UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA

Marcílio Souza Rodrigues de Oliveira

Do Binômio de Newton ao Polinômio de Leibniz, Demonstrações e Aplicações

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA

Marcílio Souza Rodrigues de Oliveira

Do Binômio de Newton ao Polinômio de Leibniz, Demonstrações e Aplicações

Monografia apresentada a Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Wanderson Aleksander da Silva Oliveira

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48b Oliveira, Marcílio Souza Rodrigues de
Do binômio de Newton ao polinômio de Leibniz, demonstrações e aplicações / Marcílio Souza Rodrigues de Oliveira. - 2021.
55 f. : il.

Orientador: Wanderson Aleksander da Silva Oliveira.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. Binômio de Newton. 2. Polinômio de Leibniz. 3. Aplicações. I. Oliveira, Wanderson Aleksander da Silva, orient. II. Título

CDD 510

Marcílio Souza Rodrigues de Oliveira

Do Binômio de Newton ao Polinômio de Leibniz, Demonstrações e Aplicações

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Aprovado em: 29/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Me. Wanderson Aleksander da Silva Oliveira
(Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

____

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

____

Profa. Ma. Itacira Ataide Silva
Universidade de Pernambuco - UPE

Recife - PE
Julho de 2021

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por todas as dádivas concedidas durante esses anos na universidade e por cada momento de aprendizado que ele me proporcionou.

À minha mãe Glaucia Maria e a meu pai Marcílio Rodrigues que sempre me incentivaram a continuar nesta jornada, me dando todo apoio necessário.

Aos meus avós maternos Iracema Isabel e José Marcolino (saudosa memória). A todos os meus tios e tias, em especial meu padrinho e madrinhas, à todos os meus primos e primas, em especial Marcela (saudosa memória) que sempre conversou comigo sobre a universidade, me incentivou e participou das minhas conquistas.

Ao mestre e amigo Wagner Souza, meu grande incentivador desde 2011, responsável por me fazer amar a matemática e que sempre acreditou no meu potencial. Ao amigo e professor Jamerson Silva, gratidão por todas os diálogos enriquecedores que o senhor sempre me proporcionou.

Quero ainda estender meus agradecimentos aos meus amigos de escola/vida, especialmente Gabriel Felipe e Rodrigo Felipe, pelos mais de 10 anos de irmandade e por sempre acreditaram em mim. Aos meus amigos da universidade (agora já é muita gente), que desde 2015 começaram a fazer parte do meu dia a dia, em especial, Tatiana, Yasmim e Sílvio, juntos evoluímos como profissionais e pessoas, e todos vocês tem um lugarzinho no meu coração.

À minha namorada e copydesk Maria Eduarda, meu maior presente no ano de 2020, esse serzinho que em tão pouco tempo me incentivou num nível sem precedentes, sempre me motivando e tirando dos dias de procrastinações, uma menina de luz que surgiu para deixar os meus dias mais felizes e leves.

E por último, mas não menos importante, quero agradecer a todos os mestres e doutores incríveis que tiver a satisfação de conhecer durante a minha graduação, Clessius Silva, Yane Lísley, Gilson Carvalho, Adriano Régis, Edgar Amorim, Thiago Dias, Thamires Cruz, Lorena Brizza, Bárbara Costa, Ross Alves, Thiago Tanaka, Daniel Cassimiro, Anete Soares e Vladimir Andrade. Em especial, minha gratidão ao meu professor de Análise Combinatória Dr. Antônio Ferreira e ao meu orientador Me. Wanderson Aleksander, por ter aceitado o desafio de me orientar, pela paciência, atenção e carinho, obrigado por acreditar em mim.

Enfim, essa conquista não é só minha, mas de todos vocês, obrigado por contribuírem na minha jornada. Hoje não é o fim... É APENAS O COMEÇO!

"Não sei como o mundo me vê, mas eu me sinto como um garoto brincando na praia,
contente em achar aqui e ali, uma pedra mais lisa ou uma concha mais bonita,
mas tendo sempre diante de mim, ainda por descobrir, o grande oceano de verdades."

Isaac Newton

Resumo

A proposta deste trabalho é apresentar o Binômio de Newton (1643-1727) com enfoque em sua generalização dada pelo Polinômio de Leibniz (1646-1716) e suas utilidades para o cálculo de probabilidades, estabelecendo conexões com contextos reais ou não. A ideia de viabilizar aplicações do Binômio de Newton e do Polinômio de Leibniz através de exemplos práticos como lançamento de moedas, probabilidade de derrota e a sua utilização na genética, teve como propósito mostrar a aplicabilidade e usabilidade dessas ferramentas em eventos de qualquer natureza. Além disso, detalhamos no âmbito algébrico e combinatório as demonstrações de todas as propriedades e teoremas existentes no trabalho, com o intuito do leitor alcançar de maneira satisfatória o entendimento dos conceitos apresentados.

Palavras-chave: Binômio de Newton. Polinômio de Leibniz. Aplicações.

Abstract

The purpose of this work is to present Newton's Binomial (1643-1727) focusing on its generalization given by Leibniz's Polynomial (1646-1716) and its utilities for calculating probabilities, establishing connections with real or non-real contexts. The idea of enabling applications of Newton's Binomial and Leibniz's Polynomial through practical examples such as coin toss, probability of defeat and their use in genetics, aimed to show the applicability and usability of these tools in events of any nature. In addition, we detail, in the algebraic and combinatorial scope, the demonstrations of all the properties and theorems existing in the work, with the aim of the reader to satisfactorily reach an understanding of the concepts presented. Finally, it is worth noting that in the body of the work the reader will be introduced to the history of the concepts that will be worked on and of the mathematicians present.

Keywords: Newton's binomial. Leibniz's Polynomial. Applications.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O desenvolvimento do binômio $(1 + a)^n$, para n um inteiro positivo, está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. Segundo Morgado (2016), as primeiras conexões com este problema, a saber para o caso para $n = 2$, já podiam ser encontradas por volta de 300 a.C em Os Elementos de Euclides e o triângulo de Pascal (1623-1662) era conhecido por Chu Shih-Chieh, por volta de 1300.

O nome coeficiente binomial foi introduzido em 1550 por Michael Stifel (1486-1567) e segundo Morgado (2016, p. 3) "sabe-se que o matemático árabe Al-Karaji (fins do século X) conhecia a lei de formação do que viria a gerar os elementos do triângulo de Pascal", a saber:

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p,$$

e os detalhes de como calcular cada um destes coeficientes individualmente, isto é, as combinações será feito posteriormente no tópico 2.3 e a demonstração dessa lei de formação no tópico 3.1.1.

Segundo o autor:

> O primeiro aparecimento do triângulo de Pascal no Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552). Niccalò Fontana Tartaglia (1499-1559) relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de $(a + b)$. Pascal (1623-1662) publicou um tratado em 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$.(MORGADO, 2016, p.3)

e ainda segundo Morgado (2016), Jakob Bernoulli (1654-1705), em seu livro póstumo Ars Conjectandi, publicado em 1713 usou a interpretação de Pascal para demonstrar que

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} b^m a^{n-m}.$$

Isaac Newton (1643-1727) mostrou como calcular diretamente $(1 + a)^n$ sem antes calcular $(1 + a)^{n-1}$ e Leibniz (1646-1716) descobriu o teorema multinomial.

O teorema multinomial é a generalização do teorema do binômio que considera potências da forma

$$(x + y + ... + z)^n,$$

Quanto ao trabalho, seguimos a seguinte estrutura:

Composto por 5 capítulos, no primeiro falamos um pouco sobre Análise Combinatória, Contagem e de problemas que não envolvem a Contagem, como por exemplo, a Teoria dos Grafos e os Quadrados Latinos.

Num caráter introdutório, o segundo capítulo tem por objetivo apresentar algumas ferramentas básicas da contagem, tais como fatorial e combinação simples, uma vez que são conceitos úteis para o desenvolvimento do trabalho.

No terceiro capítulo apresentamos os números binomiais dividindo-os em dois blocos, onde no primeiro falamos sobre o Triângulo de Pascal (1623-1662), suas propriedades e demonstrações, e no segundo sobre Isaac Newton (1643-1723), o binômio que leva o seu nome, sua demonstração e exemplos.

No quarto capítulo inicialmente apresentamos os números trinomiais, multinomiais e suas relações com as permutações com repetições. Em seguida, com a mesma estrutura do capítulo anterior, abordamos no primeiro bloco a Pirâmide de Pascal e no segundo Gottfried Leibniz (1946-1716), o polinômio que possui seu nome, sua demonstração e exemplos.

Por fim, no último capítulo expomos aplicações do Binômio de Newton, algumas dessas relacionadas à hereditariedade genética e ao método binomial, e aplicações do Polinômio de Leibniz, envolvendo o cálculo de probabilidades.

1 Contextualização

1.1 O que é Análise Combinatória?

Para Morgado (2016, p. 1): "Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:
1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas".

No entanto, boa parte dos alunos do Ensino Médio ou de uma graduação responderia que a Análise combinatória é o estudo das permutações, combinações e arranjos (MORGADO, 2016). O que é uma resposta superficial.

Segundo o autor:

> a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas tais como: o princípio da inclusão-exclusão, os lemas de Kaplansky, o principio das gavetas de Dirichlet e o principio da Reflexão, esses são exemplos de técnicas poderosas. De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas (MORGADO, 2016, p. 2).

Existem problemas que não estão ligados a contagem, o que na prática diferencia da Análise Combinatória escolar, como por exemplo: a Teoria dos Grafos, onde começou na cidade de Konigsberg em 1736 pelo grande matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783). Diz a história, que a cidade era cortada pelo rio Pregel, que possuía duas ilhas (fato comprovado), e que era muito complicado o transporte através de barcos, assim, 7 pontes foram construídas para auxiliar neste deslocamento entre as ilhas e as duas margens. Após algum tempo as pessoas começaram a se perguntar se era possível sair de sua casa, passar por cada ponte exatamente uma vez e voltar para a segurança de seu lar.

Para resolver o problema, Euler montou um diagrama que representasse o mapa da cidade, onde cada ilha e margem ele associou a um ponto (vértice) e cada ponte associou a uma aresta. Esse diagrama com vários pontos (vértices) e algumas arestas é o que denominamos como grafo. Para finalizar seu raciocínio, Euler percebeu que existiam vértices com exatamente três arestas incidentes e como os moradores queriam atravessar cada ponte apenas uma vez, cada vértice deveria ter um número par arestas. Logo, se tornaria impossível fazer um percurso seguindo as regras impostas pelos moradores e assim a teoria dos grafos (que é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto) dava seus primeiros passos.

Outro exemplo que pode ser citado, são os Quadrados Latinos, onde o primeiro matemático que publicou um texto sobre foi Leonhard Euler em 1783, texto que se referia a aplicações na estatística. O nome quadrados latinos se dá ao fato de que Euler usou letras latinas para os seus quadrados. Um quadrado latino é uma quádrupla n x n preenchida com n símbolos diferentes, cada um ocorrendo exatamente uma vez em cada linha e uma vez em cada coluna, apresentam uma estrutura combinatorial muito singular, e dela derivam-se muitas propriedades e aplicações.

Tudo começou por causa do "problema dos 36 oficiais"que apresenta a seguinte formulação: "Admita-se a existência de seis destacamentos em cada um dos quais ficam seis oficiais com patentes distintas, dentre seis possíveis. Pretende-se fazer uma parada militar envolvendo estes trinta e seis oficiais, de tal forma que eles apareçam, seis em cada linha, sem que existam dois oficiais com a mesma patente ou pertencentes ao mesmo destacamento numa mesma linha". Entretanto Euler conjecturou que este problema não teria solução.

O sudoku é um exemplo de quadrado latino, ele é uma espécie de quebra-cabeça matemático, que se tornou imensamente popular em um curto período de tempo, onde nesta estrutura a soma dos algarismos de todas as linhas, colunas e diagonais devem produzir o mesmo resultado. Em sua versão mais comum, contém 81 casas, distribuídas em nove linhas, nove colunas e nove agrupamentos em forma de quadrado contendo nove quadrados menores dentro.

O jogo começa com algumas casas já preenchidas, cabendo ao jogador completar as casas restantes com algarismos de 1 a 9, de modo que nenhum deles se repita na mesma coluna ou linha, nem dentro da mesma subgrade. E como já falado, o Sudoku tem tudo a ver com quadrado latino e na sua versão padrão, se assemelha a um quadrado latino de ordem 9.

2 Ferramentas Básicas

2.1 Fatorial

Antes da apresentação das principais ferramentas básicas da contagem, definamos o fatorial de n, para cada número natural n, por

$$n! = \begin{cases} 1 \ , \ se \ n = 0 \\ n(n-1)! \ , \ se \ n \geq 1 \end{cases}$$

e, consequentemente,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \ , \ quando \ n \geq 1$$

2.2 Permutações Simples

Dados n objetos distintos a_1, a_2, ... , a_n, de quantos modos é possível ordená-los?

Por exemplo, para os objetos a, b, c há 6 ordenações: abc, acb, bac, bca, cab e cba. No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, e assim sucessivamente, até sobrar apenas 1 modo do último objeto ocupar o último lugar.

Portanto, o número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$$

Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o números de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n.
Assim P_n = n!

2.3 Combinação Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou ainda, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$?

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma combinação simples de classe p dos n objetos $a_1, a_2, ..., a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 de A, B, C, D e E são:

(A,B,C) (A,B,D) (A,B,E) (A,C,D) (A,C,E) (A,D,E) (B,C,D) (B,C,E) (B,D,E) (C,D,E)

O número de combinações simples de classe p de n objetos e representado por C_n^p. Assim, $C_5^3 = 10$.

Analisando esse exemplo, sabemos que a escolha do primeiro elemento pode ser feita de 5 modos, a do segundo de 4 modos e a do terceiro de 3 modos, e seria plausível pensar que a resposta é 5 x 4 x 3 = 60. Porém se pensarmos numa combinação, por exemplo, (A,B,C), é fácil verificar que (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C) e etc são idênticas (pois contém os mesmos elementos) e foram contadas como se fossem diferentes. Em suma, na resposta 60 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever os elementos. Como em cada combinação os elementos pode ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ maneiras, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo, a resposta é $\frac{60}{6} = 10$.

No caso geral, temos

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!},\ 0 < p \leq n$$

e $C_n^0 = 1$.

Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$. Obtemos

$$\begin{aligned}
C_n^p &= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\
&= \frac{[n(n-1)\dots(n-p+1)] \cdot (n-p)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{[n(n-1)\dots(n-p+1)] \cdot [(n-p)(n-p-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1]}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}
\end{aligned}$$

e também usamos a notação binomial

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2.4 Permutação com Repetição

Considere uma conjunto de n objetos, onde r objetos são do tipo t_i, para $i = 1,...,k$. Duas sequências de n objetos, a_1 e a_2, são ditas equivalentes se, para toda posição i, os objetos nas i-ésimas posições de a_1 e a_2 tem o mesmo tipo. Quantas sequências não equivalentes destes n objetos existem?

Por exemplo, na quantidade de permutações da palavra MISSISSIPI, seria fácil pensar que a resposta é $P_{10} = 10! = 3628800$. Mas o problema consiste em determinar o número de sequências não equivalentes de 10 letras em que a letra M aparece uma vez, a letra I 4 vezes, a letra S 4 vezes e a letra P uma vez e podemos pensar em M como o tipo t_1, I como o tipo t_2 e etc.

Para determinar o número de anagramas ou permutações da palavra MISSISSIPI, podemos pensar de dois modos:

1) Para resolver o problema, observe que temos que arrumar 1M, 4I, 4S e 1P em 10 lugares. Para colocar a letra M, existem $C_{10}^1 = \binom{10}{1} = 10$ possibilidades. Depois que a letra M for colocada, existem $C_9^4 = \binom{9}{4} = 126$ possibilidades para dispor as letras I. Dado que as letras M e I foram colocadas, existem $C_5^4 = \binom{5}{4} = 5$ maneiras para dispor as letras S e, finalmente, sobra uma posição, $C_1^1 = \binom{1}{1}$ para letra P. E utilizando o princípio da multiplicação, temos um total de $10 \times 126 \times 5 \times 1 = 6300$ possibilidades.

2) Se as letras fossem diferentes, obteríamos $P_{10} = 10!$ anagramas. Como os I são iguais, contamos cada anagrama 4! vezes. Analogamente, contamos cada anagrama 4! vezes para as letras S iguais e 1! vezes para M e P. Logo, temos que fazer "descontos" e portanto,

$$P_{10}^{4,4,1,1} = \frac{10!}{4!4!1!1!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4!}{4!4!} = \frac{10.9.8.7.6.5}{4.3.2.1} = 10.9.7.2.5 = 90.70 = 6300.$$

É fácil ver que, no caso geral, temos, para $\alpha + \beta + \ldots + \kappa + \lambda =$ n,

$$\begin{aligned}
P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\kappa,\lambda} &= C_n^{\alpha} \cdot C_{n-\alpha}^{\beta} \ldots C_{n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa}^{\lambda} \\
&= \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} \cdot \frac{(n-\alpha)!}{\beta!(n-\alpha-\beta)!} \cdots \frac{(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa)!}{\lambda!(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa-\lambda)!} \\
&= \frac{n!}{\alpha!\cancel{(n-\alpha)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-\alpha)!}}{\beta!\cancel{(n-\alpha-\beta)!}} \cdots \frac{\cancel{(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa)!}}{\lambda!(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa-\lambda)!} \\
&= \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa-\lambda)!} \\
&= \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!0!} \\
&= \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},
\end{aligned}$$

resposta à qual chegaríamos diretamente pelo segundo raciocínio.

Assim, o número de permutações de n objetos dos quais α são iguais a a, β são iguais a b,..., λ iguais a l ($\alpha + \beta + \ldots + \kappa + \lambda =$ n) é

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\kappa,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}.$$

3 Números Binomiais

3.1 Triângulo de Pascal

Antes do Triângulo de Pascal, temos que falar dos números binomiais (ou coeficientes binomiais) e inicialmente definimos, para n e k naturais, com $n \geq k$, o número binomial de n sobre k por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Observe que a definição de número binomial corresponde ao cálculo das combinações simples e, sendo assim, podemos comprovar que, dado o conjunto A com n elementos:
1) $C_n^0 = 1$, significa que temos um único subconjunto sem elementos de A, ou seja, o próprio conjunto vazio.

$$\binom{n}{0} = C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2) $C_n^n = 1$, significa que temos um único subconjunto com n elementos de A, ou seja, com todos os elementos de A e consequentemente o próprio conjunto A.

$$\binom{n}{n} = C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

3) $C_n^1 =$ n, significa que temos n subconjuntos com apenas 1 elemento de A, ou seja, os conjuntos unitários.

$$\binom{n}{1} = C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Com os números binomiais definidos anteriormente, construímos uma tabela (numérica) triangular, denominada triângulo de Pascal, também conhecida como triângulo de Tartaglia (para os italianos), que é um triângulo aritmético formado por números binomiais. Descoberto pelo matemático chinês Yang Hui (1238-1298), onde na China é conhecido como triângulo de Yang Hui e estudado por Blaise Pascal (1623-1662).

Yang Hui (1238-1298) foi o mais famoso matemático chinês associado ao triângulo aritmético. Ele escreveu cerca de dez livros, sendo que em ao menos dois desses ele estuda e aplica o triângulo aritmético. Enquanto Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557) que antecedeu Pascal em um pouco mais de 100 anos foi o mais famoso matemático italiano que redescobriu o triângulo aritmético. E segundo Silveira (2020), Tartaglia dedicou muitas páginas de seu enorme livro General Tratato (1556) e segundo historiadores, esse livro foi o melhor, mais completo e o maior tratado de aritmética até então escrito.

E o que fez Pascal afinal? Diz a história que após receber um problema do Cavaleiro de Méré, relacionado a lançamentos de dados e prejuízos em apostas, Pascal logo se convenceu que a resolução teria de passar pela enumeração combinatorial do evento desejado e "procurando uma maneira inteligente de fazer essa trabalhosa enumeração, Pascal redescobriu e aperfeiçoou uma interpretação combinatória e probabilística do triângulo aritmético, a mesma que Tartaglia já havia descoberto e estudado". (SILVEIRA, 2020, p. 11).

E ainda segundo o autor:

> Pascal não ficou somente na resolução desse e outros problemas, com efeito, gastou um ano escrevendo uma monografia de cerca de sessenta páginas sobre o triângulo aritmético: Traité du triangle arithmétique, a qual foi publicada só postumamente, em 1665. Nessa monografia, Pascal introduziu o triângulo de um modo bem complicado e usando uma notação estritamente geométrica, bem ao estilo clássico, anterior a Viète e Descartes e provou algumas identidades envolvendo os coeficientes binomiais e aplicou o triângulo na resolução de pequenos problemas de probabilidades e de combinatória. (SILVEIRA, 2020, p. 12).

Quanto a sua estrutura, o triângulo se dispõe de tal forma que aqueles de mesma ordem situam-se na mesma linha e os de mesma classe situam-se na mesma coluna, levando em consideração o crescimento das ordens (linhas numeradas de cima para baixo, começando em zero) e o crescimento das classes (colunas numeradas da esquerda para direita, começando em zero), ou seja, especificamente temos:

1) o elemento da linha n e coluna k é: $\binom{n}{k}$

2) os elementos (na ordem) da linha n são $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$

3) os elementos (na ordem) da coluna k são $\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k} \ldots$

$$
\begin{array}{ll}
\textit{linha } 0 & \binom{0}{0} \\
\textit{linha } 1 & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\textit{linha } 2 & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\textit{linha } 3 & \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\textit{linha } 4 & \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\vdots & \\
\textit{linha } n & \binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\ldots\binom{n}{n}
\end{array}
$$

Figura 1 – Triângulo de Pascal

Dentre as várias propriedades verificáveis do triângulo de Pascal, destacam-se a relação de Stifel, a relação das Combinações Complementares e o teorema das linhas. Faremos as demonstrações através da abordagem algébrica e combinatória, e percebemos que na relação de Stifel o argumento combinatório é o mais elementar, enquanto que, na relação das Combinações Complementares o argumento algébrico é o mais elementar.

3.1.1 Relação de Stifel

A relação de Stifel sugere que somando quaisquer dois elementos consecutivos de uma mesma linha, obtemos o elemento situado na linha debaixo da último parcela.

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

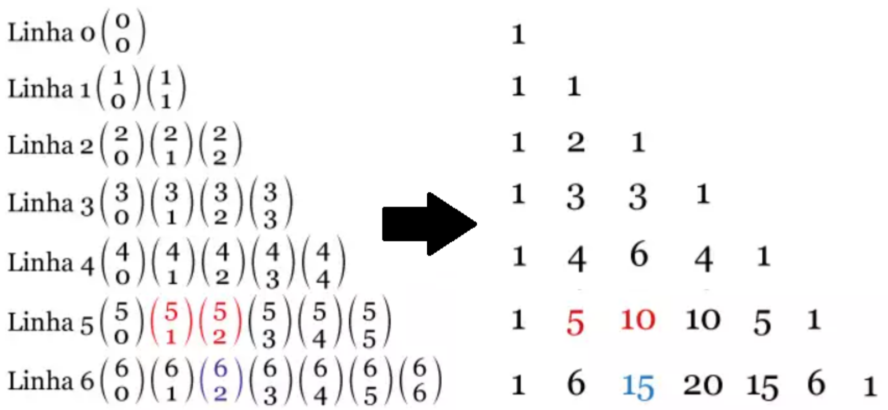

Figura 2 – Relação de Stifel

Demonstração (Algébrica): De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número binomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\begin{aligned}
C_n^k + C_n^{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!(k+1)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1} = C_{n+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

Demonstração (Combinatória): Considere um grupo formado por n homens e uma mulher, o número de modos de escolher um subgrupo com $k+1$ pessoas é C_{n+1}^{k+1}. Por outro lado, para compor um subgrupo com $k+1$ pessoas, há duas possibilidades: ou a mulher pertence a este subgrupo ou não. No caso em que ela pertence (a única escolha de mulher possível), resta escolher os k homens dentre os n disponíveis, ou seja, $\binom{n}{k}$; no caso em que ela não pertence, temos de escolher os $k+1$ pessoas dentre os homens disponíveis, ou seja, $\binom{n}{k+1}$. Contamos esta escolha de duas formas diferentes, mas o resultado deve ser igual. Como são casos independentes, o princípio aditivo da contagem indica que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, e consequentemente $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. $\square$

3.1.2 Relação das Combinações Complementares

Nessa propriedade do triângulo de Pascal, em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

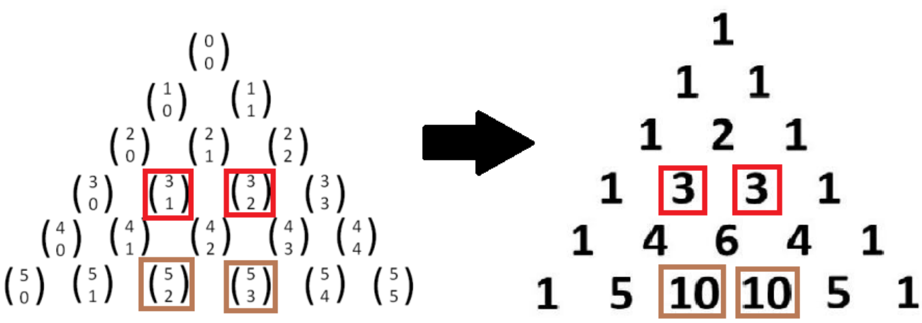

Figura 3 – Relação das Combinações Complementares

Demonstração (Algébrica):

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}$$

Demonstração (Combinatória) Considerando um grupo formado por n pessoas, o número de modos de escolher um subgrupo com k pessoas, é C_n^k. E observe que escolhendo k pessoas de um conjunto de n pessoas, sobrará $n-k$ pessoas que não foram escolhidas. Por outro lado, se escolhermos um subconjunto de $n-k$ pessoas de um grupo de n pessoas, o número de modos de escolher esse subgrupo é C_n^{n-k} e neste caso, k pessoas não serão selecionadas. Concluímos que escolher k pessoas ou $n-k$ pessoas de um grupo de n pessoas é equivalente, e portanto, $C_n^k = C_n^{n-k}$. $\square$

3.1.3 Teorema das Linhas

A soma dos elementos da n-ésima linha é igual à 2^n.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

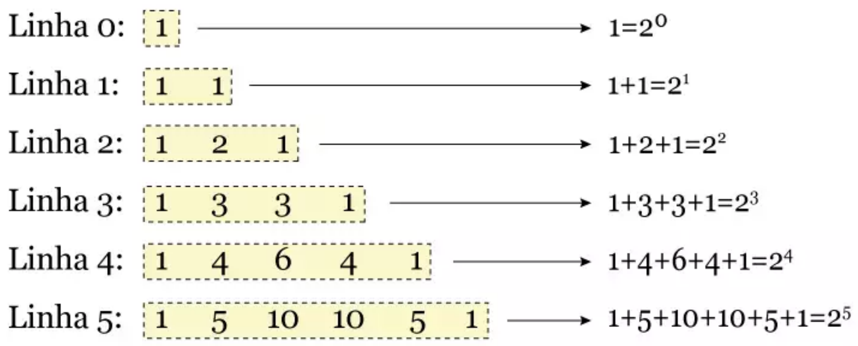

Figura 4 – Teorema das Linhas

Demonstração (Algébrica): . A demonstração será feita por indução em n. Defina

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Se $n = 0$ temos $S_0 = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Se $n = 1$ temos $S_1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$. Suponhamos então que o resultado é válido para todo $n = 1, ..., k$. Vamos mostrar que o mesmo é válido para $n = k + 1$, ou seja, mostraremos que

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Aplicando a relação de Stifel, nas parcelas da soma que estão entre a primeira e a última parcela, e utilizando por conivência que $\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$ tem-se que

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1}}_{\binom{k+1}{1}} + \ldots + \underbrace{\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}}_{\binom{k+1}{k}} + \binom{k}{k}.$$

Reescrevendo,

$$S_{k+1} = \underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k}}_{S_k} + \underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k}}_{S_k}.$$

Ou seja, $S_{k+1} = 2S_k$ e como por hipótese de indução vale que $S_k = 2^k$, concluímos que $S_{k+1} = 2.2^k = 2^{k+1}$. Assim a propriedade é válida para todo n natural.

Demonstração (Combinatória): C_n^k é o número de subconjuntos com k elementos de A $= \{1, 2, ..., n\}$, então segue que $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$ é o total de subconjuntos de A. Por outro lado, para formar um subconjunto de A devemos, para cada um dos n elementos dele, escolher se ele pertence ou não ao subconjunto que será formado, o que pode ser feito de $2 \text{ x } 2 \text{ x } \cdots \text{ x } 2 = 2^n$ maneiras, obtendo assim que $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$. □

3.2 Binômio de Newton

3.2.1 O Binômio de Newton

O Binômio de Newton refere-se a potência na forma $(a + b)^n$, onde a e b são números reais e n é um número natural. O desenvolvimento do binômio de Newton em alguns casos é bastante simples. Podendo ser feita multiplicando-se diretamente todos os termos. Contudo, nem sempre é conveniente utilizar esse método, pois de acordo com o expoente, os cálculos podem ficar extremamente trabalhosos.

O binômio de Newton é um método simples que permite determinar a enésima potência de um binômio.

Teorema 3.1. *Se a e b são números reais e n um inteiro positivo,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = \binom{n}{0} b^0 a^n + \binom{n}{1} b^1 a^{n-1} + ... + \binom{n}{n} b^n a^0.$$

Observe que:
1) O desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui $n + 1$ termos;
2) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal;
3) Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima (isto é, ordenados segundo as potências decrescentes de a), o termo de ordem $k + 1$ é

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

Demonstração (Combinatória): Temos que

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{\text{n vezes}}.$$

Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um a ou um b e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, com $0 \leq k \leq n$, se escolhermos b em k dos parênteses, a será escolhido em $n-k$ parênteses e o produto será igual a $b^k a^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Então $(a+b)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\binom{n}{k}$ parcelas iguais a $b^k a^{n-k}$, isto é,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}.$$

Demonstração (Algébrica): A demonstração será feita por indução em n. Para $n = 1$ temos

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} b^0 a^{1-0} + \binom{1}{1} b^1 a^{1-1} = a + b$$

portanto a fórmula é valida para $n = 1$. Suponhamos agora, por hipótese de indução, que a fórmula seja válida para $n = k \geq 1$, isto é,

$$\begin{aligned} (a+b)^k &= \binom{k}{0} b^0 a^{k-0} + \binom{k}{1} b^1 a^{k-1} + ... + \binom{k}{k} b^k a^{k-k} \\ &= \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} b^1 a^{k-1} + ... + \binom{k}{k} b^k \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k \cdot (a+b) \\ &= (a+b)^k \cdot a + (a+b)^k \cdot b \\ &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} b^1 a^k + ... + \binom{k}{k-1} b^{k-1} a^2 + \binom{k}{k} b^k a^1 \\ &+ \binom{k}{0} b^1 a^k + \binom{k}{1} b^2 a^{k-1} + ... + \binom{k}{k-1} b^k a^1 + \binom{k}{k} b^{k+1} \end{aligned}$$

Usando a relação de Stifel, nas parcelas com o mesmo fator comum e utilizando por conivência que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$ obtemos

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} b^1 a^k + ... + \binom{k+1}{k} b^k a^1 + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

Portanto, a fórmula é válida para $k+1$, logo é válida para todo n inteiro positivo. □

Exemplo 3.2. Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(x^3 - \frac{1}{x^2})^9$.
Solução: O termo genérico do desenvolvimento é:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{9}{k} \cdot (\frac{-1}{x^2})^k \cdot (x^3)^{9-k} \\
&= \binom{9}{k} \cdot \frac{(-1)^k}{x^{2k}} \cdot x^{27-3k} \\
&= (-1)^k \cdot \binom{9}{k} \cdot \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} \\
&= (-1)^k \cdot \binom{9}{k} \cdot x^{27-5k}.
\end{aligned}$$

Para o termo x^2 aparecer, temos que resolver a equação $27 - 5k = 2$, descobrindo assim que $k = 5$. E com isso o termo em x^2 é:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= (-1)^k \cdot \binom{9}{k} \cdot x^{27-5k} \\
T_6 &= (-1)^5 \cdot \binom{9}{5} \cdot x^{27-5.5} \\
&= -1 \cdot 126 \cdot x^2 \\
&= -126x^2.
\end{aligned}$$

E portanto o coeficiente de x^2 é -126.

Exemplo 3.3. Determine o termo central do desenvolvimento de $(x^2 - \frac{1}{x})^8$.
Solução:

Sabemos que o desenvolvimento de $(a+b)^n$ possui $n+1$ termos, e portanto no desenvolvimento de $(x^2 - \frac{1}{x})^8$ teremos 9 termos. Com isso, o termo central é o de ordem $\frac{1+9}{2} = 5$ e consequentemente estamos atrás do 5º termo da expansão binominal. Observe que o valor de $k = 4$.

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{8}{k} \cdot (\frac{-1}{x})^k \cdot (x^2)^{8-k} \\
T_{4+1} &= \binom{8}{4} \cdot \frac{(-1)^4}{x^4} \cdot x^{16-2.4} \\
T_5 &= \binom{8}{4} \cdot \frac{x^{16-2.4}}{x^4} \\
T_5 &= \binom{8}{4} \cdot \frac{x^8}{x^4} \\
T_5 &= \binom{8}{4} \cdot x^4 \\
T_5 &= 70 \cdot x^4 \\
T_5 &= 70x^4
\end{aligned}$$

E portanto o termo central é $70x^4$.

4 Números Multinomiais

A seguir, apresentaremos os números trinomiais e a sua organização numa tabela tridimensional denominada pirâmide de Pascal, e em seguida, generalizar esses números para os números multinomiais e a fórmula para a expansão trinomial generalizando para a expansão multinomial, conhecida como polinômio de Leibniz.

Inicialmente o número binomial de n sobre k definido para n e k naturais, com $n \geq k$, é dado por:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Observe que o número binomial poderia ser definido, para i e j naturais, com $i + j = n$ como:

$$\binom{n}{i, j} = \frac{n!}{i!j!},$$

e fazendo $i = k$ e (consequentemente) $j = n - k$, segue que:

$$\binom{n}{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

sendo equivalente à definição usual de número binomial vista no inicio da seção e no capítulo anterior.

Analogamente, podemos definir o número trinomial, para i, j e k naturais e $i + j + k = n$ por:

$$\binom{n}{i, j, k} = \frac{n!}{i!j!k!}.$$

Seguindo esse raciocínio, observamos que tanto a definição de números binomiais, trinomiais e posteriormente multinomiais, está ligada ao numero de permutações com repetições de um conjunto com n objetos. Na fórmula a seguir, está para o caso dos números trinomiais.

$$\binom{n}{i, j, k} = \frac{n!}{i!j!k!} = P_n^{i,j,k}, \ com \ i + j + k = n.$$

4.1 Pirâmide de Pascal

Com os números trinomiais definidos anteriormente, construímos (agora) uma tabela (numérica) piramidal, denominada pirâmide de Pascal (versão tridimensional do triângulo de Pascal), dispondo-os de tal forma que aqueles de mesma ordem situam-se na mesma camada (secções transversais triangulares, exceto a camada inicial), levando em consideração o crescimento das ordens (camadas numeradas de cima para baixo, começando em zero), de modo que suas faces (triangulares) sejam triângulos de Pascal.

Desse modo, segundo a descrição mencionada acima, as primeiras camadas da pirâmide de Pascal ficam com o formato ilustrado abaixo:

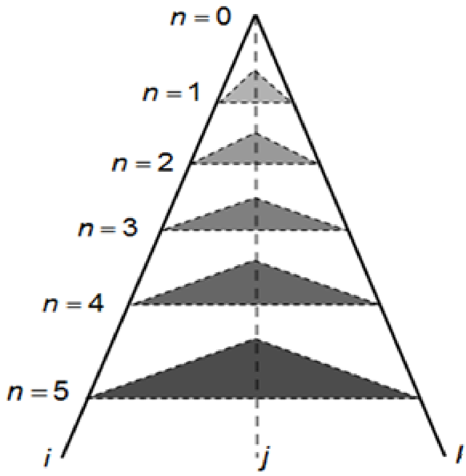

Figura 5 – Pirâmide de Pascal

Convém (também) destacar que a distribuição dos números trinomiais em cada camada (exceto a inicial) é feita sob o formato de um triângulo equilátero, mantendo uma simetria sob a perspectiva (quando i ou j ou k é constante) de qualquer um dos três lados, de forma análoga ao que acontece no triângulo de Pascal devido aos binomiais complementares, i.e.,

$$\binom{n}{i,j,k} = \binom{n}{i,k,j}, \binom{n}{i,j,k} = \binom{n}{k,j,i} \; e \; \binom{n}{i,j,k} = \binom{n}{j,i,k}$$

agora especificamos como ficam distribuídos os números trinomiais, bem como seus respectivos valores numéricos, em algumas camadas.

Observando atentamente a pirâmide de Pascal, algumas propriedades surgem tão naturalmente quanto as propriedades do triângulo de Pascal e, assim como fizemos com as propriedades do triângulo (de Pascal), faremos as demonstrações das propriedades da pirâmide (de Pascal) através das abordagens algébricas

$$n = 0 \qquad \binom{0}{0,0,0} \Leftrightarrow 1 \qquad\qquad n = 1 \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\binom{1}{1,0,0}} \\ \binom{1}{0,1,0} & \binom{1}{0,0,1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{1} \\ 1 & 1 \end{array}$$

Figura 6 – Camada 0 e Camada 1

$$n = 2 \qquad \begin{array}{ccc} & \binom{2}{2,0,0} & \\ \binom{2}{1,1,0} & & \binom{2}{1,0,1} \\ \binom{2}{0,2,0} & \binom{2}{0,1,1} & \binom{2}{0,0,2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$n = 3 \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\binom{3}{3,0,0}} \\ \multicolumn{2}{c}{\binom{3}{2,1,0}} & \multicolumn{2}{c}{\binom{3}{2,0,1}} \\ \binom{3}{1,2,0} & \multicolumn{2}{c}{\binom{3}{1,1,1}} & \binom{3}{1,0,2} \\ \binom{3}{0,3,0} & \binom{3}{0,2,1} & \binom{3}{0,1,2} & \binom{3}{0,0,3} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{3} \\ 3 & \multicolumn{2}{c}{6} & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Figura 7 – Camada 2 e Camada 3

Inicialmente, apresentaremos a propriedade análoga à relação de Stifel no triângulo de Pascal, onde expressa que o elemento no interior de uma camada é obtido somando os três elementos adjacentes na camada anterior.

Proposição 4.1. *Se i, j e k são naturais não-nulos tais que $i + j + k = n$, então*

$$\binom{n-1}{i-1, j, k} + \binom{n-1}{i, j-1, k} + \binom{n-1}{i, j, k-1} = \binom{n}{i, j, k}$$

Demonstração (Algébrica): De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número trinomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{i-1,j,k}+\binom{n-1}{i,j-1,k}+\binom{n-1}{i,j,k-1} &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!}+\frac{(n-1)!}{i!(j-1)!k!}+\frac{(n-1)!}{i!j!(k-1)!}\\
&= \frac{i}{i}\cdot\frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!}+\frac{j}{j}\cdot\frac{(n-1)!}{i!(j-1)!k!}+\frac{k}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{i!j!(k-1)!}\\
&= i\cdot\frac{(n-1)!}{i!j!k!}+j\cdot\frac{(n-1)!}{i!j!k!}+k\cdot\frac{(n-1)!}{i!j!k!}\\
&= (i+j+k)\cdot\frac{(n-1)!}{i!j!k!}\\
&= n\cdot\frac{(n-1)!}{i!j!k!}\\
&= \frac{n!}{i!j!k!}\\
&= \binom{n}{i,j,k}
\end{aligned}$$

onde queríamos chegar.

Demonstração (Combinatória): Considere um grupo formado por n pessoas, sendo $n-1$ homens e uma mulher, e ainda, desejamos distribuir essas pessoas em três salas com a seguinte configuração: a sala A com i pessoas, B com j pessoas e C com k pessoas, e isso pode ser feito de $C_n^i \cdot C_{n-i}^j \cdot C_{n-i-j}^k$ maneiras, onde

$$C_n^i \cdot C_{n-i}^j \cdot C_{n-i-j}^k = \binom{n}{i,j,k}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
C_n^i \cdot C_{n-i}^j \cdot C_{n-i-j}^k &= \frac{n!}{(n-i)!i!}\cdot\frac{(n-i)!}{(n-i-j)!j!}\cdot\frac{(n-i-j)!}{(n-i-j-k)!k!}\\
&= \frac{n!}{\cancel{(n-i)!}i!}\cdot\frac{\cancel{(n-i)!}}{\cancel{(n-i-j)!}j!}\cdot\frac{\cancel{(n-i-j)!}}{(n-i-j-k)!k!}\\
&= \frac{n!}{i!}\cdot\frac{1}{j!}\cdot\frac{1}{0!k!}\\
&= \frac{n!}{i!j!k!}\\
&= \binom{n}{i,j,k}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se distribuímos essas pessoas nas salas, especificando em qual sala a mulher deve ficar, teríamos os seguintes casos:

Caso 1: A mulher ficando na sala A, pode ser feito de $C_{n-1}^{i-1} \cdot C_{n-i}^j \cdot C_{n-i-j}^k$ maneiras, onde

$$C_{n-1}^{i-1} \cdot C_{n-i}^{j} \cdot C_{n-i-j}^{k} = \binom{n-1}{i-1, j, k},$$

Caso 2: A mulher ficando na sala B, pode ser feito de $C_{n-1}^{i} \cdot C_{n-1-i}^{j-1} \cdot C_{n-i-j}^{k}$ maneiras, onde

$$C_{n-1}^{i} \cdot C_{n-1-i}^{j-1} \cdot C_{n-i-j}^{k} = \binom{n-1}{i, j-1, k},$$

Caso 3: A mulher ficando na sala C, pode ser feito de $C_{n-1}^{i} \cdot C_{n-1-i}^{j} \cdot C_{n-1-i-j}^{k-1}$ maneiras, onde

$$C_{n-1}^{i} \cdot C_{n-1-i}^{j} \cdot C_{n-1-i-j}^{k-1} = \binom{n-1}{i, j, k-1}.$$

Como as distribuições dessas pessoas só podem ocorrer dentre um dos casos, segue do principio aditivo que

$$\binom{n-1}{i-1, j, k} + \binom{n-1}{i, j-1, k} + \binom{n-1}{i, j, k-1} = \binom{n}{i, j, k}.$$

□

A próxima propriedade relaciona os elementos de uma camada da pirâmide (de Pascal) com os elementos do triângulo (de Pascal), nesta propriedade os elementos da camada n da pirâmide são obtidos multiplicando todos os elementos até a linha n do triângulo pelos elementos da linha n do triângulo. A figura a seguir irá ajudar na visualização dessa propriedade:

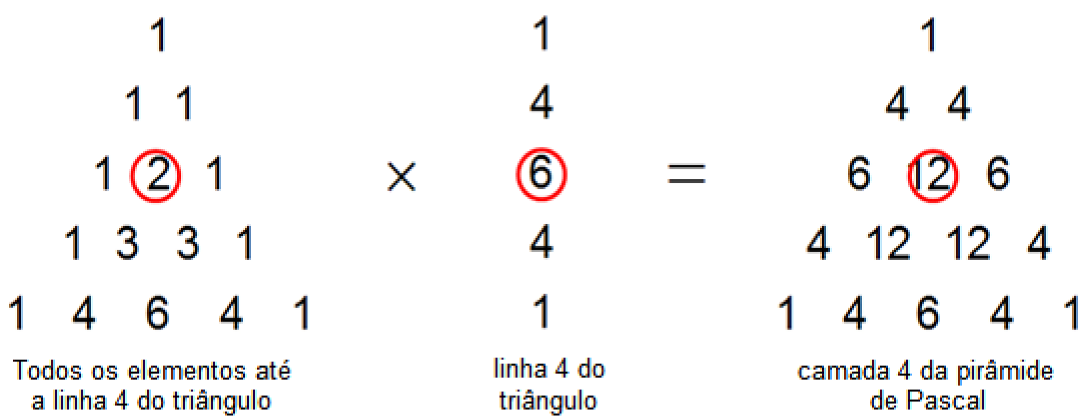

Figura 8 – Ilustração da propriedade

Proposição 4.2. *Se i, j e k são naturais tais que $i + j + k = n$, então*

$$\binom{n}{i,j,k} = \binom{n-j}{i,k} \cdot C_n^j$$

Demonstração (Algébrica): De forma direta, e convenientemente, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número trinomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i,j,k} &= \frac{n!}{i!j!k!} \\
&= \frac{(n-j)!}{(n-j)!} \cdot \frac{n!}{i!j!k!} \\
&= \frac{(n-j)!}{i!k!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!j!} \\
&= \binom{n-j}{i,k} \cdot C_n^j
\end{aligned}$$

onde queríamos chegar.

Demonstração (Combinatória): Considere um grupo formado por n pessoas e que desejamos distribuir essas pessoas em três salas com a seguinte configuração: a sala A com i pessoas, B com j pessoas e C com k pessoas, e isso pode ser feito de $C_n^i \cdot C_{n-i}^j \cdot C_{n-i-j}^k$ maneiras, onde

$$C_n^i \cdot C_{n-i}^j \cdot C_{n-i-j}^k = \binom{n}{i,j,k}.$$

Observe que começamos escolhendo as pessoas que devem ficar na sala A, em seguida, as pessoas que devem ficar na sala B e, por fim, as pessoas que devem ficar na sala C. Por outro lado, como não importa a ordem em que essas pessoas serão distribuídas nas salas, segue que começando pela escolha das pessoas na sala B , em seguida, as pessoas na sala A e, por fim, as pessoas na sala C, teríamos $C_n^j \cdot C_{n-j}^i \cdot C_{n-j-i}^k$ maneiras. Daí, utilizando o fato de $i + j + k = n$, sabemos que

$$C_{n-j}^i = \binom{n-j}{i, n-j-i} = \binom{n-j}{i,k} \text{ e } C_{n-j-i}^k = \binom{n-j-i}{k, n-j-i-k} = \binom{k}{k,0} = 1,$$

então concluímos que

$$C_n^j \cdot C_{n-j}^i \cdot C_{n-j-i}^k = C_n^j \cdot \binom{n-j}{i,k} \cdot 1$$

E como a distribuição das pessoas são idênticas, diferenciando apenas nos procedimentos, segue que

$$\binom{n}{i,j,k} = C_n^j \cdot \binom{n-j}{i,k},$$

conforme desejado. □

4.2 Polinômio de Leibniz

4.2.1 O Polinômio de Leibniz

O Polinômio de Leibniz também conhecido como Teorema Multinomial ou multinômio de Newton é, na verdade, uma generalização do Teorema Binomial. Consiste, basicamente, no desenvolvimento de potências com expoente n natural de um polinômio do tipo $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n$.

Teorema 4.3. *Considere os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e um número natural n. Então*

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n &= \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} \\ &= \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_p!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},\end{aligned}$$

estendendo-se o somatório a todos os valores inteiros não negativos de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$

Demonstração (Algébrica): Para essa demonstração, vamos utilizar o Princípio de Indução Finita sobre o número de variáveis p. Para $p = 1$, tem-se que $\alpha_1 = n$ e então:

$$\begin{aligned}(x_1)^n &= \sum \binom{n}{\alpha_1} \cdot x_1^{\alpha_1} \\ &= \sum \frac{n!}{\alpha_1!} \cdot x_1^{\alpha_1} \\ &= \frac{n!}{n!} \cdot x_1^n \\ &= x_1^n\end{aligned}$$

portanto a fórmula é valida para $p = 1$. Considerando válida para $p \geq 2$, devemos mostrar que vale para $p + 1$. Pela hipótese de indução, para todo n natural temos:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n &= \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} \\ &= \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_p!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},\end{aligned}$$

e devemos mostrar que para todo n natural:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1})^n &= \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \\ &= \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_p!\alpha_{p+1}!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}},\end{aligned}$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p + \alpha_{p+1} = n$.

Observe que,

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1})^n &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + [x_p + x_{p+1}])^n \\ &= \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_m} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} (x_p + x_{p+1})^{\alpha_m},\end{aligned}$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p-1} + \alpha_m = n$.

Por outro lado, pelo Binômio de Newton temos:

$$(x_p + x_{p+1})^{\alpha_m} = \sum_{k=0}^{\alpha_m} \binom{\alpha_m}{k} \cdot x_p^{\alpha_m - k} x_{p+1}^k,$$

e fazendo $\alpha_m - k = \alpha_p$ e $k = \alpha_{p+1}$, poderemos escrever o Binômio de Newton como Polinômio de Leibniz:

$$(x_p + x_{p+1})^{\alpha_m} = \sum \binom{\alpha_m}{\alpha_{p+1}} \cdot x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}},$$

com $\alpha_p + \alpha_{p+1} = \alpha_m$.

Rescrevendo a nossa primeira expansão, temos que

$$\begin{gathered}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1})^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + [x_p + x_{p+1}])^n = \\ \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_m} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} (x_p + x_{p+1})^{\alpha_m} = \\ \left(\sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_m} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \right) \cdot \left(\sum \binom{\alpha_m}{\alpha_{p+1}} \cdot x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \right),\end{gathered}$$

e colocando as variáveis e o índice inicial, chegamos a seguinte configuração

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}+\alpha_m=n} \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_m} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \cdot \sum_{\alpha_p+\alpha_{p+1}=\alpha_m} \binom{\alpha_m}{\alpha_{p+1}} \cdot x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} = \\ \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}+\alpha_m=n} \sum_{\alpha_p+\alpha_{p+1}=\alpha_m} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{p-1}!\alpha_m!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \cdot \frac{\alpha_m!}{\alpha_p!\alpha_{p+1}!} \cdot x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}}.\end{gathered}$$

Porém, observe que o primeiro somatório vai de α_1 até α_m, e que no segundo somatório a soma das variáveis α_p e α_{p+1} é α_m, logo podemos reescrever os dois somatórios como um único somatório que vai de α_1 até α_{p+1} e que a soma dessas variáveis é n, a saber: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p + \alpha_{p+1}$.

E portanto,

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}+\alpha_m=n}\ \sum_{\alpha_p+\alpha_{p+1}=\alpha_m} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{p-1}!\alpha_m!}\cdot x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\cdot\frac{\alpha_m!}{\alpha_p!\alpha_{p+1}!}\cdot x_p^{\alpha_p}x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} =$$
$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\alpha_{p+1}=n} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{p-1}!\cancel{\alpha_m!}}\cdot x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\cdot\frac{\cancel{\alpha_m!}}{\alpha_p!\alpha_{p+1}!}\cdot x_p^{\alpha_p}x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} =$$
$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\alpha_{p+1}=n} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{p-1}!\alpha_p!\alpha_{p+1}!}\cdot x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}}x_p^{\alpha_p}x_{p+1}^{\alpha_{p+1}}.$$

E concluímos que,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_p+x_{p+1})^n =$$
$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\alpha_{p+1}=n} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{p-1}!\alpha_p!\alpha_{p+1}!}\cdot x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}}x_p^{\alpha_p}x_{p+1}^{\alpha_{p+1}}.$$

Provando portanto que é válido para todo p. □

Demonstração (Combinatória):

$$(x_1+x_2+\ldots+x_p)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_p)\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_p)\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_p)}_{\text{n vezes}}$$

O termo genérico é obtido escolhendo de cada parênteses um x_i e multiplicando os escolhidos. Ora, se em α_1 dos parênteses escolhermos x_1, em α_2 dos parênteses escolhermos x_2 e assim sucessivamente, obtemos para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ inteiros não negativos e $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p = n$,

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_p^{\alpha_p}$$

O termo $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_p^{\alpha_p}$ aparece a quantidade de modos que escolhermos dos n parênteses α_1 deles para pegarmos o x_1 para fator, α_2 dentre os que sobraram para pegarmos o x_2 como fator, e assim sucessivamente, mas isso pode ser feito de

$$\binom{n}{\alpha_1}\cdot\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\ldots\binom{n-\alpha_1-\alpha_2\ldots-\alpha_{p-1}}{\alpha_p} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_p!}$$

modos. Logo, $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_p^{\alpha_p}$ aparece no desenvolvimento $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_p!}$ vezes. □

Exemplo 4.4. Calcule $(x^2+2x-1)^4$.
Solução:

$$\begin{aligned}(x^2+2x-1)^4 &= \sum\binom{4}{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\cdot(x^2)^{\alpha_1}(2x)^{\alpha_2}(-1)^{\alpha_3}\\ &= \sum\frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\cdot(x^2)^{\alpha_1}(2x)^{\alpha_2}(-1)^{\alpha_3}\\ &= \sum\frac{24}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\cdot(2)^{\alpha_2}(-1)^{\alpha_3}(x)^{2\alpha_1+\alpha_2},\end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são inteiros não negativos tais que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 4$.

Abaixo temos uma tabela dos valores possíveis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e os correspondentes termos de desenvolvimento.

α_1	α_2	α_3	T
4	0	0	x^8
3	1	0	$8x^7$
3	0	1	$-4x^6$
2	2	0	$24x^6$
2	1	1	$-24x^5$
2	0	2	$6x^4$
1	3	0	$32x^5$
1	2	1	$-48x^4$
1	1	2	$24x^3$
1	0	3	$-4x^2$
0	4	0	$16x^4$
0	3	1	$-32x^3$
0	2	2	$24x^2$
0	1	3	$-8x$
0	0	4	1

Somando e reduzindo os termos semelhantes obtemos

$$(x^2 + 2x - 1)^4 = x^8 + 8x^7 + 20x^6 + 8x^5 - 26x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 8x + 1.$$

Exemplo 4.5. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^2 - x + 2)^6$.
Solução:

$$\begin{aligned}(x^2 - x + 2)^6 &= \sum \binom{6}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \cdot (x^2)^{\alpha_1}(-x)^{\alpha_2}(2)^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{6!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} \cdot (x^2)^{\alpha_1}(-x)^{\alpha_2}(2)^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{720}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} \cdot (-1)^{\alpha_2}(2)^{\alpha_3}(x)^{2\alpha_1+\alpha_2},\end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são inteiros não negativos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$.

Para que o expoente de x seja 4 devemos ter

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \ e \ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4$$

Os valores para os $\alpha' s$ estão expressados abaixo, bem como seus respectivos termos:

α_1	α_2	α_3	T
2	0	4	$240x^4$
1	2	3	$480x^4$
0	4	2	$60x^4$

E somando todos os termos do desenvolvimento com x^4 obtemos o coeficiente 780.

5 Aplicações

5.1 Aplicações do Binômio de Newton

5.1.1 Genética

Umas das áreas em que o Binômio de Newton pode ser utilizado, e como importante ferramenta, é na solução de problemas de genética. No caso de herança quantitativa, ou poligênica, onde participam dois ou mais pares de genes. A interação que ocorre entre os genes (poligenes) que transmitem as características herdadas, acontece de tal forma que cada um deles é responsável por uma parcela do fenótipo resultante.

O padrão de distribuição de herança, nesse caso, segue o padrão do Binômio de Newton, sendo $(x+a)^n$, onde n é o número de poligenes. Entre os exemplos de herança quantitativa temos características como cor de pele, cor do olho humano, altura, peso e cor do cabelo.

Exemplo 5.1. (PREDA, 2020) Seja,
• f(A) = p a probabilidade de que um alelo sorteado ao acaso na população seja "A". Na biologia tal probabilidade é chamada de frequência relativa de "A";
• f(a) = q a probabilidade de que um alelo sorteado ao acaso na população seja "a". Novamente, na biologia tal probabilidade é conhecida como a frequência relativa de "a".

Consideradas sem intervenção externas, essas probabilidades são mutuamente exclusivas, ou seja, p + q = 1.

No estudo desses alelos, utilizando de um método didático, temos que, "a" representa o alelo recessivo e "A", o alelo dominante. As frequências relativas de cada alelo também representam as respectivas frequências de gametas disponíveis para formar os indivíduos da próxima geração nesta população.

Para o par de alelos "A" e "a" temos três situações em relação à formação de zigotos após uma rodada de acasalamentos aleatórios, isto é, "A" e "a" podem formar três tipos de pares distintos:
• f(AA) = f(A) · f(A) = p · p = p^2 (par de alelos dominantes) que é a frequência de genótipos "AA";
• f(Aa) = [f(A) · f(a)] + [f(a) · f(A)] = 2pq (par de alelos distintos formando heterozigotos), que é a frequência de genótipos "Aa";
• f(aa) = f(a) · f(a) = q · q = q^2 (par de alelos recessivos) que é a frequência de genótipos "aa".

Note que os resultados obtidos para essa distribuição binomial é exatamente análoga à expansão do binômio de probabilidade $(p+q)^2 = 1$, ou seja, $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1$.

Exemplo 5.2. (SILVA, 2013) A cor da pele humana é determinada por, no mínimo, dois pares de genes alelos.

- B e b
- N e n,

Em que,
N e B: determinam maior quantidade de melanina (alelos efetivos).
n e b: determinam menor quantidade de melanina (alelos não efetivos).

Assim, pessoas NNBB serão negras, nnbb serão brancas e NNbb serão mulatos médios. Os cruzamentos possíveis entre um casal de indivíduos, mulatos médios, pode ser representado pelo esquema abaixo,

$$Geração : NnBb \quad X \quad NnBb$$
$$Gametas : NB\ Nb\ nB\ nb \quad X \quad NB\ Nb\ nB\ nb$$

X	NB	Nb	nB	nb
NB	NNBB	NNBb	NnBB	NnBb
Nb	NNBb	NNbb	NnBb	Nnbb
nB	NnBB	NnBb	nnBB	nnBb
nb	NnBb	Nnbb	nnBb	nnbb

e teríamos a seguinte tabela de proporção,

Genótipos	Fenótipos	Proporção Fenotípica
NNBB	Negro	1/16
NNBb ou NnBB	Mulato Escuro	4/16
NNbb, NnBb ou nnBB	Mulato Médio	6/16
Nnbb ou nnBb	Mulato Claro	4/16
nnbb	Branco	1/16

Os numeradores da proporção fenotípica (1, 4, 6, 4, 1) correspondem à 5ª linha do triângulo de Pascal. Se denotarmos por (x) os alelos efetivos (N e B), e por (a) os alelos não efetivos (n e b) e desenvolver o binômio $(x+a)^n$, com n = 4, temos:

$$(x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4$$

Os expoentes podem ser interpretados da seguinte maneira: x^4 significa a presença de 4 alelos efetivos (indivíduo negro), x^3a a presença de 3 alelos efetivos e 1 alelo não efetivo (mulato escuro), e assim por diante. Lembrando que graças às combinações complementares, poderíamos contar como sendo o número de alelos não efetivos. Além disso, o total de cruzamentos possíveis pode ser obtido pela regra da soma de uma linha, mais precisamente a linha 4, em que o resultado é $2^4 = 16$. Esse resultado foi mostrado e provado no capítulo 3.

Exemplo 5.3. Um sitiante possui uma coelha que está prenha e que terá seis filhotes. Qual a probabilidade de ela ter três casais, sem importar a ordem?

Considerando que a probabilidade de ter macho (m) ou fêmea (f) seja igual a 50%, e desenvolvendo o binômio $(m+f)^n$, com n = 6, o que devemos fazer é procurar o termo m^3f^3.

$$(m+f)^6 = 1m^6 + 6m^5f^1 + 15m^4f^2 + 20m^3f^3 + 15m^2f^4 + 6m^1f^5 + 1f^6.$$

Dessa forma, a probabilidade de obter três casais é:

$$20m^3f^3 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{64} = \frac{20}{64} = 0,3125 = 31,25\%$$

5.1.2 Método Binomial

O método binomial é uma técnica utilizada para calcular probabilidades em experimentos que se tratam de uma sequência de tentativas independentes, de modo que a probabilidade de um certo resultado em cada uma dessas tentativas, tanto independe do resultado obtido nas tentativas anteriores, quanto independe dos resultados das tentativas posteriores.

Em cada uma dessas tentativas pode ocorrer apenas dois resultados, os quais chamaremos de sucesso ou fracasso. Indicando por p a probabilidade de ocorrer sucesso em uma certa tentativa, então a probabilidade de obter fracasso nesta é $q = 1 - p$.

Estes experimentos são conhecidos como Ensaios de Bernoulli, pois os primeiros estudos a esse respeito devem-se a Jacques Bernoulli, matemático do século XVII. Vejamos a seguir alguns exemplos de ensaio de Bernoulli:

- Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada um dos lançamentos é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Consideremos sucesso o resultado cara e fracasso o resultado coroa. Em cada um dos ensaios, $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

- Uma urna contém 3 cartões pretos e 7 cartões brancos. Um cartão é retirado ao acaso, sua cor é observada e o mesmo é devolvido para a urna; este procedimento é repetido 6 vezes. Cada uma dessas extrações é um ensaio de Bernoulli, pois apenas dois resultados podem ocorrer: cartão preto ou cartão branco. Consideremos sucesso o resultado cartão preto e fracasso o resultado cartão branco. Em cada caso $p = \frac{3}{10}$ e $q = \frac{7}{10}$.

De acordo com Morgado, seja um experimento X composto por apenas dois eventos complementares do tipo sucesso e fracasso, seja k o número de sucessos obtidos na realização de n ensaios independentes deste experimento. Desta forma $n-k$, é o número de fracassos obtidos. Sejam ainda a probabilidade do sucesso igual a p e a probabilidade do fracasso $q = 1 - p$, constantes em cada realização destes ensaios, assim:

Diremos que X tem distribuição binomial com parâmetros n e p, em que k é a quantidade de sucesso em cada ensaio, se sua função de probabilidade for dada por:

$$P(X) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Exemplo 5.4. A probabilidade de um saltador atingir seu objetivo em um campeonato mundial é de 40% em cada salto. Considere que ele efetuou 3 saltos.

Considerando que o saltador atinge ou não o seu objetivo, os eventos dados são mutuamente exclusivos. Denota-se por p a probabilidade do saltador atingir seu objetivo e q a probabilidade dele não atingir (evento complementar). Tem-se que $p = 40\% = 0,4$, e então $q = 1 - 0,4 = 0,6$. Além disso, n = 3 e a 4 situações possíveis nesse caso:

1. O saltador não atinge, em nenhum dos 3 saltos, o seu objetivo.
2. O saltador atinge o seu objetivo em apenas um salto.
3. O saltador atinge o seu objetivo em dois saltos.
4. O saltador atinge nos 3 saltos o seu objetivo.

Do teorema binomial, tem-se:

$$(p+q)^3 = \binom{3}{0} p^0 q^3 + \binom{3}{1} p^1 q^2 + \binom{3}{2} p^2 q^1 + \binom{3}{3} p^3 q^0$$

1. Esta situação é representada pelo primeiro termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que $k = 0$ e $n - k = 3$. Substituindo, vem:

$$\binom{3}{0} p^0 q^3 = 1 \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^3 = 0,216 = 21,6\%$$

2. Esta situação é representada pelo segundo termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que $k = 1$ e $n - k = 2$. Substituindo, vem:

$$\binom{3}{1} p^1 q^2 = 3 \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^2 = 0,432 = 43,2\%$$

3. Esta situação é representada pelo terceiro termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que $k = 2$ e $n - k = 1$. Substituindo, vem:

$$\binom{3}{2} p^2 q^1 = 3 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^1 = 0,288 = 28,8\%$$

4. Esta situação é representada pelo quarto termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que $k = 3$ e $n - k = 0$. Substituindo, vem:

$$\binom{3}{3}p^3q^0 = 1 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^0 = 0,064 = 6,4\%$$

Exemplo 5.5. Uma moeda não viciada é lançada 4 vezes e observa-se o número correspondente à face voltada para cima. Obtenha a probabilidade de ocorrência de exatamente duas caras.

Denotando por p a probabilidade de se obter cara em um lançamento e por q a probabilidade de se obter coroa, o desenvolvimento binomial para n = 4 será dado por:

$$(p+q)^4 = \binom{4}{0}p^0q^4 + \binom{4}{1}p^1q^3 + \binom{4}{2}p^2q^2 + \binom{4}{3}p^3q^1 + \binom{4}{4}p^4q^0$$

Cada termo neste desenvolvimento representa o cálculo da probabilidade de ocorrência de tantas caras e coroas de tal forma que sua soma resulte em 4. Assim, a probabilidade de se obter exatamente 2 caras é dada calculando-se o valor do terceiro termo.

Nesse caso, tem-se 2 caras e 2 coroas. A probabilidade de sair cara ou coroa é a mesma: $p = q = \frac{1}{2}$. Substituindo p e q no termo de ordem 3, tem-se:

$$\binom{4}{2}p^2q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Assim, a probabilidade de ocorrência de exatamente duas caras em 4 lançamentos de uma moeda não viciada vale 0,375, ou seja, 37,5%.

Exemplo 5.6. A probabilidade de um certo tenista A vencer seu oponente B em uma partida disputada é de 90%. Encontrar a probabilidade de uma derrota do tenista A em três partidas disputadas.

Denotando por v a probabilidade de vitória do tenista A e por d a probabilidade de derrota do tenista A, tem-se que $v + d = 1$. Como $v = 90\% = 0,9$, segue que $d = 1 - 0,9 = 0,1$. Pode-se escrever tal situação acima através do binômio:

$$(v+d)^3 = \binom{3}{0}v^0d^3 + \binom{3}{1}v^1d^2 + \binom{3}{2}v^2d^1 + \binom{3}{3}v^3d^0$$

Assim, a probabilidade solicitada corresponde ao cálculo do segundo termo deste desenvolvimento. Logo,

$$\binom{3}{2}v^2d^1 = 3 \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^1 = 3 \cdot 0,081 = 0,243$$

Portanto, a probabilidade do tenista A ser derrotado em uma das três partidas disputadas é igual a 24,3%.

5.2 Aplicações do Polinômio de Leibniz

O Teorema Multinomial pode ser aplicado a situações-problema envolvendo cálculo de probabilidades. O que difere do Método Binomial é o fato de haver mais de dois eventos possíveis de ocorrer. Deve-se, portanto, observar a ocorrência de possíveis repetições dos eventos envolvidos e, neste caso, o coeficiente multinomial é basicamente o cálculo da permutação com repetição de elementos (no caso aqui, a repetição dos eventos).

Além disso, há uma preocupação referente às quantidades de combinações existentes em algumas situações, que pode tornar os cálculos um tanto quanto exaustivos. No intuito de minimizar esses impactos, exemplos práticos serão apresentados de uma forma mais dinâmica, visando uma melhor praticidade.

Já sabemos que o Teorema Multinomial foi apresentado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n &= \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p} \\ &= \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_p!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p},\end{aligned}$$

Tem-se, portanto que:

1) $x_1, x_2, ..., x_p$ são as probabilidades de ocorrência dos eventos $1, 2, ..., p$;

2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ são as quantidades de ocorrência dos eventos $1, 2, ..., p$;

3) n é o número de repetições do experimento.

Exemplo 5.7. Em uma partida de futebol entre dois times A e B, estima-se que a probabilidade do time A vencer é de 50%, de haver empate é de 20% e do time B vencer é de 30%. Encontre a probabilidade do time A vencer pelo menos três de quatro partidas disputadas.

Solução:

Tem-se que a probabilidade do time A vencer é dada por v = 50% = 0,5, a probabilidade de haver empate é dada por e = 20% = 0,2 e a probabilidade do time A ser derrotado é dada por d = 30% = 0,3. O Teorema Multinomial, referente a essa situação, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}(v + e + d)^4 &= \sum \binom{4}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \cdot v^{\alpha_1} e^{\alpha_2} d^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{4!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \cdot (0,5)^{\alpha_1} (0,2)^{\alpha_2} (0,3)^{\alpha_3}.\end{aligned}$$

Observa-se, nesse exemplo, a ocorrência de três possibilidades:

1. O time A vence as quatro partidas.
2. O time A vence três partidas e empata uma.
3. O time A vence três partidas e perde uma.

1. O time A vence as quatro partidas. Nesse caso, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} p_1 &= \binom{4}{4,0,0} \cdot (0,5)^4 (0,2)^0 (0,3)^0 \\ &= \frac{4!}{4!0!0!} \cdot (0,0625) \\ &= 0,0625 \end{aligned}$$

2. O time A vence três partidas e empata uma. Nesse caso, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} p_2 &= \binom{4}{3,1,0} \cdot (0,5)^3 (0,2)^1 (0,3)^0 \\ &= \frac{4!}{3!1!0!} \cdot (0,125)(0,2) \\ &= 4 \cdot (0,025) \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

3. O time A vence três partidas e perde uma. Nesse caso, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} p_3 &= \binom{4}{3,0,1} \cdot (0,5)^3 (0,2)^0 (0,3)^1 \\ &= \frac{4!}{3!0!1!} \cdot (0,125)(0,3) \\ &= 4 \cdot (0,0375) \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

Segue que a probabilidade solicitada é dada pela soma das probabilidades acima descritas e calculadas. Portanto,

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 \\ &= 0,0625 + 0,1 + 0,15 \\ &= 0,3125 \\ &= 31,25\%. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade do time A vencer pelo menos três partidas é igual a 31,25%.

Exemplo 5.8. Uma urna contém 10 bolas amarelas, 15 brancas, 20 pretas e 5 vermelhas. Retirando-se, ao acaso, 5 bolas, com reposição, qual é a probabilidade de se obter pelo menos uma bola de cada cor?

Solução:

Denotando por a, b, p e v as probabilidades de sortear bola amarela, branca, preta e vermelha, respectivamente, e utilizando a probabilidade de ocorrência de um evento, teremos: $a = 0,2$, $b = 0,3$, $p = 0,4$ e $v = 0,1$.

O Teorema Multinomial, referente a essa situação, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}(a+b+p+v)^5 &= \sum \binom{5}{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} \cdot a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} p^{\alpha_3} v^{\alpha_4} \\ &= \sum \frac{5!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!} \cdot (0,2)^{\alpha_1}(0,3)^{\alpha_2}(0,4)^{\alpha_3}(0,1)^{\alpha_4}.\end{aligned}$$

Observe que nesse exemplo, obrigatoriamente cada cor tem que aparecer uma vez, logo vamos ter a ocorrência de quatro possibilidades:

1. Duas bolas amarelas e as outras cores com apenas uma.
2. Duas bolas brancas e as outras cores com apenas uma.
3. Duas bolas pretas e as outras cores com apenas uma.
4. Duas bolas vermelhas e as outras cores com apenas uma.

1. Duas bolas amarelas e as outras cores com apenas uma. Nesse caso, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} p_1 &= \binom{5}{2,1,1,1} \cdot (0,2)^2(0,3)^1(0,4)^1(0,1)^1 \\ &= \frac{5!}{2!1!1!1!} \cdot (0,04)(0,3)(0,4)(0,1) \\ &= 60 \cdot 0,00048 \\ &= 0,0288 \end{aligned}$$

2. Duas bolas brancas e as outras cores com apenas uma. Nesse caso, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} p_2 &= \binom{5}{1,2,1,1} \cdot (0,2)^1(0,3)^2(0,4)^1(0,1)^1 \\ &= \frac{5!}{1!2!1!1!} \cdot (0,2)(0,09)(0,4)(0,1) \\ &= 60 \cdot 0,00072 \\ &= 0,0432 \end{aligned}$$

3. Duas bolas pretas e as outras cores com apenas uma. Nesse caso, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$ e $\alpha_4 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} p_3 &= \binom{5}{1,1,2,1} \cdot (0,2)^1(0,3)^1(0,4)^2(0,1)^1 \\ &= \frac{5!}{1!1!2!1!} \cdot (0,2)(0,3)(0,16)(0,1) \\ &= 60 \cdot 0,00096 \\ &= 0,0576 \end{aligned}$$

4. Duas bolas vermelhas e as outras cores com apenas uma. Nesse caso, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
p_4 &= \binom{5}{1,1,1,2} \cdot (0,2)^1(0,3)^1(0,4)^1(0,1)^2 \\
&= \frac{5!}{1!1!1!2!} \cdot (0,2)(0,3)(0,4)(0,01) \\
&= 60 \cdot 0,00024 \\
&= 0,0144
\end{aligned}
$$

Segue que a probabilidade solicitada é dada pela soma das probabilidades acima descritas e encontradas através do Multinômio $(a+b+p+v)^5$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
p &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\
&= 0,0288 + 0,0432 + 0,0576 + 0,0144 \\
&= 0,144 \\
&= 14,4\%.
\end{aligned}
$$

Logo, a probabilidade de se obter pelo menos uma bola de cada cor é igual a 14,4%.

Conclusão

Graças aos estudos do físico Isaac Newton sobre as potências de binômios, foi possível verificar regularidades que facilitam a representação do polinômio gerado a partir da potência de um binômio. Desenvolvido com a proposta de apresentar o Binômio de Newton e sua generalização, neste trabalho foi apresentado um estudo mais detalhado acerca do Triângulo e da Pirâmide de Pascal como o objetivo de alcançar maior êxito nas demonstrações do Binômio de Newton e do Polinômio de Leibniz, tais como provar ao leitor a existência de propriedades em sua estrutura. Junto a isso, a cada capítulo promovemos um avanço matemático bastante visível, uma vez que saímos de conceitos introdutórios e técnicos para resultados cheios de propriedades e demonstrações.

Combinando teoria e prática, permitimos que o aprendizado e o entendimento fosse mais dinâmico e interessante, nos beneficiando de exemplos de fácil compreensão e de aplicações bem estruturadas. E, através da interdisciplinaridade dada pela presença de história e biologia neste trabalho, mostramos que várias áreas de estudo estão conectadas, o que contribui para o aumento do interesse do leitor e do jovem estudante no processo educacional.

O Teorema Multinomial através da expansão do Teorema Binomial permitiu determinar probabilidades de ocorrência de mais de dois eventos em situações já mostradas no último capítulo deste trabalho de maneira prática e bastante usual. De um modo geral, os objetivos deste trabalho foram alcançados de maneira satisfatória, considerando o fato de poder transmitir aos leitores uma visão diferenciada e enriquecedora dos conteúdos trabalhados.

Referências

CUNHA, L. S. C. **Uma Conexão entre Binômio de Newton e Probabilidade**. Tese (Mestrado em Matemática). PROFMAT - UFBA. Salvador, p. 53. 2017.

JÚNIOR, G. B. S. **Biologia e Matemática: Diálogos Possíveis no Ensino Médio**. Tese (Mestrado em Matemática). Programa Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 160. 2008.

MORGADO, A. C; CARVALHO, J. B. P; CARVALHO, P. C. P; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

PREDA, A. L. **Uma Relação entre a Probabilidade e os Modelos de Genética Populacional Utilizados no Ensino Médio**. Tese (Mestrado em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. Goiânia, p. 79. 2020.

SANTOS, A. A. M. **Binômio de Newton: Uma Abordagem no Campo da Análise Combinatória para o Ensino Médio**. Tese (Mestrado em Matemática). PROFMAT - UFRRJ. Seropédica, p. 107. 2019.

SILVA, M. R. **Números Binomiais: Uma Abordagem Combinatória para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFC. Fortaleza, p. 74. 2015.

SILVA, S. D. **Estudo do Binômio de Newton**. Dissertação (Mestrado em Matemática). PROFMAT/DM - CCEN/UFPB. João Pessoa, p. 70. 2013.

SILVEIRA, J. F. P. **O Triângulo de Pascal é de Pascal?**. UFRGS. 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/histo2b.html>. Acesso em: 20 de mar. de 2020.

TROVÃO, M. H. **Métodos de Contagem**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP. São Carlos, p. 67. 2015.