UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Coordenação de Licenciatura em Matemática

Yasmim Eduarda Santiago da Silva

Uma sequência didática para introduzir a teoria dos grafos no Ensino Médio: teoria matemática e prática docente

RECIFE
2019

YASMIM EDUARDA SANTIAGO DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA INTRODUZIR A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: TEORIA MATEMÁTICA E PRÁTICA

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Recife, 18 de dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Me. Wanderson Alexsander da Silva Oliveira
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Coordenação de Licenciatura em Matemática

Yasmim Eduarda Santiago da Silva

Uma sequência didática para introduzir a teoria dos grafos no Ensino Médio: teoria matemática e prática docente

Monografia de graduação apresentada a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

235s Santiago, Yasmim Eduarda Santiago da Silva
Uma sequência didática para introduzir a teoria dos grafos no Ensino Médio: teoria matemática e prática docente / Yasmim Eduarda Santiago da Silva Santiago. - 2019.
38 f. : il.

Orientador: Thiago Dias Oliveira Silva.
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2020.

1. Teoria dos Grafos. 2. Problema do Carteiro ChinÊs. 3. Colorindo Grafos . I. Silva, Thiago Dias Oliveira, orient. II. Título

CDD 510

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio desde sempre. Aos meus pais que sempre fizeram de tudo por mim, para me ver crescer e que hoje eu estou aqui porque eles sempre acreditam em mim e eu sou grata até demais. Eu quero também agradecer de modo geral a todos que estiveram comigo, no ensino médio, durante o cursinho e na faculdade e ainda estão comigo.

A ajuda de vocês tem sido importante demais pra mim, se hoje eu estou aqui é porque de alguma maneira vocês acreditaram em mim e eu acreditei em mim também. Quero enfatizar que tive professores incriveís nessa graduação que me tenho como referência . Quero agradecer em especial ao meu Orientador, vulgo anjo na minha vida que acreditou bastante em mim e me fez acreditar que eu era capaz de ir além do meu limite, sei que serás o reflexo de professor que eu pretendo ser. E queria agradecer também ao professor Eberson que me ajudou bastante e foi um ótimo professor de Análise Real. Diante de várias circustâncias, estou muito feliz e grata por essa conquista que não é só minha, mas de todos que vem lutando comigo. Esse é só o começo das grandes vitórias que ainda estão por vir!

Resumo

Este trabalho aborda os conceitos básicos para a fundamentação do estudo da Teoria dos Grafos. Estudamos classes especiais de grafos como árvores, grafos Eulerianos e grafos planares. Em seguida aplicamos estes conceitos para estudar dois problemas: Coloração de Grafos e o Problema do Carteiro Chinês. Por fim apresentamos uma sequência didática que tem por objetivo ensinar teoria de Grafos para estudantes do ensino médio.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Problema do Carteiro Chinês, Colorindo Grafos.

Abstract

In this work we present the basic concepts for the basis of the study of graph theory. We study special classes of graphs such as trees, Eulerian graphs and planar graphs. Next we apply this concepts to study two problems: Graph Coloring and the Chinese Postman Problem. Finally we include a didactic sequence that aims to teach graph theory to high school students.

Keywords: Theory of graphs, Chinese Postman Problem, Graph coloring.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Neste capítulo iremos apresentar como deu-se o surgimento da Teoria dos Grafos e o problema do Carteiro Chinês.

A Teoria dos Grafos teve origem no século XVIII a partir do trabalho do matemático Leonard Euler a respeito do problema das 7 pontes de Königsberg e o seu desenvolvimento decorreu principalmente na segunda metade do século XX.

Um *grafo* pode ser definido por um par de conjuntos $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de *vértices* e E é um conjunto de *arestas*. Cada elemento e de E está associado a dois elementos distintos de V: v_i e v_j. Nesse caso dizemos que e conecta os vértices v_i e v_j.

Os grafos podem ser utilizados para armazenar informação. Por exemplo, árvores genealógicas, mapas geográficos, tabelas de campeonatos e redes sociais podem ser armazenadas em um grafo.

Os grafos também podem ser utilizados para abordar matematicamente problemas que envolvem relações entre objetos discretos de um conjunto de qualquer tipo.

Podemos armazenar o mapa de uma cidade em um grafo considerando as esquinas como vértices e as ruas como arestas. Neste contexto problemas relacionados a percursos aparecem naturalmente. Por exemplo: Será que podemos percorrer uma região usando todas as ruas de forma que a distância total percorrida seja a mínima possível? Se sim, quais as condições que essa região deve possuir?

Estes questionamentos motivaram o matemático Mei-Ku Kwan a formular o **Problema do Carteiro Chinês:**

Suponha que haja um carteiro que precise entregar correspondência para uma certa vizinhança. O carteiro não está disposto a andar muito, então ele quer encontrar um percurso mais curto que atenda aos seguintes critérios:

1. É um circuito fechado (termina no mesmo ponto em que começa).
2. Ele precisa passar por todas as ruas pelo menos uma vez.

Traduzindo o problema para a Teoria de Grafos, queremos encontrar um percurso mínimo e fechado (num sentido que será definido adiante) de modo que o carteiro visite cada aresta do grafo apenas uma vez. Na Teoria dos Grafos esse tipo de problema é chamado de problema de percurso mínimo. Neste trabalho, temos como objetivo expor sobre conceitos básicos da Teoria de Grafos, apresentar uma caracterização para os Grafos Eulerianos e exibir um algoritmo para o problema do Carteiro Chinês.

No que segue descreveremos o conteúdo do trabalho.

O objetivo no capítulo 1 é apresentar algumas definições preliminares da teoria dos grafos que serão importantes para as aplicações posteriores. Em seguida, estudaremos algumas noções básicas sobre um tipo especial de grafo chamado de árvore que será importante no estudo de grafos planares.

No capítulo 2, apresentamos um estudo sobre coloração de mapas. Mostramos que é possível colorir qualquer mapa (grafo planar) com 5 cores.

No Capítulo 3, motivados pelo problema das 7 pontes de Königsberg e pela solução de Euler apresentamos uma caracterização para grafos eulerianos.

No Capítulo 4, resolvemos o problema do Carteiro Chinês. E escrevemos um pseudo-algoritmo que pode ser implementado em alguma linguagem de programação.

No capítulo 5 , será exibido uma sequência didática tendo como objetivo inserir algumas noções básicas da teoria dos grafos no ensimo médio.

1 Definições básicas

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos da Teoria de Grafos, como por exemplo, caminho, ciclo, grafos eulerianos e árvores. Esses conceitos darão base ao leitor para compreender os capítulos subsequentes.

Definição 1. Um *grafo* é definido por um par de conjuntos $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de *vértices* e E é um conjunto de *arestas*. Cada elemento e de E está associado a dois elementos distintos de V: v_i e v_j. Nesse caso dizemos que e conecta os vértices v_i e v_j e além disso denotamos $e = v_iv_j$.
Podemos ver um exemplo de grafo na figura abaixo:

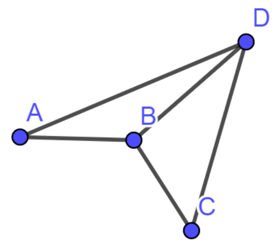

Figura 1 – Um exemplo de grafo

Definição 2. Um vértice é adjacente a outro vértice se ambos estão relacionados a uma aresta.

Exemplo 3. Note que o vértice A é adjacente a o vértice B e D e que o vértice A não é adjacente ao vértice C.

Definição 4. Seja G um grafo. Para um vértice v de V_G, sua vizinhança $N_G(v)$ é definida por $N(v) = \{u \in V_G | uv \in E_G\}$.

Definição 5. O grau do vértice v em G é o número de vértices adjacenges a v, isto é, $d(v) = |N(v)|$.

Exemplo 6. Seja G o grafo da figura 1. Note que a vizinhança de A é N(A) é um subconjunto de $V = \{B, D\}$. Observe que o grau do vértice B é $d(B) = 3$.

Proposição 7. *Em todo grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.*

Demonstração. Seja G um grafo arbitrário. Note que podemos contruir G adicionando suas arestas uma a uma. Obsevaremos as paridades dos graus dos vértices de G em cada etapa dessa construção. Considere G' o grafo obtido através da remoção de todas as arestas de G. Assim, G' possui todos os vértices de G e nenhuma aresta. Vamos reconstruir G adicionando cada uma de suas arestas. Todos os vértices de G' possuem grau 0 (zero), portanto o número de vértice com grau ímpar é par. Em uma determinada etapa da nossa contrução, ao ligarmos dois vértices v e w por uma aresta e de G temos três possibilidades:

1. v e w possuem grau par: nesse caso ao adicionar e, os vértices v e w passam a ter grau ímpar. Logo o número de vértices de grau ímpar aumenta em dois.

2. v e w possuem grau ímpar : nesse caso ao adicionar e, os vértices v e w passam a ter grau par. Assim, o número de vértices de grau ímpar diminui em dois.

3. v e w possuem grau ímpar e par respectivamente: nesse caso v passa a ter grau par e w passa a ter grau ímpar. Nesse caso, o número de vértices de grau ímpar permanece igual.

Desse modo, em cada etapa da nossa construção a paridade do número de vértices de grau ímpar não se altera. Assim, concluímos que G possui quantidade par de vértices de grau ímpar. $\square$

Proposição 8. *A soma dos graus de todos os vértices em um grafo é duas vezes o número de arestas.*

Demonstração. Ao somarmos os graus de todos os vértices de G, cada aresta e de G é contada duas vezes. De fato, se e conecta v e w então a aresta e é contada quando adicionamos o grau de v e quando adicionamos o grau de w. Disso segue o resultado. $\square$

1.1 Caminhos, Ciclos e Conectividades

Definição 9. Dizemos que um grafo G é *vazio* se G possuir qualquer número de vértices e nenhuma aresta.

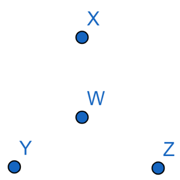

Figura 2 – Um exemplo de grafo vazio

Definição 10. Um grafo será chamado *completo* se cada par de vértice está conectado a uma aresta.

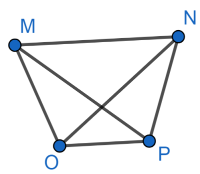

Figura 3 – Um exemplo de grafo completo

Definição 11. Passeio é uma sequência finita $P = v_0, v_1, ..., v_k$ de vértices, tais que v_{i-1} e v_i estão conectados por arestas para todo $i = 1, ..., k$.

Definição 12. Um passeio é fechado se $v_0 = v_k$, $k \geq 3$.

Exemplo 13. A sequência $MOPNOPM$ é um passeio no grafo da figura 1.1.

Definição 14. Um *ciclo*, é definido como um passeio que repete apenas os vértices v_0 e v_k.

Definição 15. Um *caminho* é um passeio, que não repete nenhum vértice.

Observe que um caminho $v_1v_2...v_n$ define um grafo com vértices v_1, v_2,...,v_n e arestas v_1v_2, v_2v_3,...,$v_{n-1}v_n$.

Definição 16. Um grafo é *conexo* se, para todo par de vértices $u, v \in G$, existe um caminho de u a v em G.

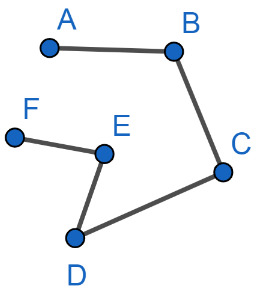

Figura 4 – Um exemplo de passeio

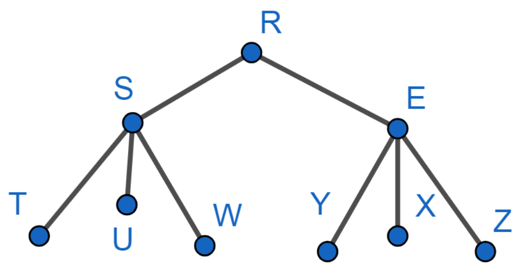

Figura 5 – Um exemplo de árvore

Definição 17. Um grafo G é chamado de árvore, se G for conexo e não possuir nenhum ciclo.

Lema 18. *Se G é um grafo conexo que contém um ciclo C. A remoção de qualquer aresta de C resulta em um grafo conexo.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo que contém um ciclo C. Assim, cada par de vértices está conectado por um caminho. Para mostrarmos que a remoção de qualquer aresta de G resulta em um grafo conexo teremos 2 casos:

1) O caminho usa a aresta do ciclo de u a v.

Se considerarmos um caminho uv e removermos uma aresta pertence de C, por C ser um ciclo, temos que G possui outro caminho de u a v.

2) O caminho não usa a aresta do ciclo de u a v.

Se considerarmos um caminho de u a v e removermos uma aresta e que não pertence a este caminho, então a remoção de e não desconecta u e v

Então a remoção de qualquer aresta do ciclo C resulta em um grafo conexo.

□

Teorema 19. *Um grafo G é uma árvore se e somente se é conexo, mas a remoção de qualquer de suas arestas resulta em um grafo desconexo.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja G arvore. Vamos mostrar que a remoção de qualquer aresta torna G desconexo.

Como G é árvore temos que G é conexo. Suponha que ao retirarmos uma aresta uv de uma árvore G, o grafo G' obtido através dessa remoção é conexo. Então em G' tem um caminho P que conecta u e v. E se colocarmos a aresta uv de volta, teremos um ciclo e isso contradiz nossa hipótese de G ser árvore.

$\Leftarrow$ Suponha que G é conexo mas a remoção de qualquer aresta torna G desconexo. Pela hipótese temos que G é conexo, assim basta mostrarmos que G não possui ciclos. Suponha que G possua um ciclo C e em seguida, retire de qualquer aresta de C, (pelo lema 21) obtemos um grafo conexo, mas isso contradiz a nossa hipótese.

□

Teorema 20. *Um grafo G é uma árvore se e somente se ele não contém nenhum ciclo, mas a adição de qualquer nova aresta cria um ciclo.*

Demonstração. $\Rightarrow$

Suponha G árvore e que adicionaremos a G a aresta uv, chamando este novo grafo de G'. Como G é conexo existirá um caminho em G, $u = v_0v_1 \cdots v_n = v$ que liga u a v. Assim em G', $u = v_0v_1 \cdots v_n = v$ é um ciclo.

$\Leftarrow$ Suponha que G não possui ciclos, mas a adição de qualquer aresta gera ciclos. Para mostrar que G é árvore, basta mostrarmos que G é conexo. Considere dois vértices u e v em G. Adicionando umam aresta uv a v em G construimos um ciclo $uv_0v_1 \cdots v_nu$ e se removermos a aresta uv temos um caminho $v_0v_1 \cdots v_nu$ em G de u até v.

□

Teorema 21. *Toda árvore com pelo menos 2 arestas tem pelo menos dois vértices de grau 1.*

Demonstração. Dado um grafo G, queremos encontrar um vértice de grau 1. Iremos construir em G um passeio da seguinte forma

Escolha uma aresta $e = v_1v_2$ em G e assim, forme o passeio $P = v_1v_2$.

Se $g(v_2) = 1$, então encontramos v_2 sendo o vértice de grau 1.

Caso não seja, escolhe um vértice v_3 adjacente a v_2 diferente de v_1. Assim, teriamos o passeio $v = v_1v_2v_3$.
Continuando com esse procedimento até acharmos um vértice de grau 1.

Note que, esse procedimento termina, porque na pior das hipóteses, P percorrerá todas as arestas de G e nesse caso G seria um passeio fechado, e por conseguinte teriamos um ciclo e como G é uma árvore temos um absurdo.

Para concluir note que se esse procedimento termina no vértice v_n, então não é possível obter um vértice v_{n+1} em G adjacente a v_n diferente de v_{n-1}. Isso nos garante que $g(v_n) = 1$.

Para obtermos o segundo vértice de grau 1, repitimos o procedimento descrito anteriormente iniciando no vértice de grau 1 já encontrado.

□

Definição 22. O procedimento de crescimento de árvore é definido em duas etapas:

Etapa 1: Seja G um grafo vazio com um vértice.

Etapa 2: Repita o que se segue um número finito de vezes: crie um novo vértice em G e conecte-o por uma nova aresta a qualquer vértice de G e obteriamos um grafo qualquer G e seguimos o procedimento conectando esse grafo a uma nova aresta.

Teorema 23. *Todo grafo obtido pelo procedimento de crescimento-de-árvore(PCA) é uma árvore, e toda árvore pode ser obtida dessa maneira.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução no número n de vértices que toda árvore pode ser obtida utilizando o procedimento de crecimento de árvore. Se $n = 1$ a árvore pode ser obtida com uma etapa do procedimento. Suponha por hipótese que toda árvore com n vértices pode ser obtida pelo PCA. Considere uma árvore G com $n + 1$ vértices. Existe em G um vértice v com grau 1. Remova esse vértice v de G e consequentemente removemos a única aresta uv que conecta v a um vértice de G. Assim, obtemos uma árvore G', pois G' não possui ciclos, e G' é conexa, desse modo, por hipótese de indução G' pode ser obtido pelo PCA. Fazendo mais uma etapa do PCA adicionamoso vértice v e a areta uv ao grafo G', reobtendo assim o grafo G. Dessa forma, G pode ser obtido usando o PCA.

Iremos começar com um vértice qualquer, e podemos obter um grafo G' através um vértice de G, então G' é uma árvore. Pela definição de árvore, G' é conexo, e além disso quaisquer 2 vértices podem ser conectados por um caminho de G, enquanto outro vértice pode ser conectado da mesma forma. E além disso, G não possui ciclo e todos os vértices possuem grau 1 e nenhum ciclo pode passar pelos vértices mais de uma vez o que vértices daria um ciclo que foi construido como árvore.

Em seguida, considere a construção das árvores dessa maneira. Usaremos indução para provar sobre o número de vértices. Começaremos por 1 vértice, ou seja, é daí que a árvoré irá começar. Suponha que G é uma árvore com pelo menos 2 vértices e pelo teorema 17 temos que tem um vértice de grau 1. Seja u o vértice de grau 1, remova u de G com a aresta de extremidade de v para obter um grafo G'. Assim, temos que G' é uma árvore, pois G' é conexo, visto que quaisquer dois vérties podem ser ligados por um caminho em G, e esse caminho pode passar pelos vértices visto que possuem grau 1. Dessa forma, esse caminho também é um possível caminho em G que foi contruído em particular por G'.

Vamos mostrar que todo grafo obtido pelo PCA é árvore. Vamos proceder por indução no número n de etapas do PCA. Se $n = 1$ então G possui um vértice e nenhuma aresta. Assim, G é árvore. Suponha por hipótese de indução que todo grafo construído com n etapas do PCA é árvore. Seja G um grafo construido com $n+1$ etapas do PCA, quando finalizarmos a n-ésima etapa o grafo resultante G' é árvore. Ou seja, G' é conexo e não possui ciclos. Executando a etapa $n+1$ adicionamos um novo vértice v a G' e conectamos v a algum vértice u de G'. Desse modo, obtemos G. Afirmamos que G é conexo. Considere dois vértices v_1 e $v_2 \in G$. Temos 2 casos:

1. Se $v_1 \in G'$ e $v_2 \in G'$. Então temos que existe um caminho de v_1 a v_2 pois G' é conexo
2. Se $v_1 \in G'$ e $v_2 = v$. Como G é conexo existe caminho $v, u, u_1, \cdots, u$ em G'. Daí, $v, u_1, \cdots, u, v$ é caminho de v_1 até v. Assim, G é conexo. Do mesmo modo, G não tem ciclos pois G' não possui ciclos e qualquer ciclo em G deveria conter o vértice v que possui grau 1, o que seria um absurdo.

□

1.1.1 Um exemplo para utilizar grafos com o objetivo de armazenar informações:

No século XX houve uma liberação nos mercados mundiais das companhias aéreas que entraram em um ambiente competitivo. Atualmente existem 3 linhas aéreas Oneworld, Star Alliance e a Sky Team que são grandes alianças aéreas, por isso, com o tempo, elas tendem a aumentar as suas redes, respeitando as imposições dos governos locais, viabilizando aumentar o tráfego nas rotas e alcançar maior visibilidade da sua marca mundialmente. E no Brasil, uma grande companhia aérea é a LATAM com a maior quantidade de voos aéreos internacionais.

Para podermos compreender esse aspecto aéreo, iremos explicar através de um exemplo, o qual será criado uma companhia aérea fictícia para mostrar que de fato todas as companhias aéreas utilizam a teoria dos grafos por trás de cara conexão nos aeroportos.

Observe a cidade A, tem uma conexão com todas as outras. Ou seja, saindo de A, é possível viajar para qualquer outra cidade que possua alguma conexão.

Exemplo: Considere que, uma agência de companhia área pretende disponibilizar um catálogo com as rotas que saem das cidades A, B, C, D, E, F, P, H, I, J, L, K, M para seus clientes, com o objetivo de facilitar e agilizar no processo de vendas.

Os vôos que existem entre as cidades são os seguintes:

1. Estando na cidade A, é possível realizar vôos para as cidades B, C, D, E, F, P, H, I, J, K, L, M.
2. Estando na cidade B, é possível realizar vôos para a cidade A, mas podemos fazer conexões para outras cidades após de chegarmos na cidade A.
3. Estando na cidade C, é possível realizar vôos para as cidades A e E, mas também podemos fazer conexões para outras cidades após chegarmos na cidade A.
4. Estando na cidade D, é possível realizar vôos para a cidade A, mas também podemos fazer conexões para outras cidades após chegarmos na cidade A.
5. Estando na cidade E, é possível realizar vôos para as cidades A, C e F, mas também podemos fazer conexões para outras cidades após chegarmos na cidade A.
6. Estando na cidade F, é possível realizar vôos para as cidades A e E, mas também podemos fazer conexões para outras cidades após chegarmos na cidade A.
7. Estando na cidade P, é possível realizar vôos para as cidades A e K, mas também podemos fazer conexões entre as cidades após chegarmos na cidade A.
8. Estando na cidade H, é possível realizar vôos para as cidades A, I e J, mas também podemos fazer conexões entre as cidades após chegarmos na cidade A.
9. Estando na cidade I, é possível realizar os vôos para as cidades A, H e L, mas também podemos fazer conexões entre as cidades após chegarmos na cidade A.
10. Estando na cidade J, é possível realizar os vôos para as cidades A, H, e K, mas também podemos fazer conexões entre as cidades após chegarmos na cidade A.
11. Estando na cidade K, é possível realizar os vôos para as cidades A, J e P, mas também podemos fazer conexões eentre as cidades após chegarmos na cidade A.
12. Estando na cidade L, é possível realizar os vôos para as cidades A e I, mas também podemos fazer conexões entre as cidades após chegarmos na cidade A.
13. Estando na cidade M, é possíve realizar o vôo para a cidade A, mas podemos fazer conexão entre as cidades após chegarmos na cidade A.

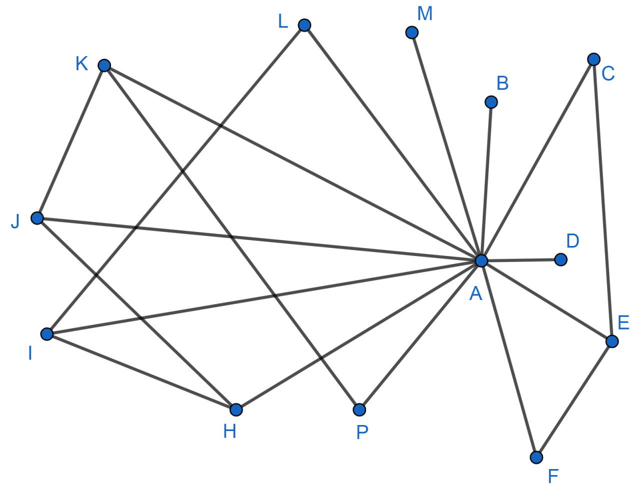

Figura 6 – Grafo que armazena os vôos da compahia aérea

Se considerarmos as arestas sendo os vôos e as cidades sendo os vértices, temos:

Ou seja, dessa forma, podemos analisar que existem algumas cidades que fazem algumas conexões para outras, mas também existe uma cidade que faz conexão com todas as outras. É comum compahias aereas escolherem um aeroporto para operarem vôos para muitos destinos. Isso minimiza custos e facilita o processo de conexão entre vôos. Esse exemplo ilustra o potencial que os grafos possuem para armazenar e manipular informação.

2 Colorindo mapas e grafos

Neste capítulo, trataremos do problema da coloração mapas e grafos. O nosso intuito é expor o teorema das cinco cores.

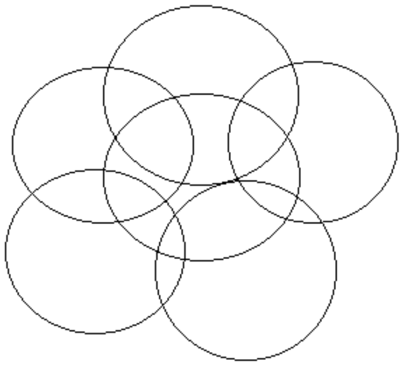

Figura 7 – Grafo n-colorível

No próximo resultado mostraremos que é possível colorir um grafo n-colorível.

Teorema 24. *As regiões formadas por n círculos no plano podem ser coloridas com vermelho e azul de modo que quaisquer duas regiões delimitadas pelos círculos que compartilham um arco fronteiriço comum devem ser coloridas diferentemente.*

Demonstração. Iremos proceder por indução no número de círculos.

Primeiramente, observe que o resultado vale para $n = 1$, uma vez que um círculo divide um plano em duas regiões, ou seja, a parte externa e interna do círculo e assim, podemos pintar uma região de vermelho e outra de azul.

Suponha agora que o resultado vale para um certo $n > 1$. Desenhe $n + 1$ círculos e em seguida escolha um círculo qualquer e o denote por D. Remova esse círculo por um momento. Assim, temos n círculos, que podem ser pintados com as cores vermelho e azul, de modo que as regiões que possuem arco fronteiriço em comum, possuam cores diferentes. Colocando o círculo D de volta vamos colorir o mapa da seguinte maneira: colorimos as regiões fora de D do mesmo jeito de antes e depois colorimos as regiões de dentro de D , trocando o vermelho por azul e vice-versa. Dessa forma, conseguimos obter a coloração desejada. De fato, considere um arco D delimitado pela interseção entre os n círculos. Temos 3 casos a considerar:

1. O arco está fora de D. Ou seja, as cores que estão dentro e fora deste arco são diferentes, uma vez que, as cores não se alteraram na nova coloração.

2. O arco está dentro de D. Isto é, as cores de dentro e fora deste arco são diferentes, já que ambas mudaram após a nova coloração.

3. O arco pertence a D. Dessa maneira, as cores de dentro e fora de D eram iguais na coloração antiga. Contudo, como trocamos apenas a cor da parte de dentro de D as cores são diferentes na nova coloração.

$\square$

Teorema 25. *Considere um mapa formado pelas interseções de n círculos. Se assumirmos que a cor da região externa seja azul, podemos descrever qual a cor de uma certa região R, sem precisar colorir a figura inteira da seguinte forma:.*

1. *Se R está dentro de um número par de círculos, podemos colorir de azul.*

2. *Se R está dentro de número ímpar de círculos, podemos colorir de vermelho.*

Demonstração. Vamos proceder por indução. Se $n = 1$, a região dentro do circulo será vermelha e o resultado vale. Suponha que o resultado vale para qualquer região delimitada por n círculos. Adicionando mais um circulo D, vemos que a paridade do número de círculos que contém uma região não mudam fora de D e mudam dentro de D. Portanto o resultado é válido. $\square$

2.1 Colorindo grafos com duas cores

Definição 26. Seja $G = |V, A|$ um grafo e $C_n = \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n\}$ um conjunto de n cores. Dizemos que um grafo é n- coloível se existir tal função $f : V \to C_n$ de modo que os vértices adjacentes possuam cores diferentes.

Dizemos que um grafo G é n-colorível se podemos atribuir uma das n cores para colorir G.

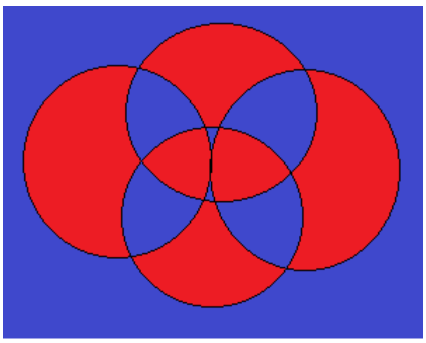

Figura 8 – Grafo 2-colorível

Teorema 27. *Um grafo é 2-colorível se e somente se ele não contém ciclo ímpar.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponha que o grafo contém um ciclo ímpar $C = v_1 ... v_{2n+1}$. Se colorimos o vértice v_1 do ciclo de branco, temos que colorir v_2 de preto, o vértice v_3 de branco e assim por diante. Note que o vértice v_{2n+1} necessariamente é colorido de branco. Como v_1 também foi colorido de branco vemos que uma 2-coloração é impossível.

$\Leftarrow$ Faremos a coloração da seguinte maneira: Escolhemos um vértice a e o pinte de preto. Pinte todos os vértices adjacentes ao vértice a de branco. Agora pinte todos os vizinhos dos vértices brancos que ainda não foram coloridos de preto. Para provar que esse procedimento fornece uma 2-coloração precisamos mostrar que dois vértices coloridos com a mesma cor não são adjacentes. Suponha por absurdo que existam dois vértices adjacentes u e v pintados com a mesma cor. Podemos supor sem perda de generalidade que esses vértices foram coloridos com a cor branca. Seja u_1 um vértice adjacente a u que será pintado de preto, que por sua vez é vizinho de u_2 que será pintado de branco e assim sucessivamente. Desse modo, podemos considerar um caminho P de u até o vértice inicial a. Analogamente, existe um caminho Q de v até a. Vamos percorrer o caminho Q de v até encontrarmos P pela primeira vez, e depois seguiremos o caminho P até o vértice u. Concatenando esse caminho com a aresta uv obtemos um ciclo. O observe que ao longo do caminho vamos alternando as cores, porém os vértices u e v estão pintados de preto, ou seja, esse ciclo é ímpar, o que é uma contradição. Se considerarmos o grafo G conexo, terminamos a demonstração pois podemos colorir todos os vértices. Caso o grafo G não seja conexo, iremos realizar o mesmo procedimento em todo o componente conexo e assim, teriamos uma 2-coloração em todo o grafo. E dessa forma, provamos o teorema.

□

Teorema 28. *Se todo vértice em um grafo tem grau no máximo d, então o grafo pode ser colorido com $d + 1$ cores.*

Demonstração. Utilizaremos o Princípio da Indução para está prova. Começaremos com grafos pequenos, ou seja, se o grafo tem menos que $d + 1$ vértices, então podemos colorir com $d + 1$ cores, pois temos que todo vértice poderá obter uma cor diferente das pintadas anteriormente. Suponha que o resultado que vale para um grafo com menos de n vértices. Considere v um vértice do grafo G, e removemos de G esse vértice de v e as suas arestas incidentes. Assim , o grafo G terá $n - 1$ vértices e temos que o o maior grau que pode se obter nesse grafo G é d. Por consequência, podemos colorir de n cores, pela hipótese de indução. Como v tem no máximo d vizinhos, na pior das hipóteses podemos colori-lo com a $d + 1$-]esima cor. Assim, completamos a prova de indução.

□

2.2 Coloração de mapas e o Teorema das Quatro Cores

Para os grafos planares, o melhor resultado que temos atualmente é o Teorema das Quatro Cores cuja demonstração foi realizada pelos americanos Kenneth Appel e Wolfgang Haken, em 1976, para realizar os cálculos deste teorema, contaram com o auxílio do melhor computador da época e foi preciso de cerca de 1200 horas. A prova foi de grande importância para a comunidade matemática, que ficou encantada com tal demonstração. Porém este resultado gerou polêmica pelo fato de não ser possível a sua verificação sem o computador. Os calcúlos eram imensos e essa tarefa acabou sendo humanamente impossível. Em 1944, houve uma redução considerável nos cálculos, quando Paul D. Seymour, Niel Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas, tentaram buscar de fato, uma nova demonstração ao invés de tentar melhorar a demonstração de Appel e Haken. Após a redução dos cálculos, o teorema foi resolvido com apenas um dia de operações computacionais e não foi possível obter tal demonstração sem o uso do computador. Foge ao escopo deste trabalho demonstrar o Teorema das quatro cores. Entretanto está ao nosso alcance provar que todo grafo planar pode ser colorido com 5 cores.

Definição 29. Um grafo é dito planar se podemos representar seus vértices por pontos diferentes no plano, e suas arestas por curvas conectando os vértices, de modo que essas curvas não se interesectem (a não ser que duas arestas tenham extremidades em comuns, caso em que as duas curvas correspondentes terão esses pontos em comum).

Os próximos resultados serão importantes para a demonstração do teorema das 5 cores:

Definição 30. Seja G um grafo planar. As faces de G são as regiões do plano delimitadas pelos vértices e arestas de G

Um resultado muito interessante é a validade da Fórmula de Euler para Grafos Planares.

Teorema 31 (Fórmula de Euler)**.** *Seja G um grafo planar conexo. Seja a o número de arestas de G, v o número de vértices de G e f o número de faces de G. Então*

$$f + v = a + 2$$

Demonstração. Para essa prova iremos considerar f o número de faces, v o número de vértices e a o número de arestas. O interior de cada ciclo do grafo corresponde a uma face. A remoção de uma aresta de um ciclo diminui o número de faces de G em 1. Retetindo esse procedimento $f - 1$ vezes obtemos um grafo G_1 conexo e que não possui ciclos. Logo G' é arvore.

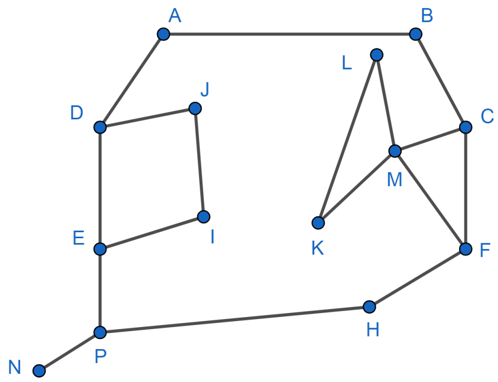

Figura 9 – Grafo com barragens e torres de observação

Note que G' possui v vértices e $v-1$ arestas. Como removemos de G $f-1$ faces e $f-1$ arestas temos que o número de arestas de G é

$$e = v - 1 + f - 1 = v + f - 2$$

Assim o resultado está provado.

□

Lema 32. *Um grafo planar sobre n vértices tem no máximo $3n-6$ arestas.*

Demonstração. Suponha que um grafo G tenha n vértices, a arestas e f faces. Pela fórmula de Euler, temos que $n + f = a + 2$. Através dessa fórmula, obtemos outra relação entre esses números contanto arestas face-por-face. Cada face tem pelo menos três arestas sobre sua fronteira, portanto contamos pelo menos $3f$ arestas. Toda aresta é contada duas vezes, portanto o número de arestas é pelo menos $\frac{3f}{2}$. Assim, $f \leqslant \frac{2}{3}e$. E substituindo na fórmula de Euler, temos

$$e + 2 = n + f \leqslant n + \frac{2}{3}e$$

Logo,

$$e + 2 \leqslant n + \frac{2e}{3}$$
$$e - \frac{2e}{3} \leqslant n - 2$$
$$\frac{1e}{3} \leqslant n - 2$$
$$e \leqslant 3n - 6$$

□

Lema 33. *Todo grafo planar tem um vértice de grau no máximo cinco.*

Demonstração. Assim, vamos assumir que o grafo G não tem um vértice de grau cinco no máximo. Ou seja, todos os vértices de G possuem grau pelo menos 6. Iremos contar vértice a vértice, e teremos pelo menos $6n$ arestas. Cada aresta é contada duas vezes, portanto o número de arestas é pelo menos $3n$, o que contradiz o lema anterior. □

Teorema 34. *Todo grafo planar pode ser colorido com cinco cores.*

Demonstração. Considere G um grafo planar com n vértices, iremos usar a indução sobre o número de vértices, assumimos que um grafo G com menos de n vértices é 5-colorível e além disso, sabemos que o grafo G tem um vértice com no máximo grau 5. Se v tem grau 4 ou até menos, então podemos remover um vértice v do grafo G e colorir o grafo remanescente com cinco cores. O vértice tem no máximo 4 vértices adjacentes, então podemos encontrar uma cor que seja diferente para todos os vértices.

Se v possui grau 5 então não está claro se a coloração obtida com a hipótese de indução usa 5 cores diferentes para os cinco vértices vizinhos. Vamos usar o seguinte artifício: após a remoção de v, identifique dois vértice u e w adjacentes a v. Chamaremos esse novo vértice de uw. Toda aresta incidente a u ou w será incidente ao vértice uw depois de unir u e w.

Se existir um vértice p conectado a ambos u e w que depois da junção se tornou um vértice conectado a uw por duas arestas. Então remova uma dessas arestas e o grafo remanescente ainda é planar. A remoçao dessa aresta não gera problema pois vamos colorir u e v com a mesma cor e a cor de p será diferente da cor comum de u e w.

O grafo obtido após a remoção de v e identificação de u e w é planar e tem menos de n vértices. Dessa forma, podemos colorir com cinco cores, pela nossa hipótese de indução. Ao separarmos novamente u e w, obtemos uma coloração com cinco cores de todos os vértices de G, exceto v. Como juntamos esses dois vértices uw, eles possuem a mesma cor. Portanto, se considerarmos que v tem 5 vizinhos e dois deles possuem a mesma cor, daí uma das cinco cores não ocorrem entre os vizinhos de v, podendo ser usada como a cor de v. Isso termina a prova.

□

3 Grafos Eulerianos

Neste capítulo, apresentaremos o problema das 7 pontes de Königsberg que foi o marco incial da Teoria do Grafos bem como a solução dada por Leonard Euler. Em seguida, definiremos e caracterizaremos os grafos eulerianos.

A cidade de Königsberg era dividida em quatro distritos por braços do rio que eram conectados por 7 pontes.

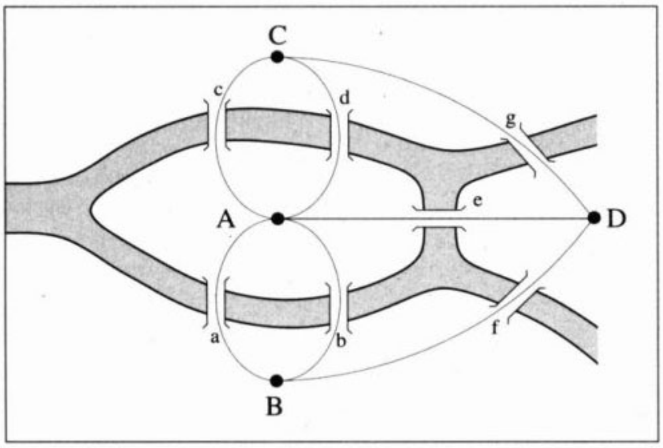

Figura 10 – Representação das sete ponte de Königsberg como um grafo

O *O problema das 7 pontes de Königsberg* consistia no seguinte questionamento: é possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida?

Em 1736 Leonhard Euler forneceu uma solução a este enigma que inspirou a criação da Teoria dos Grafos.

A seguir reproduziremos o argumento de Euler para a não existência de tal passeio. Podemos interpretar este problema como um grafo vendo os distritos como vértices e as pontes como arestas. (Ver figura 10)

Se supormos que tal passeio existe e que não começa no vértice A, então em algum momento o passeio visita o vértice A usando uma aresta para chegar até A e outra para deixar A. Eventualmente o passeio visita A novamente utilizando duas arestas. Agora resta somente uma aresta com extremidade em A não visitada. Então o passeio só pode ter minar em A. Utilizando um argumento similar podemos obter a mesma conclusão para os vértices B, C e D. Como o passeio deve iniciar em um vértice e terminar em outro obtemos uma contradição. Tal passeio é impossível. Essa discussão motivou o conceito de passeios eulerianos.

Dizemos que um grafo possui *passeio euleriano* se for possível obter um passeio que visite todas os vértices sem repetir as arestas.

Definição 35. Um grafo G é dito ser euleriano se há um ciclo em G que contenha todas as suas arestas. Este ciclo é dito ser um ciclo euleriano.

Definição 36. Um grafo possui *passeio euleriano* se for possível obter um passeio que visite todas os vértices sem repetir as arestas.

Teorema 37.

1. *Se um grafo conexo tem mais que dois vértices com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.*

2. *Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.*

3. *Se um grafo conexo tem 0 ou 2 vértices de grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano.*

Demonstração.

1. Considere um grafo G com um vértice v de grau ímpar. Note que um passeio euleriano P em G tem que começar ou terminar em v. De fato, suponha que P não incia em v. Cada visita de P a v usa duas arestas adjacentes de v. Então em algum momento só restaria uma aresta de v a ser visitada e o passeio teria de acabar em v. Se G tem mais de dois vértice de grau ímpar então não pode existir passeio euleriano em G pois o passeio teria que começar em um vértice de grau ímpar e terminar em outro. E assim G teria vértices de grau ímpar tal que P não inicia nem termina neles. O que é um absurdo.

2. Inicialmente suponha que todos os vértices de G possuem grau par. Considere u um vértice qualquer de G. Considere em G um passeio fechado começando e terminando em u que utiliza todas as arestas apenas uma vez. Esse passeio existe e podemos tomar um passeio consistindo em apenas do vértice u. Considere W um passeio fechado mais longo começando em u, que usa todas as arestas apenas uma vez. Suponha que W não seja um passeio euleriano, então existe uma aresta e com extremidades em p e q que não é usada por W. Como G é conexo, podemos tomar um caminho C de p a u. Seja r o primeiro vértice do caminho C que também está no passeio W. Seja $e' = sr$ a aresta do caminho C imediatamente anterior a r. Então W não passa por e', já que não passa por s e podemos substituir e por e', que tem uma extremidade sobre W.
Portanto, seja e uma aresta não utilizada por W, mas que tem uma extremidade p utilizada por W. Agora, construiremos um novo passeio W' começando em p. Começando por e, o passeio continua conforme o desejado, mas não podemos usar

as arestas de W e não podemos utilizar qualquer aresta duas vezes. Dessa forma, em algum momento o passeio W' não poderá mais ser continuado. Seja v um vértice tal que o passeio W' não pode ser continuado. Suponha $v \neq p$. O vértice v tem grau par, como W usa um número par de arestas incidentes a v, temos um número ímpar de arestas que não são arestas nem de W e nem de W'. Assim, o único vértice sem saída é o vértice p e W' é um passeio fechado.

Desse modo, começamos um passeio em u, seguimos W até p. Então seguimos W' direto para voltar a p e seguimos W até voltar a p e por fim seguimos até o final em v. Esse novo passeio W' passa por todas as arestas apenas uma vez e é um passeio mais longo do que W, o que é uma contradição.

3. Se G tem dois vértices de grau ímpar u e v, adicione uma aresta uv ao grafo G para formar um novo grafo G'. Note que todos os vértices de G' possuem grau par. Assim G' possui um passeio Euleriano terminando na aresta uv. Removendo a aresta uv obtemos um passeio Euleriano em G.

□

4 O Problema do Carteiro Chinês

O problema do Carteiro Chinês consiste em encontrar um percurso mínimo e fechado que visite cada aresta do grafo apenas uma vez. Esse problema está relacionado com o problema das 7 pontes de Königsberg. Mesmo não sendo possível encontrar um caminho euleriano para todos os grafos, a resolução do problema do Carteiro Chinês se baseia essencialmente na ampliação do conjunto de arestas de um grafo de modo a obter um grafo euleriano.

Definição 38. Dado um grafo G suponha que temos uma função C que associa cada aresta a de G a um número $C(a)$. Diremos que $C(a)$ é o custo da aresta a.

Definição 39. O custo de um passeio P é somatório dos custos das arestas visitadas por P.

Definição 40. Um passeio é dito *pré-euleriano* se utiliza todas as arestas pelo menos uma vez.

O problema do Carteiro Chinês consiste em encontrar um passeio pré-Euleriano de custo mínimo em um grafo conexo.

Se G é grafo euleriano a solução do problema do carteiro Chinês é dada pelo passeio euleriano que G admite. Para encontrar tal passeio podemos utilizar a demonstração do item 2) do teorema 37 para construir um algoritmo que tem por entrada um grafo euleriano G e por saída um passeio euleriano em G.

De fato, podemos construir um passeio P partindo de um vértice v qualquer do grafo e escolhendo arbitrariamente uma aresta nunca visitada por P até passar por todas as arestas de G. Se existem arestas não visitadas, partimos de algum outro vértice desse caminho fechado e recomeçamos o processo até visitar todas as arestas do grafo. Depois combinamos os passeios fechados, de forma a cobrir todo o grafo obtendo então um passeio fechado euleriano. Esse algoritmo é conhecido como Algoritmo de Hierholzer.

Se o grafo G não for Euleriano não podemos aplicar o Algoritmo de Hierholzer. Para contornar esse problema, transformaremos o grafo não-euleriano G em um grafo euleriano. Adicionaremos novas arestas ao grafo original de forma que todos os vértices de grau ímpar se tornem vértices de grau par. Tais arestas representam os eventuais percursos repetidos de custo mínimo entre pares de vértices de grau ímpar (ver figura do exemplo do grafo). Assim temos o seguinte algoritmo para o problema do Carteiro Chinês.

Entrada: Um grafo G com uma função custo definida em suas arestas.

1. Passo 1 Liste todos os vértices de G de grau ímpar.
2. Passo 2 Liste todos os pareamentos de vértices ímpares em G.
3. Passo 3 Para cada pareamento de vértices de grau ímpar em G encontre as arestas que conectam os pares de vértices de grau ímpar com peso mínimo. Os pesos das arestas adicionadas correspondem aos pesos dos caminhos mínimos ligando cada par de vértices. Para esse passo, utilizaremos a proposição 7.
4. Passo 4 Encontre o pareamento tal que a soma dos pesos dos caminhos mínimos é minimizada.
5. Adicione as arestas encontradas no passo anterior obtendo um grafo G' que só possui vértices de grau par.
6. Encontre um passeio Euleriano em G'. Note que a rota de custo mínimo é dada pela soma dos custos das arestas de G'

Saída: Uma solução para o Problema do Carteiro Chinês em G.

Aplicaremos o algoritmo acima para resolver o problema do carteio Chinês no seguinte grafo:

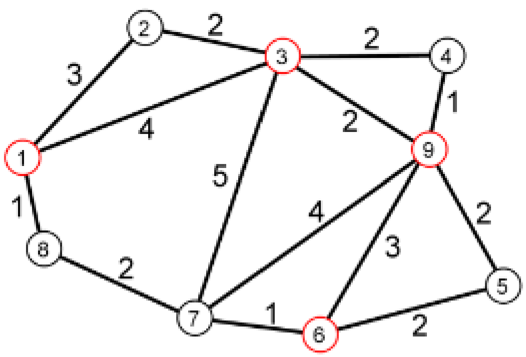

Figura 11 – Grafo não-Euleriano

1. Passo 1 Lista de vértices de grau ímpar: 1,3,6,9.
2. Passo 2 Lista de pareamentos de vértices ímpares em G:

$$[[(1,3),(6,9)],[(1,6),(3,9)],[(1,9),(3,6)]]$$

3. Pareamento 1:

O caminho mínimo que liga os vértices 1 e 3 é $C_1 = (1, 3)$ que possui custo 4. O caminho mínimo que liga os vértices 6 e 9 é $C_2 = (6, 9)$ que possui custo 3.

Pareamento 2:
O caminho mínimo que liga os vértices 1 e 6 é $C_3 = 1, 8, 7, 6$ que possui custo 4. O caminho mínimo que liga os vértices 3 e 9 é $C_4 = 3, 9$ que possui custo 2.

Pareamento 3:
O caminho mínimo que liga os vértices 1 e 9 é $C_5 = 1, 3, 9$ que possui custo 6. O caminho mínimo que liga os vértices 3 e 6 é $C_6 = 6, 9$ que possui custo 5.

1. Passo 4 Analisando o item anterior obtemos que o pareamento 2, dado por (1,6),(3,9) possui o menor custo.

2. Adicione a G as seguintes arestas: $e_1 = \{1, 6\}$ que corresponde ao caminho mínimo $D_1 = 1, 3, 6$ de custo 4 e $e_2 = \{3, 9\}$ que corresponde ao caminho mínimo $D_2 = 3, 6$ de custo 2 obtemos um grafo Euleriano G'.

3. Como G' é Euleriano podemos encontrar um passeio Euleriano em G' que fornece a seguinte rota de custo mínimo que passa por todas as arestas de G:

$$1, 2, 3, 4, 9, 3, 9, 7, 3, 1, 8, 7, 9, 5, 6, 7, 8, 1$$

5 Sequência didática

Neste capítulo temos como objetivo introduzir o conceito de grafo no ensino médio através de uma sequência didática dividida em 3 aulas de duas horas. A nossa metodologia pretende estimular a criatividade e a capacidade de investigação matemática dos estudantes.

Na aula 1, temos como objetivo introduzir os conceitos de grafos, aresta e vértice. Na aula 2, temos como objetivo introduzir os conceitos caminho, caminho fechado, passeio e passeio fechado. Na aula 3, o objetivo é introduzir o conceito ciclo, passeio euleriano e passeio semi-euleriano Utilizando o material de apoio do anexo A propomos atividades onde os estudantes desenharão alguns grafos e lidarão com os conceitos trabalhados informalmente. Em seguida, depois da aplicação da atividade, o professor deverá introduzir os conteúdos formalmente para que os alunos se familiarizem com as definições e comparem com a atividade feita.

1. **Tema:** O intuito é apresentar a noção de grafo e os elementos básicos que o compõem.
2. **Objetivos:** Introduzir as noções de grafos, vértices e arestas.
3. **Objetivo geral:** Explorar um grafo, analisando seus diversos vértices e arestas.
4. **Objetivo específico:** Introduzir o conceito de grafos.
    a) Compreender os conceitos básicos associados ao conceito de grafos.
    b) Identificar as diversas representações de um grafo.
5. **Conteúdo:**Grafos
6. **Desenvolvimento aula:**

    Para o início dessa aula, será necessário o anexo A para que os alunos possam usar criatividade para desenhar um grafo.

    a) No primeiro momento, será distribuído aos alunos o anexo A que os alunos desenhem o diversos grafo. (20 minutos)
    b) No segundo momento os alunos irão descobrir o que é um vértice e uma aresta. Ou seja, através do que eles construíram será possível identificar os vértices e arestas de cada aluno e nomeá-las. (20 minutos)
    c) Em seguida os alunos serão postos para identificarem as arestas e vértices construídos pelo mesmo. E o professor explicará informalmente e formalmente o que significa um grafo, vértice e aresta desenhando-as no quadro para que todos os alunos possam compreender e fixar o conceito. (45 minutos)

7. **Recursos Matériais:** folha A4, lápis de cor e quadro branco.

8. Avaliação: Será feita continuamente levando em conta diversos aspectos inerentes ao processo de ensino-aprendizagem. A avaliação ocorrerá em três eixos, o da produtividade, o conceitual e das atitudes:

   a) Participação/Atitudes - Contribuir para o bom desenvolvimento das aulas, não conversando desnecessariamente; - Portar todo o material necessário para as aulas de matemática;

   b) Verificação conceituada - Resolução das atividades exigidas pelo professor para identificações dos vértices e arestas.

Aula 2

1. **Tema:** O intuito é apresentar a noção de percurso em um grafo.

2. **Objetivos:** Introduzir as noções de passeio e caminho.

3. **Objetivo geral:** Explorar as possíveis maneiras de escrever um caminho e um passeio.

4. **Objetivos específicos:** Introduzir o conceito de caminho, caminho fechado, passeio e passeio fechado. Utilizando a atividade anterior como complemento.

   a) Compreender os conceitos de caminho, caminho fechado, passeio e passeio fechado que serão abordados durante a atividade;

   b) Visualizar o que há de diferente na atividade atual com a anterior;

5. **Conteúdo:** Grafos

6. **Desenvolvimento da aula:** A aula terá como objetivo utilizar os grafos produzidos na atividade da aula 1 para que os alunos possam identificar um caminho, um caminho fechado, um passeio e um passeio fechado de cores diferentes para que eles possam ter noção de que há uma diferença entre eles. Ou seja, os alunos irão construir o conceito sozinho a priori.

   a) No primeiro momento, os alunos ficarão livres para desenhar um caminho, caminho fechado, passeio e passeio fechado a partir do que eles têm conhecimento sobre grafo. (20 minutos)

   b) No segundo momento, o professor deverá explicar aos alunos a definição de cada tópico construído por eles. Assim eles podem compreender o que eles construíram e se construíram da maneira esperada. (20 minutos)

c) No terceiro momento, o professor deve mostrar que há uma variedade de grafos, pois alguns alunos podem surgir com tipos especiais de grafos que serão utilizadas posteriormente, como por exemplo, grafo completo e grafo vazio. O professor não deve falar diretamente o que é cada propriedade, para permitir que os alunos possam imaginar. (30 minutos)

7. **Recursos Matériais:** folha A4, lápis de cor e quadro branco.

8. **Avaliação:** Será feita continuamente levando em conta diversos aspectos inerentes ao processo de ensino-aprendizagem. A avaliação ocorrerá em três eixos, o da produtividade, o conceitual e das atitudes:

   a) Participação/Atitudes - Contribuir para o bom desenvolvimento das aulas, não conversando desnecessariamente; - Portar todo o material necessário para as aulas de matemática;

   b) Verificação conceituada - Resolução da atividade para conseguir identificar a diferença entre caminho e passeio.

Aula 3

1. **Tema:** Intuito é apresentar o conceito de ciclo, passeio euleriano e passeio semi-euleriano. Com o objetivo de compreender o conceito de grafos.

2. **Objetivos:** Introduzir o conceito de ciclo, passeio euleriano e passeio semi-euleriano.

3. **Objetivo Geral:** Compreender o conceito de ciclo, passeio euleriano e semi-euleriano.

4. **Objetivos específicos:** Introduzir o conceito ciclo, passeio euleriano e passeio semi-euleriano para que os alunos possam identificar qual a diferença entre eles.

5. **Desenvolvimento aula:** Para o início dessa aula, iriamos introduzir historicamente a teoria dos grafos e em seguida seria proposto aos alunos resolvessem o problema das 7 pontes.

   a) Será necessária o anexo A para que os alunos possam descobrir/explorar um ciclo, passeio euleriano e semi-euleriano.

   b) No primeiro momento, será distribuído aos alunos o anexo A para que os alunos possam tentar resolver o problema das 7 pontes de Königsberg. (25 minutos)

   c) No segundo momento os alunos após algumas tentativas, iram observar que não é possível realizar o passeio pelas 7 pontes, e nesse momento que ficará a cargo do professor demonstrar como fora a demonstração de Euler. E em seguida, após a demonstração cabe ao professor mostrar que esse passeio é semi-euleriano e assim os alunos poderão refletir sobre a diferença de cada definição/propriedade de grafos conhecida na atividade. (20 minutos)

d) Em seguida, os alunos poderão analisar se os grafos com as devidas propriedades se enquadram nas que eles criaram e caso não seja, o professor deve entregar uma nova folha para que os alunos possam reescrever o que fora realizado anteriormente para que eles possam comparar cada propriedade do grafo e perceber que há uma peculiaridade em cada definição dada. (15 minutos)

e) E por fim, os alunos iriam analisar as atividades que fora realizada em sala de aula e fazerem um resumo com as definições. Para finalizar a aula, será aplicado um jogo chamado PANEMIC, que trata exatamente de grafos. Ou seja, o intuito é mostrar aos alunos aplicações. (40 minutos)

   Estilo: Tabuleiro

   Tema: Doenças

   Nº de Jogadores: 2 a 4

   Regras do jogo: Em Pandemic os jogadores devem livrar o mundo de 4 doenças que se espalham rapidamente. No tabuleiro estão distribuídas as cidades e as doenças que afetam essas cidades. Cada doença tem uma área de atuação marcada pelas cores no tabuleiro. No jogo são utilizados 3 tipos de cartas: as de Cidades, as de Infeção, e as de Epidemia. Cartas de Cidades, além de representar as cidades no tabuleiro, podem ser usadas em ações dos jogadores. As de Infecção são usadas pelo Infestador, nome dado ao inimigo fictício que age contra os jogadores. Cartas de Epidemia causam a ruína dos jogadores, colocando muitas doenças pelo tabuleiro entre outras coisas. No início cada jogador recebe uma classe que pode ser Médico, Cientista, Pesquisador entre outras. Cada uma possui uma habilidade especial, que serão citadas mais a frente. Coloca-se um centro de pesquisa, utilizado para criar a cura das doenças, e os jogadores na cidade de Atlanta, localizada nos EUA. Também é posto no tabuleiro os marcadores de Infecção e de Surto em suas posições inicias. Agora os jogadores recebem uma quantidade de cartas de Cidade dependendo do número de participantes. O jogo inicia com o Infestador puxando 9 cartas de Infecção da pilha para gerar as doenças inicias. O Infestador, como tem ações pré-definidas, tem as mesmas realizadas pelos jogadores já que o jogo não vem com um robô para fazer o trabalho. As cartas de Epidemia são bastante perigosas e inevitáveis devido a maneira que são embaralhadas. Elas causam aumento no nível de infecção, gera mais doenças e re-embaralha cartas de infecção usadas na pilha. Em cada um dos seus turnos o Infestador pega cartas de Infecção, na quantidade indicada pelo marcador de Infecção, colocando um contador de doença nas cidades representadas. Quando uma cidade acumula 4 contadores é considerado um Surto. Nesse caso todas as cidades ligadas a ela recebem um contador da doença que gerou o Surto e deve avançar uma casa no marcador de Surto. Se o marcador atingir o nível máximo, os jogadores perdem. Caso haja falta de contadores de qualquer doença, por haver muitos deles no tabuleiro, os jogadores também perdem. Agora é a vez dos jogadores. Cada jogador tem o direito a 4 ações por turno. As ações variam entre movimento a criação de Centros de Pesquisa. Também é com essas ações que os jogadores devem criar as curas para as doenças. O jogo Pandemic tem regras de explicação grandes, mas são de fácil aprendizagem e aplicação.

6. **Recursos Materiais:** folha A4, lápis de cor e quadro branco.

7. **Avaliação:** Será feita continuamente levando em conta diversos aspectos inerentes ao processo de ensino-aprendizagem. A avaliação ocorrerá em três eixos, o da produtividade, o conceitual e das atitudes:

   a) Participação/Atitudes - Contribuir para o bom desenvolvimento das aulas, não conversando desnecessariamente; - Portar todo o material necessário para as aulas de matemática;

   b) Verificação conceituada - Resolução das atividades exigidas pelo professor em sala de aula para a identificações do ciclo, passeio euleriano e semi-euleriano.

Referências

1 Lovasz, L. ; Pelikn, J.; Vesztergombi, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Matemática Discreta. 2013.

2 J. Samuel . Grafos - Uma introdução. Disponível em:http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf

3 ALMEIDA, Lucas Amoril. Teoria dos Grafos e o Problema do Carteiro Chinês. 2018. TCC (Graduação) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Campus de Vitória da Conquista, Vitória da Conquista, 2018. Disponível em: http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/monografiaFinal.pdf. Acesso em: 15 maio 2019.

ANEXO A – Material Base para construção de grafos