UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA

THARSIS DOS SANTOS FERREIRA

# NÍVEIS DE PENSAMENTO ALGÉBRICO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA.

RECIFE

2021

THARSIS DOS SANTOS FERREIRA

# NÍVEIS DE PENSAMENTO ALGÉBRICO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, Unidade Acadêmica de Recife.

Orientador: Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida

RECIFE

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383n Ferreira, Tharsis dos Santos
Níveis de pensamento algébrico de licenciandos em matemática na resolução de problemas de partilha / Tharsis dos Santos Ferreira. - 2021.
41 f. : il.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Pensamento algébrico. 2. Problemas de partilha. 3. Licenciatura em matemática. I. Almeida, Jadilson Ramos de, orient. II. Título

CDD 510

## DEDICATÓRIA

***Dedico este trabalho a Deus, à minha mãe, à minha tia que guardo carinho como mãe, à minha noiva e de forma especial ao meu painho que descansa na morada eterna ao lado do Pai Criador e olha por mim constantemente.***

**AGRADECIMENTOS**

*A Deus Pai, Criador de todas as coisas. Ele que em sua infinita bondade me concedeu a oportunidade de me realizar enquanto estudante ao longo da minha vida escolar e universitária, sendo minha fortaleza e meu sustento no percurso: Meu Deus e Meu Tudo!*

*A São João Batista, Menino Jesus de Praga e Nossa Senhora, meus santos de devoção e verdadeiros intercessores.*

*Aos meus queridos pais, Cleonice e Chusa, que ao longo de minha vida sempre souberam me amar e que nunca mediram esforços para meu desenvolvimento, pois graças a eles posso concluir mais uma etapa da minha vida.*

*À minha tia, Olímpia, que me adotou como filho e soube me amar e educar como mãe, sendo uma verdadeira inspiração para meu modo de ser.*

*À minha noiva Àdeny, por todo amor, carinho e presença ímpar nos diversos momentos, sendo minha fonte de inspiração nos estudos.*

*A todos os meus familiares irmãos, tios, tias, sogra, sogro, cunhada e afilhados, que torcem por meu sucesso estudantil e profissional.*

*Aos meus queridos amigos e companheiros de curso, pela valiosa amizade e enorme companheirismo ao longo da jornada acadêmica: Pedro Victor e Tuann Guedes.*

*Ao professor Jadilson Almeida, a quem sou eternamente grato e tenho uma grande admiração enquanto professor, que aceitou me orientar nessa pesquisa e sempre foi um incentivador nos meus estudos.*

*À minha querida UFRPE (RURALINDA), ao departamento de Educação e de Matemática e a todos professores que contribuíram na minha formação acadêmica.*

*E agradeço os atuais e futuros alunos que confiam no trabalho desempenhado pelos professores. Que nós possamos sempre contribuir na vida estudantil e pessoal de vocês.*

*A todos vocês, meu carinho e eterna gratidão.*

## RESUMO

Esse trabalho teve por objetivo identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos da licenciatura em matemática ao resolverem problemas de partilha de quantidade. Para tanto foi utilizado como base o modelo desenvolvido por Almeida (2016), que propõe quatro níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilha, o nível 0, ausência de pensamento algébrico; o nível 1, pensamento algébrico incipiente; o nível 2, pensamento algébrico intermediário; e o nível 3, pensamento algébrico consolidado. Os sujeitos da pesquisa foram 64 alunos do 1º período do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública do Estado de Pernambuco. A coleta de dados ocorreu por meio de um teste composto por seis problemas de partilha, que se caracterizam por ter uma quantidade conhecida que é repartida em quantidades desconhecidas e desiguais. Verificamos que a maior parte dos participantes, 73%, se encontram com o pensamento algébrico consolidado ao se depararem com um problema de partilha. Entretanto, alguns alunos chegam no curso de licenciatura em matemática com essa forma de pensar sem estar plenamente desenvolvida, uma vez que 5% dos sujeitos se encontram no nível 1, ou seja, mobiliza três características do pensamento algébrico, 8% dos pesquisados encontram-se no nível 2, isto é, mobiliza 4 características do pensamento algébrico. Ainda foi possível perceber que 14% dos sujeitos da pesquisa se encontram no nível 0, ou seja, não conseguem estabelecer as relações necessárias para responder a um problema de partilha, problema esse que é relacionado a uma equação polinomial do 1º grau, objeto matemático estudado no ensino fundamental.

**Palavras-chave:** *Pensamento algébrico; Problemas de partilha; Licenciatura em matemática.*

## ABSTRACT

The objective of this work was to identify the level of development of algebraic thinking in mathematics undergraduate students when solving quantity-sharing problems. For that, the model developed by Almeida (2016) was used as a basis, which proposes four levels of development of algebraic thinking in relation to sharing problems, level 0, absence of algebraic thinking; level 1, incipient algebraic thinking; level 2, intermediate algebraic thinking; and level 3, consolidated algebraic thinking. The research subjects were 64 students from the 1st period of the Mathematics Licentiate Course at a public university in the State of Pernambuco. Data collection took place through a test consisting of six sharing problems, which are characterized by having a known quantity that is split into unknown and unequal quantities. We found that most of the participants, 73%, found themselves with consolidated algebraic thinking when faced with a problem of sharing. However, some students arrive at the degree course in mathematics with this way of thinking without being fully developed, since 5% of the subjects are at level 1, that is, it mobilizes three characteristics of algebraic thinking, 8% of those surveyed find it if at level 2, that is, it mobilizes 4 features of algebraic thinking. It was also possible to notice that 14% of the research subjects are at level 0, that is, they cannot establish the necessary relationships to respond to a sharing problem, a problem that is related to a polynomial equation of the 1st degree, a mathematical object studied in elementary school.



**Keywords:** *Algebraic Thinking; Sharing problems; Degree in Mathematics.*

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

ESO – Estágio Supervisionado Obrigatório

PP – Problema de Partilha

## LISTA DE QUADROS

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Sobre o ensino da álgebra no Brasil, Almeida (2016) nos diz que ele foi, e em muitos casos ainda é essencialmente trabalhado de forma mecânica, limitando-se ao transformismo algébrico[1]. Essa forma de ensino reduz as possibilidades do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, uma vez que eles não são estimulados a pensar algebricamente e reforça uma prática voltada para a linguagem alfanumérica.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) a respeito da educação algébrica, notamos que houve uma redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. O foco do ensino voltou-se quase por inteiro ao transformismo, priorizando a linguagem algébrica em detrimento do pensamento algébrico, isto mostra a necessidade de repensar a educação algébrica, ressignificando a relação entre linguagem e pensamento.

Segundo Gil (2008), o ensino da álgebra se apresenta fragmentado, sem interligações com conteúdos vistos anteriormente pelo aluno. Além disso, as atividades propostas em certos materiais didáticos e em sala através de anotações, são mecânicas e repetidas evidenciando uma técnica de resolução, mas que não aborda uma problemática contextualizada com a vida real fora do âmbito escola, mostrando que o pensar algébrico não faz parte do ensino-aprendizagem proposto em sala de aula.

Para que ocorra uma mudança nesse cenário, "o ensino da álgebra nas escolas de educação básica deve ser uma das preocupações dos cursos de licenciatura em matemática na busca de uma melhor formação aos professores" (ARAÚJO, 2008, p. 342). Isso porque os futuros professores de matemática podem, ao assumiram suas salas de aulas, mudar o foco do ensino de álgebra, deixando o transformismo algébrico de lado, e tendo como eixo orientador o desenvolvimento do pensamento algébrico, como vem apontando as atuais orientações curriculares, como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018).

Acreditamos, portanto, que é fundamental [1]realizar investigações que relacionem o ensino de álgebra e os futuros professores de matemática, pois ainda existe uma lacuna

[1]Segundo Fiorentini, Miorim, Miguel (1993): "Transformismo algébrico é o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas.

na formação inicial dos licenciandos a respeito de discussões relacionadas ao ensino e aprendizagem de álgebra na educação básica (ARAÚJO, 2008). Nesse sentido, a presente pesquisa busca, dentre outros elementos da educação algébrica, compreender a relação existente entre a formação inicial do professor que ensina matemática e a álgebra escolar.

Podem ser encontradas diversas pesquisas que buscam a compreensão do desenvolvimento algébrico nos estudantes da educação básica. Esses estudos fazem apontamentos a respeito da real necessidade da diversificação de atividades propostas em sala de aula, visando o desenvolvimento do raciocínio matemático, que por sua vez, contribui com o desenvolvimento algébrico (BORRALHO; BARBOSA, 2011; PONTE; VELEZ, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012).

Na busca em intermediar o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, é necessário que o professor tenha entendimento de situações que proporcionem a isso, para que as atividades possuam sentido e eficácia na experiência vivida pelo estudante. Além disso, é primordial para o docente identificar o nível de desenvolvimento que o aluno se encontra. Essa necessidade é importante no momento da elaboração e aplicação das situações em sala de aula, pois se as atividades têm um alto nível e os alunos encontram-se em um nível inicial, existe grande chance da situação não proporcionar o desenvolvimento algébrico, já que a probabilidade dos estudantes não conseguirem solucionar seja considerável (ALMEIDA; CÂMARA 2019).

Nesse texto é trazido resultados de uma pesquisa que teve por objetivo geral identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilha de licenciandos em matemática de uma universidade pública do Estado de Pernambuco. A busca de respostas a esse objetivo se deu por acreditarmos que para pensarmos ações relacionadas à educação algébrica na graduação, é fundamental termos um diagnóstico dos licenciandos em relação ao tema.

Ainda como objetivos para a pesquisa, porém de forma mais específica, foi verificado o rendimento de alunos da licenciatura em matemática na resolução de problemas de partilha de quantidade; Categorizar as estratégias adotadas por alunos da licenciatura em matemática na resolução de problemas de partilha de quantidade e Identificar as características do pensamento algébrico mobilizadas pelos alunos da licenciatura em matemática na resolução de problemas de partilha de quantidade.

Foram escolhidos problemas de partilha como objeto algébrico por ser, segundo Almeida e Câmara (2014), os que mais aparecem nos livros didáticos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau. Outro fator para a escolha dos problemas de partilha, é que Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) apontam que certos estudantes usam métodos mais rebuscados que outros na resolução do problema e, além disso, os autores elaboraram um modelo teórico que possibilita identificar o nível de pensamento algébrico de alunos em relação a esse tipo de problema.

O modelo utilizado para identificar as características do pensamento algébrico nessa pesquisa, pode ser um grande aliado ao professor em sua práxis em sala de aulas, além de auxiliar a construção de propostas curriculares, levando em consideração o estudo da álgebra como um modo de pensar em que o protagonista é o aluno, focando em desenvolver o seu potencial do pensamento algébrico. Além disso, é necessário deixar de lado a visão que álgebra é apenas um mecanismo de transformismo algébrico. (ALMEIDA; CÂMARA 2019).

Para que o processo de desenvolvimento algébrico tenha significado e eficácia, faz-se necessário que o professor acompanhe o desenvolver do pensar algebricamente dos alunos, isto auxiliará o processo e a escolha das metodologias utilizadas em sala. Outro fator importante para o desenvolvimento do estudante, é a intervenção adequada do professor, ela é uma ação essencial durante os problemas propostos, uma vez que o docente não apenas ensina, ele também produz e orienta nas atividades contribuindo para potencialidade das habilidades adquiridas pelos alunos.

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO

## 2.1 Caracterização de problemas de partilha (PP)

Os problemas de partilha são caracterizados por ter um valor conhecido que, por sua vez, é dividido em partes desiguais e desconhecidas (MARCHAND; BEDNARZ 1999). É um tipo de problema de estrutura algébrica que possui ligação com equações polinomiais do 1º grau. Existem classificações para este tipo de problema de acordo com as seguintes variáveis: O número de relações que apresenta (uma, duas ou mais relações), a natureza destas relações, de onde vem (aditivas ou multiplicativas) e o tipo de encadeamento destas relações (fonte, composição ou poço).

Em seu estudo, Almeida (2016) traz o seguinte exemplo: "*Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas têm cada um?",* onde encontramos um PP com duas relações, a primeira de natureza multiplicativa (Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan) e a segunda de natureza aditiva (Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan). Quanto ao encadeamento das relações, esse PP é do tipo fonte, pois as grandezas são originadas em função de apenas uma grandeza. Nesse caso a fonte é a quantidade de figurinhas de Alan, que pode ser indicada, na resolução do problema, pela letra X. As demais grandezas descritas como a quantidade de figurinhas de Bruno e de Carlos, são principiada a partir da quantidade de figurinhas de Alan. Por isso, dizer que *"Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan" é representado, no momento* da conversão, *por "2X", da mesma forma dizer que "Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan" é* representado *por "X + 40". Por isso,* após sua conversão temos a equação *"X + 2X + (X + 40) = 120".*

Nos problemas de partilha em que o encadeamento é do tipo composição, as relações seguem uma sequência, como visto no estudo de Almeida (2016), no exemplo a seguir: *"Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?"*

Nesse problema as relações seguem uma sequência, "Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto", ou seja, segue a ordem Paulo, Beto e Mário. Fazendo um comparativo com os dos problemas de partilha do tipo fonte, nos tipos composição as grandezas são originadas de fontes diferentes. Para converter em linguagem algébrica os dados desse problema, é preciso considerar como fonte inicial a quantidade de figurinhas de Paulo, que pode ser representada por “X”. Como é sabido que Beto tem o dobro de figurinhas de Paulo, representa-se sua quantidade por “2X”. Já Mário tem o triplo de figurinhas de Beto. Sendo a quantidade de Beto representada por “2X”, logo a quantidade de Mário deve ser representada pela expressão “3.2X”, ou seja, “6X”. Nessa configuração, a fonte não é mais a quantidade de figurinhas de Paulo, como em um problema tipo fonte, mas, sim, a quantidade de figurinhas de Beto. Por fim, como a soma das quantidades de figurinhas de Paulo, Beto e Mário é igual a 90, temos a equação “X + 2X + 6X = 90”, que representa a situação problema.

Já nos problemas do tipo poço, as relações convergem para um dos personagens do problema, como pode-se observar em outro exemplo de Almeida (2016): *“João, Carla e Maria vão repartir entre eles 50 chaveiros de modo que João receba metade dos chaveiros de Carla e 10 chaveiros a mais que Maria. Quantos chaveiros cada um vai receber?”*

Neste problema, é possível perceber que as relações são direcionadas para a figura de João. Este fato é perceptível a partir da colocação que “João recebe metade dos chaveiros de Carla”, evidenciando que no momento da conversão, o estudante deve levar em consideração a operação inversa, representando assim a expressão por “2X” e não por “x/2”. Isto justifica-se pela necessidade da percepção do aluno ao fato de que, se João recebe metade dos chaveiros de Carla, ela recebe o dobro de chaveiros de João, expressando assim 2X. Da mesma forma, a conversão da expressão “dez chaveiros a mais que Maria”

Pesquisas apontam que existe um grau de complexidade dos PP quando se leva em consideração o encadeamento das relações. Os com encadeamento tipo fonte são considerados os mais fáceis, seguido pelos com encadeamento tipo composição. Já os com encadeamento tipo poço são considerados os mais difíceis (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; SANTOS JUNIOR, 2013).

## 2.2 Pensamento algébrico e níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), o método antigo de ensinar álgebra não é suficiente para o entendimento dos alunos da educação básica, sendo primordial a inserção da construção do significado e do desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries iniciais do ensino fundamental até o ensino médio.

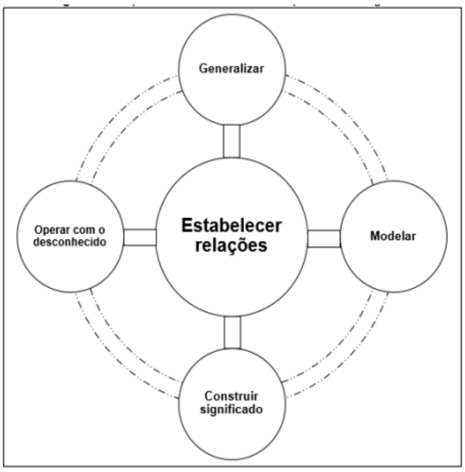
Os professores devem diversificar estratégias, permitindo, aos seus alunos, desenvolver o pensamento algébrico e o sentido de símbolo (Arcavi, 2005). Acreditamos que seja fundamental a escolha de estratégias adequadas que permitam, aos alunos, desenvolver a compreensão dos objetos e da linguagem algébrica, já que os contatos iniciais com a álgebra é uma das grandes dificuldades dos alunos.

A partir das discussões de Rômulo Lins (1992), James Kaput (1999; 2008) e Luis Radford (2006; 2009), Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017) propõem uma caracterização de pensamento algébrico. Eles defendem

> que o pensar algebricamente é revelado por meio de cinco características, a saber: “estabelecer relações”; “generalizar”; “modelar”; “operar com o desconhecido”; e “construir significado”. Além disso, sustentamos que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Portanto, defendemos que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais (ALMEIDA; CÂMARA., 2017, p. 53).

Para melhor entender as características do pensamento algébrico defendidas por Almeida (2016), é importante observar o esquema a seguir, que mostra como elas se interagem e inter-relacionam entre si.

**Figura 1**: Esquema das características do pensamento algébrico.




**Fonte:** Almeida (2016, p. 80)

A capacidade de *estabelecer relações* é a primeira característica a se desenvolver pelo indivíduo, nela o estudante, por exemplo em um problema de partilha, constrói relações entre as partes desconhecidas do problema com a quantidade total conhecida. Já a capacidade de *modelar* é revelada quando o aluno constrói um modelo matemático para descrever o problema em linguagem natural. A depender do desenvolvimento do pensamento algébrico, o modelo construído pelo aluno pode ser escrito de forma algébrica formal, valendo-se de símbolos alfanuméricos essencialmente algébricos, ou menos formal, se valendo de uma linguagem sincopada, formada por abreviações, números, letras, dentre outros sinais.

A capacidade de *generalizar* é caracterizada pela forma que o indivíduo pensa o desconhecido. Por exemplo, em um PP o aluno revela essa característica quando pensa as quantidades desconhecidas de forma geral, percebendo as relações entre elas e a parte conhecida e "descreve essas relações em uma linguagem genuinamente algébrica, em que o X pode representar um valor qualquer, valor esse que, no problema em questão, é descoberto após a resolução da equação" (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p. 56).

Outra característica é a capacidade de *operar com o desconhecido*. Nela o aluno, por exemplo ao resolver uma equação polinomial do 1º grau, "manipula o desconhecido, o "X" no caso, segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de "X" (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

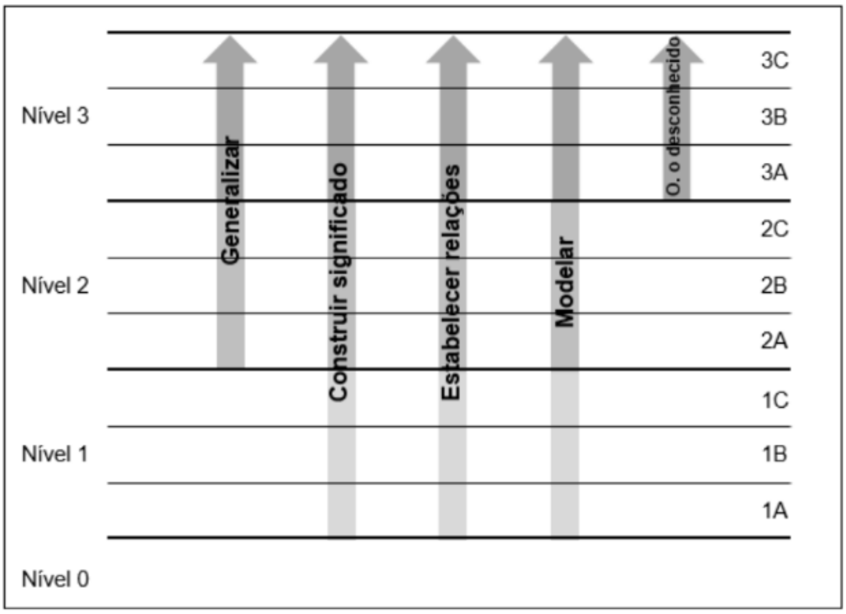
Por fim, temos a capacidade de *construir significado*. Esta característica é revelada quando o aluno constrói significado para o objeto algébrico em jogo e a linguagem utilizada para representar esse objeto.

Almeida (2016; 2018) considera que para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos é necessário que o professor pense bem nas atividades propostas. Pois, é por meio dessas atividades que ele levará seus alunos a desenvolver essa forma de pensar. Mas, como saber se os alunos desenvolveram o pensamento algébrico? Como saber em qual nível eles se encontram para pensar em atividades adequadas? Foi pensando nessas questões que Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) propuseram um modelo que possibilita identificar o nível de desenvolvimento de um sujeito.

Entretanto, por acreditarem que um sujeito pode estar em um determinado nível ao se deparar com um PP e, em outro ao se deparar com outro tipo de situação que demanda estabelecer outras relações, como, por exemplo, os problemas de generalização de padrões, o modelo proposto por eles é referente a um único tipo de situação, os problemas de partilha. Por conta disso, iremos adotar esse modelo como referência para nossa análise.

O modelo de níveis propostos por esses pesquisadores vai do nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, passando pelo nível 1 – pensamento algébrico incipiente, pelo nível 2 – pensamento algébrico intermediário, chegando, por fim, ao pensamento algébrico consolidado, nível 3. Além disso, para cada nível, a partir do nível 1, existem três subníveis, denominados pelas letras A, B e C. Para visualizar melhor esse modelo, temos a figura 2 a seguir, que mostra a relação entre os níveis e as características do pensamento algébrico.

**Figura 2:** Esquema do modelo




**Fonte:** Almeida (2018, p.565)

Os alunos que se encontram no nível 0 (Ausência de pensamento algébrico) ao se confrontarem com problemas de partilha, não mobilizam nenhuma característica do pensamento algébrico (ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Geralmente para solucionar o problema, utilizam a estratégia "dividir por 3" como se a partilha fosse feita em partes iguais. Outra estratégia adotada pelos alunos desse nível é realizar um "cálculo qualquer" com os valores que se encontram no enunciado do problema (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Em ambas estratégias os alunos não estabelecem as relações existentes entre as quantidades desconhecidas de cada personagem e o total conhecido.

Os alunos que se encontram no nível 1 (Pensamento algébrico incipiente), adotam, como estratégia para solucionar o problema de partilha, a "atribuir valor". Nela a incógnita é vista como um espaço a ser preenchido por quantidades particulares, conhecidas (RADFORD, 2009). Ao adotarem essa estratégias, esses alunos mobilizam três, das cinco característica do pensar algebricamente: a capacidade de estabelecer relações, pois percebem as condições postas no enunciado do PP; a capacidade de modelar, uma vez que elaboram um modelo matemático para representar as relações do PP, mesmo esse modelo não sendo a equação polinomial do 1º grau esperada ao converter o PP; e a capacidade de construir significado, tendo em vista que eles conseguem perceber o PP como uma relação de igualdade entre as partes e o todo, construindo significado para o objeto algébrico em questão (ALMEIDA; CÂMARA; 2018).

No subnível 1A estão os alunos que, com a estratégia atribuir valores, respondem os problemas de partilha considerados mais fáceis, que são os com encadeamento das relações tipo fonte. No subnível 1B encontram-se os alunos que conseguem responder, com essa estratégia, os PP que são de complexidade baixa e média, que são os com encadeamento das relações tipo fonte e composição. Já no subnível 1C estão os alunos que respondem, com a estratégia atribuir valores, aos problemas de partilha independente do encadeamento das relações (ALMEIDA, 2016).

O nível 2 (Pensamento algébrico intermediário), é formado pelos alunos que utilizam a estratégia algébrica com registro sincopado. Nela o aluno não escreve a equação na forma esperada pelo ambiente escolar, porém, eles conseguem elaborar a equação mentalmente, e, utiliza em seus registros uma linguagem sincopada, formada por letras, desenhos, abreviações, números, sinais de operações, dentre outros símbolos (ALMEIDA, 2016).

Nesse nível, os alunos mobilizam quatro, das cinco característica do pensar algebricamente: a capacidade de estabelecer relações, pois em seus registros é possível observar as condições do enunciado do PP; a capacidade de modelar, uma vez que já elaboram um modelo sintético que representa a história contada no enunciado do problemas; a capacidade de construir significado, tendo em vista que já compreendem o PP como uma relação de igualdade entre quantidades, além de saber o que os símbolos utilizados em seu modelo significa; por fim, eles mobilizam a capacidade de generalizar, já que a incógnita, no caso as quantidades desconhecidas, são tratadas de forma geral, diferentemente dos alunos que se encontram no nível 1 (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA; 2018).

Quanto a classificação dos subníveis, adotando a estratégia algébrica com registro sincopado, estão no subnível 2A os alunos que responderem apenas aos PP tipo fonte, considerados mais fáceis; no subnível 2B os alunos que conseguem responder aos PP de complexidade baixa e média, que são os com encadeamento das relações tipo fonte e composição; e no subnível 2C estão os alunos que respondem aos problemas de partilha independente do encadeamento das relações, fonte, composição ou poço.

No nível 3 (Pensamento algébrico consolidado) estão os alunos que conseguem resolver os problemas de partilha utilizando a estratégia algébrica com registro algébrico, ou seja, eles convertem o enunciado PP em linguagem natural em uma equação polinomial do 1º grau escrita de forma esperada no ambiente escolar, valendo-se de linguagem essencialmente algébrica.

Nesse nível os alunos mobilizam as cinco características do pensamento algébrico, isto é, além das quatros mobilizadas pelos alunos que estão no nível 2, eles mobilizam a mais a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Essa última característica do pensar algebricamente é revelada no momento em que o aluno manipula o desconhecido, o “X” no caso, “segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de “X”, no desconhecido” (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 56).

Da mesma forma dos níveis 1 e 2, o nível 3 possui três subníveis. Adotando a estratégia algébrica com registro algébrico, estão no subnível 3A os alunos que respondem aos problemas de partilha considerados mais fáceis, que são os com encadeamento das relações tipo fonte, no subnível 3B encontram-se os alunos que conseguem responder os problemas de partilha que são de complexidade baixa e média, que são os com encadeamento das relações tipo fonte e composição, e o no subnível 3C estão os alunos que respondem aos problemas de partilha independente do encadeamento das relações.

# 3 METODOLOGIA

O estudo possui caráter descritivo, em que serão descritas as mobilizações das características do pensamento algébrico desenvolvidas pelos alunos. Além disso, a pesquisa conta com uma abordagem qualitativa e quantitativa, onde os indivíduos serão classificados quanto ao nível de pensamento algébrico, através de resoluções. Os dados necessários à pesquisa foram produzidos a partir da aplicação de um questionário (APÊNDICE A). A aplicação das questões foi realizada em uma universidade pública do Estado de Pernambuco, ao mês de Junho do ano de 2019, tendo como sujeitos de pesquisa 64 alunos ingressantes do curso de licenciatura plena em matemática dos turnos vespertino e noturno.

A escolha da universidade se deu pelo fato do pesquisador ser estudante da referida instituição, o que facilitou o contato para aplicação do questionário, além do fato da universidade possuir discentes da capital e de cidades do interior do Estado. A opção por alunos do 1º período do curso de licenciatura em matemática justifica-se pelo interesse em verificar como os alunos concluintes do ensino médio e recém ingressos no ensino superior no curso de matemática, encontram-se em relação ao pensamento algébrico e quais lacunas foram deixadas no ensino básico no quesito álgebra, mais especificamente em problemas de equação polinomial do 1º grau.

As seis perguntas presentes no formulário enquadraram-se nos três vieses de problemas de partilha quanto ao encadeamento das relações, sendo dois problemas do tipo fonte, dois com o encadeamento composição e dois com encadeamento das relações tipo poço. O questionário foi elaborado com os mesmos problemas utilizados por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018). Os questionários foram disponibilizados de forma impressa (frente e verso) em folha de ofício A4, além da possibilidade de uso de uma folha de rascunho para cada participante, caso assim desejassem. Após a distribuição, foi solicitado que todos respondessem as questões e que as fizessem a caneta, sempre deixando todos os registros no papel. Os alunos responderam o questionário na aula de lógica com a presença do professor da disciplina e do pesquisador, os discentes tiveram 30 minutos para respondê-lo, sem acesso algum a qualquer tipo de consulta, seja humana, escrita ou eletrônica, nem mesmo a intervenção do aplicador.

Os dados apurados nos formulários foram tratados no programa Microsoft Excel®, em que obtiveram-se os resultados percentuais descritivos necessários à pesquisa. Desta forma, houve a interpretação e cruzamento dos dados quantitativamente, para a posterior constatação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno.

Como categorias de análises, adotou-se o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico relacionado aos problemas de partilha proposto por Almeida (2016). Neste sentido, para a identificação do nível o qual o licenciando se encontra, tomou-se como base a estratégia adotada por ele para resolver os problemas. Em relação aos subníveis, a referência foi a complexidade dos PP.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi iniciada a análise com o rendimento dos licenciandos. No quadro 1 a seguir consta os números de acertos, erros e não resposta aos problemas de partilha. O item “não resposta” refere-se aos problemas que não apresentaram nenhuma resposta, ou seja, deixados em branco.

**Quadro 1 –** Rendimento dos licenciandos em relação aos PP

| | **Frequência absoluta** | **Porcentagem** |
|---|---|---|
| Acertos | 295 | 77% |
| Erros | 49 | 13% |
| Não resposta | 40 | 10% |
| **Total** | **384** | **100%** |

**Fonte:** Dados da pesquisa

Com base no quadro acima, pode-se verificar que um pouco mais de três quartos (77%) dos PP foram resolvidos de forma correta, o que era esperado, tendo em vista que os sujeitos da pesquisa foram alunos da licenciatura em matemática e os PP estão relacionados com um conceito que deve ser trabalhado no ensino fundamental, as equações polinomiais do 1º grau.

Mesmo tendo um índice considerável de acertos, o número de erros e não respostas, que juntos somam 23%, foi bastante expressivo. Desta forma, revelou-se, neste caso, que ainda é possível encontrar alunos de uma graduação que tem por objetivo formar professores de matemática com dificuldades em resolver problemas relacionados com conceitos da matemática escolar.

Em meio às observações das resoluções dos problemas, também foi investigado o rendimento em relação aos acertos, erros e “não resposta” dos licenciandos levando em consideração o encadeamento das relações dos PP. Segundo Marchand e Bednarz (1999), o encadeamento das relações dos PP (fonte; composição ou poço) podem modificar as estratégias e a performance dos alunos. No quadro 2 a seguir temos esse resultado.

**Quadro 2 –** Rendimento por encadeamento de relações

| | ACERTOS | ERROS | NÃO RESPOSTA | Total |
|---|---|---|---|---|
| **PP tipo fonte** | 108 | 9 | 11 | 128 |
| | 84% | 7% | 9% | 100% |
| **PP tipo composição** | 99 | 18 | 11 | 128 |
| | 77% | 14% | 9% | 100% |
| **PP tipo poço** | 88 | 22 | 18 | 128 |
| | 69% | 17% | 14% | 100% |
| **TOTAL** | **192** | **166** | **158** | |

**Fonte:** Dados da pesquisa

É possível observar que a quantidade de acertos vai decrescendo e a de erros aumentando de acordo com o encadeamento das relações dos problemas de partilha. Nos problemas de partilha do tipo fonte, 84% dos licenciandos conseguiram resolver de forma correta, contra 77% de acertos para os PP do tipo composição e 69% para os PP do tipo poço. Esses dados corroboram com os resultados das pesquisas de Marchand e Bednarz (1999), Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013), que mostram, evidenciando que os PP do tipo fonte são considerados mais fáceis, seguidos pelos do tipo composição. Já os do tipo poço são os considerados mais difíceis.

Após a análise do rendimento, descrita no Quadro 3 a seguir, a distribuição dos 64 participantes da pesquisa por níveis e subníveis do pensamento algébrico, levando em consideração a frequência e a porcentagem em cada categoria.

**Quadro 3:** Nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos licenciandos

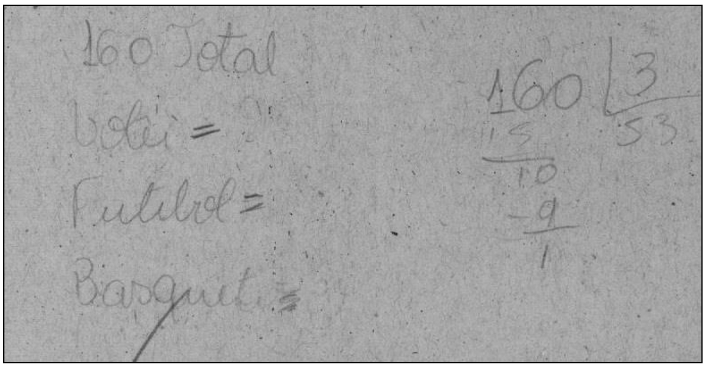
| Níveis | Frequência | Porcentagem | Subníveis | Frequência | Porcentagem |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nível 0** | 9 | 14% | - | 9 | 14% |
| **Nível 1** | 3 | 5% | 1A | 0 | 0% |
| | | | 1B | 2 | 4% |
| | | | 1C | 1 | 1% |
| **Nível 2** | 5 | 8% | 2A | 0 | 0% |
| | | | 2B | 1 | 1% |
| | | | 2C | 4 | 7% |
| **Nível 3** | 47 | 73% | 3A | 0 | 0% |
| | | | 3B | 9 | 14% |
| | | | 3C | 38 | 59% |
| **Total** | 64 | 100% | - | 64 | 100% |

**Fonte:** Dados da pesquisa

Analisando o quadro anterior, os dados apontam que 14% dos alunos situam-se no nível 0, afirmando que nove sujeitos da pesquisa não conseguiram mobilizar nenhuma das características do pensamento algébrico ao se depararem com os problemas de partilha do teste. Normalmente, diante dessas situações, os sujeitos adotam estratégias essencialmente aritméticas, denominadas por Oliveira e Câmara (2011) como “total como fonte”, “dividir por 3” ou “realizar um cálculo qualquer”. Vale ressaltar, porém, que os licenciandos que se encontram no nível 0 não significa, necessariamente, que eles não pensam algebricamente, uma vez que podem mobilizar características ao pensar em outras situações algébricas, como, por exemplo, os problemas de generalização de padrões, já que a estrutura desses problemas demandam o estabelecimento de relações diferentes das necessárias para solucionar os PP (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

A seguir, na figura 3, é apresentada a estratégia dividir por 3 para resolver ao seguinte PP: *“Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais do que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?”*

**Figura 3**: Exemplo de estratégia dividir por 3



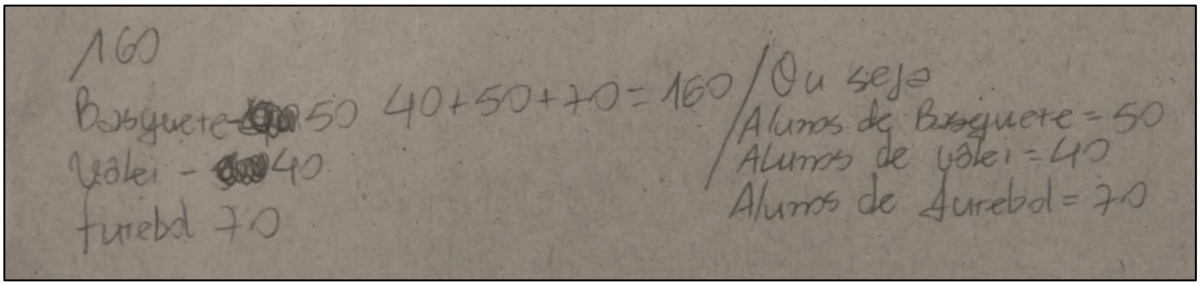

**Fonte:** Dados da pesquisa

Ao adotar essa estratégia, o licenciando não mobiliza nenhuma das características do “pensar algebricamente” apresentadas e defendidas por Almeida (2016), para construir a ideia de pensamento algébrico por parte do aluno. Na estratégia executada, o aluno entende o problema como sendo aritmético, em que a divisão do total de pontos deve ser feita em partes iguais para os três times, ou seja, ele não consegue perceber as condições propostas no enunciado, deixando, portanto, de estabelecer as relações necessárias para a resolução correta do problema de partilha (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2016; 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

O nível 1, no qual o pensamento algébrico é ainda incipiente, se encontra o menor número de licenciandos, expressando apenas 5 % do total, evidenciando, nesse caso, que apenas 3 dos 64 participantes da pesquisa adotaram a estratégia atribuir valor como método de resolução dos PP. Nesse nível o estudante compreende a incógnita como um elemento em que ele deve substituir com valores particulares e conhecidos (RADFORD, 2009), como iremos notar na resolução apresentada na figura 4 à frente. Na estratégia utilizada pelo estudante para resolução do problema em questão, “O aluno atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas” (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011).

É possível observar na figura a seguir um exemplo dessa estratégia adotada por um licenciando para resolver o seguinte problema: *“Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que jogam basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?”*

**Figura 4**: Exemplo de estratégia atribuir valor




**Fonte**: Dados da pesquisa

A princípio, é comum pensar que essa estratégia é essencialmente aritmética, uma vez que se vale de cálculos basicamente aritméticos. Entretanto, percebesse que o aluno que adota essa estratégia para resolver um problema de partilha está mobilizando as seguintes característica do pensar algebricamente: “estabelecer relações”; “modelar” e “construir significado” (ALMEIDA, 2016).

Assim como apontam as pesquisas de Marchand e Berdnarz (1999), Oliveira e Câmara (2011), Almeida (2016; 2018) e Almeida e Câmara (2017; 2018), nota-se que a característica central do pensar algebricamente “é essencial para resolver corretamente um problema de estrutura algébrica” (ALMEIDA, 2018, p. 705). Portanto, mesmo que os registros deixados pelo licenciando na figura 4 não revele de forma clara como ele chegou no número de alunos que praticam cada esporte, é possível alegar que eles indicam que o licenciando compreendeu as condições postas no enunciado do PP, já que as levou em consideração em sua resposta.

Outro panorama possível para este caso é que, pelo fato de se tratar de um aluno que já concluiu a educação básica, ele tenha realizado os cálculos mentalmente ou escolhido já na primeira tentativa o valor correto. Para realizar os cálculos mentalmente o estudante construiu expressões que relacionam as quantidades envolvidas no problema, um exemplo seria a conversão da sentença “O número de alunos que jogam basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei” pela expressão “B = V + 10”, e “o número de alunos que jogam futebol é 20 a mais dos que jogam basquete” pela expressão “F = B + 20”. Considerando os rabiscos feitos na resolução, pode-se indicar que sua resposta foi iniciada com um valor para o número de alunos que jogam vôlei e que, após a realização os cálculos, foi percebido que o valor não era a resposta correta, levando-o a escolher o próximo valor, agora de forma correta, ou seja, 40.

A capacidade de modelar, isto é, de construir um modelo matemático que represente as relações contidas no enunciado do problema (Almeida; Câmara, 2017) pode ser percebida nos registros, uma vez que eles parecem indicar que, ao colocar os nomes dos esportes abaixo de 160, o licenciando demonstra que a soma das quantidades de cada esporte é igual a esse valor, como proposto no enunciado. Além disso, após chegar aos valores, ele os soma para comprovar sua hipótese.

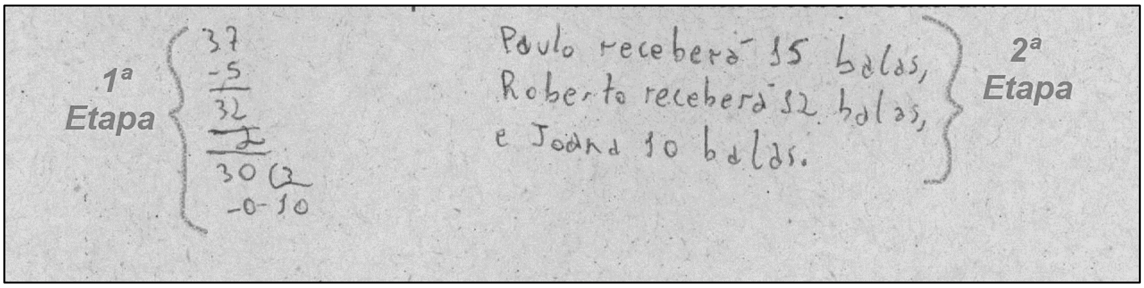
Já a última característica do pensamento algébrico, revelada na resposta do aluno, é a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem simbólica algébrica. Isso é perceptível pelo fato do processo de escolha do valor para a incógnita inicial (vôlei = 40) não ser feito de forma aleatória, mostrando que o aluno compreendeu o problema de partilha como uma relação entre a soma das quantidades de alunos que praticam cada esporte e o total de alunos.

Por fim, foi possível verificar que dos 3 licenciandos que se encontravam no nível 1, 2 destes estavam no subnível 1B, ou seja, conseguiram resolver os PP com encadeamento tipo fonte (considerados os mais fáceis) e os com encadeamento tipo composição (de complexidade média). Já o licenciando restante estava no último subnível 1C, o que indica que ele conseguiu resolver adotando a estratégia atribuir valores aos PP independente do encadeamento de suas relações (fonte, composição ou poço) (ALMEIDA, 2016; 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Foi verificado também, que apenas 8% dos sujeitos se encontravam no nível 2, isto é, com o pensamento algébrico intermediário (ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Nesse nível os alunos já são capazes de pensar o problema de partilha em termos de uma equação polinomial do 1º grau, revelando em seus registros, mesmo que não seja de forma clara, a indeterminação, diferentemente dos que estão no nível 1.

A figura 5 a seguir apresenta a estratégia adotada por um licenciando que se encontra no nível 2, ao solucionar o problema: *"Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?"*

**Figura 5**: Exemplo de estratégia algébrica com registro sincopado




**Fonte:** Dados da pesquisa

Na solução o aluno adota a estratégia algébrica com registro sincopado, ele ainda não consegue alcançar um registro formal esperado na escola que seria a representação por meio de uma equação polinomial do 1º grau, levando-o a equacionar o problema mentalmente (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011), mesmo que o modelo utilizado por ele para representar a conversão do problema não seja composto pelos símbolos essencialmente algébrico, o que não é necessário para estar pensando algebricamente (ARCAVI, 2005; KAPUT, 2008; RADFORD, 2009; ALMEIDA, 2016; 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2017; 2018).

Dessa forma, o aluno mobiliza as seguintes características do pensamento algébrico:

- Estabelecer relações: revelada quando o licenciando percebe as condições postas no enunciado e realiza as operações para chegar nos valores de cada incógnita (quantidade de balas de cada personagem);
- Modelar: indicada pelos registros do licenciando, que indica, de forma concisa as relações do PP;
- Construir significado: uma vez que o licenciando compreendeu o PP como uma relação entre quantidades, o entendendo como uma equação;
- Generalizar: revelada quando ele adota a quantidade de balas de Joana como a incógnita fonte da equação.

Na primeira etapa da solução, é possível perceber que o licenciando realizou duas subtrações sucessivas. Elas representaram as quantidades que Paulo e Roberto receberam a mais que Joana. Após fazer as subtrações, o valor obtido foi dividido igualmente entre as três personagens, por isso 30/3. Apesar destes passos terem sido feitos com registros aritméticos, conclui-se, assim como colocam Oliveira e Câmara (2011), Almeida (2016;

2018) e Almeida e Câmara (2018), que eles têm uma relação estreita entre os passos utilizados ao resolver a equação obtida após a conversão do problema, como observa-se no quadro seguir:

**Figura 6:** Esquema de solução

1. X + (X + 2) + (X + 5) = 37 (Equacionamento do problema de partilha)
2. 3X = 37 – 5 – 2 (Momento que equivale as ações de subtrair 5 e 2 dos 37)
3. 3X = 30 (Resultado encontrado após as subtrações)
4. X = 30/3 (Momento que equivale a divisão realizada pelo licenciando)
5. X = 10 (Valor encontrado após a divisão)

**Fonte:** Dados da pesquisa

Entretanto, chegar a solução de valor 10 não é a resposta ao problema, pois este valor indica apenas a quantidade de balas de uma personagem (Joana). Na 2ª etapa do problema, o licenciando teve que considerar as condições descritas no enunciado: *"De modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana"* para chegar ao total de balas de Paulo, mentalmente ele somou 5 ao valor 10 encontrado em sua solução (X + 5 = 10 + 5 = 15) e a *"Roberto receba 2 balas a mais que Joana"* somou mentalmente 2 ao valor 10 encontrado em sua solução (X + 2 = 10 + 2 = 12) para determinar a quantidade de balas de Roberto.

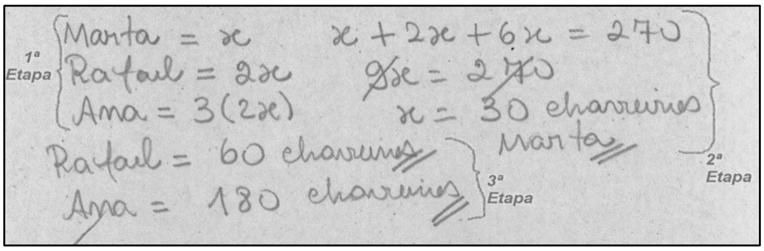
Neste caso, diferentemente do aluno que se encontra no nível 1 – que parte de um valor particular, por isso a estratégia "atribuir valores" – o aluno do nível 2 já adota a quantidade de balas de Joana como a incógnita fonte da equação. Portanto, nesse nível, a indeterminação, expressa como a incógnita, já aparece de forma explícita ao discurso (RADFORD, 2009), mesmo não aparecendo nos registros do licenciando. Isso revela a capacidade de generalizar, que é uma característica do pensamento algébrico que os alunos que se encontram no nível 1 ainda não conseguem mobilizar (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Dos 5 licenciandos que foram classificados no nível 2, foi verificado que nenhum deles pertencia ao subnível 2A, um pertencia ao subnível 2B (adotando a estratégia algébrica com registro sincopado respondeu aos PP com encadeamento do tipo fonte e composição) e os restantes enquadrados no subnível 2C, ou seja, responderam aos PP independentemente do encadeamento das relações (fonte, composição ou poço).

Aproximadamente três quartos (73%) dos licenciandos que participaram da pesquisa ocuparam o nível 3, ou seja, conseguiram mobilizar todas as características do pensamento algébrico ao se depararem com os PP do teste. Dessa maneira, os estudantes pertencentes a esse nível possuem além das quatro capacidades mobilizadas no nível anterior, mobilizam também a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido. Ainda pode-se afirmar que os alunos que se encontram nesse nível mobilizam todas as características do pensamento algébrico de maneira bem consistente. Desses, 59% se encontravam no subnível 3C, isto é, responderam os PP apesar dos encadeamentos das relações (fonte, composição e poço). Apenas 9% dos avaliados encaixaram-se no subnível 3B, composto pelos sujeitos que conseguem resolver os PP com encadeamento tipo fonte (considerados os mais fáceis) e tipo composição (com grau de complexidade médio). Nenhum dos licenciandos encontraram –se no primeiro subnível do nível 3A.

Na figura abaixo, é possível observar um exemplo da estratégia algébrica utilizada por um licenciando do nível 3 ao resolver o problema: *"Marta, Rafael e Ana têm juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm casa um?"*.

**Figura 7**: Exemplo de estratégia algébrica




**Fonte:** dados da pesquisa

Na solução, nota-se a característica de definir relações no instante em que o licenciando inicia a resposta, a partir do estabelecimento das relações existentes entre a quantidade de chaveiros que cada personagem tem e em seguida com a quantidade total de chaveiros. Neste mesmo momento, é possível observar a capacidade de modelar do licenciando, já que ele adota a quantidade de chaveiro de Marta como a fonte inicial e desconhecida e a representa por "X". Como Rafael tem o dobro de Marta, ele representa sua quantidade por "2X", e a quantidade de Ana ele representa por "3.(2X)", já que ela tem o triplo de Marta. No segundo momento, o aluno chega na equação "X + 2X + 6X = 270", ou seja, no modelo matemático esperado no ambiente escolar para representar um problema desse tipo, o que não se verifica nas respostas dos alunos que se encontram nos níveis anteriores. (ALMEIDA, 2016; 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

A maneira de representar os objetos do problema em linguagem matemática da situação problema contida no enunciado, trata-se de uma fórmula, linguagem formal, que explicita todos os dados da questão. Tal representação matemática descreve o potencial da álgebra, em que as representações algébricas significam objetos de um maneira abstrata, construindo um modelo matemático para representar situações comuns ao nosso viver. (LINS, 1992; KAPUT, 2008; RADFORD, 2009).

A partir do momento em que o licenciado escreve a equação polinomial do 1º grau, a mesma possui um caráter explícito, como nas soluções dos problemas dos estudantes do nível anterior e passa a ter também uma forma abstrata (RADFORD, 2009), mostrando na escrita a mobilização da "capacidade de generalizar", mas dessa vez apresentando um maneira mais sofisticado em relação às soluções dos licenciando pertencentes ao nível 2.

A capacidade de generalizar foi observada a partir do momento em que o licenciando adotou a quantidade de chaveiro de Marta como a fonte inicial do problema, como um valor geral e desconhecido e o representa por uma incógnita, no caso o "X", tomando-o como base para as quantidades de chaveiros das outras personagens.

A capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido é notada de forma bem desenvolvida na 2ª etapa de resolução, no momento em que o licenciando manipula o desconhecido (X) com base nas leis da aritmética em relação à igualdade, objetivando encontrar equações equivalentes até chegar no valor de "X".

Por fim, a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos já pode ser observada na 1ª etapa da solução do problema, quando o sujeito percebe o problema como uma relação entre quantidades, entendendo-o como uma equação do1º grau, no qual as incógnitas são representadas pela letra "X". Já na 3ª etapa, é possível verificar que ele compreende o significado da linguagem utilizada, tendo em vista que para ele, o "X" representa a quantidade de chaveiros que Marta possui e, por isso, "Marta = 30", onde "2X" indica a quantidade de Rafael, sendo então "Rafael = 60" (2 . 30), e que o "3.(2X)" é a quantidade de chaveiros de Ana, levando a "Ana = 180" (3.(2.30)).

Ao término, após a análise do material escrito dos discentes participantes, o modelo possibilitou a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de um estudante ingressante no curso de licenciatura em Matemática, frente aos problemas de partilha.

# 5 CONCLUSÃO

A partir dos resultados apresentados, podemos perceber de maneira evidente a importância e o papel fundamental da escola no ensino da álgebra e no desenvolvimento algébrico dos alunos. Por meio dos índices de acertos, erros e mobilizações das características do pensamento algébricos, notamos uma boa realidade apresentada na amostra referente aos 64 licenciandos participantes da pesquisa, mas que apontam uma lacuna em certos estudantes que terminaram a educação básica e ingressaram em uma universidade no curso de licenciatura em matemática e que futuramente estarão em sala de aula.

Os licenciandos partícipes da pesquisa mostraram ter mais facilidade em problemas de encadeamento tipo fonte, com 84% de acertos, e encontraram mais dificuldades em problemas de encadeamento tipo poço, em que houve 69% de acertos. Corroborando com os resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013).

Também foi percebido que 73% dos licenciandos encontram-se no nível 3 em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o que se era esperado, já que se tratavam de alunos de um curso de graduação em matemática. Para os alunos que desejam lecionar matemática na educação básica ou na educação superior, pressupõe que os indivíduos possuam um contato e um melhor domínio com a matemática, especificamente com a álgebra, foto que foi constatada nas estatísticas do material coletado e tratado.

É possível perceber que 5% dos estudantes situam-se no nível 1, ou seja, mobilizam 3 características do pensamento algébrico, isto é, os discentes que se encontram nesses níveis deparam-se com problemas de partilha e fazem uso de um modelo matemático não formal, fazem registros sem a formalidade da equação polinomial do 1º grau usando operações aritmética com os dados fornecidos da atividade.

Fazendo um comparativo dos números apresentados pelos alunos que se encontram no nível 1 em relação aos alunos que se encontram no mesmo nível da pesquisa de Almeida (2016), ambos resolvem com a estratégia de atribuir valor os problemas de partilha, independentemente do tipo de encadeamento. Outro fator a destacar ao relacionar com a pesquisa de Almeida (2016) e Oliveira e Câmara (2011), é que grande parte dos alunos (67% dos que estão nos níveis 1, 2 e 3) ao resolver um problema corretamente, conseguem resolver os demais sem importar o tipo de encadeamento presente no problema de partilha.

No que diz respeito ao nível 2, temos 8% dos discentes presentes nesse parâmetro, estes que mobilizam 4 características do pensamento algébrico, pode-se entender que esse nível é de mudança em relação ao pensamento algébrico incipiente e o consolidado. Os licenciandos presente nesse nível ao solucionar problemas de partilha e utilizam-se de uma estratégia menos formal matematicamente, ou seja, fazem registros sem a formalidade da equação polinomial do 1º grau, usando o método algébrico como registro sincopado da equação que representa a situação problema em questão.

Considerando os licenciados presentes no nível 2 e olhando os números da pesquisa de Almeida (2016), a representação percentual é quase idêntica aos alunos do 6º, 7º e 9º anos da pesquisa comparada que apresentam 8%, 8% e 8,5% respectivamente. Com esses números pode-se afirmar que os alunos que concluem as séries finais do ensino fundamental e os alunos que concluem o ensino médio e são ingressantes na universidade no curso de licenciatura em matemática, que as dificuldades apresentadas na educação básica se mantiverem na vida estudantil do indivíduo deixando uma lacuna no ensino-aprendizagem.

Mesmo com um grande percentual de alunos com o pensamento algébrico bem desenvolvido, um dado nos chamou atenção, pois 14% dos discentes se encontram no nível 0 do desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilha. Esse quadro revela que ainda temos alunos que entram na licenciatura em matemática com lacunas na aprendizagem de conceitos do ensino fundamental. Com base nisso, deixamos uma questão: o que vem sendo feito nos cursos de licenciaturas em matemática para diminuir ou sanar as dificuldades de seus alunos em relação a conceitos da educação básica? Isso nos preocupa, uma vez que esses licenciandos precisarão desses conceitos durante sua graduação, além de ensiná-los quando assumirem suas salas de aula.

Tendo em vista principalmente os discentes que encontram-se no nível 0 e também nos níveis 1 e 2, uma proposta para melhorar a realidade com a qual esses alunos ingressam na Universidade, sendo essa marcado por lacunas no ensino básico, acreditamos que a BNCC norteia satisfatoriamente um caminho que deve gerar bons frutos. Suas diretrizes apontam que o ensino da álgebra deve começar ainda nas séries iniciais do Fundamental, colaborando assim para que o pensamento algébrico se desenvolva ainda no início da vida estudantil. No que diz respeito aos discentes, futuros professores de matemática, consideramos que a Universidade deveria proporcionar disciplinas que tratassem dos assuntos da Educação Básica, além de uma maior quantidade de disciplinas de metodologias ativas, aos quais os discentes pudessem colocar em prática nas escolas através do Estágio Obrigatório (ESO), saberes discutidos e vivenciados na universidade.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. Características do pensamento algébrico reveladas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de um problema de partilha. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**. Mossoró, v. 4, n. 12, 2018. Disponível em <http://periodicos.uern.br/index.php/RECEI/article/view/3099/1813> Acesso em: 04 fev. 2020.

_____________. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** Um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática. UFRPE, Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nos livros didáticos de matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, vol. 64, 2014. Disponível em <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=dx.doi.org%2F10.4322%2Fgepem.2015.001&path%5B%5D=1568> Acesso em: 20 mai. 2015.

_____________. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha. **Zetetiké,** Campinas, São Paulo, vol. 26, n.3, 2018. Disponível em <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8650717/18882> Acesso em: 15 fev. 2019.

____________. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental: o caso dos problemas de partilha**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, vol. 21, n. 3, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/42771/pdf> Acesso em: 08 abr. 2020.

____________. Pensamento Algébrico: Em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, vol. 6, n. 10, 2017. Disponível em <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1124/pdf_207> Acesso em: 15 set. 2019.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 10, n. 2, São Paulo, 2008. Disponível em <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/1740/1130> Acesso em: 03 mar. 2015.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. **Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática.** Caminha, Portugal, 2005. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Arcavi05(El%20desarrollo%20y%20el%20uso%20del%20sentido%20de%20los%20simbolos).doc> Acesso em 03/03/2020.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. **Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico**. *Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática*. (pp 1 – 12) Recife: SBEM. 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, Brasília, 2018.

FIORENTINI, D., MIGUEL, A., e MIORIM, Â. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pró-Posições**, v. 3, n. 1, pp. 39-54, 1992

FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria Angela; MIGUEL, Antonio. **Contribuições para Repensar...a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições, v.4, n.1(10), p. 78-91, março de 1993.

GIL, Kátia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. Porto Alegre, 2008.118 f.Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado, Pontifícia Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Física, 2008. Disponível em: Acesso em: 27 de nov. 2021.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). ***Mathematics classrooms that promote understanding***. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

________. CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

LINS, R. C. ***A framework for understanding what algebraic thinking is***. 1992. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK, 1992.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. **Anais do XIII CIAEM,** Recife 2011. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/771.pdf. Acesso em: 01 de Jul. 2019.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. **Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade**. *Boletim GEPEM*. 59, 53 – 68, 2011. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=637&path%5B%5D=573 > Acesso em: 27/11/2021

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2006.

___________. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Lyon, França, 2009.

SANTOS JUNIOR, C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática e tecnológica, UFPE, Recife, 2013.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. **Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I**. *Revista Eletrônica de Educação.* 6(1). 206-222, 2012. Disponível em: <
186 *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.21, n.3, 167-187, 2019*
http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/387/172 > Acesso em: 27/11/2021.

## APÊNDICE A – Questionário aplicado aos licenciandos participantes da pesquisa

Universidade: ________________________________________ Período: __________

Nome: ______________________________________________ Idade: ____________

Atividades

1) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?

2) Marta, Raquel e Ana têm juntos 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm cada um?

3) João, Pedro e Cláudio têm juntos 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?

4) Clara, Marcos e Antônio têm juntos 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas têm cada um?

5) Frederico, Lúcia e Rogério têm juntos 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?

6) Em uma escola 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?