de reta e figuras geométricas planas constituídas por curvas, criando uma base para definição de polígonos. Por fim, definiremos o que são polígonos e consequentemente, explanando a definição formal no quadro branco, suas propriedades e observações.

- Ideia de polígono através de recortes de papel - duração: 20 minutos

  Finalizando a etapa de conceitos, caminharemos para observação de figuras palpáveis, feitas de recortes de papel. A princípio, será pedida a formação de um círculo entre os alunos para que a propagação do conhecimento seja mais ampla entre todos. Após isso, será repassada de mão em mão recortes de polígonos, reforçando as propriedades e conceitos dos polígonos. De modo análogo, serão explanadas figuras geométricas planas que não são caracterizadas como polígonos. Com isso, reforçando as diferenciações entre os polígonos e não polígonos. Todos esses polígonos estão disponíveis no anexo A.

- Aplicação da atividade avaliativa - duração: 40 minutos

  Avaliação: A avaliação será baseada na construção de desenhos utilizando apenas polígonos. Esta avaliação deverá ser feita em sala de aula, com supervisão do professor, no tempo médio de 30 minutos. Sobre o desenho, deverá ser feito em folhas de papel ofício A4, disponibilizados pelo professor. A atividade poderá ser feita de lápis grafite ou lápis de cor, onde abranja o máximo da área disponível na folha de papel. No verso, cada aluno deverá desenvolver um resumo, sem limite de linhas, sobre o que ele desenvolveu e o que representa seu desenho.

4.2 Plano de aula 2

Tema: Assimilação da ideia de polígonos regulares por construções geométricas e simetria.

Objetivos Gerais: Utilizar as noções de polígonos, vistas no plano de aula passado, afim de definir por meio de propriedades matemáticas, construções geométricas e noções de simetria, os polígonos regulares.

Objetivos Específicos: Detalhar os conceitos, características e propriedades dos polígonos regulares. Expor e propor atividades que envolvam construções geométricas, em especial, um exemplo de um personagem de desenho animado infantil, além do uso de um jogo de tabuleiro chamado de “tábua geométrica”, reforçando a ideia de algumas propriedades dos polígonos regulares.

Conteúdos: Noções de simetria e polígonos regulares e irregulares. Duração: 100 minutos (2 aulas)

Recursos Didáticos: Construções em papel dos polígonos regulares mais conhecidos (quadrado, triângulo regular, pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular e octógono regular), quadro branco, construção em cartolina do "Patrick Estrela" e o uso do jogo de tabuleiro "Tábua geométrica".

Metodologia

- Introdução à ideia de polígonos regulares através de construções em papel e exposições dos conteúdos em quadro branco - duração: 20 minutos

  Através de uma conversa simples e objetiva, o professor deverá expor a ideia principal da aula, através das construções feita em papel dos polígonos. Estes polígonos regulares em questão estão disponíveis no Anexo B deste devido trabalho. Após este passo, serão exibidas todas as informações acerca dos polígonos regulares no quadro branco, incluindo definições, conceitos e propriedades importantes.

- Noções de simetria e a relação com os polígonos regulares (duração: 20 minutos)

  Inicialmente o professor passará algumas noções de simetria através de situações do dia a dia e definições básicas. Depois, em grupos, os alunos deverão dobrar alguns polígonos feitos em papel disponibilizados pelo professor, a fim de exibir seus eixos de simetria. O objetivo desta atividade é de que os alunos percebam que a quantidade de lados dos polígonos regulares é igual a quantidade de dobraduras. Com isso, percebendo que a tarefa está intimamente ligada aos polígonos regulares.

- Uso da figura do "Patrick Estrela" na idealização concreta da preservação posicional dos polígonos regulares em suas rotações - duração: 20 minutos

  Neste ponto da aula, deverá ser usada a figura do "Patrick Estrela" feita em papelão, para a explicação da preservação posicional dos polígonos regulares em suas rotações.

- Tábua geométrica - duração: 20 minutos

  Para concretizar o objetivo deste conteúdo, usaremos a tábua geométrica. Ela funcionará no aprofundamento da preservação posicional dos polígonos regulares, na diferenciação entre polígonos regulares e irregulares. Além disso, revisando sobre figuras geométricas que não são caracterizadas como polígonos, previstos no plano de aula passado.

- Aplicação da atividade avaliativa - duração: 20 minutos

  Avaliação: A avaliação será feita com o auxílio de um Quiz com todos os alunos participando ao mesmo tempo. Esse quis conterá perguntas acerca de algumas propriedades dos polígonos regulares, pequenos problemas e desafios lógicos. Este deve ser usado com o auxílio do smartphone de cada aluno, através da conexão com a internet. A medida que os alunos forem respondendo a cada pergunta proposta no quis, o resultado de acertos estará disponível para todos os alunos conferirem e o professor fazer suas ponderações.

5 Resultados

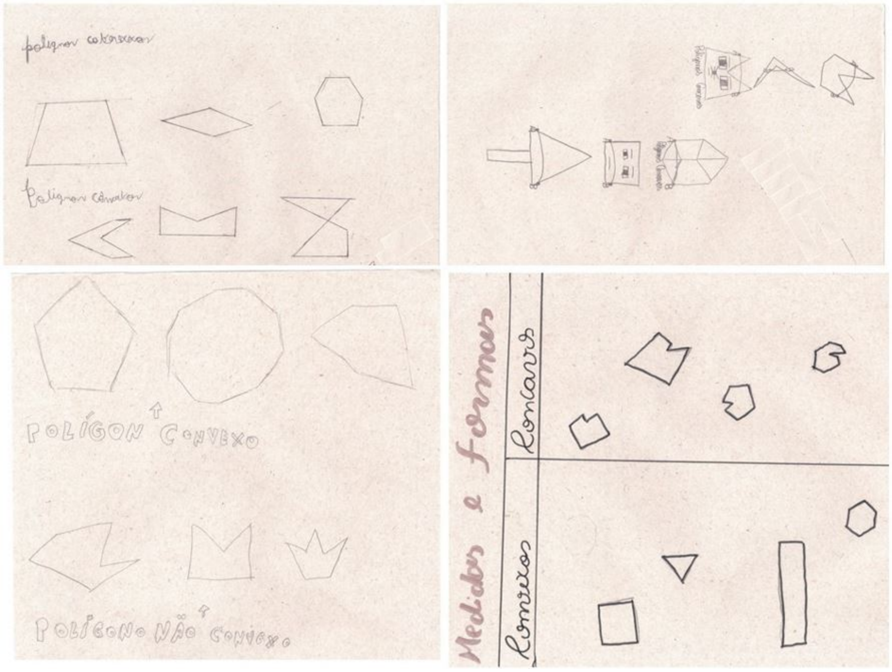
Os resultados foram obtidos de duas formas. A primeira por observação das atividades avaliativas propostas em sala de aula e a segunda por um formulário eletrônico. Começando pelas aplicações das atividades avaliativas, vamos apresenta-las de acordo com as sequências dos planos de aula 1 e 2. No plano de aula 1, foi estabelecido alguns passos para o ensino e aprendizagem dos polígonos, começando por sua definição. Iniciamos por uma apresentação em slides sobre figuras que se remetiam aos polígonos, dando margem para posteriormente a apresentação da definição e suas características em quadro branco. Para concretização do conteúdo, foi-se proposto uma roda de conversa e exposição através de figuras geométricas que se remetiam aos polígonos. Como relatado no respectivo plano de aula, após essa apresentação, tivemos a aplicação da atividade avaliativa. A mesma constituía da construção de um desenho que contivesse apenas figuras poligonais. Sabendo disso, alguns resultados devem ser explanados:

1. Alguns alunos não entenderam a proposta da atividade e replicaram as anotações feitas no quadro branco.
2. Muitos alunos não utilizaram dos materiais de desenho, além de alguns equívocos no processo de construção.
3. Outros se recusaram a realizar a atividade
4. A grande maioria obteve sucesso na atividade

Vale salientar que não houve nenhum tipo de ajuda no momento da execução da atividade, por parte do professor.

Vejamos a primeira situação ocorrida nos resultados. De fato, alguns alunos não compreenderam a proposta da atividade, replicando as anotações feitas em quadro branco. Em específico, temos anotações sobre polígonos convexos e não convexos. Na devida aula, além das diferenças sobre figuras geométricas poligonais e não poligonais, tivemos as caracterizações das figuras geométricas poligonais, neste caso, “definição, tipos e diferenciação de polígonos côncavos e convexos”. Por demandarem de um pouco mais de tempo para serem explicados, consequentemente os dois últimos citados estavam mais presentes naquela abordagem momentânea. Com isso, podendo explicar o fato de que houve tal repetição na atividade avaliativa. A seguir, vejamos alguns desses desenhos:

Figura 35 – Exemplos de desenhos que continham cópias das anotações do quadro branco



Fonte: Autoria livre

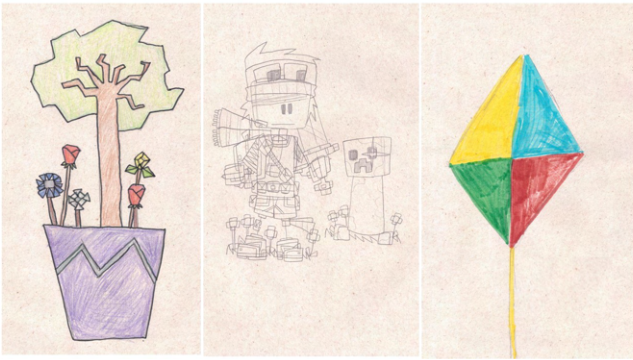
Sobre os materiais de desenho, foi proposto a sua utilização alguns dias antes da aplicação deste trabalho. Porém, muitos alunos esqueceram ou alegaram não ter tais materiais. Consequentemente, o resultado da construção dos desenhos foi prejudicado, de certa parte. Muito desenhos não estavam completamente com linhas poligonais. Outros até mesmo apresentavam curvas ou circunferências. Vejamos alguns exemplos a seguir:

Figura 36 – Exemplos de desenhos que continham figuras não poligonais

Fonte: Autoria livre

Continuando, tivemos algumas abstrações. Num total de 2 alunos, decidiram não participar da atividade, cujas alegações não vem ao caso apresenta-las. Porém, a grande maioria obteve sucesso na atividade, mesmo com pendências na utilização dos materiais desenho geométrico. Sobre o quantitativo de sucessos, tivemos alguns casos que envolviam desenhos de paisagens, arquitetônicos, urbanísticos e muitos artísticos, envolvendo designs de animes e cartoons. Muitos coloridos com lápis de cor, outros feitos com canetas coloridas, tintas e também tivemos desenhos feitos apenas com lápis grafite. Vejamos na figura a seguir, alguns deles:

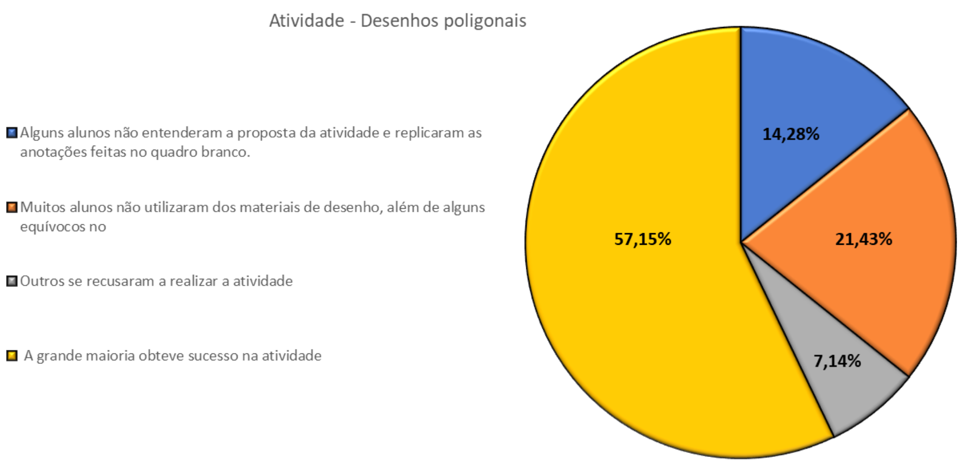
Figura 37 – Exemplos de desenhos bem sucedidos



Fonte: Autoria livre

Para expressar melhor os resultados obtidos com a atividade avaliativa sobre o desenho de formas poligonais, preparamos um gráfico de setores. Tal gráfico representa uma relação entre os tópicos apresentados anteriormente e a quantidade de desenhos relacionados a eles.

Figura 38 – Gráfico representando as quantidades de desenhos relativos aos tópicos citados



Fonte: Autoria livre

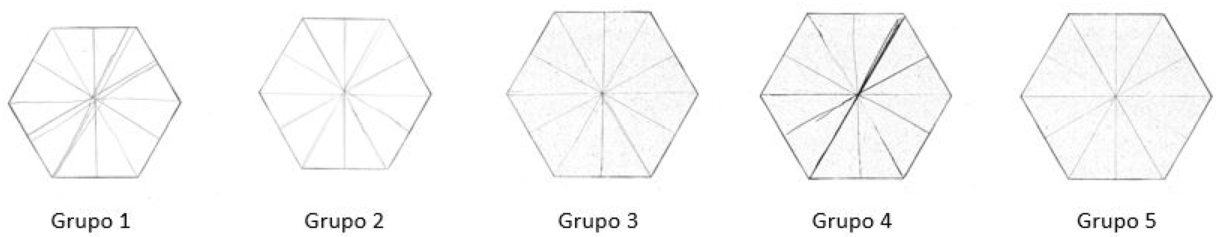
De acordo com o gráfico acima, podemos concluir que mais da metade da turma compreendeu a proposta da atividade e a realizou com êxito. Uma parcela da turma não conseguiu realizar a atividade de acordo com a proposta pois não compreendeu ou se equivocou sobre as noções de polígonos. Por exemplo, como mostra na figura tal, podemos observar figuras que envolvem curvas ou circulares. Essa parcela caracteriza um total de 6 alunos, ou seja, cerca de 21,43%. Além disso, destacamos que cerca de 14,28% do total de alunos, ou seja, 4 alunos, não desenvolveram a atividade de acordo com a proposta, realizando-a completamente errada. Por fim, num total de 28 alunos na respectiva turma, apenas 2 alunos não realizaram a atividade, representando aproximadamente cerca de 7,14% do total de alunos.

Partindo para o plano de aula 2, o mesmo foi realizado em duas etapas. Primeiro tivemos a exposição dos conteúdos e a segunda foi a aplicação da atividade avaliativa, em forma de gincana. Diferentemente do plano de aula 1, o segundo plano de aula foi iniciado através de uma conversa utilizando de formas físicas, ou seja, das figuras poligonais feitas em papel. Em especial, foram apresentadas algumas diferenças visuais entre polígonos regulares e polígonos não regulares.

Passada tal parte, seguimos para a explicação formal curta em quadro branco, focando nas caracterizações dos polígonos regulares, definições e uma pequena atividade lúdica sobre eixos de simetria dos polígonos regulares. A princípio, utilizando dobraduras de papel, fizemos demarcações dos eixos de simetria do triângulo, quadrado e pentágono. Após isso, foi-se destinado aos alunos que construíssem por meio de dobraduras, os eixos de simetria do hexágono regular. Em grupo, bastava dobrar o hexágono de tal forma que o polígono em fosse dividido ao meio. Assim, com o auxílio de uma régua ou algum outro instrumento retilíneo, demarcar com uma caneta ou lápis seus eixos de simetria

Sabendo disso, foi designado 10 minutos para que os grupos realizarem a atividade. Vejamos os resultados na figura abaixo:

Figura 39 – Representação das marcações dois eixos de simetrias dos grupos 1 ao 5



Fonte: livre autoria

Analisando as figuras, percebemos que alguns grupos não desenvolveram corretamente a atividade. Começando pelos grupos 1 e 4, ambos os grupos não se propuseram a realizar as dobraduras por completo. Com isso, completaram os eixos restantes sem auxílio dessas dobraduras. Em especial, o grupo 1 completou os eixos de simetria sem auxílio dos materiais de desenho, no caso, régua. Já os grupos 2 e 3 realizaram as dobraduras com algumas falhas, porém, o objetivo da atividade foi alcançado. Além disso, tais equipes realizaram a construção dos eixos de simetria com auxílio de régua. Por fim, tivemos o grupo 5 que realizou a atividade sem o auxílio de dobraduras. Apenas com o uso do material de desenho, o grupo 5 demarcou todos os 6 eixos de simetria do hexágono com perfeição. Observamos com isso, que de fato, todos os grupos notaram que havia 6 eixos de simetria no hexágono regular. Porém, alguns grupos demonstraram falta de assimilação com relação ao objetivo da atividade. Outros, compreenderam e realizaram com êxito. E apenas um grupo realizou a atividade sem dobraduras. Provavelmente, neste grupo, a proposta de que "Todo polígono regular apresenta a quantidade de eixos de simetria igual a quantidade de lados", foi alcançada, e consequentemente, a atividade de dobraduras não era necessária.

Após essa pequena atividade, utilizamos de materiais lúdicos para reforçar e complementar o seu entendimento sobre os eixos de simetria dos polígonos regulares e principalmente sobre as definições e características dos polígonos. Neste trecho tivemos o uso do "Patrick Estrela" e a tábua geométrica. Intuitivamente, por se tratar de um desenho animado, o "Patrick Estrela" foi muito bem recebido e prendeu bastante a atenção da turma. De fato, sua preferência foi bem alta e confirmaremos em quando avaliarmos as respostas do formulário eletrônico, respondidas pelos próprios alunos. Seguindo, tivemos depois a aplicação da "Tábua geométricas". Este foi um ponto muito importante na aula e para os devidos resultados desse trabalho. Não houve tanta adesão ao material didático. Algumas avaliações pessoais foram relatavas no formulário eletrônico. Porém, de maneira geral, temos que sua rejeição está atrelada a faixa etária em que o material base se encontra. Como mencionado no tópico 2.4, a construção da "Tábua geométrica" foi baseada em um brinquedo infantil, relacionado a encaixes de formas geométricas simples como o quadrado, triângulo e círculo, por exemplo. Quando adaptados, inserimos um pentágono e outras figuras mais complexas. Mesmo assim, a essência do jogo ainda estava baseada no "encaixe". Consequentemente, para tal turma, não ouve tanta procura e atenção a tal ferramenta. Outro fato é no entendimento da preservação do pentágono regular através dos movimentos de rotação e reflexão do "Patrick Estrela". De certa forma, isso ajudou da mal aceitação da "Tábua geométrica".

Finalizando a aplicação do plano de aula 2, tivemos a aplicação da atividade avaliativa, a "Gincana dos polígonos". Esta obteve maior aceitação sobre todas as outras atividades e materiais já mencionados. Tal aceitação foi expressa no formulário eletrônico e também pela fisionomia dos envolvidos. Sem muito apego referencial, podemos destacar que isso se deve que a atividade é similar a uma brincadeira/competição. Tal atividade foi intitulada de "Gincana dos polígonos", como já mencionado. A aplicação desta atividade foi satisfatória, porém algumas adaptações tiveram de ser feitas, devido a alguns entraves ocorridos. Quando chegado o momento da aplicação, algumas modificações tiveram de ser feitas devida à ausências tecnológicas por parte de alguns alunos e problemas estruturais. No devido dia da aplicação, alguns alunos esqueceram ou deixaram em casa os telefones celulares. E outro agravante foi a oscilação na rede de internet WIFI da instituição. Com isso, algumas modificações foram instauradas:

1. Formação de grupos para incluir os alunos que não estavam com o telefone celular

2. Redução de celulares por grupo, num total de 1 por grupo.

Possibilitando assim, que o professor pudesse transferir uma rede de internet aos grupos sem perdas bruscas de velocidade na web. Daí, cada grupo tinha de 6 à 8 alunos e que a atividade, agora, teria um caráter coletivo. Tiveram 4 grupos formados, onde a composição dos integrantes era a mesma da atividade do tópico "Noções de simetria e a relação com os polígonos regulares". Com isso, obtemos os seguintes resultados, disponibilizados pelo programa:

Figura 40 – Representação do quantitativo de acertos de cada grupo por questão

Participant names	Points	Q1 17%	Q2 33%	Q3 17%	Q4 67%	Q5 50%	Q6 0%	Q7 0%	Q8 50%	Q9 67%	Q10 50%
Alicia S (A.A.A.B.M.S.M)	35 (60%)	×	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	✓
CARLOS	30 (60%)	✓	✓	×	✓	✓	×	×	×	✓	✓
R e f	25 (50%)	×	✓	×	✓	✓	×	×	✓	✓	×
Sofia M (As Marias fifis)	20 (40%)	×	✓	×	✓	×	×	×	✓	✓	✓

Fonte: Autoria própria

Sobre tais resultados, vale os comentários em quatro questões que obtiveram as menores médias de acertos. Dada a figura a cima, temos as questões 1, 3, 6 e 7. Sobre a questão 1, a maioria 3 grupos marcaram a alternativa A, que no caso, correspondia a um semicírculo. Porém, o semicírculo não é caracterizado como polígono, pois não contém linhas poligonais em toda a sua forma. Passando para a questão 3, temos que, também obtemos que 3 equipes erram, onde cada grupo selecionou uma questão diferente. Sobre a questão 6, houve muita reclamação sobre o tempo para ser revolvida. Com isso, atribuímos a um erro de planejamento da questão. Logo, a avaliação da respectiva questão não será leva em consideração. Por fim, tivemos a questão 7, onde houve uma incoerência na assimilação da pergunta por parte dos alunos. Por observação, notou-se que muitos alunos tentaram realiza-la de modo intuitivo ou até mesmo "de cabeça". Um fato muito interessante é que nenhum grupo tentou realizar o processo de construção dos eixos de simetria por dobraduras ou por desenho.

Realizando uma análise crítica desta aplicação, podemos citar algumas ponderações e possíveis correções para futuras aplicações. Por exemplo, uma maior contextualização das questões, com menor apego conteudista, mas sim com foco na construção do conhecimento coletivo. E por fim, maior gestão de tempo das questões, afim de estabelecer tempo suficiente para não prejudicar a construção do raciocínio do aluno.

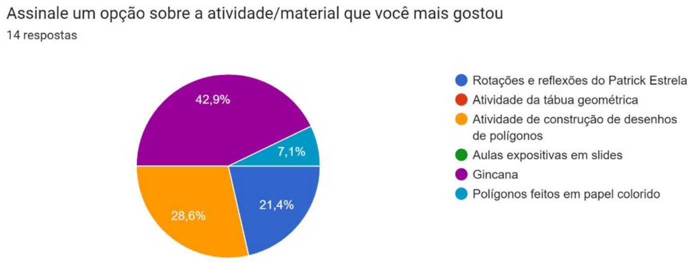
Ao fim da aplicação do segundo plano de aula, foi proposto um formulário eletrônico para que pudessem responder a perguntas sobre as aulas retratadas neste trabalho. O formulário esteve disponível por 2 semanas e cada aluno deveria responder individualmente e de forma sigilosa, ou seja, sem escrever o nome ou alguma coisa que possam levar a sua identidade. Abaixo, vejamos as perguntas propostas no devido formulário eletrônico:

1. Sobre a atividade avaliativa envolvendo desenho de polígonos, em sua opinião, como você avalia a aplicação em sala de aula?
2. Você já conhecia a tábua geométrica ou algo parecido? Se sim, fale um pouco sobre sua experiência com relação a atividade.
3. Você já conhecia o “Patrick Estrela”? Se sim, fale um pouco o que você achou do uso do personagem na aula de medidas e formas.
4. Sobre o ensino dos polígonos regulares utilizando atividade e materiais lúdicos como o “Patrick Estrela” e a “Tábua Geométrica”. Como você avalia os seus usos nas nossas aulas de medidas e formas?
5. Dê sua opinião sobre a gincana aplicada no final da semana dos polígonos.
6. Assinale uma opção sobre a atividade/material que você mais gostou
7. Dê sua opinião sobre as aulas da semana dos polígonos. Fale do que gostou, relate sugestões, elogios ou críticas.

Partindo para as respostas, tivemos uma queda na quantidade de alunos, obtendo um total de 14 alunos. Mesmo assim, tais respostas ajudaram a formalizar argumentos e críticas pertinentes acerca da intervenção em sala de aula. De modo geral, vários elogios foram descritos em todas as perguntas, porém, duas perguntas tiveram maior repercussão entre os resultados, no caso, são as perguntas 6 e 7. A pergunta 6 foi baseada em preferências, ou seja, qual atividade ou material tal aluno mais gostou. Assim, tivemos as seguintes preferências:

Note que, como relatado nos resultados anteriores, as atividades “tábuas geométricas” e “Aulas expositivas em slides” não foram selecionadas. Porém, podemos facilmente explicar devido a popularização de outras atividades mais interativas quanto. Neste caso, estamos falando das atividades “Gincana”, “Rotações e reflexões do Patrick Estrela” e “Polígonos

Figura 41 – Gráfico de preferência entre as atividades/materiais



Fonte: Autoria própria

feitos em papel colorido". Por fim, a pergunta 7 que estabeleceu respostas sobre as aulas em geral, sugerindo que o aluno expusesse sua opinião, dúvida, elogio ou crítica acerca das aulas. Dentre as respostas, algumas nos chamaram atenção, são elas:

1. "Muito mais muito mais legal divertido dó que só copiar né Welisson você aprende bem mais a atividade do Patrick estrela foi a melhor brigada fui"
2. "Do quiz, ter mais aulas sobre isso, legal pois e uma atividade diferente, nenhuma crítica"
3. "Foi bom mas muitas pessoas ficavam conversando e sem prestar atenção"
4. "Achei boa a semana, poderia ter um vídeo de base para ensinar o assunto e atividade que chamem a atenção dos alunos, minha crítica é que foi muito entediante a atividade dos polígonos feitos em papel colorido"
5. "Gostei muitíssimo das aulas, além de ser bom é muito tranquila a aula, é sempre bom ter mais! Kkk"

Através de algumas respostas podemos discutir um pouco de como foi a execução dessas aulas. Podemos citar um pouco sobre a importância de uso de materiais didáticos no ensino e aprendizagem de geometria. De modo geral e de acordo com as respostas dadas no formulário, muitos alunos gostaram da aula que envolve materiais lúdicos e meios que envolvem a tecnologia, como o uso de aparelhos celulares, por exemplo. Acreditamos que há grande aceitação nesse tipo de atividade por parte dos alunos, que em geral participam com mais facilidade quando postos nessas situações. Porém, algumas críticas foram feitas em relação a participação total da turma, onde mesmo com atividades interativas, tiveram relatos de alunos conversando ou não participando efetivamente das aulas. Isso é um fato que deve ser analisado e corrigido numa futura aplicação.

Conclusão

A relação do objeto físico e a teoria é muito importante para o ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo geométrico, seja no ensino médio ou fundamental. Em especial, no ensino fundamental, onde o contato com o público infantil é mais comum, é de extrema importância o equilíbrio entre métodos lúdicos de ensino e o sistema de ensino tradicional (pincel e quadro branco). Através das respostas dos alunos, percebemos ainda mais a importância desse equilíbrio. De certa forma, a aplicação gerou alguns frutos positivos, expostos pelas respostas do formulário ou até pelas fisionomias alegres em participar em uma aula divertida e sem compromisso organizacional. Porém, não podemos destacar o alto índice de abstenções no resultado final da aplicação. Tal caso deva ser plenamente analisado futuramente e corrigido em situações futuras. Neste caso, podemos citar o uso de outros polígonos regulares na execução do jogo da "'Tábua geométrica", como por exemplo, um hexágono ou um heptágono. Isso aconteceu pois por ser consequência direta dos movimentos de rotação e reflexão do pentágono através do "Patrcik Estrela", a proposta se mostrou com baixo nível de dificuldade. Além disso, podemos citar também, que após toda a execução, era cabível a adoção de alguma atividade de reforço para aqueles alunos que apresentaram dificuldades ao final. Por fim, de modo geral, aplicação influenciou de forma positiva a formação docente do presente autor e que o estimulou a gerar mais pesquisas sobre tal conteúdo.

Referências

7, E. *Encaixe Grande de Formas Geométricas com 8 peças Educativo no Elo7 / Biloca Brinquedos Educativos (F50061)*. s.d. <https://www.elo7.com.br/encaixe-grande-de-formas-geometricas-com-8-pecas-educativo/dp/F50061>. (Acesso em: 30 de set. de 2022). 44

AMANHÃ, M. D. *A BELEZA ESCONDIDA DA MATEMÁTICA*. 2018. Disponível em: <https://artsandculture.google.com/story/XAVxHxByw1SoIw?hl=pt-BR>. (Acesso em: 09 de out. de 2022). 21

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 10. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2008. 23, 31

BASTOS, R. Notas sobre o ensino da geometria: Grupo de trabalho de geometria da apm - simetria. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*, n. 88, p. 9–11, 2006. 22, 23, 24, 25, 26

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. [S.l.]: MEC/SEF, 1998. 19, 51

BRASIL. *Banco Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Ministério da educação, 2018. 19, 23, 47, 51

CARVALHO, J. B. P. F.; LIMA, P. F. *Considerações sobre a geometria para os anos iniciais do ensino fundamental*. [S.l.: s.n.], 2006. 19, 20, 51

DOMINGUES, H. h.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 3. ed. São Paulo, SP: Editora Atual, 1982. 33, 34

GARCIA Àrnaldo; LEQAUIN, Y. *Elementos de álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 35

MARTINS, S. *O Homem Vitruviano, Leonardo da Vinci*. 2017. Disponível em: <https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/o-homem-vitruviano-leonardo-da-vinci/>. (Acesso em: 09 de out. de 2022). 21, 22

MASSAGO, S. *Pontos notáveis de um triãngulo*. 2010. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br>. (Acesso em: 11 de out. de 2022). 27

OBMEP, C. de Matemática da. *Probleminha: Estrela pentagonal*. s.d. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-estrela-pentagonal/>. (Acesso em: 15 de set. de 2022). 41

ROCHA, M. *Macrofotografia por Maxwel Rocha: Borboletas e Mariposas*. 2013. Disponível em: <http://macrobrasil.blogspot.com/2013/02/borboletas-e-mariposas.html?utm_source=BP_recent>. (Acesso em: 09 de out. de 2022). 22

ROHDE, G. M. *Simetria - Generalidades sobre geociências, biociências, ciências exatas, tecnologias e artes, filosofia*. [S.l.]: Hemus, 1982. 26

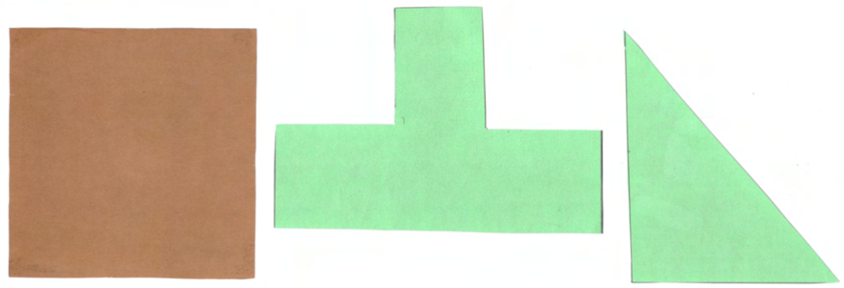
ROHDE, G. M. *Simetria: rigor e imaginação*. [S.l.]: EDIPUCRS, 1997. 21, 22, 24, 25

Anexos

ANEXO A – Polígonos e não polígonos feitos em papel

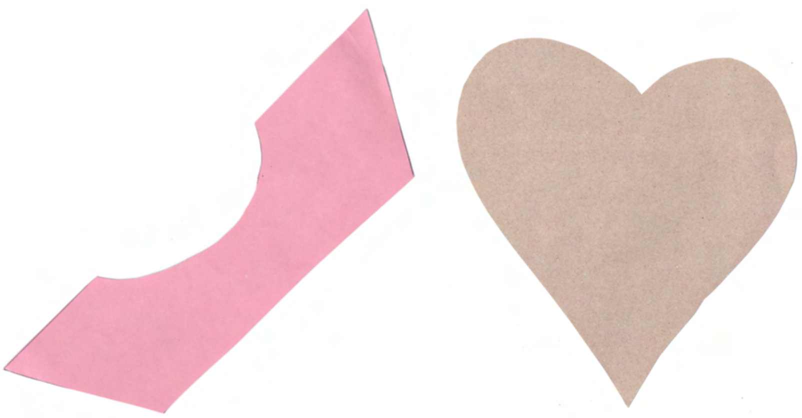
A seguir, temos as representações dos polígonos e não polígonos feitos em papel, devidamente descritos no plano de aula 1 na secção 3.1.

Figura 42 – Representação de polígonos



Autoria própria

Figura 43 – Representação de não polígonos

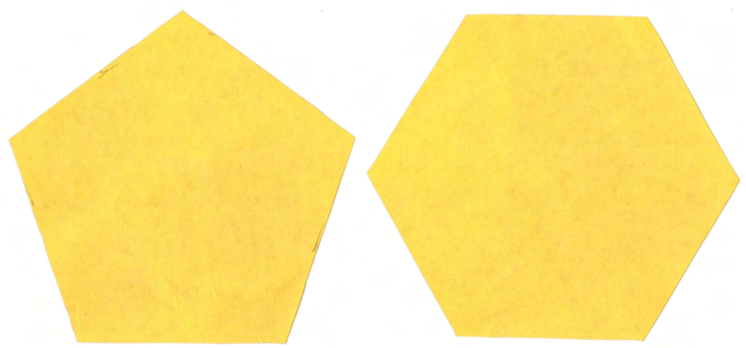


Autoria própria

ANEXO B – Polígonos regulares feitos em papel

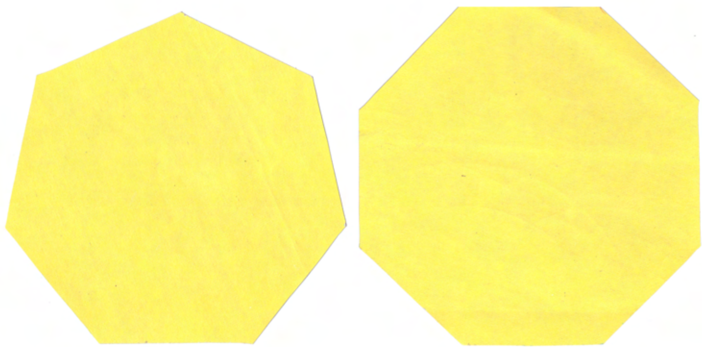
A seguir, temos as representações dos polígonos regulares feitos em papel, devidamente descritos no plano de aula 2 na secção 3.2.

Figura 44 – Representação da construção do pentágono regular e hexágono regular feitos em papel colorido



Fonte: Autoria própria

Figura 45 – Representação da construção do heptágono regular e octágono regular feitos em papel colorido

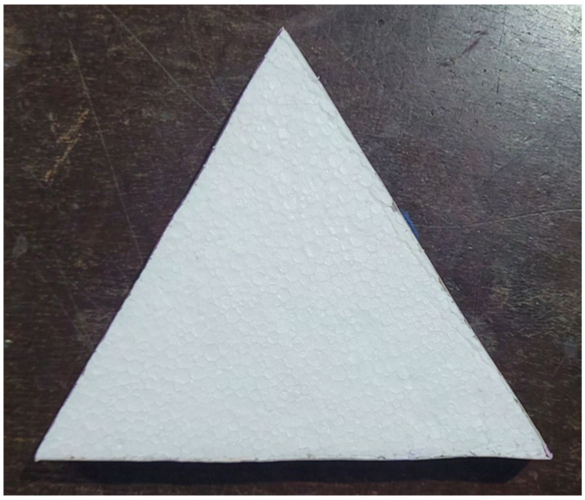
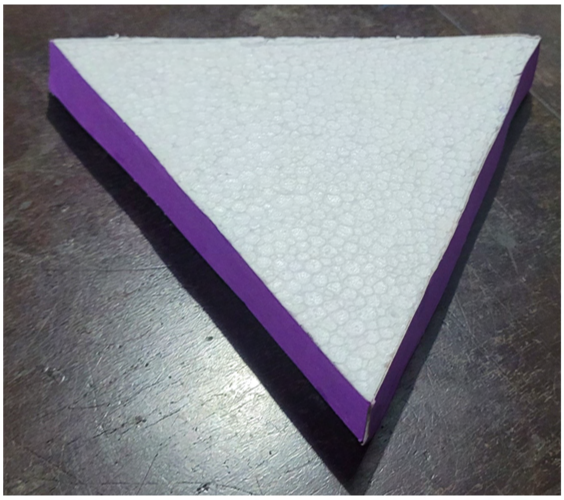


Fonte: Autoria própria

ANEXO C – Tábua geométrica e seus polígonos

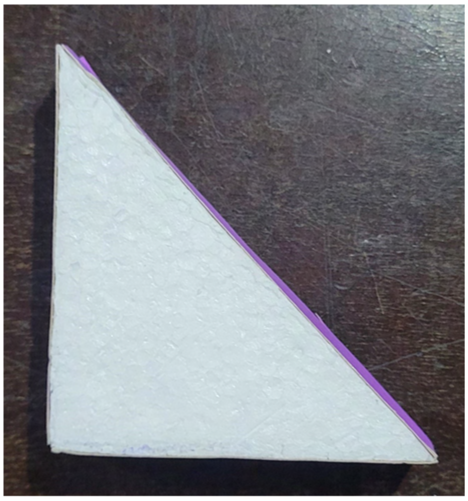
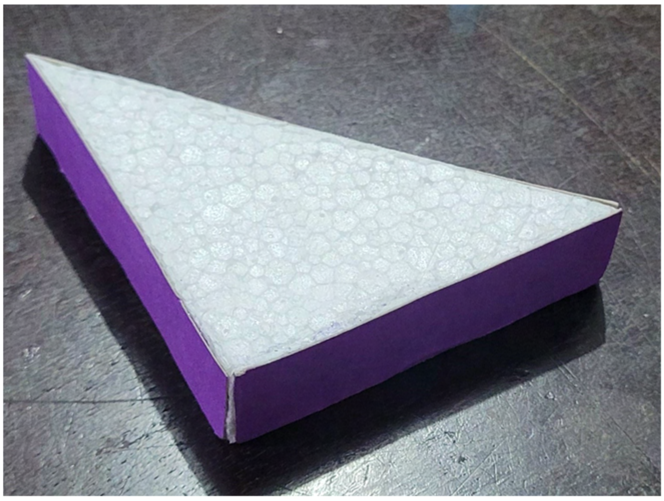
A seguir estão as figuras representando os polígonos utilizados na ferramente didática "Tábua geométrica", composto por triângulos equiláteros e retângulos, quadrado, pentágono e losango, respectivamente em duas opções de vistas (superior e lateral):

Figura 46 – Representação da construção do triângulo equilátero em vistas superior e lateral

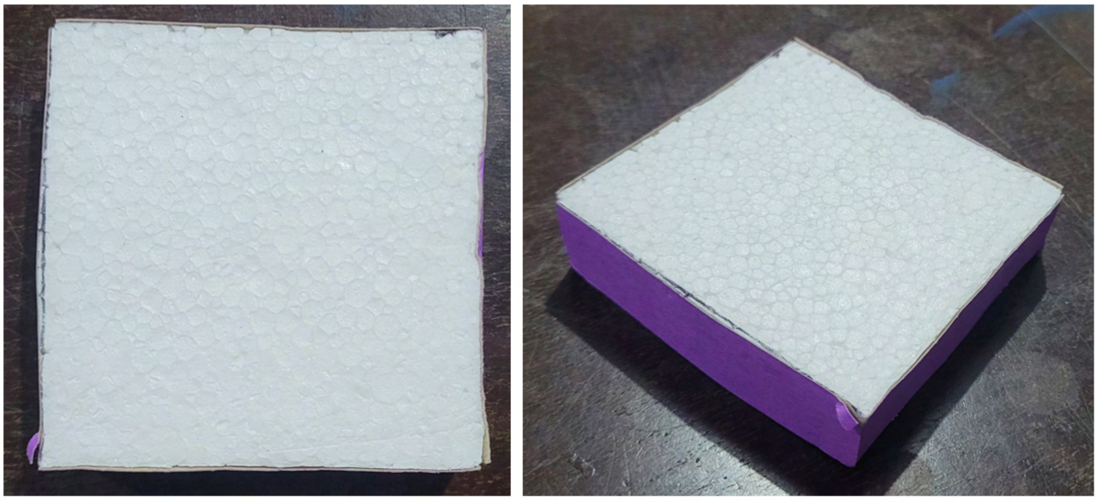
Fonte: Autoria própria

Figura 47 – Representação da construção do triângulo retângulo em vistas superior e lateral

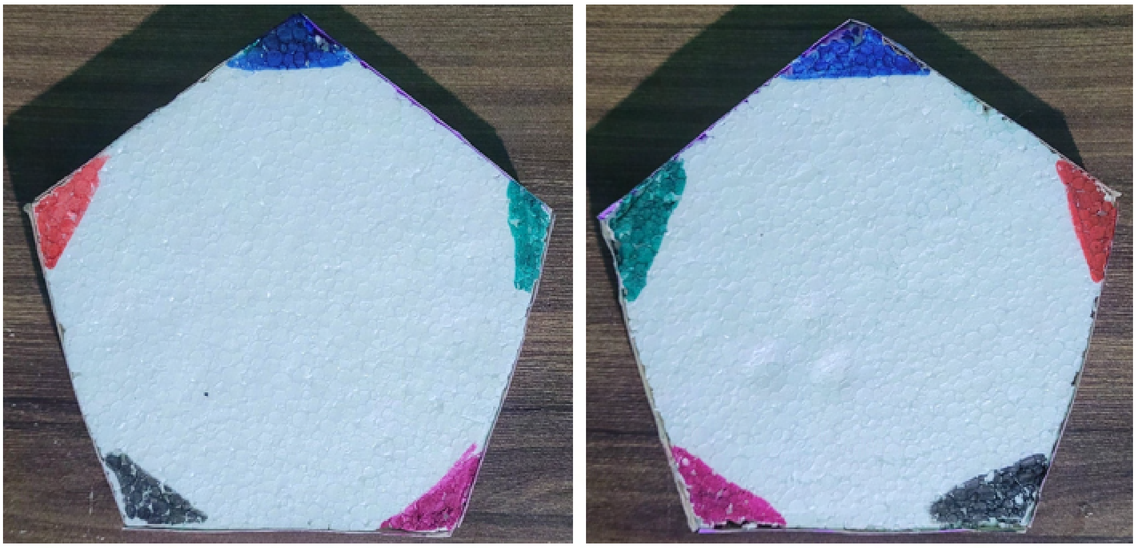
Fonte: Autoria própria

Figura 48 – Representação da construção do quadrado em vistas superior e lateral



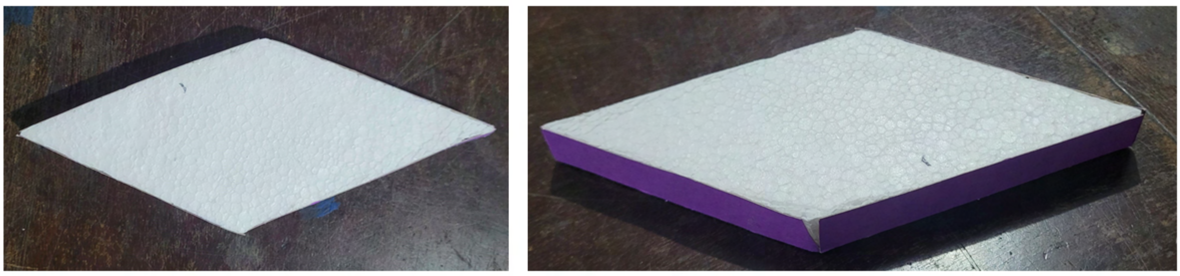
Fonte: Autoria própria

Figura 49 – Representação da construção do pentágono em vistas frente e verso



Fonte: Autoria própria

Figura 50 – Representação da construção do losango em vistas superior e lateral



Fonte: Autoria própria

ANEXO D – Perguntas e resposta - formulário eletrônico

A seguir, apresamos todas as perguntas e respostas do formulário eletrônico estabelecido afim de obtenção de resultados. Primeiramente está representada a apresentação do formulário, contendo informações importante aos alunos quanto a importância de preencher todas as perguntas e algumas orientações básicas. Após isso, serão apresentadas as perguntas e posteriormente suas respectivas respostas.

Figura 51 – Apresentação do formulário eletrônico

Formulário sobre as aulas da semana dos polígonos - 6° ano B

Este formulário tem como objetivo arrecadar opiniões, críticas e sugestões acerca da semana dos polígonos.

Não se esqueça de expressar sua opinião sobre a atividade de forma completa e clara. É muito importante, pois ajudará o professor a entender melhor os resultados e os sentimentos de cada aluno a respeito da atividade.

*Obrigatório

Autoria própria

Figura 52 – 1° e 2° perguntas do formulário eletrônico

Sobre a atividade avaliativa envolvendo desenho de polígonos, em sua opinião, como você avalia a aplicação em sala de aula?

14 respostas

Boa

Essas atividades ajudam muito, além disso, é legal e contagiante.

Foi uma ótima atividade,praticamos com polígonos com uma aula mais direta e divertida, você consegue aprender brincando sobre os polígonos.

Eu até que achei bom,foi legal fazer desenho com poligonos.

Muito boa!!!

Muito boa ajuda a tirar suas dúvidas

legal??

Legal

Bom

9/10

Eu gostei pois foi uma atividade livre e assim nós podemos usar a criatividade

Ótima

Eu gostei, achei que aproximou mais os alunos do professor .

Você já conhecia a tábua geométrica ou algo parecido? Se sim, fale um pouco sobre sua experiência com relação a atividade.

14 respostas

Não

Essa tábua geométrica, tbm é bastante familiar a brinquedos, Essa tábua também existe raciocínio lógico

Já conhecia essa tábua, parece com aquelas de bebê para encaixar os blocos geométricos,e essa atividade nos podemos ver a diferença de encaixe de cada peça, principalmente seus lados mudando os lados dos polígonos podemos ver suas vértices mudando de local só de mudar o lado como vimos em sala.

Nunca vi isso na minha vida,e foi bom.

Sim, legal...

Sim conhecia conhecia o pentágono conhecia os pontos ou lados é as retas

nao conhecia nao welissonkk

Sim, gostei mais na encaixaram

Eu achei super fácil

Eu não conhecia a tábua geométrica porém já vi bebês e crianças pequenas brincando com um objeto semelhante

Sim, é bem interessante

Não conhecia.

Não conhecia

Autoria própria

Figura 53 – 3° e 4° perguntas do formulário eletrônico

Você já conhecia o Patrick Estrela? Se sim, fale um pouco o que você achou do uso do personagem na aula de medidas e formas.

14 respostas

Esse personagem é um participante para uma aula bem contagiante e interessante, ele faz parte de um desenho animado para crianças, chamado de Bob esponja

Achei bem criativo

Foi um ótimo exemplo representa um polígono bem simples mais com várias informações sobre o mesmo(os polígonos)

FOI O MELHOR ASSUNTO DESSA AULA!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Eu achei bom porque ele representa um formato de estrela e é um polígono

Sim conhecia, muito criativo kkkkkkkkk

conhecia, achei legal?

Não estava no dia por motivo de doença

Sim eu gostei muito todos os lados dele são iguais

Eu achei fofo

Sim
Eu achei interessante pois o assunto foi explicado com exemplos

Muito bom, pois me fez prestar mais atenção na aula

Já conhecia sim!, achei muito criativo e divertido.

Sim conheço o personagem e gostei do jeito que foi usado para o ensino

Sobre o ensino dos polígonos regulares utilizando atividade e materiais lúdicos como o "Patrick Estrela" e a "Tábua Geométrica". Como você avalia os seus usos nas nossas aulas de medidas e formas?

14 respostas

Achei muito interessante essas aulas com esses objetos

Se for pelo o que eu entendi(os meus usos dos desenhos de polígonos que eu desenho) eu acho que não são criativos pois não uso cor.

Um uso bem útil explicando de uma maneira mais prática a partir dos itens usados,pois são exemplos muito utilizável e conseguem explicar melhor sobre o assunto bem resumidamente.

Eu achei bom a tábua,e o melhor o Patrick Estrela.

Foi muito bom mais o pessoal ficava conversando

Muito criativo, vc aprende bem, tirar melhor suas dúvidas

achei que foi bem legal pq o senhor explica direitinho e fica mais fácil de entender quando é alguma coisa fisica invés de desenhos

Não estava no dia por motivo de doença

Gostei nota 8 eu gostei mais só não dei 10 porque a da Tábua os geométricos não se encaixaram mais gostei

Eu achei a atividade bem legal e criativa

Eu gostei pois assim nos tivemos a oportunidade de aprender de maneira divertida

Maravilhosos

Criativo e bem explicativo.

Achei bom dá forma que foi uzado

Autoria própria

Figura 54 – 5° e 7° perguntas do formulário eletrônico

Dê sua opinião sobre a gincana aplicada no final da semana dos polígonos.

14 respostas

Gostei bastante da gincana, aliás tira bastante alguns alunos do tédio e levam o alunos para aprender uma nova experiência.

Acho bem legal e divertida, ela é boa pois junta os amigos e faz muitas amizades.

Uma gincana bem legal e divertida, consegue explicar um pouco sobre o assunto de polígonos e consegue divertir os alunos e ensina ao mesmo.

Pera ai,teve gincana no final de semana?E foi bom.

Ótima!! Aula diferente

Muito divertida teve várias risadas em relação ao Patrick estrela

legal, so nao gostei mt pq nao fiquei em primeiro

Muito boa

Gostei 8

Eu achei bem legal por que além de entreter os alunos, eles estavam aprendendo

Eu achei boa pois nós nos divertimos com os nossos amigos enquanto aprendemos, além de nos fazer querer acertar mais questões para ficar no pódio

Gostei muito

Adorei a ideia!, e achei super divertido.

Boa, gostei da ideia de fazer um quis sobre o assunto

Dê sua opinião sobre as aulas da semana dos polígonos. Fale do que gostou, relate sugestões, elogios ou críticas.

14 respostas

Gostei muitíssimo das aulas, além de ser bom é muito tranquila a aula, é sempre bom ter mais! Kkk

Eu acho ela bem fácil, os assuntos que aprendi até agora nunca tive dificuldade.

Eu gostei muito mesmo da parte dos polígonos feitos em papel colorido mais gostei dos outros materiais também, mais esse foi meu favorito.Eu não tenho nada a criticar,pois esse foi o jeito mais legal de se aprender os polígonos,muito legal nada a criticar.

O unico q eu achei o melhor foi o do Patrick Estrela.

Foi bom mas muitas pessoas ficavam conversando e sem prestar atenção 😡

Muito mais muito mais legal divertido dó que só copiar né Welisson você aprende bem mais a atividade do Patrick estrela foi a melhor brigada fui

eu sei que nao foi dessa semana e que faz tempo mas eu gostei mt da atividade da jujuba, achei criativa e legal pq pode comer dps😋

Do quiz, ter mais aulas sobre isso, legal pois e uma atividade diferente, nenhuma crítica

Gostei aumente o buraco da tábua ass. *Miguel dionisio de miranda*

Eu achei o assunto bem fácil (mesmo tendo algumas partes difíceis)

Eu achei bem interessante pois nós aprendemos e aproveitamos durante a semana inteira

O professor sempre dá seu melhor para ensinar, e as aulas de são legais e interessantes .

Achei q foi uma semana divertida e que ajudou mais na compreensão dos assuntos

Achei boa a semana,poderia ter um vídeo de base para ensinar o assunto e atividade que chamem a atenção dos alunos, minha crítica é que foi muito entediante a atividade dos polígonos feitos em papel colorido

Autoria própria