



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Túlio José de Souza Santos

Um breve estudo sobre a geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}^3

Recife-PE
Julho de 2021

Um breve estudo sobre a geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}^3

por

Túlio José de Souza Santos

Sob orientação de

Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Recife-PE
Julho de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237b

Santos, Túlio José de Souza

Um breve estudo sobre a geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}^3 / Túlio José de Souza Santos. - 2021.
109 f. : il.

Orientador: Renato Teixeira Gomes.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Geometria Diferencial. 2. Superfície regular. 3. Gauss-Bonnet. I. Gomes, Renato Teixeira, orient. II. Título

CDD 510

Túlio José de Souza Santos

Um breve estudo sobre a geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}^3

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 23/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. José Alan Farias dos Santos
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes (orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Recife-PE
Julho de 2021

À minha tia, Katia Simone Melo dos Santos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus por ter chegado até aqui. Posteriormente, agradeço ao meu pai Luciano José de Melo Santos, minha madrasta Gesonita Alves de Menezes, minha mãe Margarida de Souza Santos, meu irmão mais velho Thales Henrique de Souza Santos e a toda minha família pelo carinho, apoio, incentivo, cuidado que me deram ao longo dessa jornada.

Agradeço ao professor Dr. Renato Teixeira Gomes (orientador) por acreditar no meu potencial, pela paciência, por todo esforço e dedicação, pelo cuidado na minha pessoa e por esses dois anos de muito trabalho e evolução. Também agradeço as contribuições feitas no meu trabalho pelo professor Dr. Marcelo Pedro dos Santos e pelo professor Dr. José Alan Farias dos Santos.

Agradeço a minha amiga/irmã Yasmin Alves Sobrinho Lira pela ajuda na construção das figuras deste trabalho, por todo apoio e carinho. Desejo a Yasmin muito sucesso na sua jornada.

Agradeço a minha namorada Ana Karolina Teixeira da Silva pelo carinho, apoio, compreensão e pelo nosso relacionamento. Além disso, agradeço a Alexandre César, Matheus Henrique, João Pedro, Tatiane Gervásio, Jhonata Avelar, Érick Caetano, Marcos Miguel, Pedro Freitas, Matheus Lins, Lucas Wanderley, Lyen Tower, Rafael Solto, Alaide Lima, Vitória Nascimento, por todo incentivo, união, dias de estudos e diversão durante toda graduação.

Agradeço a Júlio César da Silva Vieira por todos os conselhos, apoio, incentivo, amizade e todas as contribuições feitas durante minha graduação.

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática da UFRPE que participaram de forma direta ou indireta na minha formação. Em particular, gostaria de agradecer ao professor Dr. Clessius Silva por todo apoio nos últimos semestres.

Gostaria de agradecer a todos os amigos do CEGEN - UFRPE e pelo ótimo ambiente de estudo de nossa universidade. Agradeço também a todos os meus alunos do Preparatório para o Sistema Seriado de Avaliação (SSA - UPE) - Primeira Fase, pelas boas vibrações, torcida e incentivo. Desejo a cada um de vocês um futuro brilhante. Por fim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma na minha jornada que não foram citados nesta lista.

Resumo

Este trabalho tem como propósito fazer um breve estudo sobre a geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}^3 , com objetivo de demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet em sua versão local e global. Este relevante resultado relaciona a geometria e a topologia de superfícies em \mathbb{R}^3 e tem consequências bastante interessantes. Através dele, é possível dar uma resposta para um antigo problema de determinar se o quinto postulando de Euclides é um axioma ou um teorema. Na verdade, o que se obtém é que não há prejuízo em se negar o quinto postulando, isto é, supor que possa existir mais de uma ou nenhuma reta paralela a uma reta r passando por um ponto p fora de r . O que se encontra são "admiráveis mundos novos" que possuem geometrias distintas da Euclidiana.

Palavras-Chave: Geometria Diferencial; Superfície regular; Gauss-Bonnet.

Abstract

The purpose of this work is to make a brief study on the differential geometry of surfaces in \mathbb{R}^3 , with the objective of demonstrating the Gauss-Bonnet theorem in its local and global version. This relevant result relates the geometry and topology of surfaces in \mathbb{R}^3 and has very interesting consequences. Through it, it is possible to give an answer to an ancient problem of determining whether Euclid's fifth postulate is an axiom or a theorem. In fact, what is obtained is that there is no harm in denying the fifth postulate, that is, to suppose that there may be more than one or no parallel line to a line r passing through a point p outside of r . What is found are "brave new worlds" that have different geometries from the Euclidean one.

KeyWords: Differential Geometry; Regular Surfaces; Gauss-Bonnet.

Sumário

Lista de Figuras	10
Introdução	11
1 Superfícies Regulares	12
1.1 Preliminares	12
1.2 Superfície Regular	13
1.3 Funções e aplicações diferenciáveis em superfícies	20
1.4 Plano tangente e diferencial de uma aplicação	23
1.5 Primeira forma fundamental	26
2 A geometria da Aplicação de Gauss	34
2.1 Aplicação normal de Gauss	34
2.2 Segunda forma fundamental	38
2.3 A aplicação de Gauss em Coordenadas Locais	41
3 Geometria Intrínseca de Superfícies	49
3.1 Isometria e aplicações conformes	49
3.2 O teorema de Gauss e as equações de compatibilidade	55
3.3 Transporte Paralelo e Geodésicas	63
4 O Teorema de Gauss-Bonnet e suas aplicações	82
4.1 Prólogo	82
4.2 Teorema de Gauss-Bonnet (Local)	83
4.3 Triangulação	90
4.4 Teorema de Gauss-Bonnet (Global)	93
Referências Bibliográficas	109

Lista de Figuras

1.1	Esquema da definição de diferencial.	12
1.2	Uma parametrização de S	14
1.3	Curvas coordenadas em S	15
1.4	Conjunto coberto pela parametrização \mathbf{x}	17
1.5	Parametrizações locais da esfera.	17
1.6	Diagrama da aplicação F	19
1.7	Diagrama de uma função diferenciável em um ponto da superfície.	21
1.8	Diagrama da aplicação mudança de Parâmetros.	21
1.9	Aplicação diferenciável entre superfícies regulares.	22
1.10	Diagrama da construção de γ	24
1.11	Cilindro.	28
1.12	Esquema da Proposição 9.	32
1.13	Esquema do Exemplo 8	33
2.1	faixa de Möbius.	35
2.2	Aplicação normal de Gauss.	36
2.3	Variação do vetor normal em uma vizinhança de p	36
2.4	Para um plano $dN_p \equiv 0$	37
2.5	Curvatura normal.	39
2.6	Curvatura da seção normal, Meusnier.	40
2.7	Seções normais sobre a esfera.	40
2.8	Esfera.	45
2.9	Pseudoesfera.	46
2.10	Toro.	47
2.11	Catenóide.	48
3.1	Diagrama da aplicação φ	52
3.2	Distância de p a q	54
3.3	A derivada covariante.	63
3.4	O campo de vetores tangentes ao longo de uma curva α	65
3.5	Campo paralelo em \mathbb{S}^2	66

3.6	Transporte paralelo em superfícies tangentes.	68
3.7	A curvatura geodésica.	70
3.8	Curvatura geodésica de um paralelo em \mathbb{S}^2	70
3.9	Paralelos que são geodésica em uma superfície de revolução.	79
4.1	Triângulo geodésico na Pseudoesfera e na esfera unitária.	83
4.2	Ângulos externos de curvas regulares por partes.	84
4.3	O sinal do ângulo externo no caso de uma cúspide.	85
4.4	Região simples R na superfície S	85
4.5	Curva da fronteira orientada positivamente.	86
4.6	Transporte paralelo de w_0 ao longo de α	89
4.7	Região regular e região não regular.	90
4.8	Interpretação da definição de triangulação.	91
4.9	Esquema da Proposição 24.	92
4.10	Algumas superfícies compactas de \mathbb{R}^3	92
4.11	Esquema do caso 1.	94
4.12	Esquema do caso 2.	94
4.13	Esquema do caso 3.	95
4.14	Esquema do caso 4.	96
4.15	Triangulação em uma região regular R	97
4.16	Ângulos internos na triangulação.	98
4.17	Esquema da demonstração do item 3.	101
4.18	Deformação de C_t	105
4.19	Campo de vetores.	106
4.20	Campo de vetores.	106

Introdução

Um dos problemas mais importantes na história da geometria foi, com certeza, determinar se o quinto postulado de Euclides, "de um ponto fora de uma reta se pode traçar no plano uma única reta que prolongada indefinidamente não encontra a primeira", era ou não independente dos outros postulados. Já era conhecido na época de Gauss que se o quinto postulado fosse dependente dos outros postulados, então este fato era equivalente a soma dos ângulos internos de um triângulo ser π . Em seu importante trabalho publicado em 1827 intitulado "General Investigations of Curved Surfaces" Gauss trouxe dois importantes resultados: o primeiro, dizia que a curvatura Gaussiana de uma superfície S , definida por ele como o determinante da matriz da diferencial da aplicação normal, o qual coincidia com o produto das curvaturas principais definidas anteriormente por Euler, dependia apenas da primeira forma fundamental, ou seja, da maneira de medir comprimentos em S . O segundo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo formado por geodésicas, que são a grosso modo as "retas" nessa superfície, diferia de π por uma expressão a qual dependia da área do triângulo e da curvatura de S . Mais tarde, O. Bonnet estendeu o resultado de Gauss, a uma região limitada por uma curva simples não geodésica.

Este trabalho tem como objetivo o estudo e a compreensão desses resultados, com ênfase no segundo que é conhecido como o teorema de Gauss-Bonnet. No Capítulo 1, estudaremos alguns conceitos preliminares necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. Neste, abordaremos além de outros conceitos, o de diferencial de uma aplicação e a primeira forma fundamental. O Capítulo 2 é dedicado a definição da aplicação normal de Gauss e curvaturas Gaussiana e média. Nele estudaremos a segunda forma fundamental e sua interpretação em termos da curvatura normal, a Seção 2.3 é dedicada a escrever os cálculos das curvaturas descritas acima para algumas classes de superfícies. No Capítulo 3 abordaremos a geometria intrínseca de superfícies, onde demonstraremos o teorema *egregium* de Gauss, que afirma que a curvatura Gaussiana é invariante por isometrias locais. Abordaremos também o conceito de transporte paralelo e geodésicas. Por fim, no Capítulo 4, estudaremos o teorema de Gauss-Bonnet em sua versão local e global e algumas aplicações deste teorema.

Capítulo 1

Superfícies Regulares

1.1 Preliminares

Nesta seção, faremos o estudo de alguns conceitos que serão relevantes para o nosso trabalho.

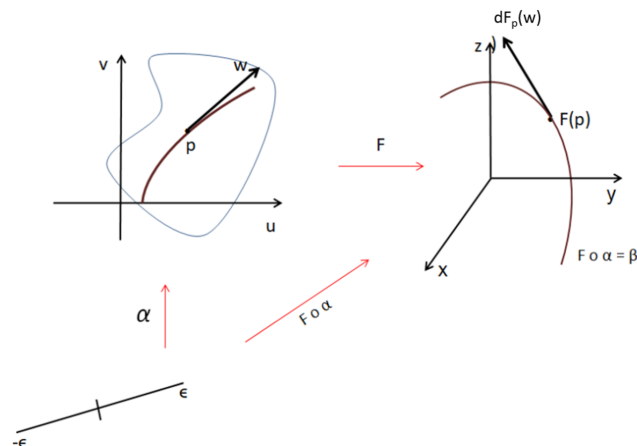
Definição 1. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida em um intervalo I , é chamada regular se $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Definição 2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos que α é parametrizada pelo comprimento de arco se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Definição 3. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in U$ definimos uma aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é chamada a diferencial de F em p da seguinte forma: sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Pela regra da cadeia, a curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ também é diferenciável. Então (Figura 1.1),

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

Figura 1.1: Esquema da definição de diferencial.



Fonte: Autoria própria.

Proposição 1. A definição acima para dF_p independe da escolha da curva que passa por p com vetor tangente w , e dF_p , é de fato uma aplicação linear.

Demonstração. Com o intuito de simplificar a notação trabalharemos com o caso $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o leitor não terá problemas em estender o argumento para o caso geral. Sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ a base canônica de \mathbb{R}^2 com coordenadas (u, v) e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ a base canônica de \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, z) . Então, podemos escrever $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\alpha'(0) = w = u'(0)e_1 + v'(0)e_2,$$

Seja $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, e

$$\beta(t) = F \circ \alpha(t) = F(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Daí, usando a regra da cadeia em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = dF_p(w). \end{aligned}$$

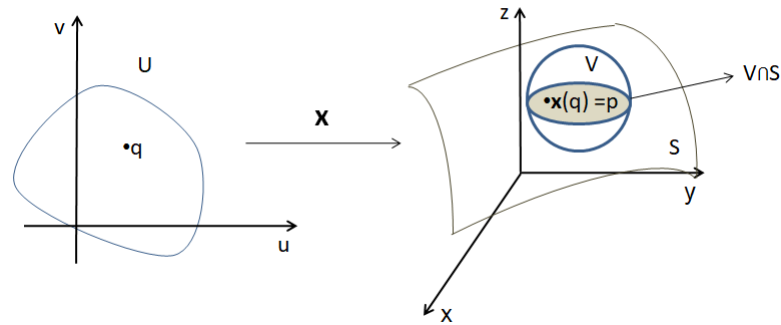
Isso mostra que dF_p é representada nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , por uma matriz que depende apenas das derivadas parciais em p das funções coordenadas x, y e z de F . Logo, dF_p é uma aplicação linear e não depende da escolha da curva α .

□

1.2 Superfície Regular

Definição 4. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que, (Figura 1.2)

Figura 1.2: Uma parametrização de S .



Fonte: Autoria própria.

1. \mathbf{x} é diferenciável, ou seja, se

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in U.$$

então as funções componentes de \mathbf{x} possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. \mathbf{x} é um homeomorfismo, isto é, \mathbf{x} é contínua e tem inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ contínua.
3. Para todo $q \in U$ a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva (Condição de regularidade).

A aplicação \mathbf{x} é chamada *parametrização local* ou *sistema de coordenadas locais* em uma vizinhança $V \cap S$ de p , e tal vizinhança é chamada *vizinhança coordenada*. Com o objetivo de expressar a condição 3 de forma mais clara, iremos calcular a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 dada por $\{e_1, e_2\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ respectivamente. Seja $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ e e_1 vetor tangente a curva $\alpha(t) = (u_0 + t, v_0)$, com $\alpha(0) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = (1, 0) = e_1$. A imagem de α por \mathbf{x} é

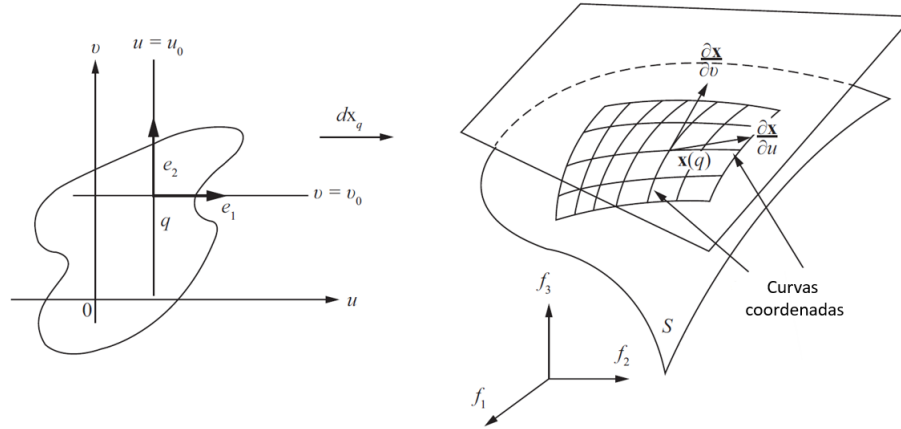
$$\beta(t) = \mathbf{x} \circ \alpha(t) = (x(\alpha(t)), y(\alpha(t)), z(\alpha(t)))$$

$$\beta(t) = \mathbf{x}(u_0 + t, v_0) = (x(u_0 + t, v_0), y(u_0 + t, v_0), z(u_0 + t, v_0)).$$

Derivando $\beta(t)$ com relação a t , obtemos

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Figura 1.3: Curvas coordenadas em S .



Fonte: CARMO, 2005, P. 63.

A curva $\beta(t)$ é chamada *curva coordenada* $v = v_0$, está em S e tem em $\mathbf{x}(q)$ o vetor tangente (Figura 1.3)

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e o vetor $\beta'(0)$ é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Assim, pela definição de diferencial, temos,

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

De modo análogo, para a curva coordenada $u = u_0$, temos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Por fim, a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$, também chamada de *matriz Jacobiana*, com relação a essas bases será dada por

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Por comodidade denotaremos $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ por \mathbf{x}_u e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ por \mathbf{x}_v .

Como a condição 3 pede que a diferencial $d\mathbf{x}_q$ seja injetiva, então esta aplicação deve

ter posto 2, isso significa que os vetores \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v são linearmente independentes. Assim para saber se a diferencial é injetiva basta verificar que os determinantes não se anulam simultaneamente, isto é, um dos determinantes abaixo seja diferente de zero em $q = (u, v)$, $\forall q \in U$.

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Note que a condição 2 exclui a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares.

Exemplo 1. A esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Com efeito, seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x} = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \quad (u, v) \in U$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$. Iremos mostrar que \mathbf{x} é uma parametrização de \mathbb{S}^2 que cobre o hemisfério norte da esfera unitária (menos o equador). Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial v} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{-u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{-v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}}. \end{aligned}$$

Como $u^2 + v^2 < 1$ então \mathbf{x} têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens, logo a condição 1 é satisfeita.

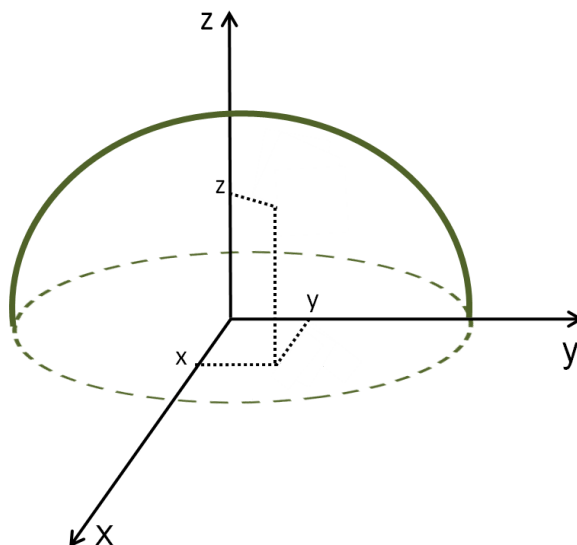
Observe que a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ é dada por

$$d\mathbf{x}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} & \frac{-v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos perceber que $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$, com isso concluímos que a matriz $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ tem posto 2, logo a condição 3 também é satisfeita.

Por fim, para verificar a condição 2, perceba que $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$ é bijetiva, pois um ponto $(u, v) \equiv (u, v, 0)$ no disco aberto de raio 1 no plano uv tem no ponto em \mathbb{R}^3 acima do plano uv uma altura $z = \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$. Assim, concluímos que \mathbf{x}^{-1} é a restrição

Figura 1.4: Conjunto coberto pela parametrização \mathbf{x} .

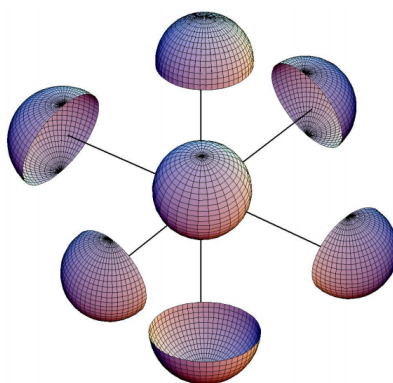


Fonte: Autoria própria.

da projeção $\pi(u, v, z) = (u, v)$ ao conjunto $\mathbf{x}(U)$. Logo, \mathbf{x}^{-1} é contínua em $\mathbf{x}(U)$ (Figura 1.4).

Agora, cobriremos a esfera usando parametrizações similares que juntamente com \mathbf{x} cobrem inteiramente \mathbb{S}^2 (Figura 1.5). Observe que precisaremos de 6 parametrizações desse tipo para cobrir toda a esfera.

Figura 1.5: Parametrizações locais da esfera.



Fonte: NUNES, 2010, p. 10.

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \quad (u, v) \in U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_2(u, z) = (u, +\sqrt{1 - (u^2 + z^2)}, z), \quad (u, z) \in U = \{(u, z) \in \mathbb{R}^2; u^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_3(u, z) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + z^2)}, z), \quad (u, z) \in U = \{(u, z) \in \mathbb{R}^2; u^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_4(v, z) = (+\sqrt{1 - (v^2 + z^2)}, v, z), \quad (v, z) \in U = \{(v, z) \in \mathbb{R}^2; v^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_5(v, z) = (-\sqrt{1 - (v^2 + z^2)}, v, z), \quad (v, z) \in U = \{(v, z) \in \mathbb{R}^2; v^2 + z^2 < 1\}.$$

Mostramos assim que \mathbb{S}^2 é uma superfície regular.

No que segue enunciaremos duas proposições que garantem que algumas classes de conjuntos são superfícies regulares e demonstraremos o primeiro deles.

Proposição 2. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^2 , então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.

Demonstração. A demonstração é relativamente simples. É necessário verificar que a aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, com $(u, v) \in U$, é uma parametrização do gráfico de f . Note que, \mathbf{x} é diferenciável, visto que, as derivadas parciais das funções componentes de \mathbf{x} são contínuas (f é diferenciável e conseqüentemente é contínua). Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial v} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= f_u(u, v), & \frac{\partial z}{\partial v} &= f_v(u, v), \end{aligned}$$

com isso a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ é dada por

$$d\mathbf{x}_{(u,v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{bmatrix},$$

e a condição 3 é satisfeita, pois $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$. Finalmente, observe que cada ponto (x, y, z) do gráfico é a imagem por \mathbf{x} de um único ponto $(u, v) \in U$. Assim, \mathbf{x} é bijetiva, e como \mathbf{x}^{-1} é a restrição ao gráfico de f da projeção $\pi(u, v, z) = (u, v)$ concluímos que \mathbf{x}^{-1} é contínua. Portanto, \mathbf{x} é uma parametrização do gráfico de f e com isso podemos concluir que todo gráfico de uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, sendo U conjunto aberto do \mathbb{R}^2 , é uma superfície regular. \square

Definição 5. Diremos que a é valor regular de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se a diferencial df_p é sobrejetiva $\forall p \in f^{-1}(a)$, a imagem inversa de a por f , isto é o conjunto

$$f^{-1}(a) = \{p \in \mathbb{R}^n; f(p) = a\}.$$

Observe que se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a diferencial $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, isto é, uma aplicação linear de um espaço vetorial em um corpo. Sua matriz é dada por

$$df_p = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(p)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \end{array} \right]_{1 \times n},$$

e como a dimensão da imagem é 1, então df_p ou é sobrejetiva ou é nula.

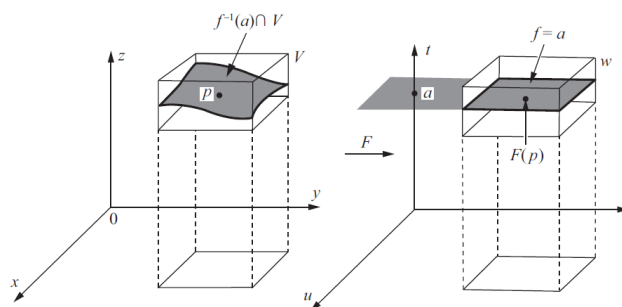
Proposição 3. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $f^{-1}(a)$. Como a é um valor regular de f , podemos admitir que $f_z \neq 0$ em p . Definindo a aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$, e indicaremos por (u, v, t) as coordenadas de um ponto do \mathbb{R}^3 onde F toma seus valores. A diferencial de F em p é dada por,

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

onde $\det(dF_p) = f_z \neq 0$. Aplicando o teorema da função inversa, garantimos a existência de vizinhança V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \rightarrow W$ é inversível e a inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável (Figura 1.6). Assim, as funções coordenadas de F^{-1} , $x = u$, $y = v$ e $z = g(u, v, t)$ são diferenciáveis.

Figura 1.6: Diagrama da aplicação F .



Fonte: CARMO, 2005, p. 70.

Em particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano xy . Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\}$, concluímos então que o gráfico de h é $f^{-1}(a) \cap V$, que é uma vizinhança coordenada de p . Assim, todo $p \in f^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada, e podemos concluir que $f^{-1}(a)$ é superfície regular. \square

Exemplo 2. O elipsóide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

é uma superfície regular.

Com efeito, considere

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Observe que f é uma função diferenciável, uma vez que as derivadas parciais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2}$$

existem e são contínuas. Perceba também que,

$f(x, y, z) = 0 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, isto é, $f^{-1}(0) = E$. A matriz da diferencial $df_{(x,y,z)}$ num ponto (x, y, z) é dada por

$$df_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{bmatrix},$$

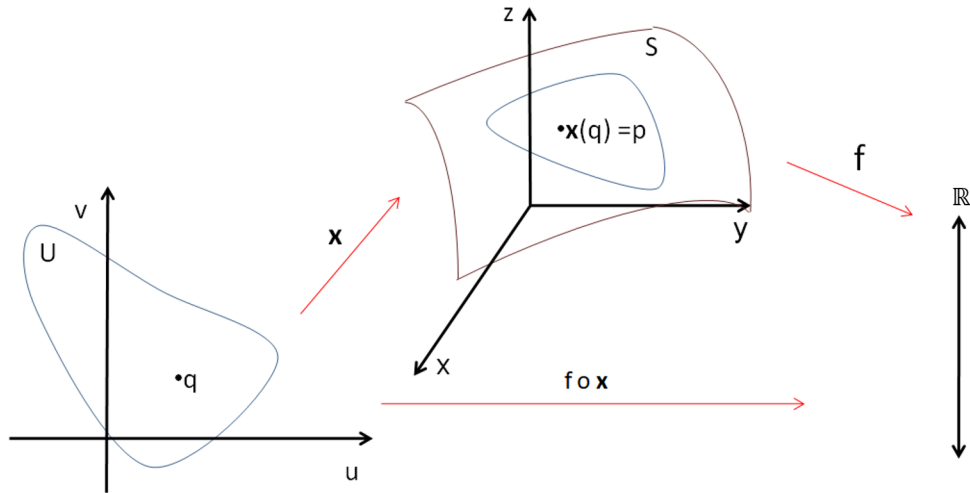
consequentemente, $df_{(x,y,z)} = 0 \iff \frac{2x}{a^2} = 0, \frac{2y}{b^2} = 0$ e $\frac{2z}{c^2} = 0$. Logo, $df_{(x,y,z)} = 0 \iff x = y = z = 0$. Se $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ então $df_{(x,y,z)}$ é sobrejetiva. Assim, sobre os pontos de E a diferencial $df_{(x,y,z)}$ é sobrejetiva e consequentemente 0 é valor regular de f . Pela proposição acima E é uma superfície regular.

1.3 Funções e aplicações diferenciáveis em superfícies

Definição 6. Seja $f : W \subset S \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida em um aberto ¹ W de uma superfície regular S . Diremos que f é diferenciável em $p \in W$ se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, com $p \in \mathbf{x}(U) \subset W$, a composição $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. A função $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada a expressão local de f na parametrização \mathbf{x} (Figura 1.7). A função f é diferenciável em W se é diferenciável em todos os pontos de W .

¹Por um aberto de S estamos nos referindo a uma intersecção de um aberto $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^3$ com S , isto é, \widetilde{W} é um aberto da topologia induzida de \mathbb{R}^3 sobre S .

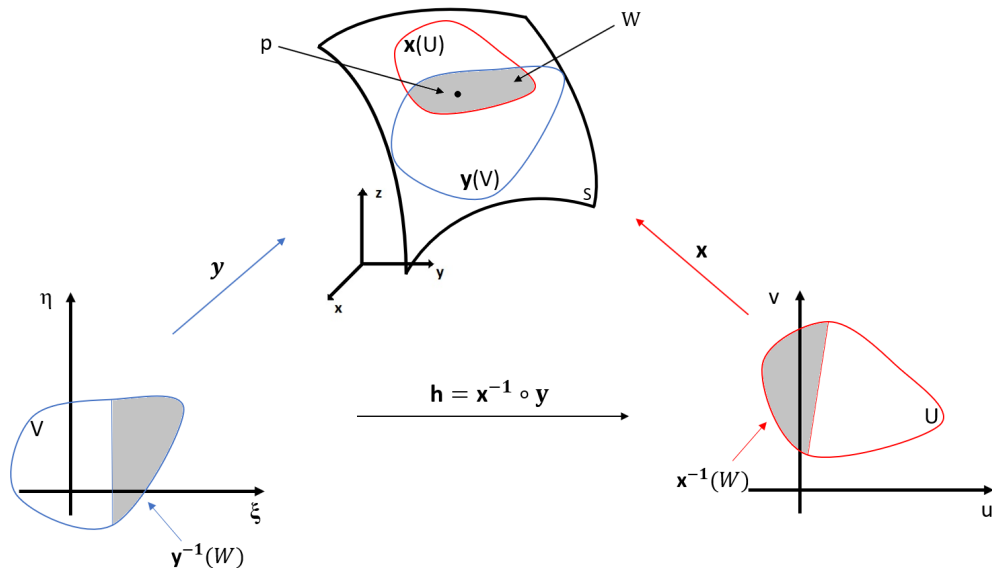
Figura 1.7: Diagrama de uma função diferenciável em um ponto da superfície.



Fonte: Autoria própria.

Proposição 4. (Mudança de Parâmetros). Seja p um ponto de uma superfície regular S , e sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S , tais que $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Então a mudança de coordenadas $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem uma inversa diferenciável h^{-1} (figura 1.8).

Figura 1.8: Diagrama da aplicação mudança de Parâmetros.



Fonte: Autoria própria.

A proposição acima não será demonstrada aqui, mas o leitor poderá encontrar a demonstração em: [1] p. 83.

Proposição 5. A definição de uma função diferenciável independe da escolha da parametrização.

Demonstração. De fato, seja $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ outra parametrização de S , onde $\mathbf{x}_1(q_1) = p$, com $q_1 \in U_1$ e $\mathbf{x}_1(U_1) \subset W$. Denote $U_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(V)$ e $U = \mathbf{x}^{-1}(V)$, com $V = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{x}_1(U_1)$, perceba que $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(V)$ é diferenciável, logo $f \circ \mathbf{x} \circ h = f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}_1 = f \circ \mathbf{x}_1$ é diferenciável em $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$. Daí, a independência afirmada. \square

Agora iremos definir o conceito para aplicações entre superfícies.

Definição 7. Seja $\phi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação contínua, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2 . A aplicação ϕ é diferenciável em $p \in V_1$ se dadas as parametrizações

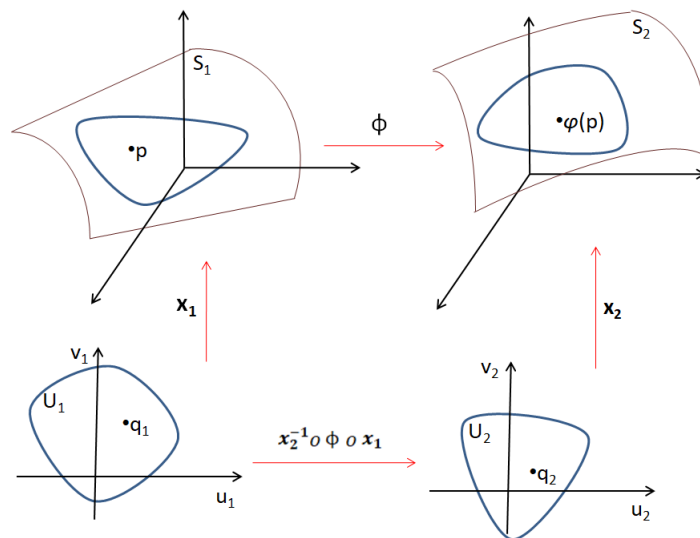
$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\phi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$. A aplicação $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$ é chamada a expressão local de ϕ nas parametrizações \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 (Figura 1.9).

Figura 1.9: Aplicação diferenciável entre superfícies regulares.



Fonte: Autoria própria.

Observação 1.1. Uma aplicação $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ é chamada um *difeomorfismo* se ϕ é diferenciável e possui inversa $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ também diferenciável. Dizemos que duas superfícies regulares S_1 e S_2 são *difeomorfas* se existe um difeomorfismo ϕ de S_1 em S_2 .

Proposição 6. Uma aplicação diferenciável entre superfícies independe da escolha das parametrizações.

Demonstração. Seja S_1 e S_2 superfícies regulares e $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável em um ponto p de S_1 e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ parametrizações de S_1 e S_2 respectivamente. Suponha agora que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 sejam outras parametrizações de S_1 e S_2 respectivamente. Observe que $\mathbf{y}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1 = h_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 \circ h_1^{-1}$, onde $h_2 = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2$ e $h_1^{-1} = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1$ são aplicações mudanças de parâmetros. Como h_1^{-1}, h_2 e $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1$ são diferenciáveis, sua composição também é. Logo, $\mathbf{y}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{y}_1$ é diferenciável em $\mathbf{y}_1^{-1}(p)$, portanto ϕ é diferenciável em p com relação às parametrizações \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 . \square

Exemplo 3. A aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow E \subset \mathbb{R}^3 \\ \psi(x, y, z) &= (ax, by, cz), \quad a, b, c \neq 0, \end{aligned}$$

onde os pontos da esfera unitária \mathbb{S}^2 são levados em pontos sobre o elipsoide E é diferenciável.

Pela Definição 7 basta mostrar que existe parametrizações \mathbf{x}_1 de \mathbb{S}^2 e \mathbf{x}_2 de E , tais que $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{x}_1$ é diferenciável. Dadas as parametrizações

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(\theta, \phi) &= (\text{sen}(\phi)\cos(\theta), \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), \cos(\phi)), \\ \mathbf{x}_2(\theta, \phi) &= (a \text{sen}(\phi)\cos(\theta), b \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), c \cos(\phi)), \end{aligned}$$

onde $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\phi \in (0, \pi)$, que cobrem toda a superfície, exceto por um meridiano. Desta forma, fazendo a composição

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{x}_1(\theta, \phi),$$

observe que

$$\psi(\mathbf{x}_1(\theta, \phi)) = (a \text{sen}(\phi)\cos(\theta), b \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), c \cos(\phi)) = \mathbf{x}_2(\theta, \phi).$$

Assim,

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{x}_1(\theta, \phi) = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2(\theta, \phi) = (\theta, \phi).$$

Logo, como a expressão local é a identidade, ψ é uma aplicação diferenciável.

1.4 Plano tangente e diferencial de uma aplicação

A condição 3 na definição de uma superfície regular S garante que para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , passando por p , constituem

um plano, que chamaremos de *plano tangente a S em p* e será denotado por T_pS .

Definição 8. Um vetor tangente a S em um ponto $p \in S$ é o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$.

Proposição 7. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S em p , tal que $\mathbf{x}(q) = p$. Então o conjunto de vetores tangentes a S em p é o subespaço vetorial $T_pS = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensão 2.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $T_pS \subset d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$. Seja $w \in T_pS$, com $p = \mathbf{x}(q)$. Logo pela Definição 8, existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Considere $\gamma = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, onde $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$ (Figura 1.10). Pela definição de diferencial de uma aplicação

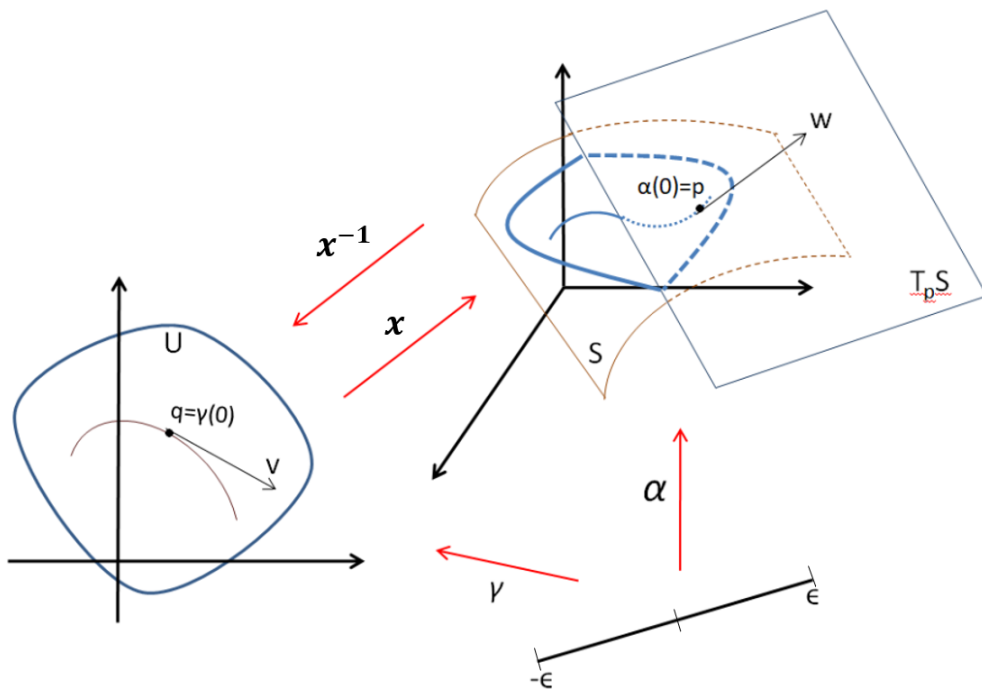
$$d\mathbf{x}_q\gamma'(0) = (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) = (\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = w.$$

Assim, $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$. Portanto, $T_pS \subset d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$. Considere agora $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, isto é, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $w = d\mathbf{x}_q(v)$ e seja $\lambda(t) = vt + q$ com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. A curva $\alpha = \mathbf{x} \circ \lambda(t)$ é tal que

$$\alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \lambda)'(0) = d\mathbf{x}_{\lambda(0)}(\lambda'(0)) = d\mathbf{x}_q(v) = w.$$

Logo, w é vetor tangente de uma curva, portanto $w \in T_pS$ e com isso mostramos que $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset T_pS$. □

Figura 1.10: Diagrama da construção de γ .



Fonte: Autoria própria.

A escolha de uma parametrização determina uma base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ de $T_p S$, chamada *base associada a \mathbf{x}* . Assim podemos escrever as coordenadas de $w \in T_p S$ na base associada a uma parametrização \mathbf{x} da seguinte maneira: se $w = \alpha'(0)$ é o vetor velocidade de uma curva $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$, onde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ é dada por $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, com $\gamma(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. Então,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t), v(t)))|_{t=0} \\ \alpha'(0) &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ \alpha'(0) &= \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) = w.\end{aligned}$$

Assim, na base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$, w tem coordenadas $((u'(0), v'(0)))$.

Uma vez que definimos plano tangente, podemos falar na diferencial de aplicações diferenciáveis entre superfícies.

Definição 9. Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares e seja $\phi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável em V . Para cada ponto $p \in V$ definimos a aplicação linear $d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$ que age em um vetor $w \in T_p S_1$ da seguinte maneira: seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V \subset S_1$ uma curva diferenciável, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$ e considere a curva $\beta(t) = \phi \circ \alpha$. Então definimos $d\phi_p(w) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(0) = \beta'(0)$.

Proposição 8. A diferencial $d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$ é linear e não depende da escolha de α .

Demonstração. A demonstração é análoga a da Proposição 1. Sejam $\mathbf{x}(u, v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ onde $\mathbf{x} : U \rightarrow S_1$ e $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \rightarrow S_2$ parametrizações de S_1 e S_2 respectivamente. Suponha que ϕ seja expressa nestas coordenadas por

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)),$$

onde $(u, v) \in U$ e $(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) \in \bar{U}$. Expressando α na parametrização \mathbf{x} , obtemos

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

A expressão local de $\beta = \phi \circ \alpha$ é dada por $\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \phi \circ \alpha = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \beta = (\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$, logo a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{\bar{\mathbf{x}}_u, \bar{\mathbf{x}}_v\}$ de $T_{\phi(p)} S_2$ é

$$\begin{aligned}\beta'(0) &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ \beta'(0) &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \phi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} v'(0) \right).\end{aligned}$$

Em forma matricial,

$$\beta'(0) = d\phi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Desta forma $d\phi_p(w)$ depende de ϕ e das coordenadas $(u'(0), v'(0))$ de w na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e a relação matricial mostra que $d\phi_p(w)$ é linear. \square

1.5 Primeira forma fundamental

Nesta seção, apresentaremos a primeira forma fundamental de S que nos permite estudar estruturas geométricas associadas a superfície sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , tais como calcular o comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes e áreas de regiões na superfície.

Definição 10. Seja S uma superfície regular e T_pS o plano tangente a S no ponto p . A forma quadrática I_p definida por

$$\begin{aligned} I_p : T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longrightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

é chamada primeira forma fundamental de S em p , onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é o produto interno do \mathbb{R}^3 em cada plano tangente T_pS .

Note que a primeira forma fundamental consiste de induzir em cada T_pS o produto interno do ambiente \mathbb{R}^3 . Vamos expressar a primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ associada a uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em p . Como um vetor tangente $w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $\alpha(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0)) = p$ e $\alpha'(0) = w$ obtemos os seguintes valores calculados em $t = 0$

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \left\langle \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right\rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) \rangle_p + \langle \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u'(0), \mathbf{x}_u u'(0) \rangle_p + 2\langle \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_v v'(0) \rangle_p \\ &= (u'(0))^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p + 2u'(0)v'(0) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p + (v'(0))^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ &= (u'(0))^2 E + 2u'(0)v'(0) F + (v'(0))^2 G, \end{aligned}$$

onde,

$$E(u(0), v(0)) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p,$$

$$F(u(0), v(0)) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

$$G(u(0), v(0)) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$. Escrevendo em forma matricial temos

$$I_p(\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, a matriz da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é dada por

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4. Vamos determinar os coeficientes da primeira forma fundamental de um sistema de coordenadas para um plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ passando por $p = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Uma parametrização de Π é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = p_o + uw_1 + vw_2 \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Como w_1 e w_2 são vetores ortonormais, isto é, ortogonais e unitários, segue que

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\|^2 = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\|^2 = 1.$$

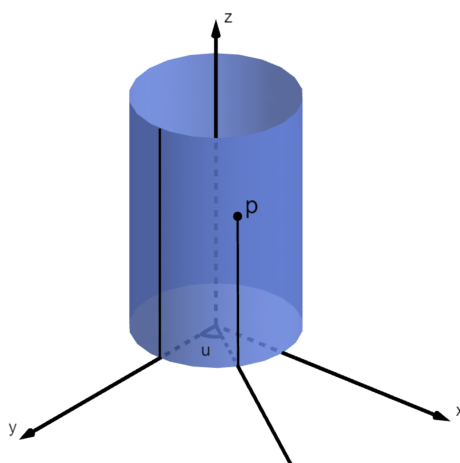
Por fim, a matriz da primeira forma fundamental é

$$I_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5. O cilindro reto sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 1.11), admite a parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ e

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

Figura 1.11: Cilindro.



Fonte: Autoria própria.

Para calcular a primeira forma fundamental, note que

$$\mathbf{x}_u = (-\text{sen}(u), \cos(u), 0), \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

logo

$$E = \langle (-\text{sen}(u), \cos(u), 0), (-\text{sen}(u), \cos(u), 0) \rangle = \cos(u)^2 + \text{sen}(u)^2 = 1,$$

$$F = \langle (-\text{sen}(u), \cos(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0,$$

$$G = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1.$$

Observamos que embora o cilindro e o plano sejam duas superfícies distintas, possuem os mesmos coeficientes da primeira forma fundamental.

Exemplo 6. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de \mathbb{S}^2 cuja parametrização é dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\text{sen}(\phi)\cos(\theta), \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), \cos(\phi)) \quad \theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \pi),$$

que cobre toda a esfera, exceto por um meridiano. Inicialmente vamos exibir as derivadas parciais com respeito a θ e ϕ , isto é,

$$\mathbf{x}_\theta = (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta)\text{sen}(\phi), 0),$$

$$\mathbf{x}_\phi = (\cos(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\cos(\phi), -\text{sen}(\phi)).$$

Desta forma, os coeficientes da primeira forma são dados por

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle \\
 &= \langle (-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi), 0), (-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi), 0) \rangle \\
 &= \operatorname{sen}^2(\phi)[\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)] = \operatorname{sen}^2(\phi), \\
 F &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\phi \rangle \\
 &= \langle (-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi), 0), (\cos(\theta)\cos(\phi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi), -\operatorname{sen}(\phi)) \rangle \\
 &= -\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta)\cos(\phi) = 0, \\
 G &= \langle \mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\phi \rangle \\
 &= \langle (\cos(\theta)\cos(\phi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi), -\operatorname{sen}(\phi)), (\cos(\theta)\cos(\phi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi), -\operatorname{sen}(\phi)) \rangle \\
 &= \cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\phi) = 1.
 \end{aligned}$$

Exemplo 7. Considere a hélice que é dada por $\alpha(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), au)$, $u \in \mathbb{R}$. Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano xy e que intersecta o eixo O_z . A superfície gerada por essas retas é chamada de um helicóide. Uma parametrização do helicóide é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos(u), v \operatorname{sen}(u), au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Observe que, $\mathbf{x}_u = (-v \operatorname{sen}(u), v \cos(u), a)$ e $\mathbf{x}_v = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0)$. Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}
 E &= \langle (-v \operatorname{sen}(u), v \cos(u), a), (-v \operatorname{sen}(u), v \cos(u), a) \rangle = v^2 + a^2, \\
 F &= \langle (-v \operatorname{sen}(u), v \cos(u), a), (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0) \rangle = 0, \\
 G &= \langle (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0), (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0) \rangle = \cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u) = 1.
 \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, conhecendo a primeira forma fundamental podemos tratar de questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 . Vamos ver agora algumas dessas questões.

- O comprimento de arco s de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt,$$

e se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ podemos reescrever o comprimento de arco de α em termos da primeira forma fundamental, isto é

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} dt.$$

• O ângulo θ de duas curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \rightarrow S$, $\beta : I \rightarrow S$ que se intersectam em $t = t_0$ é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, se considerarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, o ângulo φ das curvas coordenadas de $\mathbf{x}(u, v)$ é dado por

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

segue daí que as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se, $F = 0$ para todo ponto $(u, v) \in U$.

• Cálculo de área de uma região limitada de uma superfície regular S .

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S . Seja R uma região limitada que está contida em $\mathbf{x}(U)$. Em outras palavras, R é imagem por \mathbf{x} de uma região limitada $Q \subset U$. A função $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|$, definida em U , representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v .

Definição 11. Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

é chamada área de R .

Podemos escrever a definição de área de uma região em termos da primeira forma fundamental, isto é, sabemos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| &= |\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v| \sin(\theta) \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= |\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v| \cos(\theta), \end{aligned}$$

e elevando cada equação ao quadrado e somando, temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 + (\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle)^2 &= |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 \sin^2(\theta) + |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 \cos^2(\theta) \\ \Rightarrow |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| &= \sqrt{|\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 - (\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle)^2} \\ \Rightarrow |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R).$$

Uma pergunta que pode ser feita é se a integral da Definição 11 depende ou não da escolha da parametrização. A proposição que segue responde essa pergunta.

Proposição 9. A integral da Definição 11 não depende da escolha da parametrização.

Demonstração. De fato, considere duas parametrizações $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\bar{\mathbf{x}} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Seja $R = \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(V)$ região limitada de uma superfície regular S e defina $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$ e $\bar{Q} = \bar{\mathbf{x}}^{-1}(R)$. Seja $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ o Jacobiano da mudança de coordenadas $h = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x}$ (Figura 1.12). Então,

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = \iint_{\bar{Q}} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| d\bar{u}d\bar{v} = \iint_{\bar{Q}} |\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}| d\bar{u}d\bar{v}.$$

A primeira igualdade da equação acima vem do teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas. Já a segunda igualdade, segue do fato que podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \end{aligned}$$

segue daí que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \wedge \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) + \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_v \wedge \mathbf{x}_u) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) - \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|. \end{aligned}$$

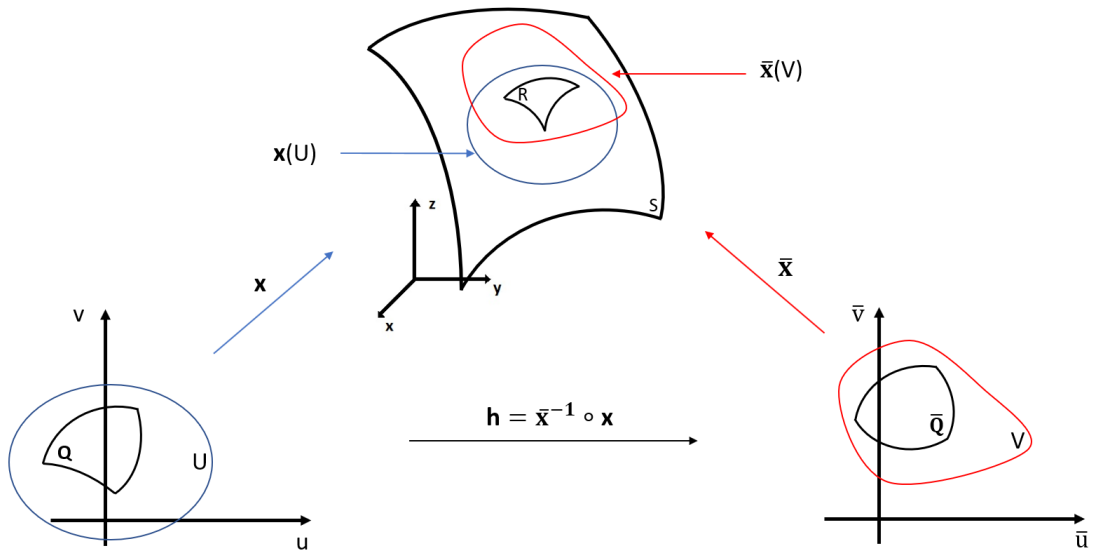
Desta forma

$$|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}| = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|.$$

Portanto, concluímos que

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = \iint_{\bar{Q}} |\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}| d\bar{u}d\bar{v}.$$

Figura 1.12: Esquema da Proposição 9.



Fonte: Autoria própria.

□

Exemplo 8. Vamos calcular a área do toro. Para isto, consideramos a vizinhança coordenada correspondente à parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r\cos(u))\cos(v), (a + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u)),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, que cobre o toro, exceto por um meridiano e um paralelo. Note que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)), \\ \mathbf{x}_v &= (-\sin(v)(a + r\cos(u)), \cos(v)(a + r\cos(u)), 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)), (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)) \rangle \\ &= r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)), (-\sin(v)(a + r\cos(u)), \cos(v)(a + r\cos(u)), 0) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle (-\sin(v)(a + r\cos(u)), \cos(v)(a + r\cos(u)), 0), (-\sin(v)(a + r\cos(u)), \cos(v)(a + r\cos(u)), 0) \rangle \\ &= (a + r\cos(u))^2. \end{aligned}$$

Considere agora a região R_ϵ , dada pela imagem por \mathbf{x} da região Q_ϵ (Figura 1.13) dada

por ($\epsilon > 0$ e suficientemente pequeno),

$$Q_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \epsilon \leq u \leq 2\pi - \epsilon, 0 + \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}.$$

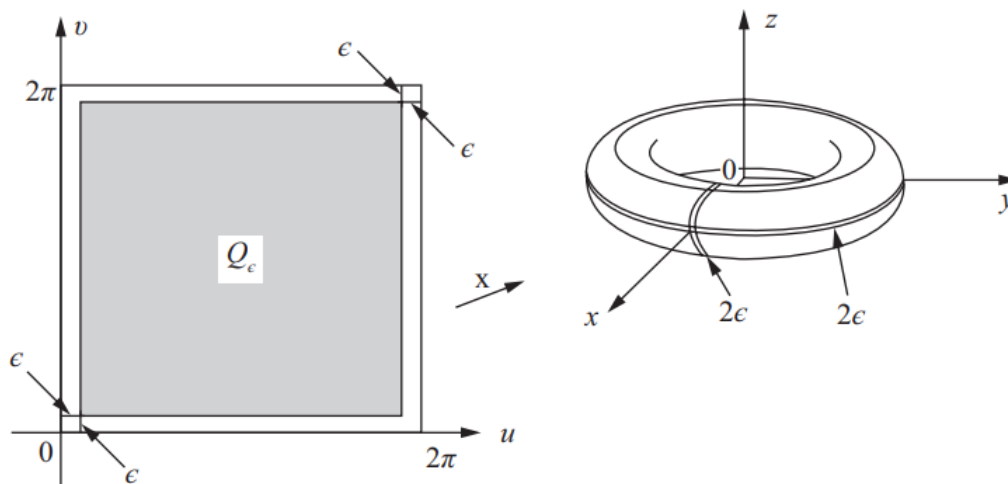
Pela definição acima,

$$\begin{aligned} A(R_\epsilon) &= \iint_{Q_\epsilon} \sqrt{EG - F^2} = \iint_{Q_\epsilon} r(r\cos(u) + a)dudv = \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} r(r\cos(u) + a)dudv \\ &= \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} r(r\cos(u) + a)du \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} dv = r^2(2\pi - 2\epsilon)(\text{sen}(2\pi - \epsilon) - \text{sen}(\epsilon)) + ra(2\pi - 2\epsilon)^2. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$A(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon) = 4\pi^2 ra.$$

Figura 1.13: Esquema do Exemplo 8



Fonte: CARMO, 2016, p. 101.

Capítulo 2

A geometria da Aplicação de Gauss

2.1 Aplicação normal de Gauss

Iniciaremos esta seção fazendo uma breve discussão do conceito de orientação de uma superfície.

Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto p de uma superfície regular S , determinamos uma orientação de $T_p S$, ou seja, a orientação associada à base coordenada $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Se p pertence a vizinhança coordenada de uma outra parametrização $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$, a nova base $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ é expressa por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},\end{aligned}$$

onde $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ e $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ são as expressões da mudança de coordenadas. As bases $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ determinam a mesma orientação de $T_p S$ se e somente se o determinante do Jacobiano

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|$$

da mudança de coordenadas é positivo.

Definição 12. Uma superfície regular S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (*local*) \mathbf{x} é compatível com a orientação de S se, juntando \mathbf{x} à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma)

orientação de S .

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com $\mathbf{x}(q) = p$, uma parametrização de uma superfície S tal que $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ seja uma base para o plano tangente $T_p S$. Então, para cada $p \in \mathbf{x}(U)$ podemos escolher um vetor normal e unitário a $T_p S$, dado por

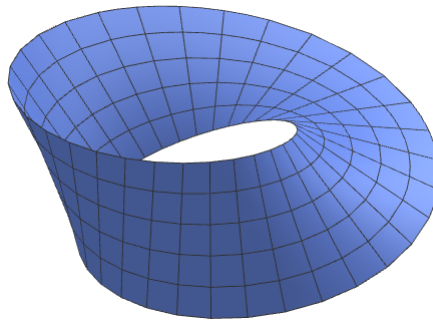
$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Proposição 10. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .

A proposição acima não será demonstrada aqui, mas o leitor poderá encontrar em: [1], p. 124.

A escolha de um campo N é chamada uma orientação de S . Quando S não admite um campo diferenciável como na Proposição 10 ela é dita não orientável. Nem toda superfície é orientável. Um exemplo de uma superfície com esta propriedade é a faixa de Möbius (Figura 2.1). Note que, se percorrermos um círculo médio da faixa a partir de um ponto p saindo com um vetor normal N , retornaremos a ele com o vetor $-N$.

Figura 2.1: faixa de Möbius.



Fonte: Autoria própria.

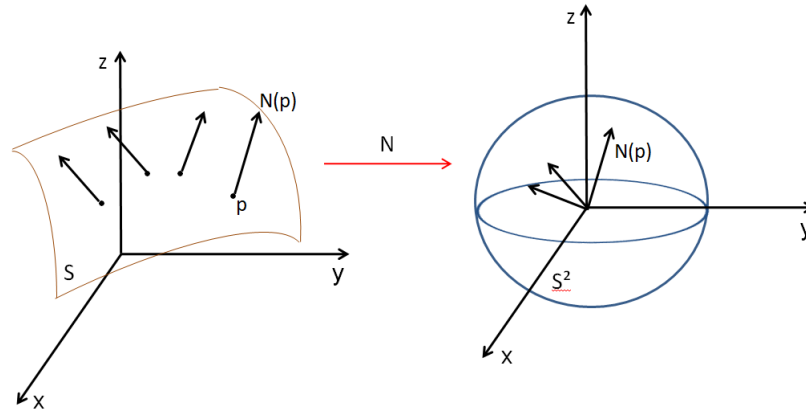
De agora em diante S denotará uma superfície regular orientável.

Definição 13. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . Definimos a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que toma seus valores na esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de S (Figura 2.2).

Figura 2.2: Aplicação normal de Gauss.



Fonte: Autoria própria.

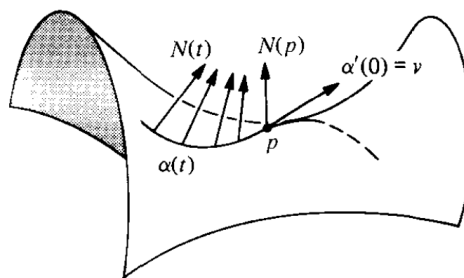
Como S é uma superfície orientável, a aplicação normal de Gauss é diferenciável. Sendo assim, para todo $p \in S$ a diferencial dN_p é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Como os vetores normais de S e \mathbb{S}^2 são paralelos, então via identificação $T_pS \equiv T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, dN_p pode ser vista como um operador linear em T_pS , isto é, $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$.

O operador linear dN_p opera da seguinte maneira: Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva parametrizada, com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N(t) := N \circ \alpha(t)$ na esfera \mathbb{S}^2 , que é equivalente a restringir o vetor N à curva $\alpha(t)$. Segue que, o vetor tangente a $N(t)$ em $N(p)$ é dado por

$$N'(0) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = dN_p(\alpha'(0))$$

é um vetor de T_pS . Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p (Figura 2.3).

Figura 2.3: Variação do vetor normal em uma vizinhança de p .



Fonte: CARMO, 2005, p. 162.

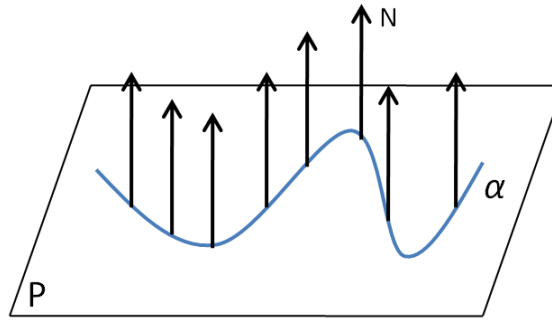
Exemplo 9. Seja P um plano dado por $ax + by + cz = 0$, o vetor (a, b, c) é normal a P ,

logo o vetor normal unitário ao plano P é dado por

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

que é constante para todo $p \in S$. Portanto, $dN_p \equiv 0$, ou seja, é a aplicação linear nula (Figura 2.4).

Figura 2.4: Para um plano $dN_p \equiv 0$.



Fonte: Autoria própria.

Definição 14. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ é auto-adjunta se $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para todo $v, w \in V$.

Proposição 11. A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação normal de Gauss é um operador linear autoadjunto.

Demonstração. Basta mostrar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$$

para uma base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$. Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ a base associada de $T_p S$. Se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, então

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Bigg|_{t=0} \\ &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial N}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Bigg|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

e em particular, $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$ e $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é autoadjunto, é suficiente mostrar que,

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle.$$

Para isso, como N é vetor normal de T_pS , então N é ortogonal aos vetores \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v , isto é

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0 \quad \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \tag{2.1}$$

Derivando $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle$ com relação a v e $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle$ com relação a u , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \langle N, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, de (2.2) temos

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle &= -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle &= -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Logo, dN_p é um operador autoadjunto. □

O fato de $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ ser um operador linear autoadjunto nos permite definir uma forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} B : T_pS \times T_pS &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle dN_p(v), w \rangle, \end{aligned}$$

e conseqüentemente uma forma quadrática

$$\begin{aligned} Q : T_pS &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle. \end{aligned}$$

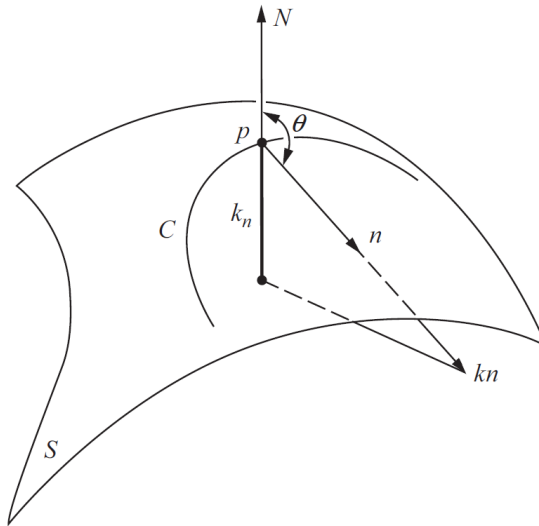
Para obter uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisaremos de algumas definições. Por convenção usaremos a forma quadrática $-Q$.

2.2 Segunda forma fundamental

Definição 15. A forma quadrática II_p , definida em T_pS por $II_p(v) = -Q(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Definição 16. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p e $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k\cos(\theta)$ é chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p (Figura 2.5).

Figura 2.5: Curvatura normal.



Fonte: CARMO, 2005, p. 167.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental II_p , considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N a curva $\alpha(s)$, teremos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Derivando em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle &= -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

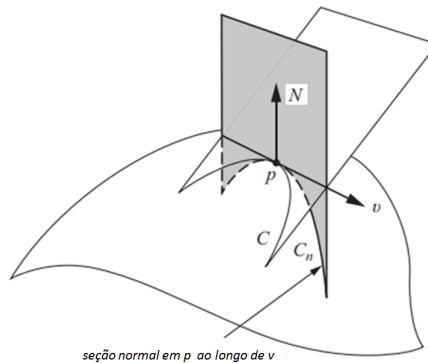
Assim, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$, é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v .

Proposição 12. (Meusnier) Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.

Demonstração. Mostramos acima que a curvatura normal k_n em $p \in S$ depende apenas da direção tangente a curva passando por p . \square

Definição 17. Dado um vetor unitário $v \in T_p S$ a interseção de S com o plano contendo v e $N(p)$ é chamada a seção normal de S em p segundo v (Figura 2.6).

Figura 2.6: Curvatura da seção normal, Meusnier.



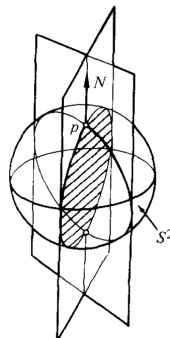
Fonte: CARMO, 2005, p. 168.

Em uma vizinhança de p , uma seção normal de S em p é uma curva regular plana cujo vetor normal n em p é $\pm N(p)$ ou zero. Logo, sua curvatura é igual a $|k_n|$ segundo v em p . Assim, a curvatura normal de uma curva é pela proposição igual a curvatura da seção normal.

Exemplo 10. Para um plano P todas as seções normais são retas, conseqüentemente todas as curvaturas normais são nulas. Logo, $II_p \equiv 0$ em todos os pontos de P .

Exemplo 11. Na esfera unitária, com $N = (-x, -y, -z)$ (N aponta para o centro da esfera), as seções normais passando por um ponto $p \in \mathbb{S}^2$ são círculos com raio 1. Assim, todas as curvaturas normais são iguais a 1 e a segunda forma fundamental é $II_p(v) = 1$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$ e todo $v \in T_p \mathbb{S}^2$ com $|v| = 1$ (Figura 2.7).

Figura 2.7: Seções normais sobre a esfera.



Fonte: CARMO, 2005, p. 169.

No que segue precisaremos do seguinte teorema.

Teorema 1. Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são autovetores, e λ_1, λ_2 são autovalores de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , com $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle A(v), v \rangle$ sobre o círculo unitário de V .

O teorema acima não será demonstrada aqui, mas o leitor poderá encontrar a demonstração em: [1] p. 258.

Pelo fato de dN_p ser um operador autoadjunto, podemos usar o teorema acima e concluir que existe uma base ortonormal de autovetores associados aos autovalores de dN_p e tal que os autovalores λ_1 e λ_2 de dN_p são o máximo e mínimo da forma quadrática $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$. Assim, escrevendo $k_1 = -\lambda_1$ e $k_2 = -\lambda_2$, observamos que k_1 e k_2 são o mínimo e o máximo, respectivamente, da segunda forma fundamental $II_p = -Q$ restrita ao círculo unitário de $T_p S$. O mínimo da curvatura normal k_1 e o máximo da curvatura normal k_2 são chamados curvaturas principais em p ; as direções correspondentes, dadas pelos autovetores de dN_p são chamadas direções principais em p .

Definição 18. Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação normal de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média de S em p . Os números, $k_i = -\lambda_i$, com $i = 1, 2$, são chamados curvaturas principais de S em p , onde λ_i são os autovalores de dN_p . Em termos de k_1 e k_2 , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

2.3 A aplicação de Gauss em Coordenadas Locais

Nesta seção, obteremos as expressões da diferencial da aplicação de normal Gauss e da segunda forma fundamental, em um sistema de coordenadas locais. Seja S uma superfície regular orientável e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização compatível com a orientação de S , isto é, em $\mathbf{x}(U)$

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Seja $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p . O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ e

$$dN(\alpha') = \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \quad (2.3)$$

Sabemos que $\langle N, N \rangle = 1$, derivando com respeito a u , obtemos

$$\begin{aligned}\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle &= 0 \\ \Rightarrow 2\langle N_u, N \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $N_u \in T_p S$. De modo análogo, $N_v \in T_p S$, logo podemos escrever,

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \quad (2.4)$$

Substituindo os valores de (2.3) em (2.4) temos

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v.$$

Em forma matricial,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}) , com $i, j = 1, 2$. A matriz (a_{ij}) acima não necessariamente é simétrica, ela será simétrica se $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ for uma base ortonormal. Escrevendo a segunda forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ temos,

$$\begin{aligned}II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -(u')^2 \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle - 2u'v' \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle - (v')^2 \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f(u')(v') + g(v')^2,\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle, \\ f &= -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}$$

Como $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$, segue que

$$\begin{aligned}e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle.\end{aligned}$$

Agora, vamos obter os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g . A partir da Equação (2.4), obtemos,

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. As relações acima podem ser expressas em forma matricial por,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

E daí decorrem as seguintes expressões para os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Convém mencionar que as Equações (2.6) são conhecidas como as *equações de Weingarten*. A curvatura Gaussiana é dada pelo determinante de (a_{ij}) e a curvatura média é dada pelo negativo da metade do traço, assim

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = -\frac{1}{2}\text{tr}(a_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Agora, vamos fazer o cálculo da curvatura Gaussiana e média para algumas superfícies, neste sentido torna-se importante determinar fórmulas computacionais convenientes para a curvatura Gaussiana e curvatura média de superfície de revolução.

Exemplo 12. (*Superfície de Revolução*) Considere a superfície obtida pela rotação da curva geratriz $\alpha(v) = (\phi(v), \psi(v))$, no plano xz em torno do eixo z , cuja parametrização é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\sen(u), \psi(v)),$$

com $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$ e $\phi(v) > 0$, onde α é parametrizada pelo comprimento de arco.

Como $\|\alpha'\| = 1$, então $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental obtemos

$$\begin{aligned} E &= \langle (-\phi(v)\text{sen}(u), \phi(v)\text{cos}(u), 0), (-\phi(v)\text{sen}(u), \phi(v)\text{cos}(u), 0) \rangle = \phi^2, \\ F &= \langle (-\phi(v)\text{sen}(u), \phi(v)\text{cos}(u), 0), (\phi'(v)\text{cos}(u), \phi'(v)\text{sen}(u), \psi'(v)) \rangle = 0, \\ G &= \langle (\phi'(v)\text{cos}(u), \phi'(v)\text{sen}(u), \psi'(v)), (\phi'(v)\text{cos}(u), \phi'(v)\text{sen}(u), \psi'(v)) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Para o cálculo dos coeficientes da segunda forma fundamental, lembramos que

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} e &= \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uu} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\phi^2}} \begin{vmatrix} -\phi\text{sen}(u) & \phi'\text{cos}(u) & -\phi\text{cos}(u) \\ \phi\text{cos}(u) & \phi'\text{sen}(u) & -\phi\text{sen}(u) \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} = -\phi\psi', \\ f &= \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uv} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\phi^2}} \begin{vmatrix} -\phi\text{sen}(u) & \phi'\text{cos}(u) & -\phi'\text{sen}(u) \\ \phi\text{cos}(u) & \phi'\text{sen}(u) & -\phi'\text{cos}(u) \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ g &= \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{vv} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\phi^2}} \begin{vmatrix} -\phi\text{sen}(u) & \phi'\text{cos}(u) & -\phi''\text{cos}(u) \\ \phi\text{cos}(u) & \phi'\text{sen}(u) & -\phi''\text{sen}(u) \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} = -\psi'\phi'' - \psi''\phi'. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-(\phi\psi')(-\psi'\phi'' - \psi''\phi')}{\phi^2} = -\frac{\psi'(\psi'\phi'' - \psi''\phi')}{\phi}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{(-\psi' + \phi(\psi'\phi'' - \psi''\phi'))}{\phi}. \end{aligned}$$

Como α é parametrizada pelo comprimento de arco, derivando com relação a v a expressão $(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\phi'\phi'' + 2\psi'\psi'' &= 0 \\ \Rightarrow \phi'\phi'' &= -\psi'\psi''. \end{aligned}$$

Logo,

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\phi'' - \psi''\phi')}{\phi} = -\frac{(\psi')^2\phi'' - \psi'\psi''\phi'}{\phi} = -\frac{(\psi')^2\phi'' - (\phi')^2\phi''}{\phi} = -\frac{\phi''}{\phi}.$$

A expressão da curvatura acima é conveniente para o cálculo da curvatura Gaussiana de uma superfície de revolução qualquer, cuja curva geratriz é parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 13. Vamos calcular a curvatura Gaussiana da esfera, cuja parametrização é dada por (Figura 2.8)

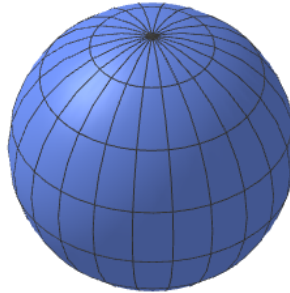
$$\mathbf{x}(u, v) = (\text{sen}(v)\cos(u), \text{sen}(v)\text{sen}(u), \cos(v)),$$

onde, $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in (0, \pi)$.

Como a esfera é uma superfície de revolução, obtida pela rotação da curva $\alpha(v) = (\text{sen}(v), \cos(v))$, que é p.c.a. segue que o valor da curvatura Gaussiana é dado por

$$K = -\frac{(\text{sen}(v))''}{\text{sen}(v)} = \frac{\text{sen}(v)}{\text{sen}(v)} = 1.$$

Figura 2.8: Esfera.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 14. Vamos calcular as curvaturas Gaussiana e média da pseudoesfera cuja curva geratriz é $\alpha(v) = (\text{sen}(v), \cos(v) + \ln(\tan(\frac{v}{2})))$ e sua parametrização é dada por (Figura 2.9)

$$\mathbf{x}(u, v) = (\text{sen}(v)\cos(u), \text{sen}(v)\text{sen}(u), \cos(v) + \ln(\tan(\frac{v}{2}))),$$

onde $v \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $u \in (0, 2\pi)$.

Claramente, $\|\alpha'\| \neq 1$, com isso não podemos usar a definição de curvatura do Exemplo 12, tendo em vista que a curva geratriz não é parametrizada pelo comprimento do arco. Sendo assim, devemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais.

Calculando as derivadas parciais de primeira e segunda ordem com relação a u e v , temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), \operatorname{sen}(v)\cos(u), 0), \\ \mathbf{x}_v &= \left(\cos(v)\cos(u), \cos(v)\operatorname{sen}(u), -\operatorname{sen}(v) + \frac{\sec^2(\frac{v}{2})}{2\tan(\frac{v}{2})} \right), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-\operatorname{sen}(v)\cos(u), -\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= \left(-\operatorname{sen}(v)\cos(u), -\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), -\cos(v) + \frac{\sec^2(\frac{v}{2})}{2} - \frac{\sec^4(\frac{v}{2})}{4\tan(\frac{v}{2})} \right), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\cos(v)\operatorname{sen}(u), \cos(v)\cos(u), 0).\end{aligned}$$

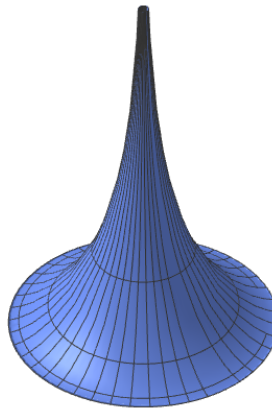
Assim,

$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \operatorname{sen}^2(v), & e &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uu} \right) = -\operatorname{sen}(v)\cos(v), \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, & f &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uv} \right) = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \cot^2(v), & g &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{vv} \right) = \cot(v).\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\cos^2(v)}{(\operatorname{sen}^2(v)\cot^2(v))} = -1, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-\operatorname{sen}(v)\cos(v)\cot^2(v) + \cot(v)\operatorname{sen}^2(v)}{\operatorname{sen}^2(v)\cot^2(v)} \right) = \frac{1}{2}(\tan(v) - \cot(v)).\end{aligned}$$

Figura 2.9: Pseudoesfera.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 15. Vamos calcular as curvaturas Gaussiana e média do toro, coberto pela parametrização (Figura 2.10),

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r\cos(u))\cos(v), (a + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u)),$$

onde, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, 2\pi)$, $a > r > 0$.

Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais obtemos,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)), \\ \mathbf{x}_v &= (-(a + r\cos(u))\sin(v), (a + r\cos(u))\cos(v), 0), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-r\cos(u)\cos(v), -r\cos(u)\sin(v), -r\sin(u)), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-(a + r\cos(u))\cos(v), -(a + r\cos(u))\sin(v), 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (r\sin(u)\sin(v), -r\sin(u)\cos(v), 0).\end{aligned}$$

Assim,

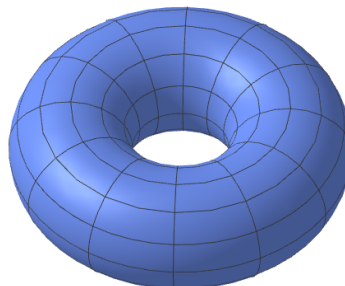
$$\begin{aligned}E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= r^2, & e &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uu} \right) = r, \\ F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= 0, & f &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uv} \right) = 0, \\ G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= (a + r\cos(u))^2, & g &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{vv} \right) = \cos(u)(a + r\cos(u)).\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}K &= \frac{\cos(u)}{r(a + r\cos(u))}, \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{r(a + r\cos(u))^2 + \cos(u)(a + r\cos(u))r^2}{r^2(a + r\cos(u))^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(u)}{a} + \frac{2}{r} \right).\end{aligned}$$

Da expressão acima, decorre que $K = 0$ quando $\cos(u) = 0$, isto é, $u = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{3\pi}{2}$. K é negativa na região do toro dada por $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ e K é positiva na região dada por $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$.

Figura 2.10: Toro.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 16. Determine as curvaturas Gaussiana e média do catenóide, cuja parametrização é dada por (Figura 2.11)

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cos(u), a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sin(u), v \right), \quad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Para o cálculo dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais necessitamos das derivadas parciais de primeira e segunda ordem,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \left(-a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sin(u), a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cos(u), 0 \right), \\ \mathbf{x}_v &= \left(\sinh\left(\frac{v}{a}\right) \cos(u), \sinh\left(\frac{v}{a}\right) \sin(u), 1 \right), \\ \mathbf{x}_{uu} &= \left(-a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cos(u), -a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sin(u), 0 \right), \\ \mathbf{x}_{vv} &= \left(\frac{\cos(u) \cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{a}, \frac{\sin(u) \cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{a}, 0 \right), \\ \mathbf{x}_{uv} &= \left(\sinh\left(\frac{v}{a}\right) \sin(u), \sinh\left(\frac{v}{a}\right) \cos(u), 0 \right). \end{aligned}$$

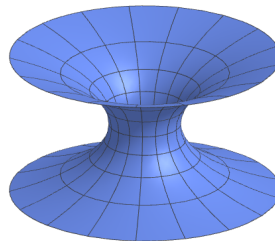
Segue que,

$$\begin{aligned} E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= a^2 \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right), & e &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uu} \right) = -a, \\ F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= 0, & f &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{uv} \right) = 0, \\ G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right), & g &= \left(\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{vv} \right) = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$K = \left(\frac{-1}{a^2 \cosh^4\left(\frac{v}{a}\right)} \right), \quad H = \frac{-a \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) + a \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}{2a^2 \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)} = 0.$$

Figura 2.11: Catenóide.



Fonte: Autoria própria.

Capítulo 3

Geometria Intrínseca de Superfícies

Este capítulo será dedicado ao estudo da *geometria intrínseca* da superfície. Estudaremos propriedades locais importantes de uma superfície que podem ser expressas apenas em termos da primeira forma fundamental. A terminologia "intrínseca" se justifica pois, como tais propriedades dependem apenas da primeira forma fundamental não precisamos fazer menção ao ambiente \mathbb{R}^3 .

Na Seção 3.1 definiremos a noção de isometria, que basicamente torna precisa a noção intuitiva de duas superfícies possuírem localmente as mesmas propriedades métricas.

Na Seção 3.2 mostraremos a fórmula de Gauss que expressa a curvatura Gaussiana K em função dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, isto significa que K é um conceito intrínseco.

Por fim, na Seção 3.3, estudaremos a derivada covariante de um campo de vetores sobre uma superfície. Tal conceito é uma generalização da derivada usual de campos de vetores no plano.

3.1 Isometria e aplicações conformes

Sabemos que embora o cilindro e o plano sejam superfícies diferentes, os coeficientes da primeira forma fundamental coincidem, isto significa que localmente o cilindro e o plano se comportam da mesma maneira para questões métricas. O fato do cilindro e do plano possuírem os mesmos coeficientes da primeira forma fundamental não é coincidência. Considere S e \bar{S} superfícies regulares.

Definição 19. Um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria se para todo $p \in S$ e para

todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$ temos

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Dizemos então que, S e \bar{S} são isométricas. Em outras palavras, um difeomorfismo φ é isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno, consequentemente ela preserva comprimentos e ângulos. Se $d\varphi$ é isometria, temos

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \quad \forall w \in T_p S.$$

Inversamente, se um difeomorfismo φ preserva a primeira forma, isto é

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) \quad \forall w \in T_p S,$$

então,

$$\begin{aligned} I_p(w_1 + w_2) &= \langle w_1, w_2 \rangle + 2\langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_2 \rangle \\ \Rightarrow 2\langle w_1, w_2 \rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ \Rightarrow 2\langle w_1, w_2 \rangle &= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle \\ \Rightarrow \langle w_1, w_2 \rangle &= \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, φ é uma isometria.

Definição 20. Uma aplicação $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ definida em uma vizinhança V de $p \in S$ é uma isometria local em p se existe uma vizinhança \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ seja uma isometria. Se para todo $p \in S$ for possível estabelecer uma isometria local, então S e \bar{S} são ditas localmente isométricas. Se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é um difeomorfismo e existe uma isometria local para cada $p \in S$, então φ é uma isometria global.

Pode ocorrer de duas superfícies serem localmente isométricas e não serem globalmente isométricas. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 17. Seja $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ um plano passando pelo ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ e $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ cuja parametrização $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por,

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

e um cilindro C , cuja parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < +\infty\}$. Vamos mostrar que $\varphi = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(U)$ é isometria. Considere $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ curva em $U \subset \mathbb{R}^2$. Note que, se $w \in T_p(\mathbf{x}(U))$ então w é vetor tangente a curva $\mathbf{x}(u(t), v(t))$. Desta forma, podemos escrever w como combinação linear da base associada a $\mathbf{x}(u, v)$, isto é,

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Como $d\varphi_p(w)$ é vetor tangente a curva $\varphi(\mathbf{x}(u(t), v(t))) = \bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))$ então, $d\varphi_p(w)$ pode ser escrito como,

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Observe que,

$$\bar{E} = \langle w_1, w_1 \rangle = 1,$$

$$\bar{F} = \langle w_1, w_2 \rangle = 0,$$

$$\bar{G} = \langle w_2, w_2 \rangle = 1,$$

são os coeficientes da primeira forma da parametrização dada para o plano. Prosseguindo com os cálculos dos coeficientes para o cilindro obtemos,

$$E = \langle (-\sin(u), \cos(u), 0), (-\sin(u), \cos(u), 0) \rangle = \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1,$$

$$F = \langle (-\sin(u), \cos(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0,$$

$$G = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1.$$

Como $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$, segue que

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Com isso concluímos que o cilindro é localmente isométrico ao plano. A isometria global não ocorre pelo fato de não existir homeomorfismo entre o plano e o cilindro. O que acontece com o plano e o cilindro é um caso particular da proposição a seguir.

Proposição 13. Assuma a existência de parametrizações $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ e $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$ tal que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$ em U . Então a aplicação $\varphi : \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$ é isometria local.

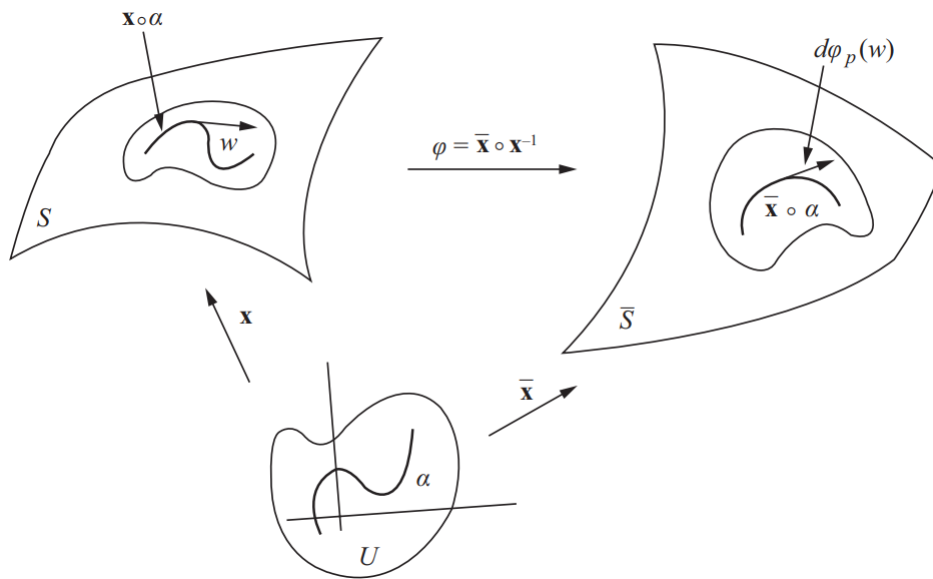
Demonstração. Seja $p \in \mathbf{x}(U)$ e $w \in T_p S$. Então w é tangente a uma curva $\mathbf{x}(\alpha(t))$ em $t = 0$, onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ é uma curva em U . Assim, w pode ser escrito (em $t = 0$) como $w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$. Por definição, o vetor $d\varphi_p(w)$ é vetor tangente à curva

$\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha(t))$ em $t = 0$ (Figura 3.1). Logo,

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v',$$

como $I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$, $I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2$ e temos por hipótese $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$, concluímos que $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ para todo $p \in \mathbf{x}(U)$ e todo $w \in T_p S$. Portanto, φ é uma isometria local.

Figura 3.1: Diagrama da aplicação φ .



Fonte: CARMO,2005,p. 264.

□

Exemplo 18. Seja S uma superfície de revolução e seja

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v)) \quad 0 < u < 2\pi, \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para S . Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

Em particular, a superfície gerada pela rotação da curva $x = a\cosh(v)$, $z = av$, $-\infty < v < +\infty$, é chamada de catenóide e uma parametrização para o catenóide é dada por,

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\cosh(v)\cos(u), a\cosh(v)\sen(u), av) \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental do catenóide são,

$$E = a^2 \cosh^2(v), \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2(v).$$

Agora vamos mostrar que o catenóide é localmente isométrico ao helicóide. Uma parametrização para o helicóide é dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos(\bar{u}), \bar{v} \sin(\bar{u}), a\bar{u}) \quad a > 0, \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < +\infty.$$

Para mostrar o que desejamos, basta provar que os coeficientes da primeira forma fundamental para alguma parametrização do helicóide e do catenóide são iguais. Desta forma, considere a mudança de parâmetros,

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh(v), \quad a < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Note que, a nova parametrização

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), au), \quad a < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty,$$

é diferenciável, pode-se mostrar que $\bar{\mathbf{x}}$ é homeomorfismo e o determinante do jacobiano

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh(v) \end{vmatrix} = a \cosh(v),$$

nunca se anula, garantido a validade da condição 3 da Definição 4. Por fim, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ do helicóide obtemos

$$\bar{E} = a^2 \cosh^2(v), \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = a^2 \cosh^2(v).$$

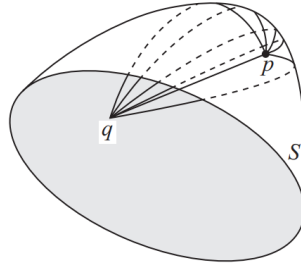
Concluimos, portanto, que o catenóide é localmente isométrico ao helicóide.

O fato de conseguirmos calcular comprimentos de curvas na superfície usando somente a primeira forma, nos permite introduzir a noção de distância "intrínseca" para pontos de S . A grosso modo, definimos $d(p, q)$ entre dois pontos de S como sendo o ínfimo dos comprimentos das curvas em S ligando p a q , isto é,

$$d(p, q) = \inf(l(\alpha_{p,q})),$$

onde $\alpha_{p,q}$ é uma curva parametrizada diferenciável por partes unindo p a q e $l(\alpha_{p,q})$ seu comprimento. Perceba que essa distância é maior ou igual a distância $\|p - q\|$ para $p, q \in \mathbb{R}^3$ (Figura 3.2).

Figura 3.2: Distância de p a q .



Fonte: CARMO,2005,p. 270.

Um fato interessante é que se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é isometria, então $d(p, q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$, $p, q \in S$. Assim, a noção de isometria é o conceito natural de equivalência para as propriedades métricas de superfícies regulares. Dizemos que duas superfícies são metricamente equivalentes se existe uma isometria φ entre S e \bar{S} .

Definição 21. Um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma aplicação conforme se para todo $p \in S$ e para todo $v_1, v_2 \in T_p S$

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

onde λ^2 é uma função diferenciável em S que não se anula. Nesta situação as superfícies S e \bar{S} são chamadas superfícies conformes.

Uma aplicação $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ em \bar{S} é uma aplicação conforme local se existir uma vizinhança \bar{V} de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ é uma aplicação conforme. Se para cada $p \in S$ existir uma aplicação conforme local em p , a superfície S é considerada localmente conforme a \bar{S} .

O significado geométrico da definição acima é que aplicações conformes preservam ângulos. Na verdade, seja $\alpha : I \rightarrow S$ e $\beta : I \rightarrow S$ duas curvas em S que se cruzam em, digamos, $t = 0$. Seu ângulo θ em $t = 0$ é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|}.$$

Uma aplicação conforme $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ aplica essas curvas em curvas $\varphi \circ \alpha : I \rightarrow \bar{S}$, $\varphi \circ \beta : I \rightarrow \bar{S}$ que se intersectam em $t = 0$, fazendo um ângulo $\bar{\theta}$ dado por,

$$\cos(\bar{\theta}) = \frac{\langle d\varphi_p(\alpha'(0)), d\varphi_p(\beta'(0)) \rangle}{|d\varphi_p(\alpha'(0))| \cdot |d\varphi_p(\beta'(0))|} = \frac{\lambda^2(0) \langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{\lambda^2(0) |\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|} = \cos(\theta).$$

Proposição 14. Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ e $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$ parametrizações tal que $E = \lambda^2 \bar{E}$, $F = \lambda^2 \bar{F}$ e $G = \lambda^2 \bar{G}$ em U , onde λ^2 é uma função diferenciável em U e nunca se anula. Então a aplicação $\varphi : \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$ é uma aplicação conforme local.

Demonstração. Considere $p \in \mathbf{x}(U)$ e $w \in T_p S$. Observe que w é vetor tangente a uma curva que é expressa em coordenadas por $\mathbf{x}(\alpha(t))$, vale ressaltar que $\alpha(t) = (u(t), v(t)) \in U$. Podemos escrever w como

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Por definição de diferencial $d\varphi_p(w)$ é vetor tangente da curva $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha(t)) \in \bar{S}$. Sendo assim, $d\varphi_p(w)$ é dada por

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Segue que,

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 = \lambda^2 (\bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2) = \lambda^2 (I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))).$$

Com isso, concluímos que $I_p(w) = \lambda^2 (I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)))$ para todo $p \in S$ e $w \in T_p S$. Logo $\varphi : \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$ é uma aplicação conforme local. \square

O seguinte teorema nos fornece a propriedade mais importante de aplicações conformes, mas não será demonstrado aqui.

Teorema 2. Duas superfícies regulares quaisquer são localmente conformes.

A ideia de demonstrar este teorema se baseia na possibilidade de parametrizar uma vizinhança de qualquer ponto de uma superfície regular de tal forma que os coeficientes da primeira forma sejam,

$$E = \lambda^2(u, v) > 0, \quad F = 0, \quad G = \lambda^2(u, v).$$

Esse sistema de coordenadas é denominado isotérmico.

A demonstração do teorema não será apresentando aqui, o leitor poderá encontrar em [9], p. 15-35.

3.2 O teorema de Gauss e as equações de compatibilidade

Nesta seção temos como objetivo mostrar a fórmula de Gauss que expressa a curvatura Gaussiana K em função dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas,

isso nos diz que K é um conceito intrínseco. Prosseguindo de modo análogo ao estudo das propriedades locais das curvas, vamos atribuir a cada ponto da superfície um triedro $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ e estudar as derivadas desses vetores. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização na orientação de S . É possível atribuir para cada ponto de $\mathbf{x}(U)$ um triedro natural dado pelos vetores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ e N . Iremos expressar as derivadas dos vetores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ e N na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$. Como N é vetor normal e unitário, segue que $\langle N, N \rangle = 1$, derivando com respeito a u (analogamente a v) obtemos $\langle N_u, N \rangle = 0$, logo $N_u \in T_p S$ (analogamente $N_v \in T_p S$). Segue que,

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + L_1N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v + L_2N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v + \bar{L}_2N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v + L_3N, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde os a_{ij} , $i, j = 1, 2$, são dados por,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

e os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, são chamados de *símbolos de Christoffel* de S na parametrização \mathbf{x} . Como $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos com relação aos índices baixos. Observe que,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle, \\ g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

são os coeficientes da segunda forma fundamental. Daí,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v + L_1N \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1\langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma_{11}^2\langle N, \mathbf{x}_v \rangle + L_1\langle N, N \rangle = L_1. \end{aligned}$$

Prosseguindo de maneira análoga para $\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vu}$ e \mathbf{x}_{vv} , iremos obter $L_2 = \bar{L}_2 = f$, $L_3 = g$. Para determinar os símbolos de Christoffel, observe o seguinte

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \\ E_u &= 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F.$$

Portanto,

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2}.$$

Procedendo de forma análoga com as outras combinações de produtos internos entre derivadas parciais de segunda ordem e primeira ordem da parametrização \mathbf{x} , obtemos

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{E_u}{2}, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{E_v}{2}, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_v}{2}, \end{cases}$$

Observe que as Equações acima foram agrupadas em três pares de Equações e que para cada par o determinante do sistema é $EG - F^2 \neq 0$. É possível resolver o sistema acima e calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas. Um fato importante, que segue da solução do sistema acima, é que todos os conceitos e propriedades geométricas expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometria.

Exemplo 19. Iremos calcular os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução cuja sua parametrização é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v)) \quad f(v) > 0,$$

onde $u \in (0, 2\pi)$ e $a < v < b$. Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

segue daí que,

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v &= 2f(v) \cdot f'(v), \\ F_u &= 0, & F_v &= 0, \\ G_u &= 0, & G_v &= 2(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)). \end{aligned}$$

Analisando o sistema dos pares de Equações acima, com os resultados adquiridos para os coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, segue que,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{f(v) \cdot f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{f(v) \cdot f'(v)}{(f(v))^2}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'(v) \cdot f''(v) + g'(v) \cdot g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}. \end{aligned}$$

Como vimos inicialmente, as expressões das derivadas de \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v e N na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ envolvem somente o conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de S . Uma forma de conseguirmos relacionar esses coeficientes é considerar as expressões,

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u &= 0, \\ (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo os valores de (3.1) podemos escrever as relações de (3.2) na forma

$$\begin{aligned} A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1N &= 0, \\ A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2N &= 0, \\ A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3N &= 0, \end{aligned}$$

onde A_i, B_i, C_i , $i = 1, 2, 3$, são funções de E, F, G, e, f, g e suas derivadas. Como os vetores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N$ são linearmente independentes, implica que existem 9 relações tal que

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Como exemplo, iremos determinar as relações $A_1 = B_1 = C_1 = 0$. Usaremos os valores de (3.1) e da primeira expressão obtida em (3.2), podemos escrever

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{x}_v + e_v N \\ & = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{x}_v + f_u N. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando os valores de (3.1) em (3.3) e igualando aos coeficientes de \mathbf{x}_v obtemos $B_1 = 0$ e escrevemos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Introduzindo os valores de a_{21} e a_{22} dados por

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ & = \left(\frac{efF - efF - egE + f^2E}{EG - F^2} \right) \\ & = -E \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) = -EK. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Convém neste momento interromper nossos cálculos para chamar a atenção para o fato de que a equação acima prova o seguinte teorema.

Teorema 3. (*Teorema Egregium de Gauss*) A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.

Demonstração. De fato, se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S em p e se $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$, onde $V \subset \mathbf{x}(U)$ é uma vizinhança de p , é uma isometria local em p , então $y = \varphi \circ \mathbf{x}$ é uma parametrização de \bar{S} em $\varphi(p)$. Como φ é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental das parametrizações \mathbf{x} e \mathbf{y} são iguais em pontos correspondentes q e $\varphi(q)$, $q \in V$, conseqüentemente, os símbolos de Christoffel correspondentes também são iguais. Observe que acima expressamos K em um ponto, em função dos símbolos de Christoffel em uma dada parametrização. Segue daí que $K(q) = K(\varphi(q)) \quad \forall q \in V$. \square

A expressão acima que produz o valor da curvatura K em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas, é conhecida como a *fórmula de Gauss*. Este teorema é um dos fatos mais importantes da geometria diferencial. Como provamos na seção anterior que o catenóide é localmente isométrico ao helicóide, concluímos então

que suas curvaturas Gaussianas são iguais nos pontos correspondentes.

Visando mais um resultado geométrico, voltamos aos nossos cálculos. Usando novamente os valores de (3.1) em (3.3) e igualando aos coeficientes de \mathbf{x}_u obtemos $A_1 = 0$ e escrevemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12} + (\Gamma_{11}^1)_v &= \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11} + (\Gamma_{12}^1)_u \\ \Rightarrow (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= ea_{12} - fa_{11} \\ \Rightarrow (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= ea_{12} - fa_{11}. \end{aligned}$$

Introduzindo os valores de a_{11} e a_{12} dados por

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= e \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \\ \Rightarrow (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= FK. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por fim, substituindo os valores de \mathbf{x}_{uv} e \mathbf{x}_{vu} de (3.1) em (3.3) e igualando os coeficientes de N obtemos $C_1 = 0$ e escrevemos na forma

$$\begin{aligned} f\Gamma_{11}^1 + g\Gamma_{11}^2 + e_v &= e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2 + f_u \\ \Rightarrow e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aplicando o mesmo processo na segunda expressão de (3.2), obtemos que ambas as equações $A_2 = 0$ e $B_2 = 0$ fornecem novamente a fórmula de Gauss. Além disso, $C_2 = 0$ é dado por

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (3.7)$$

O mesmo processo pode ser aplicado à última expressão de (3.2), resultando que $C_3 = 0$ é a identidade, isto é usando à última expressão de (3.2) e os valores de (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} N_{uv} &= N_{vu} \\ \Rightarrow (a_{11})_v \mathbf{x}_u + (a_{11}) \mathbf{x}_{uv} + (a_{12})_v \mathbf{x}_v + a_{21} \mathbf{x}_{vv} &= (a_{12})_u \mathbf{x}_u + a_{12} \mathbf{x}_{uu} + (a_{22})_u \mathbf{x}_v + a_{22} \mathbf{x}_{vu}, \end{aligned}$$

igualando os coeficientes de N da expressão acima e introduzindo os valores de (a_{ij}) visto anteriormente, escrevemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) f + \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) g = \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) e + \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) f \\ \Rightarrow & f^2F - f^2F - efG + efG + egF - egF - gfE + gfE = 0 \\ \Rightarrow & 0 = 0. \end{aligned}$$

Além disso, $A_3 = 0$ e $B_3 = 0$ são novamente (3.6) e (3.7). As Equações (3.6) e (3.7) são chamadas de *equações de Mainardi-Codazzi*. A fórmula de Gauss e as equações de Mainardi-Codazzi são conhecidas como *equações de compatibilidade* da teoria das superfícies.

Uma pergunta natural é: será que existem outras relações de compatibilidade entre a primeira e a segunda formas fundamentais, além daquelas já obtidas? O teorema abaixo (que não será demonstrado aqui) mostra que a resposta é não. Em outras palavras, por derivações sucessivas ou qualquer outro processo não obteríamos relações adicionais entre os coeficientes E, F, G, e, f, g e suas derivadas. Na verdade, o teorema é mais explícito e afirma que o conhecimento da primeira e a segunda formas fundamentais determina uma superfície localmente.

Teorema 4. (Bonnet) Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis, definido em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0$ e $G > 0$. Suponha que as funções satisfazem formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Codazzi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para cada $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ de modo que a superfície regular $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se U for conexo e se

$$\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3,$$

é outro difeomorfismo que satisfaz as mesmas condições, então existe uma translação T e uma transformação ortogonal linear especial ρ em \mathbb{R}^3 de tal modo que $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$.

O teorema acima não será demonstrado aqui, mas o leitor poderá encontrar a demonstração na referência [1], p. 373-379.

Proposição 15. Se \mathbf{x} é uma parametrização ortogonal (isto é $F = 0$), então

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Demonstração. De fato, observe que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\ K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left(\frac{E_{vv} \cdot \sqrt{EG}}{EG} - \frac{E_v \cdot (E_v \cdot G + E \cdot G_v)}{2\sqrt{EG} \cdot EG} + \frac{G_{uu} \cdot \sqrt{EG}}{EG} - \frac{G_u \cdot (E_u \cdot G + E \cdot G_u)}{2\sqrt{EG} \cdot EG} \right) \\ K &= -\frac{E_{vv}}{2EG} + \frac{(E_v)^2 \cdot G}{4(EG)^2} + \frac{E_v \cdot E \cdot G_v}{4(EG)^2} - \frac{G_{uu}}{2EG} + \frac{G_u \cdot E_u \cdot G}{4(EG)^2} + \frac{(G_u)^2 \cdot E}{4(EG)^2}. \end{aligned}$$

Pela Equação (3.4), temos

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 = -EK. \quad (3.8)$$

Do sistema a seguir, como $F = 0$, obtemos os valores para os símbolos de Christoffel em função dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{E_u}{2}, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{E_v}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{E_v}{2}, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{G_u}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{G_v}{2}, \end{cases}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}.$$

Substituindo os valores encontrados acima em (3.8), obtemos

$$\left(\frac{G_u}{2G} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2G} \right)_v + \left(\frac{E_v}{2E} \right) \cdot \left(-\frac{E_v}{2G} \right) + \left(\frac{G_u}{2G} \right)^2 + \left(\frac{E_v}{2G} \right) \cdot \left(\frac{G_v}{2G} \right) - \left(\frac{E_u}{2E} \right) \cdot \left(\frac{G_u}{2G} \right) = -EK.$$

Desenvolvendo a equação e isolando K , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{G_{uu}}{2EG} - \frac{(G_u)^2}{2G^2 E} + \frac{E_{vv}}{2EG} - \frac{E_v \cdot G_v}{2G^2 E} - \frac{(E_v)^2}{4E^2 G} + \frac{(G_u)^2}{4G^2 E} + \frac{E_v \cdot G_v}{4G^2 E} - \frac{E_u \cdot G_u}{4E^2 G} &= -K \\ + \frac{E_{vv}}{2EG} - \frac{(E_v)^2 \cdot G}{4(EG)^2} - \frac{E_v \cdot G_v \cdot E}{4(EG)^2} + \frac{G_{uu}}{2EG} - \frac{E_u \cdot G_u \cdot G}{4(EG)^2} - \frac{(G_u)^2 \cdot E}{4(EG)^2} &= -K \\ -\frac{E_{vv}}{2EG} + \frac{(E_v)^2 \cdot G}{4(EG)^2} + \frac{E_v \cdot G_v \cdot E}{4(EG)^2} - \frac{G_{uu}}{2EG} + \frac{E_u \cdot G_u \cdot G}{4(EG)^2} + \frac{(G_u)^2 \cdot E}{4(EG)^2} &= K. \end{aligned}$$

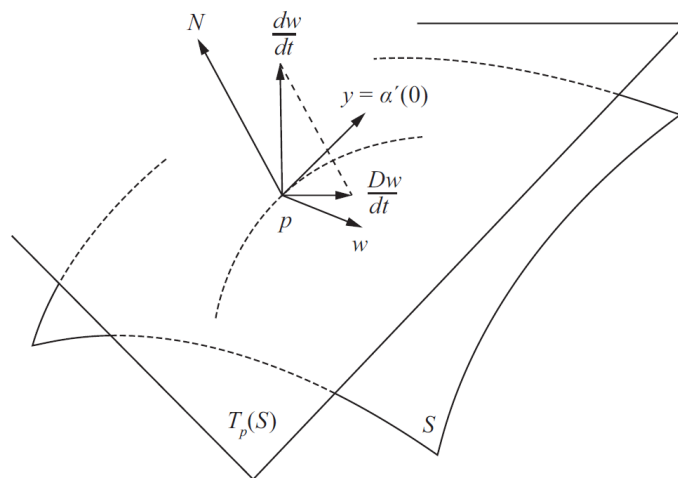
Como queríamos mostrar. □

3.3 Transporte Paralelo e Geodésicas

Vamos começar com a definição da derivada covariante de um campo de vetores. Lembremos que um campo de vetores tangentes em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma superfície regular S , é uma correspondência w que atribui a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p(S)$. O campo vetorial w é diferenciável em p se, para alguma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em p , as componentes a e b de $w = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ são funções diferenciáveis em p . O campo vetorial w é diferenciável em U se é diferenciável para todo $p \in U$.

Definição 22. Seja w um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $y \in T_pS$. Considere uma curva parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a restrição do campo de vetores w à curva α . O vetor obtido pela projeção de $\left(\frac{dw}{dt}\right)(0)$ sobre o plano T_pS é chamado a derivada covariante em p do campo de vetores w em relação ao vetor y . Esta derivada covariante é denotada por $\frac{Dw}{dt}(0)$ ou $(D_y w)(p)$ (Figura 3.3).

Figura 3.3: A derivada covariante.



Fonte: CARMO,2005,p. 286.

Vamos agora mostrar que a derivada covariante é um conceito intrínseco da geometria e que não depende da escolha da curva α . Considere $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ e

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))(\mathbf{x}_u) + b(u(t), v(t))(\mathbf{x}_v) \\ &= a(t)(\mathbf{x}_u) + b(t)(\mathbf{x}_v), \end{aligned}$$

a expressão de $w(t)$ na parametrização $\mathbf{x}(u, v)$. Então

$$\frac{dw}{dt} = a'\mathbf{x}_u + b'\mathbf{x}_v + a(t) \cdot (\mathbf{x}_{uu}u'(t) + \mathbf{x}_{uv}v'(t)) + b(t) \cdot (\mathbf{x}_{vu}u'(t) + \mathbf{x}_{vv}v'(t)).$$

Como $\frac{Dw}{dt}$ é a componente de $\frac{dw}{dt}$ no plano tangente, usando a expressão (3.1) e eliminando a componente normal, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= a' \mathbf{x}_u + b' \mathbf{x}_v + a \cdot [(\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v)u' + (\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v)v'] + \\ &\quad b [(\Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v)u' + (\Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v)v'] \\ \frac{Dw}{dt} &= \mathbf{x}_u \cdot (a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v') + \\ &\quad \mathbf{x}_v \cdot (b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{21}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v'). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podemos observar que a expressão acima nos diz que Dw/dt depende apenas do vetor $(u'(t), v'(t))$ e não da curva α . Ademais, a expressão está escrita em termos dos símbolos de Christoffel, ou seja, em termos da primeira forma fundamental e suas derivadas o que conclui nossa demonstração.

Ao considerarmos a superfície S como o plano, podemos obter uma parametrização onde $E = G = 1$ e $F = 0$, com isso obtemos que $\Gamma_{ij}^k = 0$ e conseqüentemente pela Equação (3.9), podemos observar que a derivada covariante é a derivada usual de vetores no plano, isto é

$$\frac{Dw}{dt} = a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v.$$

Neste ponto, podemos observar que a derivada covariante é uma generalização da derivada usual de vetores no plano.

Definição 23. A curva parametrizada $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ é a restrição para $[0, l]$ de uma aplicação diferenciável de $(0 - \epsilon, l + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, em S . Se $\alpha(0) = p$ e $\alpha(l) = q$, dizemos que α une p a q . A curva α é regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, l]$. Por conveniência usaremos $I = [0, l]$ sempre que a especificação do ponto final l não for necessária.

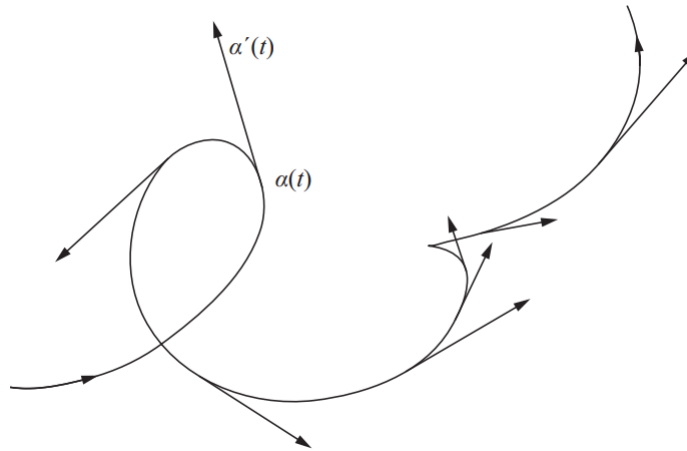
Definição 24. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ curva parametrizada em S . Um campo de vetores w ao longo de α é uma correspondência que atribui a cada $t \in I$ um vetor

$$w(t) \in T_{\alpha(t)} S.$$

Tal campo é diferenciável em $t_0 \in I$ se para alguma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em $\alpha(t_0)$ as funções componentes $a(t), b(t)$ de $w(t) = a \mathbf{x}_u + b \mathbf{x}_v$ são funções diferenciáveis de t no ponto t_0 . O campo w é diferenciável em I se é diferenciável em todos os pontos de $t \in I$.

Um exemplo de um campo de vetores (diferenciável) ao longo de α é dado pelo campo $\alpha'(t)$ dos vetores tangentes de α (Figura 3.4).

Figura 3.4: O campo de vetores tangentes ao longo de uma curva α .



Fonte: CARMO,2005,p. 287.

Definição 25. Seja w um campo de vetores diferenciável ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$. A expressão obtida acima para derivada covariante $(Dw/dt)(t), t \in I$, está bem definida e é chamada derivada covariante de w em t .

De um ponto de vista externo a superfície, a fim de obter a derivada covariante de um campo w ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$ com $t \in I$ tomamos a derivada usual $(dw/dt)(t)$ de w em t e projetamos este vetor ortogonalmente em $T_{\alpha(t)}S$. Segue que quando duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva parametrizada α a derivada covariante de um campo w ao longo de α é a mesma para ambas as superfícies.

Observe que se $\alpha(t)$ é uma curva em S , podemos pensar nela como a trajetória de um ponto que está se movendo na superfície. Desta forma, $\alpha'(t)$ é então a velocidade e $\alpha''(t)$ a aceleração. A derivada covariante $D\alpha'/dt$ do campo $\alpha'(t)$ é a componente tangencial da aceleração $\alpha''(t)$. Intuitivamente $D\alpha'/dt$ é a aceleração do ponto $\alpha(t)$ visto de S .

Definição 26. Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é dito paralelo se $Dw/dt = 0$ para todo $t \in I$.

Proposição 16. Sejam w e v campos paralelos ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$. Então $\langle w(t), v(t) \rangle$ é constante. Em particular, $|w(t)|$ e $|v(t)|$ são constantes e o ângulo entre $w(t)$ e $v(t)$ também é constante.

Demonstração. Observe que se w é campo paralelo ao longo de α , então dw/dt é normal a $T_{\alpha(t)}S$, isto é

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Pelo mesmo argumento acima, segue que

$$\langle v'(t), w(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Portanto,

$$(\langle v(t), w(t) \rangle)' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Logo o produto interno entre $v(t)$ e $w(t)$ é constante. Para mostrar que $|v(t)|$ é constante, basta considerar $w(t) = v(t)$ e repetir o processo acima (analogamente para $|w(t)|$), isto é, se $w(t) = v(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} (\langle v(t), v(t) \rangle)' &= \langle v'(t), v(t) \rangle + \langle v(t), v'(t) \rangle = 0, \quad t \in I \\ \Rightarrow \langle v(t), v(t) \rangle &= c \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como $|v(t)|^2 = \langle v(t), v(t) \rangle$, segue que $|v(t)|$ é constante. Uma vez que o produto interno entre os dois campos é constante e a norma de cada um também é constante, segue de imediato que o ângulo entre $v(t)$ e $w(t)$ também é constante. \square

O campo de vetores tangentes de um meridiano (parametrizado pelo comprimento de arco) de uma esfera unitária \mathbb{S}^2 é um campo paralelo em \mathbb{S}^2 (Figura 3.5). De fato, seja $\alpha(t)$ o campo de vetores tangentes do meridiano parametrizado pelo comprimento de arco. Então

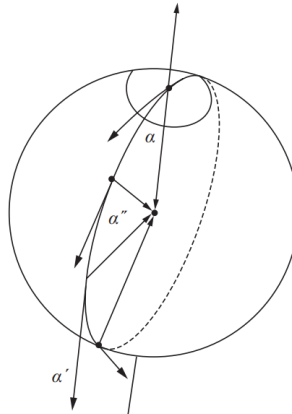
$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1,$$

e derivando em ambos os lados com relação a t , obtemos

$$2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Portanto, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$, logo sua derivada covariante é zero.

Figura 3.5: Campo paralelo em \mathbb{S}^2 .



Fonte: CARMO, 2005, p. 289.

A seguir veremos uma proposição que garante a existência de um campo de vetores paralelos ao longo de uma curva parametrizada $\alpha(t)$ e que eles são completamente determinados por seus valores em um ponto t_0 .

Proposição 17. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e seja $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S, t_0 \in I$. Então existe um único campo vetorial paralelo $w(t)$ ao longo de $\alpha(t)$, com $w(t_0) = w_0$.

A demonstração deste resultado será feita mais adiante como aplicação da Proposição 18, p. 74.

A proposição acima nos permite definir transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva parametrizada.

Definição 27. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S, t_0 \in I$. Seja w o campo de vetores paralelo ao longo de α , com $w(t_0) = w_0$. O vetor $w(t_1), t_1 \in I$, é chamado de transporte paralelo de w_0 ao longo de α no ponto t_1 .

Note que se a curva $\alpha : I \rightarrow S, t \in I$ é regular, então o transporte paralelo não depende da parametrização de $\alpha(I)$. Com efeito, se $\beta : J \rightarrow S, \sigma \in J$ é outra parametrização regular para $\alpha(I)$ e $t : J \rightarrow I$ é tal que $dt/d\sigma \neq 0 \quad \forall t \in I$, então da Equação (3.9) temos

$$\frac{Dw}{d\sigma} = \frac{Dw}{dt} \frac{dt}{d\sigma}, \quad t \in I, \sigma \in J.$$

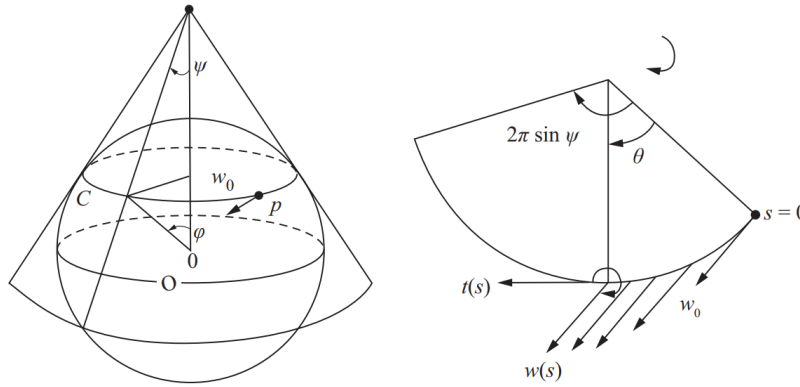
Assim, $w(t)$ é paralelo, se e só se, $w(\sigma)$ é paralelo.

A Proposição 16 contém uma propriedade interessante do transporte paralelo. Fixe dois pontos $p, q \in S$ e uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$. Denote por $P_\alpha : T_pS \rightarrow T_qS$ a aplicação que atribui a cada $v \in T_pS$ seu transporte paralelo ao longo de α em q . A Proposição 16 diz que esta aplicação é uma isometria linear.

Outra propriedade interessante do transporte paralelo é que se duas superfícies S e S' são tangentes ao longo de uma curva parametrizada α e w_0 é um vetor de $T_{\alpha(t_0)}S = T_{\alpha(t_0)}S'$, então $w(t)$ é o transporte paralelo de w_0 em relação à superfície S se e somente se $w(t)$ é o transporte paralelo de w_0 em relação a S' . Na verdade, a derivada covariante Dw/dt de w é a mesma para ambas as superfícies.

Exemplo 20. Seja C um paralelo de colatitude φ de uma esfera unitária e seja w_0 um vetor unitário, tangente a C em algum ponto p de C . Determinamos o transporte paralelo de w_0 ao longo de C , parametrizado pelo comprimento do arco s , com $s = 0$ em p (Figura 3.6).

Figura 3.6: Transporte paralelo em superfícies tangentes.



Fonte: CARMO, 2005, p. 291-292

Considere o cone que é tangente à esfera ao longo de C . O ângulo ψ no vértice deste cone é dado por $\psi = (\pi/2) - \varphi$. Pela propriedade acima, o problema se reduz à determinação do transporte paralelo de w_0 , ao longo de C , em relação ao cone tangente. Sabemos que um cone menos uma geratriz é isométrico a um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ dado em coordenadas polares por

$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \operatorname{sen}(\psi).$$

Como no plano o transporte paralelo coincide com a noção usual, obtemos, para um deslocamento s de p , correspondendo ao ângulo central θ , que o ângulo orientado formado pelo vetor tangente $t(s)$ com o transporte paralelo $w(s)$ é dado por $2\pi - \theta$.

Definição 28. A aplicação $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ é uma curva parametrizada regular por partes se α é contínua e existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

do intervalo $[0, l]$ de forma que a restrição $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k$, é uma curva parametrizada regular. Cada $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é chamado de arco regular de α .

A noção de transporte paralelo pode ser facilmente estendida a curvas parametrizadas regulares por partes. Se, digamos, o valor inicial w_0 está no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, realizamos o transporte paralelo no arco regular $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ como usual; se $t_{i+1} \neq l$, tomamos $w(t_{i+1})$ como o valor inicial para o transporte paralelo no próximo arco $\alpha|_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}$ e assim por diante.

Definição 29. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow S$ não constante é uma geodésica em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t , isto é,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

γ é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo $t \in I$.

Observe que pela Proposição 16, $|\gamma'(t)| = c \neq 0$. Portanto, podemos introduzir o comprimento do arco $s = ct$ como um parâmetro, e concluímos que o parâmetro t de uma geodésica parametrizada γ é proporcional ao comprimento de arco de γ .

Observe que uma geodésica parametrizada pode admitir auto interseções, entretanto, seu vetor tangente nunca se anula e conseqüentemente a parametrização é regular. As considerações anteriores nos permitem estender a definição de geodésica para subconjuntos de S que são curvas regulares.

Definição 30. Uma curva C regular conexa em S é dita uma geodésica se, para cada $p \in C$, a parametrização $\alpha(s)$ de uma vizinhança coordenada de p pelo comprimento do arco s é uma geodésica parametrizada, isto é, $\alpha'(s)$ é um campo de vetores paralelo ao longo de $\alpha(s)$.

Note que cada linha reta contida em uma superfície satisfaz a definição acima. De um ponto de vista externo à superfície S , a definição 30 é equivalente a dizer que $\alpha''(s) = kn$ é normal ao plano tangente, ou seja, paralelo ao vetor normal à superfície. Em outras palavras, uma curva regular $C \subset S$ ($k \neq 0$) é uma geodésica se, e somente se, sua normal principal em cada ponto $p \in C$ é paralelo ao vetor normal de S em p .

A propriedade acima pode ser usada para identificar algumas geodésicas geometricamente, conforme mostrado no exemplo abaixo.

Exemplo 21. Os grandes círculos de uma esfera \mathbb{S}^2 são geodésicas. Na verdade, os grandes círculos C são obtidos intersectando a esfera com um plano que passa através do centro O da esfera. A normal principal em um ponto $p \in C$ encontra-se na direção do segmento que liga p a O porque C é um círculo de centro O . Sabemos que o vetor normal de \mathbb{S}^2 está na mesma direção, que verifica nossa afirmação.

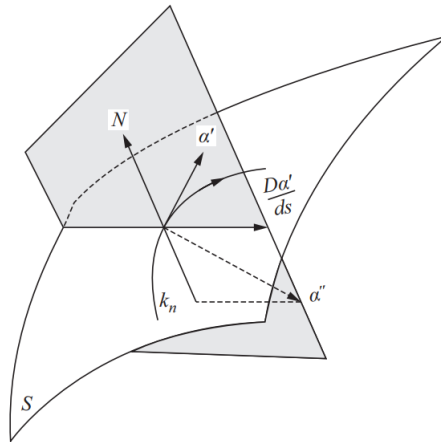
Definição 31. Seja w um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ em uma superfície orientada S . Uma vez que $w(t), t \in I$, é um campo de vetores unitários, $(dw/dt)(t)$ é normal a $w(t)$ e, portanto,

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)).$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, é chamado de valor algébrico da derivada covariante de w em t . Observe que o sinal de $[Dw/dt]$ depende da orientação de S e que $[Dw/dt] = \langle dw/dt, N \times w \rangle$, isto é, o valor algébrico é a componente da projeção ortogonal de dw/dt sobre $N \times w$.

A partir de agora, a orientação de S terá um papel essencial nos conceitos a serem introduzidos. Devemos agora definir, para uma curva em uma superfície, um conceito que é análogo a curvatura das curvas planas.

Figura 3.7: A curvatura geodésica.



Fonte: CARMO,2005,p. 298.

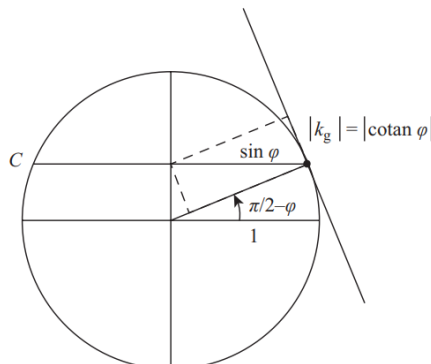
Definição 32. Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S , e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C , em uma vizinhança de $p \in S$, pelo comprimento do arco s . O valor algébrico da derivada covariante $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ de $\alpha'(s)$ em p é chamado curvatura geodésica de C em p (Figura 3.7).

As curvas regulares que são geodésicas são caracterizadas como curvas cuja curvatura geodésica é zero. De um ponto de vista externo à superfície, o valor absoluto do curvatura geodésica k_g de C em p é o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\alpha''(s) = kn$, onde k é a curvatura de C em p e n é o vetor normal de C em p . Lembrando que o valor absoluto da componente normal do vetor kn é o valor absoluto da curvatura normal k_n de $C \subset S$ em p , com isso temos,

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Por exemplo, o valor absoluto da curvatura geodésica k_g de um paralelo C de colatitude φ em uma esfera unitária S^2 pode ser calculado a partir da relação (Figura 3.8),

Figura 3.8: Curvatura geodésica de um paralelo em S^2 .



Fonte: CARMO,2005,p. 299.

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = k_n^2 + k_g^2 = 1 + k_g^2;$$

isto é,

$$\begin{aligned} k_g^2 &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} - 1 \\ &= \cot^2 \varphi. \end{aligned}$$

O sinal de k_g depende das orientações de S^2 e C . Uma outra consequência dessa interpretação externa é que, quando duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva regular C , o valor absoluto da curvatura geodésica de C é a mesma em relação a qualquer uma das duas superfícies. Observe que a curvatura geodésica de $C \subset S$ muda de sinal quando mudamos a orientação de C ou S .

Devemos agora obter uma expressão para o valor algébrico da derivada covariante. Para isso, precisamos de algumas preliminares. Sejam v e w dois campos de vetores diferenciáveis ao longo da curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1, t \in I$. Queremos definir uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $\varphi(t), t \in I$, é uma determinação do ângulo de $v(t)$ para $w(t)$ na orientação de S . Para isso, consideramos o campo vetorial diferenciável \bar{v} ao longo de α , definido pela condição de que $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ é uma base ortonormal positiva para cada $t \in I$. Assim, $w(t)$ pode ser expresso como

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t),$$

onde a e b são funções diferenciáveis em I e $a^2 + b^2 = 1$. O lema a seguir mostra que, fixando uma determinação φ_0 do ângulo de $v(t_0)$ a $w(t_0)$ é possível "estendê-lo" diferenciavelmente em I , e isso produz a função desejada.

Lema 1. Sejam a e b funções diferenciáveis em I com $a^2 + b^2 = 1$ e φ_0 seja tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0, b(t_0) = \operatorname{sen} \varphi_0$. Então a função diferenciável

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt,$$

é tal que $\cos \varphi(t) = a(t), \operatorname{sen} \varphi(t) = b(t), t \in I$ e $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demonstração. Observe que é suficiente mostrar que a função

$$(a(t) - \cos \varphi(t))^2 + (b(t) - \operatorname{sen} \varphi(t))^2 = 2 - 2(a(t) \cos \varphi(t) + b(t) \operatorname{sen} \varphi(t)),$$

é nula, ou seja,

$$A(t) = a(t) \cos \varphi(t) + b(t) \operatorname{sen} \varphi(t) = 1.$$

Como que $a^2(t) + b^2(t) = 1$, isto significa dizer que ao derivarmos com respeito a t , em ambos os lados, obteremos imediatamente $a(t) \cdot a'(t) = -b(t) \cdot b'(t)$. Desta forma, podemos observar que

$$\begin{aligned} A'(t) &= a' \cdot \cos \varphi - a \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \varphi' + b' \cdot \operatorname{sen} \varphi + b \cdot \cos \varphi \cdot \varphi' \\ &= -b' \operatorname{sen} \varphi (a^2 + b^2) - a' \cos \varphi (a^2 + b^2) + a' \cdot \cos \varphi + b' \cdot \operatorname{sen} \varphi \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

visto que,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(t) \cdot b'(t) - b(t) \cdot a'(t) \\ \Rightarrow b(t) \cdot \varphi'(t) &= a(t) \cdot b'(t) \cdot b(t) - b^2(t) \cdot a'(t) \\ \Rightarrow b(t) \cdot \varphi'(t) &= -a^2(t) \cdot a'(t) - b^2(t) \cdot a'(t) \\ \Rightarrow -b(t) \cdot \varphi'(t) &= (a^2(t) + b^2(t)) \cdot a'(t). \end{aligned}$$

De modo análogo multiplicando φ' por $a(t)$ obtemos $a(t) \cdot \varphi'(t) = (b^2(t) + a^2(t)) \cdot b'(t)$. Sendo assim, podemos concluir da Equação (3.10) que $A(t)$ é uma função constante e como por hipótese, sabemos que $A(t_0) = 1$, concluímos que $A(t) = 1, t \in I$, provando nosso lema. \square

Podemos agora relacionar a derivada covariante de dois campos de vetores unitários ao longo de uma curva com a variação do ângulo que eles formam.

Lema 2. Seja v e w dois campos diferenciáveis de vetores ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1, t \in I$. Então,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde φ é uma determinação diferenciável do ângulo de v a w , como dado no Lema 1.

Demonstração. Primeiro provaremos o caso onde $\varphi \neq 0$. Observe que $\cos \varphi = \langle v, w \rangle$. Derivando em ambos os lados, obtemos a seguinte expressão,

$$\langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle = -\operatorname{sen} \varphi \cdot \varphi'.$$

Como $|v| = 1$, temos que $v \perp v'$. Desta forma, ou v' pertence ao espaço tangente e é ortogonal a v ou é paralelo ao vetor normal a S , segue que a derivada covariante ou coincide

com o vetor v' ou é zero (analogamente para w). Logo a equação acima é equivalente a

$$\langle Dv/dt, w \rangle + \langle v, Dw/dt \rangle = -\operatorname{sen}\varphi \cdot \varphi'. \quad (3.11)$$

Perceba que,

$$\langle Dv/dt, w \rangle = \langle \lambda \cdot (N \times v), w \rangle = [Dv/dt] \cdot \langle N \times v, w \rangle.$$

Portanto, podemos reescrever o lado esquerdo da expressão (3.11) da seguinte maneira,

$$\langle Dv/dt, w \rangle + \langle v, Dw/dt \rangle = [Dv/dt] \cdot \langle N \times v, w \rangle + [Dw/dt] \cdot \langle v, N \times w \rangle.$$

Como $-\langle N \times v, w \rangle = \langle v, N \times w \rangle$ e $\langle N \times v, w \rangle = \cos\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{sen}\varphi$, onde β é o ângulo formado entre os vetores unitários $N \times v$ e w . Segue então que,

$$\begin{aligned} \langle Dv/dt, w \rangle + \langle v, Dw/dt \rangle &= ([Dv/dt] - [Dw/dt]) \cdot \langle N \times v, w \rangle \\ &\Rightarrow -\operatorname{sen}\varphi \cdot \varphi' = ([Dv/dt] - [Dw/dt]) \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ &\Rightarrow -\varphi' = [Dv/dt] - [Dw/dt] \\ &\Rightarrow \varphi' = [Dw/dt] - [Dv/dt], \end{aligned}$$

e isso prova o resultado para $\varphi \neq 0$. Se $\varphi = 0$ em p , ou $\varphi \equiv 0$ em uma vizinhança U de p , ou existe uma sequência $(p_n) \rightarrow p$ com $\varphi(p_n) = 0$. No primeiro caso, $\varphi' \equiv 0$ em U , $v = w$ e o resultado é provado imediatamente. No segundo caso, o resultado se verifica pela continuidade, pois se $\lim p_n = p$, como φ é diferenciável conseqüentemente contínua, tem-se $\lim \varphi(p_n) = \varphi(p) = 0$. \square

Uma consequência do Lema 2 é a seguinte observação: seja C uma curva orientada regular em S , $\alpha(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco s de C em $p \in C$, e $v(s)$ um campo paralelo ao longo de $\alpha(s)$. Então, tomando $w(s) = \alpha'(s)$, obtemos

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Em outras palavras, a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva, no caso da observação acima essa direção paralela é o campo de vetores v . No caso do plano, a direção paralela é fixa e a curvatura geodésica reduz-se à curvatura usual.

Agora podemos obter a expressão para o valor algébrico da derivada covariante. Sempre que falamos de uma parametrização de uma superfície orientada, essa parametrização é assumida como compatível com orientação.

Proposição 18. Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização ortogonal (isto é, $F = 0$) de uma vizinhança de uma superfície orientada S , e $w(t)$ um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva $\mathbf{x}(u(t), v(t))$. Então,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo de \mathbf{x}_u para $w(t)$ na orientação dada.

Demonstração. Considere $e_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}$ e $e_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$ vetores tangentes unitários para as curvas coordenadas. Observe que e_1 e e_2 pertencem ao espaço tangente, logo o produto vetorial $e_1 \wedge e_2 = N$, onde N é a orientação dada de S . Usando o Lema 2, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{De_1}{dt} \right] &= \frac{d\varphi}{dt} \\ \Rightarrow \left[\frac{Dw}{dt} \right] &= \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

onde $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$ é o campo e_1 restrito a curva $\mathbf{x}(u(t), v(t))$. Agora, usando a definição do valor algébrico, temos que,

$$\begin{aligned} \left[\frac{De_1}{dt} \right] &= \langle de_1/dt, N \wedge e_1 \rangle = \langle de_1/dt, e_2 \rangle = \langle (e_1)_u \cdot du/dt + (e_1)_v \cdot dv/dt, e_2 \rangle \\ &= \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \cdot du/dt + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \cdot dv/dt. \end{aligned}$$

Por hipótese, a parametrização é ortogonal, então obtemos,

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v,$$

segue daí que,

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_u, e_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right) \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\mathbf{x}_u E_u}{2E^2}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right) \right\rangle \\ &= -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \left[\frac{Dw}{dt} \right] &= -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Como aplicação da Proposição 18, provaremos a existência e a unicidade do transporte paralelo (Proposição 17).

Demonstração. (Proposição 17) Vamos assumir inicialmente que a curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ está contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal $\mathbf{x}(u, v)$. Então usando a notação da Proposição 18, com a condição de paralelismo do campo w , obtemos

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} = B(t).$$

Denotando por φ_0 uma determinação do ângulo orientado de \mathbf{x}_u para w_0 , o campo w é inteiramente determinado por

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t B(t)dt,$$

que prova a existência e unicidade de w neste caso, pois para cada ponto t , determinamos o ângulo φ que é formado de \mathbf{x}_u para w . Se $\alpha(I)$ não está contida em uma vizinhança coordenada, vamos dividir $\alpha(I)$ em um número finito de partes, cada uma contida em uma vizinhança coordenada. Usando a unicidade da primeira parte da prova nas intersecções não vazias de cada uma dessas partes, o resultado se estender naturalmente para o presente caso. □

Uma aplicação da Proposição 18 é a seguinte expressão para a curvatura geodésica, conhecida como *fórmula de Liouville*.

Proposição 19. (*Liouville*) Seja $\alpha(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco de uma vizinhança de um ponto $p \in S$ de uma curva orientada regular C em uma superfície orientada S . Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização ortogonal de S em p e $\varphi(s)$ o ângulo que \mathbf{x}_u faz com $\alpha'(s)$ na orientação dada. Então

$$k_g = (k_g)_1 \cdot \cos \varphi + (k_g)_2 \cdot \sen \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

onde $(k_g)_1$ e $(k_g)_2$ são as curvaturas geodésicas das curvas coordenadas $v = \text{const.}$ e $u = \text{const.}$ respectivamente.

Demonstração. Defina $w = \alpha'(s)$. Da Proposição 18, obtemos

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Ao longo da curva $v = \text{const.}$ e $u = u(s)$, temos $dv/ds = 0$ e $du/ds = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Portanto,

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}},$$

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Observe que,

$$k_g = \frac{G_u}{2\sqrt{G}\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{G}\sqrt{E}} \frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Ao introduzir as relações obtidas acima na fórmula de k_g , obtemos,

$$k_g = (k_g)_1 \cdot \sqrt{E} \frac{du}{ds} + (k_g)_2 \cdot \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds},$$

uma vez que,

$$\sqrt{E} \frac{du}{ds} = \left\langle \alpha'(s), \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \cos \varphi \quad , \quad \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \text{sen} \varphi.$$

Como queríamos. □

Vamos agora introduzir as equações de uma geodésica em uma vizinhança coordenada. Para isso, seja $\gamma : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização de S em uma vizinhança V de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$. Seja $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 de tal forma que $\gamma(J) \subset V$. Seja $\mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão em coordenadas de $\gamma : J \rightarrow S$ na parametrização \mathbf{x} . Então, o campo de vetores tangentes $w = \gamma'(t)$, $t \in J$, é dado por

$$w = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v.$$

Portanto, o fato de que w é campo paralelo, isto é $\frac{Dw}{dt} = 0$, é equivalente ao sistema de equações diferenciais (usando a expressão para derivada covariante em termos dos símbolos de Christoffel, fazendo $a = u'$ e $b = v'$),

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Em outras palavras, $\gamma : I \rightarrow S$ é geodésica se, e somente se, o sistema acima é satisfeito para todo intervalo $J \subset I$, tal que $\gamma(J)$ está contido em uma vizinhança coordenada. O sistema acima é conhecido como as *equações diferenciais das geodésicas de S* . Uma consequência importante do fato de que as geodésicas são caracterizadas pelo sistema (3.12) é a seguinte proposição.

Proposição 20. Dado um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_p(S)$, $w \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ e uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$.

Este resultado não será demonstrado aqui, mas o leitor poderá encontrar a demonstração na referência [1].

Agora iremos mostrar alguns exemplos de aplicações geométricas das equações diferenciais (3.12).

Exemplo 22. Devemos usar o sistema (3.12) para estudar localmente a geodésica de uma superfície de revolução com a parametrização,

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \operatorname{senu}, \quad z = g(v).$$

No exemplo 19 deste material, calculamos os símbolos de Christoffel para parametrização dada acima,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{f(v) \cdot f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{f(v) \cdot f'(v)}{(f(v))^2}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'(v) \cdot f''(v) + g'(v) \cdot g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}, \end{aligned}$$

substituindo esses valores na Equação (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' &= 0, \\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos obter algumas conclusões a partir dessas equações. Primeiro, os meridianos $u = \text{const.}$ e $v = v(s)$, parametrizado pelo comprimento de arco s , são geodésicas. Na verdade, a primeira Equação de (3.13) é trivialmente satisfeita por $u = \text{const.}$ A segunda equação torna-se

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = 0.$$

Calculando a primeira forma fundamental em $(0, v'(s))$, temos

$$I_p(0, v'(s)) = \begin{bmatrix} 0 & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v'(s) \end{bmatrix} = 1.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} ((f')^2 + (g')^2)(v')^2 &= 1 \\ \Rightarrow (v')^2 &= \frac{1}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

Derivando a expressão acima com respeito ao comprimento de arco s , temos

$$\begin{aligned} 2v'v'' &= -\frac{2(f'f'' + g'g'')}{((f')^2 + (g')^2)^2}(v') = -\frac{2(f'f'' + g'g'')}{(f')^2 + (g')^2}(v')^3, \\ \Rightarrow v'' &= -\frac{(f'f'' + g'g'')}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2, \quad v' \neq 0. \end{aligned}$$

Ou seja, ao longo do meridiano, a segunda Equação de (3.13) também é satisfeita, o que mostra que os meridianos são geodésicas. Agora vamos determinar quais paralelos $v = \text{const.}$ $u = u(s)$, parametrizados pelo comprimento do arco, são geodésicas. A primeira das Equações (3.13) nos dá,

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = \text{const.},$$

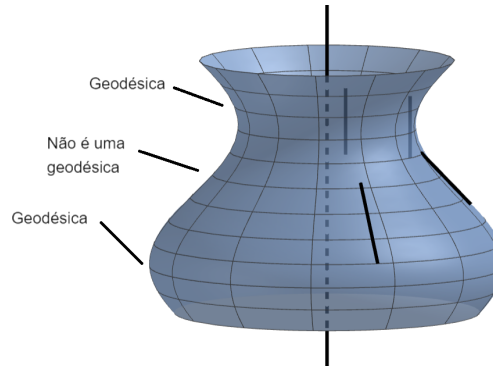
e a segunda equação nos diz que,

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 = 0.$$

Para que o paralelo $v = \text{const.}$ e $u = u(s)$ seja geodésica, é necessário que $f' = 0$, pois por hipótese $f > 0$.

Em outras palavras, uma condição necessária para que um paralelo de uma superfície de revolução seja geodésica é que, tal paralelo seja gerado pela rotação de um ponto da curva geratriz onde a tangente é paralela ao eixo de revolução. Esta condição é suficiente, já que ela implica que a reta normal do paralelo coincide com a reta normal à superfície (Figura 3.9).

Figura 3.9: Paralelos que são geodésica em uma superfície de revolução.



Fonte: Autoria própria.

Devemos obter para uso posterior uma consequência geométrica interessante da primeira das Equações (3.13), tal consequência conhecida como relação de Clairaut. Observe que tal equação pode ser escrita como,

$$(f^2 u')' = f^2 u'' + 2f f' u' v' = 0.$$

Consequentemente,

$$f^2 u' = \text{const.} = c.$$

Por outro lado, o ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$, de uma geodésica com um paralelo que a intersecta é dado por,

$$\cos \theta = \frac{|\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle|}{|\mathbf{x}_u|} = |f u'|,$$

onde $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é a base associada à parametrização dada. Como $f = r$ é o raio do paralelo no ponto de interseção, obtemos a relação de *Clairaut*

$$r \cos(\theta) = \text{const.} = |c|.$$

Finalmente, seja $u = u(s)$ e $v = v(s)$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, que assumiremos não ser um meridiano ou um paralelo da superfície. Vimos que a primeira Equação de (3.13), pode ser escrita como $f^2 u' = c \neq 0$. Como a geodésica é parametrizada pelo comprimento de arco, calculando a primeira forma fundamental em $(u'(s), v'(s))$

$$I_p(u'(s), v'(s)) = \begin{bmatrix} u'(s) & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} = 1.$$

Segue daí que

$$1 = f^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2, \quad (3.14)$$

juntando a equação acima com a primeira Equação (3.13), é equivalente à segunda Equação (3.13). Substituindo $f^2 u' = c$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + f^2 u' u' = 1 \\ \Rightarrow & ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{c^2}{f^2} = 1. \end{aligned}$$

Derivando com relação a s , temos

$$\begin{aligned} & 2 \frac{dv}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right)' ((f')^2 + (g')^2) + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 (2f'f'' + 2g'g'') \frac{dv}{ds} - \frac{2ff'c^2}{f^4} \frac{dv}{ds} = 0 \\ \Rightarrow & 2 \frac{dv}{ds} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right) ((f')^2 + (g')^2) + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 (2f'f'' + 2g'g'') \frac{dv}{ds} = \frac{2ff'c^2}{f^4} \frac{dv}{ds}. \end{aligned}$$

Analisando a equação acima, basta multiplicar por $\frac{1}{2v'((f')^2 + (g')^2)}$ e substituir $\frac{c^2}{f^4} = (u')^2$, que iremos obter a segunda Equação de (3.13),

$$v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} (u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (v')^2 = 0.$$

Observe que a geodésica pode ser tangente a um paralelo que não é geodésica, então $v'(s) = 0$. No entanto, a relação de Clairaut mostra que esse fato acontece apenas em pontos isolados. Por outro lado, como $c \neq 0$, já que a geodésica não é um meridiano, obtemos que $u'(s) \neq 0$. Segue-se que podemos inverter $u = u(s)$, obtendo $s = s(u)$, e, portanto, $v = v(s(u))$. Desta forma, multiplicando a Equação (3.14) por $(ds/du)^2$, obtemos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{du} \right)^2 &= f^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \left(\frac{ds}{du} \right)^2 + ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \left(\frac{ds}{du} \right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{ds}{du} \right)^2 &= f^2 + ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \left(\frac{ds}{du} \right)^2. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $(s')^2 = \frac{f^4}{c^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{f^4}{c^2} &= f^2 + ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ \Rightarrow f^2 &= c^2 + c^2 \frac{((f')^2 + (g')^2)}{f^2} \left(\frac{dv}{du} \right)^2, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} f^2 - c^2 &= c^2 \frac{((f')^2 + (g')^2)}{f^2} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{f^2}{c^2} \frac{(f^2 - c^2)}{((f')^2 + (g')^2)} &= \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{f}{c} \sqrt{\frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2}} &= \frac{dv}{du}. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação acima na forma

$$\frac{du}{dv} = \frac{c}{f} \sqrt{\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2 - c^2}}. \quad (3.15)$$

Podemos perceber que a Equação (3.15) é do tipo separável, portanto integrando em ambos os lados com relação a v , obtemos

$$u = c \int \frac{1}{f} \sqrt{\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2 - c^2}} dv + K, \quad (3.16)$$

que é a equação de um segmento de uma geodésica de uma superfície de revolução que não é nem um paralelo nem um meridiano.

Capítulo 4

O Teorema de Gauss-Bonnet e suas aplicações

4.1 Prólogo

Neste capítulo temos como objetivo apresentar o teorema de Gauss-Bonnet (versão local e global) e algumas de suas consequências. O teorema de Gauss-Bonnet é um dos teoremas mais importantes na geometria diferencial das superfícies. Uma primeira versão deste teorema foi apresentada por Gauss, e lida com triângulos geodésicos em superfícies. A grosso modo, a versão dizia que o excesso sobre π da soma dos ângulos internos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de um triângulo geodésico T é igual à integral dupla da curvatura gaussiana K sobre T , isto é,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

A partir da igualdade acima, podemos observar que se a curvatura Gaussiana for igual a zero teríamos $\sum \varphi_i = \pi$. Exatamente o que acontece no plano, a soma dos ângulos internos de um triângulo, cujos os lados são formados por segmento de retas que são "as geodésicas do plano" é sempre igual a π . Agora se $K \equiv 1$, teríamos

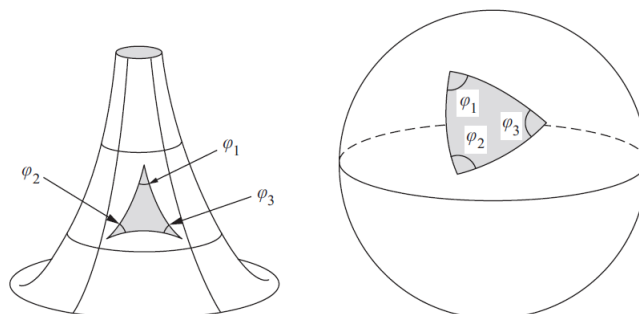
$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = A(T) > 0,$$

logo, pensando na esfera unitária, podemos perceber que a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico nesta superfície é exatamente igual a π mais a área de T . Para o caso, onde $K \equiv -1$ (pseudoesfera, por exemplo), podemos perceber que

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = -A(T) < 0.$$

Ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico nesta superfície é menor que π (Figura 4.1).

Figura 4.1: Triângulo geodésico na Pseudoesfera e na esfera unitária.



Fonte: CARMO, 2005, p. 318.

A extensão do teorema para uma região delimitada por uma curva simples que não é geodésica é devido a Pierre Ossian Bonnet. Para estendê-lo ainda mais, por exemplo, para superfícies compactas, algumas considerações topológicas entrarão em jogo. Na verdade, uma das características mais importantes do teorema de Gauss-Bonnet é que ele fornece uma relação notável entre a topologia de uma superfície compacta e a integral de sua curvatura. Para estudarmos com mais detalhes a versão local e global deste teorema, precisaremos de algumas definições.

4.2 Teorema de Gauss-Bonnet (Local)

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma aplicação contínua em um intervalo fechado $[0, l]$ e S uma superfície regular. Dizemos que α é curva parametrizada, simples, fechada e regular por partes se,

1. $\alpha(0) = \alpha(l)$;
2. $t_1 \neq t_2$, com $t_1, t_2 \in [0, l]$ implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$;
3. Existe uma subdivisão

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de $(0, l]$ tal que α é diferenciável e regular em cada (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, \dots, k$.

A condição 1 nos diz que α é fechada, a condição 2 garante que não existe auto interseção e a condição 3 garante que ela seja regular por partes.

Os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, são chamados de vértices de α e os traços $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são chamados de arcos regulares de α . É comum chamar o traço $\alpha([0, l])$ de curva fechada

regular por partes. Pela condição de regularidade, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existe um limite lateral, isto é, para $t < t_i$,

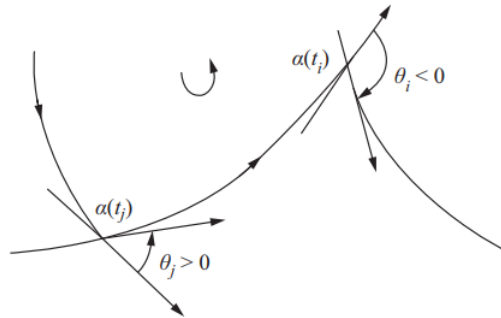
$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'(t_i - 0) \neq 0,$$

para $t > t_i$,

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'(t_i + 0) \neq 0.$$

Seja S uma superfície com orientação e seja $|\theta_i|$, onde $0 \leq |\theta_i| \leq \pi$, o menor ângulo de $\alpha'(t_i - 0)$ para $\alpha'(t_i + 0)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$, então o sinal de θ_i é dado pelo determinante $(\alpha'(t_i - 0), \alpha'(t_i + 0), N)$. Isso significa que se o vértice $\alpha(t_i)$ não é uma cúspide (Figura 4.2), o sinal de θ_i é dado pela orientação de S . O ângulo θ_i , com $-\pi < \theta_i < \pi$ é chamado de ângulo externo ao vértice $\alpha(t_i)$.

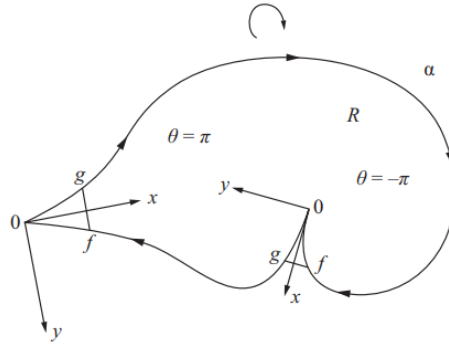
Figura 4.2: Ângulos externos de curvas regulares por partes.



Fonte: CARMO, 2005, p. 319.

No caso onde $|\theta_i| = \pi$, ou seja, em $\alpha(t_i)$ temos uma cúspide, escolhemos o sinal de θ_i da seguinte maneira: considere α uma curva simples, fechada, contida na imagem de uma parametrização conforme com uma orientação dada e assumamos que $\alpha(t_i)$ temos uma cúspide. Escolha os eixos coordenados xy , com $\alpha(t_i) = (0, 0)$ na orientação dada. Assuma ainda que a parte de α chegando em $\alpha(t_i)$ está apontando para a parte negativa do eixo x e a parte de α deixando $\alpha(t_i)$ está apontando para a parte positiva do eixo x . Para um pequeno $\epsilon > 0$, a parte de α que chega em $\alpha(t_i)$, e perto dele, é dado por uma função $y = f(x)$, $0 < x < \epsilon$, e a parte de α saindo $\alpha(t_i)$, e perto dele, é dado por uma função $y = g(x)$, $0 < x < \epsilon$. Se $f > 0$ e $g < 0$, definimos, $\theta(t_i) = \pi$ e se $f < 0$ e $g > 0$, definimos, $\theta(t_i) = -\pi$ (Figura 4.3).

Figura 4.3: O sinal do ângulo externo no caso de uma cúspide.



Fonte: CARMO, 2016, p. 270.

O que segue é o primeiro fato topológico que não será demonstrado neste material.

Teorema 5. (Teorema do índice de rotação) Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização compatível com a orientação de S . Suponha também que U é homeomorfo a um disco aberto no plano. Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ curva parametrizada, simples, fechada e regular por partes, com vértices $\alpha(t_i)$ e ângulos externos $\theta_i, i = 1, 2, \dots, k$. Sejam $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que medem para cada ponto $t \in [t_i, t_{i+1}]$ o ângulo positivo de \mathbf{x}_u para $\alpha'(t)$. Então

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi.$$

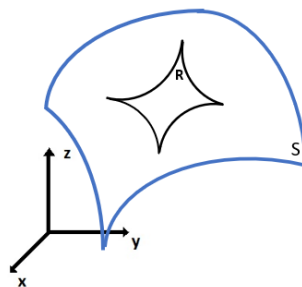
Onde o sinal de mais ou menos depende da orientação de α .

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [11], p. 50 - 62.

Ainda precisamos de algumas terminologias para enunciar e demonstrar a versão local do teorema de Gauss-Bonnet.

Definição 33. Seja S uma superfície orientada. A região $R \subset S$ (união de um aberto conexo com sua fronteira) é chamada região simples se R é homeomorfo a um disco e a fronteira ∂R de R é o traço de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ parametrizada, fechada, simples e regular por partes (Figura 4.4).

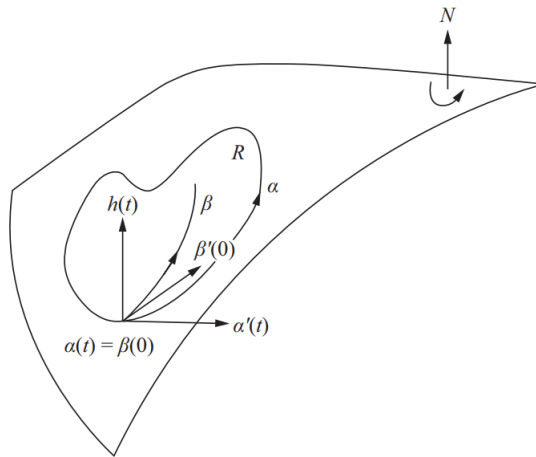
Figura 4.4: Região simples R na superfície S .



Fonte: Autoria própria.

Dizemos que α é orientada positivamente se para cada $\alpha(t)$, pertencente ao arco regular, a base ortogonal positiva $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisfaz a condição de que $h(t)$ aponta para R . Mais precisamente, para qualquer curva $\beta : I \rightarrow R$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$ temos que $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$. Intuitivamente, isso significa que se alguém está andando na curva α na direção positiva e com a cabeça apontando para N , então a região R está a sua esquerda (Figura 4.5).

Figura 4.5: Curva da fronteira orientada positivamente.



Fonte: CARMO, 2005, p. 321.

Proposição 21. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S compatível com orientação e seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região delimitada de S . Se f é função diferenciável em S , então a integral

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

independe de \mathbf{x} , escolhida na classe de orientação de \mathbf{x} . Esta integral tem um significado geométrico e é chamado de integral de f sobre a região R . É comum denotá-la por

$$\iint_R f d\sigma.$$

Teorema 6. (Teorema de Gauss-Bonnet local) Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal (isto é $F = 0$) de uma superfície orientada S , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto e \mathbf{x} é compatível com a orientação de S . Seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Assuma que α é orientada positivamente e parametrizada pelo comprimento de arco s . Seja $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ e $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de α . Então,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi, \tag{4.1}$$

onde k_g é a curvatura geodésica dos arco regulares de α e K é a curvatura Gaussiana de S .

A restrição de que a região R esteja contida no conjunto de imagens de uma parametrização ortogonal é necessária apenas para simplificar a prova e ser capaz de usar o Teorema (5). Como veremos mais tarde (Corolário 1 do teorema de Gauss-Bonnet - global) o resultado acima ainda vale para qualquer região simples de uma superfície regular.

Demonstração. Considere $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ expressa na parametrização \mathbf{x} . Sabemos que a curvatura geodésica é dada por

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

onde $\varphi_i = \varphi_i(s)$ é função diferenciável que calcula o ângulo positivo de \mathbf{x}_u a $\alpha'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando a expressão acima em cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ e somando os resultados, obtemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (4.2)$$

Como a parametrização é ortogonal, pela Proposição 15 a curvatura Gaussiana pode ser obtida por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\ \Rightarrow K\sqrt{EG} = -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Integrando em ambos os lados sobre $\mathbf{x}^{-1}(R)$, obtemos

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\sqrt{EG} dudv = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv,$$

pela Proposição 21, temos

$$\iint_R K d\sigma = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\sqrt{EG} dudv.$$

Assim

$$\iint_R K d\sigma = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv,$$

fazendo $-P(u, v) = \frac{E_v}{\sqrt{EG}}$ e $Q(u, v) = \frac{G_u}{\sqrt{EG}}$, escrevemos

$$\iint_R K d\sigma = - \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \frac{1}{2} \{(-P(u, v))_v + (Q(u, v))_u\} dudv.$$

Usando o Teorema de Green, na região $\mathbf{x}^{-1}(R) \subset \mathbb{R}^2$, cuja fronteira é dada pela curva $\gamma(s) = (u(s), v(s))$, obtemos

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} -\frac{1}{2} \left(P(u, v) \frac{du}{ds} + Q(u, v) \frac{dv}{ds} \right) ds = - \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \frac{1}{2} \{(-P(u, v))_v + (Q(u, v))_u\} dudv.$$

Com isso, escrevemos

$$\begin{aligned} \iint_R K d\sigma &= \sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} -\frac{1}{2} \left(P(u, v) \frac{du}{ds} + Q(u, v) \frac{dv}{ds} \right) ds \\ \Rightarrow \iint_R K d\sigma &= \sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(-E_v \frac{du}{ds} + G_u \frac{dv}{ds} \right) ds, \end{aligned}$$

substituindo a expressão obtida imediatamente acima na Equação (4.2), temos

$$\begin{aligned} \iint_R K d\sigma &= - \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds \\ \Rightarrow \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Perceba que

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)),$$

utilizando o Teorema 5, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i &= 2\pi \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) &= 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i, \end{aligned}$$

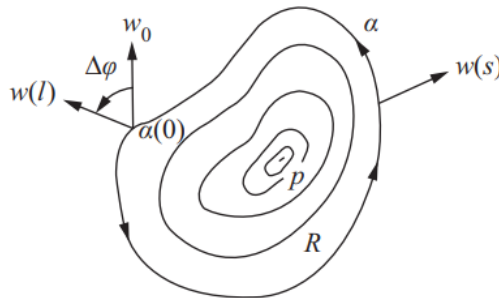
substituindo a expressão acima na Equação (4.3), temos

$$\begin{aligned} \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds &= 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i \\ \Rightarrow \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \sum_{i=0}^k \theta_i &= 2\pi, \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Agora, vamos mostrar como as técnicas usadas na demonstração desse teorema podem ser usadas para uma interpretação da curvatura Gaussiana em termos do paralelismo. Para fazer isso, seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal no ponto $p \in S$ e seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples sem vértices, contendo p em seu interior. Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que o traço de α é a fronteira de R . Seja w_0 um vetor unitário tangente a S em $\alpha(0)$ e seja $w(s), s \in [0, l]$ o transporte paralelo de w_0 ao longo de α (Figura 4.6).

Figura 4.6: Transporte paralelo de w_0 ao longo de α .



Fonte: CARMO, 2005, p. 324.

Como w é campo paralelo, temos que a $Dw/ds = 0$, segue daí que,

$$0 = \int_0^l \left[\frac{Dw}{ds} \right] ds,$$

usando a Proposição 18 e o Teorema de Green no plano uv , obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} ds \\ &= - \iint_R K d\sigma + \varphi(l) - \varphi(0). \end{aligned}$$

Onde $\varphi = \varphi(s)$ é a determinação diferenciável que calcula o ângulo entre \mathbf{x}_u para $w(s)$.

Segue daí que, $\varphi(l) - \varphi(0) = \Delta\varphi$ é dado por,

$$\Delta\varphi = \iint_R K d\sigma. \tag{4.4}$$

Note que, $\Delta\varphi$ não depende da escolha de w_0 e segue da expressão acima que $\Delta\varphi$ não depende da escolha de $\alpha(0)$ também. Para cumprir com nosso objetivo precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 22. Seja S uma superfície e $p \in S$ tal que a curvatura Gaussiana $K(p) \neq 0$, e seja V uma vizinhança conexa de p onde K não muda de sinal. Então,

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

onde A é a área de uma região $B \subset V$ contendo p , A' é a área da imagem de B pela aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, e o limite é tomado através de uma sequência de regiões B_n , para n suficientemente grande.

A demonstração desta proposição poderá ser encontrada em [1], p. 197.

Desta forma, tomando o limite em (4.4) no sentido da Proposição 22, temos

$$\lim_{R \rightarrow p} \frac{\Delta\varphi}{A(R)} = \lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{A(R)} \iint_R K d\sigma = K(p),$$

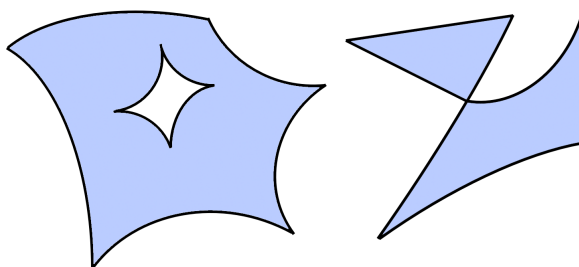
onde $A(R)$ é denota a área da região R . Obtemos a desejada interpretação de K .

4.3 Triangulação

Para falar da versão global do teorema, precisaremos de mais alguns conceitos preliminares.

Definição 34. Seja S uma superfície regular. Uma região conexa $R \subset S$ é dita regular se R é compacto e a fronteira ∂R é uma união finita de uma curva simples, fechada e regular por partes (Figura 4.7).

Figura 4.7: Região regular e região não regular.



Fonte: Autoria própria.

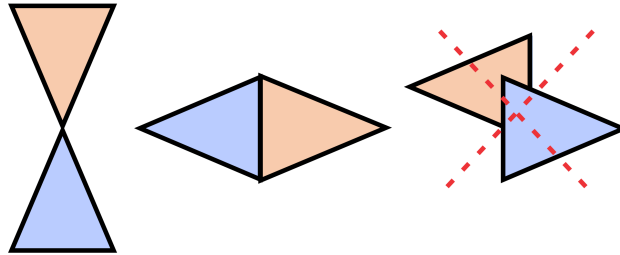
Por conveniência, vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é vazia.

Definição 35. Uma região simples que tenha apenas 3 vértices com ângulos externos $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, é chamado de triângulo. Uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita β de triângulos, $T_i = 1, \dots, n$, tal que

$$1) \bigcup_{i=1}^n T_i = R.$$

2) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j (Figura 4.8).

Figura 4.8: Interpretação da definição de triangulação.



Fonte: Autoria própria.

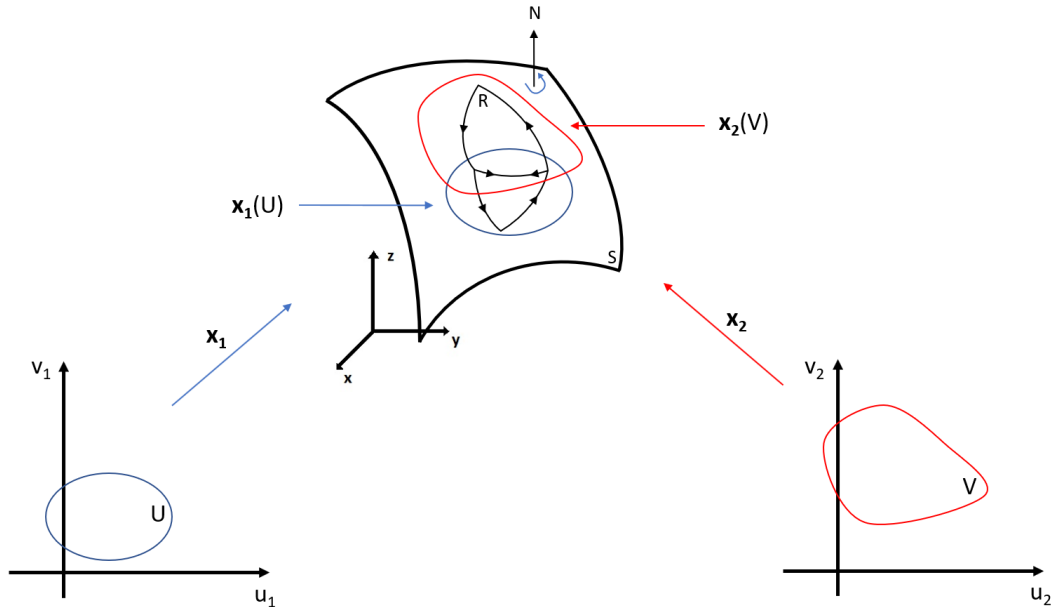
Definição 36. Dada uma triangulação β de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S , denotaremos por F o número de faces, por E o número de arestas e por V o número de vértices da triangulação. O número $F - E + V = \chi$ é chamado de *característica de Euler-Poincaré* da triangulação.

As proposições que seguem serão apresentadas sem demonstrações. Uma exposição desses fatos pode ser encontrado em [12], Cap. 1.

Proposição 23. Toda região regular de uma superfície regular admite triangulação.

Proposição 24. Seja S uma superfície orientada e $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, uma família de parametrizações compatível com a orientação de S . Seja $R \subset S$ uma região regular de S . Então, existe uma triangulação β de R tal que todo triângulo $T \in \beta$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$. Além disso, se a fronteira de todo triângulo de β é positivamente orientado, triângulos adjacentes determinam orientações opostas nas arestas em comum (Figura 4.9).

Figura 4.9: Esquema da Proposição 24.

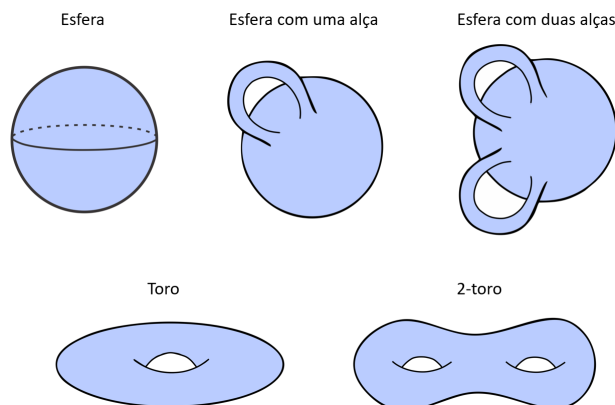


Fonte: Autoria própria.

Proposição 25. Se $R \subset S$ é uma região regular da superfície S , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de R . É conveniente, portanto, denotar por $\chi(R)$.

A proposição acima diz que a característica de Euler-Poincaré é uma invariante topológica de uma região regular R . Para o interesse das aplicações do teorema de Gauss-Bonnet, convém mencionar que invariantes topológicos permitem a classificação topológica de superfícies compactas em \mathbb{R}^3 . Um cálculo direto mostra que a característica de Euler-Poincaré da esfera é igual a 2, a do toro (esfera com uma alça) é 0, para dois toros (esfera com duas alças) é -2 e, em geral, para n -toros (esfera com n alças) é $-2(n - 1)$ (Figura 4.10). A proposição seguinte mostra que está é a lista topológica de todas as superfícies compactas em \mathbb{R}^3 .

Figura 4.10: Algumas superfícies compactas de \mathbb{R}^3 .



Fonte: Autoria própria.

Proposição 26. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície conexa e compacta, então um dos valores $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$ é assumido pela característica $\chi(S)$. Além disso, se $S' \subset \mathbb{R}^3$ é outra superfície compacta e $\chi(S) = \chi(S')$ então S é homeomorfa a S' . Em outras palavras, todas as superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ conexa e compacta é homeomorfa a uma esfera com certo número g de alças. O número

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

é chamado gênero de S .

Proposição 27. seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada S e seja β uma triangulação de R , tal que todo triângulo $T_j \in \beta$, com $j = 1, \dots, k$, está contido em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}_j(U_j)$ de uma família de parametrizações $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatível com a orientação de S . Seja f uma função diferenciável em S . Então

$$\sum_{j=1}^k \iint_{\mathbf{x}_j^{-1}(T_j)} f(u_i, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$$

não depende da triangulação β e nem da família $\{\mathbf{x}_j\}$ de parametrizações de S . A soma tem, entretanto, um significado geométrico e é chamado a integral de f sobre a região regular R . É geralmente denotado por,

$$\iint_R f d\sigma.$$

4.4 Teorema de Gauss-Bonnet (Global)

Antes de enunciarmos o teorema de Gauss-Bonnet em sua versão global, vamos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 28. Seja β uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S , então vale a seguinte igualdade

$$3F = 2A_i + A_e,$$

onde F representa o número de faces, A_i o número de arestas internas e A_e o número de arestas externas da triangulação β .

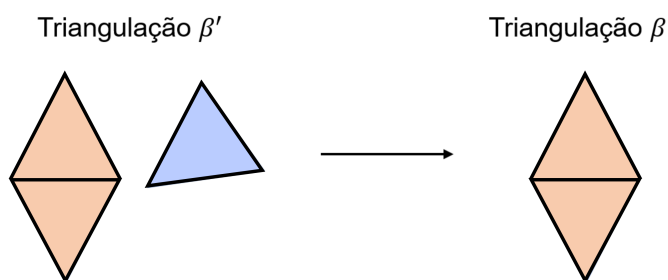
Demonstração. O resultado se verifica via indução sobre o número de faces da triangulação β . Para o caso $F = 1$, isto é, a região é triangularizada por apenas um triângulo, obtemos $F = 1, A_i = 0$ e $A_e = 3$, daí

$$3.(1) = 2.(0) + 3 \Rightarrow 3 = 3.$$

Agora, suponha que a igualdade é válida para uma quantidade $F = K$ de faces da triangulação β . Queremos mostrar que o resultado também é válido para $K + 1$ faces na triangulação, digamos, β' de R . Para isso, se faz necessário dividir esta demonstração em quatro casos, a saber

1. Dada uma triangulação β' , remova um triângulo que não tem nenhuma aresta em comum com outro triângulo (Figura 4.11).

Figura 4.11: Esquema do caso 1.



Fonte: Autoria própria.

Sendo assim,

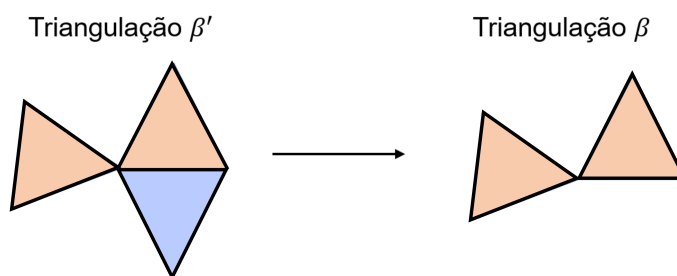
$$F = F' - 1, \quad A_i = A'_i, \quad A_e = A'_e - 3,$$

onde F' , A'_i e A'_e são os números de faces, arestas internas e arestas externas respectivamente da triangulação β' . Assim,

$$\begin{aligned} 3F &= 2A_i + A_e \\ \Rightarrow 3(F' - 1) &= 2A'_i + A'_e - 3 \\ \Rightarrow 3F' - 3 &= 2A'_i + A'_e - 3 \\ \Rightarrow 3F' &= 2A'_i + A'_e. \end{aligned}$$

2. Dada uma triangulação β' , remova um triângulo que tem apenas uma aresta em comum com outro triângulo (Figura 4.12).

Figura 4.12: Esquema do caso 2.



Fonte: Autoria própria.

Observe que ao remover o triângulo que tem uma aresta em comum na figura acima, tal aresta que antes era interna passa a ser externa. Logo

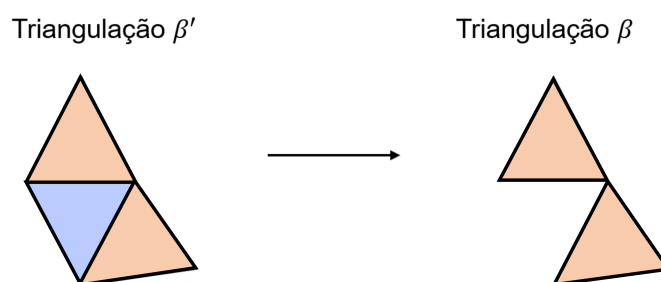
$$F = F' - 1, \quad A_i = A'_i - 1, \quad A_e = A'_e - 1,$$

assim

$$\begin{aligned} 3F &= 2A_i + A_e \\ \Rightarrow 3(F' - 1) &= 2(A'_i - 1) + A'_e - 1 \\ \Rightarrow 3F' - 3 &= 2A'_i - 2 + A'_e - 1 \\ \Rightarrow 3F' &= 2A'_i + A'_e. \end{aligned}$$

3. Dada uma triangulação β' , remova um triângulo que tem apenas duas arestas em comum com outros triângulos (Figura 4.13).

Figura 4.13: Esquema do caso 3.



Fonte: Autoria própria.

Daí,

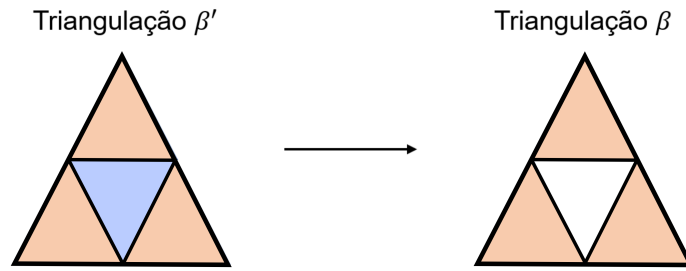
$$F = F' - 1, \quad A_i = A'_i - 2, \quad A_e = A'_e + 1,$$

logo

$$\begin{aligned} 3F &= 2A_i + A_e \\ \Rightarrow 3(F' - 1) &= 2(A'_i - 2) + A'_e + 1 \\ \Rightarrow 3F' - 3 &= 2A'_i - 4 + A'_e + 1 \\ \Rightarrow 3F' &= 2A'_i + A'_e. \end{aligned}$$

4. Dada uma triangulação β' , remova um triângulo que tem todas as arestas em comum com outros triângulos (Figura 4.14).

Figura 4.14: Esquema do caso 4.



Fonte: Autoria própria.

Assim,

$$F = F' - 1, \quad A_i = A'_i - 3, \quad A_e = A'_e + 3,$$

logo

$$\begin{aligned} 3F &= 2A_i + A_e \\ \Rightarrow 3(F' - 1) &= 2(A'_i - 3) + A'_e + 3 \\ \Rightarrow 3F' - 3 &= 2A'_i - 6 + A'_e + 3 \\ \Rightarrow 3F' &= 2A'_i + A'_e. \end{aligned}$$

□

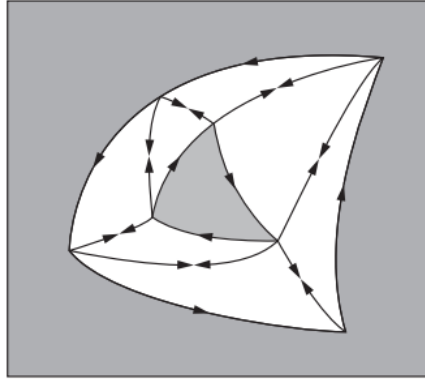
Teorema 7. (Teorema de Gauss-Bonnet global) Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e seja C_1, \dots, C_n curvas regulares por partes, fechadas, simples e que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é positivamente orientada e seja $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de todos os ângulos externos de C_1, \dots, C_n . Então

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i .

Demonstração. Considere uma triangulação β de uma região R tal que cada triângulo T_j está contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais compatível com a orientação de S . Tal triangulação existe por conta da Proposição 24. Além disso, se a fronteira de cada triângulo de β é positivamente orientada, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns para triângulos adjacentes (Figura 4.15).

Figura 4.15: Triangulação em uma região regular R .



Fonte: CARMO, 2005, p. 329.

Aplicando em cada triângulo o teorema local de Gauss-Bonnet, considerando o resultado obtido na Proposição 27 e observando fato de que cada aresta é contada duas vezes em orientações opostas, temos

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi F, \quad (4.5)$$

onde F denota o número de triângulo de β , e $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ são os ângulos externos de cada triângulo T_j . Introduzindo os ângulos internos do triângulo T_j , dado por $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$, obtemos

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = \sum_{j,k=1}^{F,3} \pi - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk}.$$

Usando a seguinte notação,

E_e = número de arestas externas de β ,

E_i = número de arestas internas de β ,

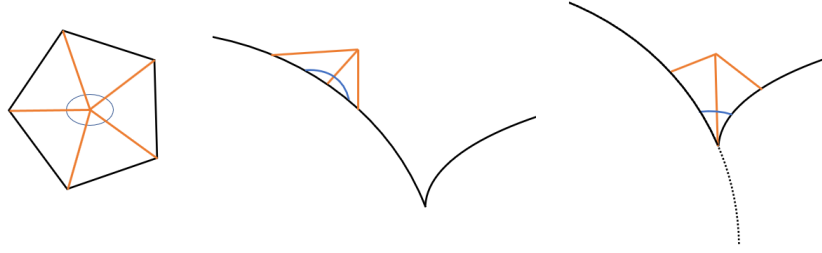
V_e = número de vértices externos de β ,

V_i = número de vértices internos de β .

Observe que os ângulos internos da triangulação se classificam em três tipos, a saber

- Vértices internos;
- Vértices externos introduzidos pela triangulação;
- Vértices das curvas C_i (Figura 4.16).

Figura 4.16: Ângulos internos na triangulação.



Fonte: Autoria própria.

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk} &= 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l) \\ \Rightarrow \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk} &= 2\pi V_i + \pi V_{et} + \pi V_{ec} - \sum_{l=1}^p \theta_l, \end{aligned}$$

onde V_{et} é quantidade de vértices externos introduzidos pela triangulação β e V_{ec} é a quantidade de vértices das curvas C_i . Além disso, $V_e = V_{et} + V_{ec}$, sendo assim escrevemos

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk} = 2\pi V_i + \pi V_e - \sum_{l=1}^p \theta_l.$$

Daí,

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 3\pi F - \left(2\pi V_i + \pi V_e - \sum_{l=1}^p \theta_l \right), \quad (4.6)$$

substituindo a Equação (4.6) na Equação (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + 3\pi F - \left(2\pi V_i + \pi V_e - \sum_{l=1}^p \theta_l \right) &= 2\pi F \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l &= -\pi F + 2\pi V_i + \pi V_e. \end{aligned}$$

Da equação obtida acima, resta-nos mostrar que

$$-\pi F + 2\pi V_i + \pi V_e = 2\pi \chi(R).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 -\pi F + 2\pi V_i + \pi V_e &= 2\pi F - 3\pi F + 2\pi V_i + \pi V_e \\
 &= 2\pi F - 3\pi F + \pi V_e - \pi V_e + 2\pi V_i + \pi V_e \\
 &= 2\pi F + 2\pi V - 3\pi F - \pi V_e \\
 &= 2\pi F + 2\pi V - 2\pi A - 3\pi F - \pi V_e + 2\pi A \\
 &= 2\pi\chi(R) - 3\pi F - \pi V_e + 2\pi A.
 \end{aligned}$$

Pela Proposição 28, obtemos

$$\begin{aligned}
 -3\pi F - \pi V_e + 2\pi A &= -(2\pi A_i + \pi A_e) - \pi V_e + 2\pi A \\
 &= -2\pi A_i - \pi A_e - \pi V_e + 2\pi A,
 \end{aligned}$$

como as curvas C_i são fechadas, então $V_e = A_e$, logo

$$\begin{aligned}
 -3\pi F - \pi V_e + 2\pi A &= -2\pi A_i - 2\pi A_e + 2\pi A \\
 &= -2\pi A + 2\pi A \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R).$$

□

Como a característica de Euler Poincaré de uma região simples é igual a 1, obtemos.

Corolário 1. Se R é uma região simples de S , então

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

O Corolário 1 acima nos diz que o teorema de Gauss-Bonnet em sua versão global implica o teorema de Gauss-Bonnet em sua versão local. Levando em consideração o fato de que uma superfície compacta pode ser considerada como uma região regular com fronteira vazia, obtemos.

Corolário 2. Seja S uma superfície compacta com orientação, então

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Para trazer ao leitor a intuição do Corolário 2, basta considerarmos todas as superfícies que são homeomorfas a uma esfera e perceber que em cada caso a função curvatura se

distribui de tal maneira que a "curvatura total", ou seja, $\iint_S K d\sigma$, é a mesma para todos os casos.

A seguir, apresentaremos algumas aplicações do teorema de Gauss-Bonnet. Para essas aplicações, é conveniente assumir que cada curva regular por partes, fechada e simples no plano (portanto, sem auto-interseções) é a fronteira de uma região simples.

- 1) Uma superfície compacta de curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.

Como a característica de Euler-Poincaré de tal superfície é positiva e pela Proposição 25 a esfera é a única superfície compacta de \mathbb{R}^3 que satisfaz esta condição segue o afirmado.

- 2) Seja S uma superfície orientada de curvatura negativa ou zero. Então duas geodésicas γ_1 e γ_2 que começam em um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituam a fronteira de uma região simples R de S .

Assuma que o contrário é verdadeiro. Pelo teorema de Gauss-Bonnet (R é simples)

$$\iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

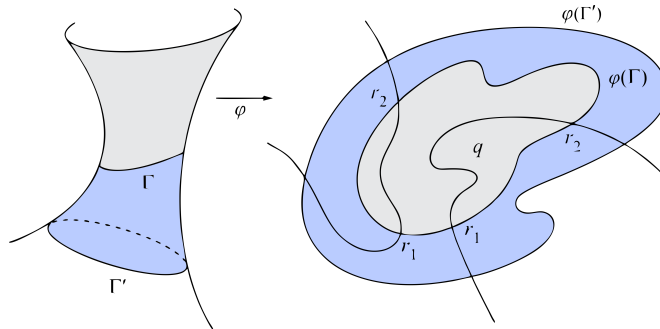
onde θ_1 e θ_2 são os ângulos externos da região R . Além disso, as geodésicas γ_1 e γ_2 não podem ser mutuamente tangentes, consequência do teorema de existência e unicidade do sistema de EDO que define a geodésica. Logo $\theta_i < \pi, i = 1, 2$. Por outro lado, $K \leq 0$, portanto temos uma contradição.

Quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, os traços das geodésicas γ_1 e γ_2 constituem uma geodésica fechada e simples de S (ou seja, uma curva regular fechada que é uma geodésica). Segue, pelo teorema de Gauss-Bonnet, que em uma superfície de curvatura zero ou negativa, não existe uma geodésica fechada e simples que é fronteira de uma região simples de S .

- 3) Seja S uma superfície, com curvatura Gaussiana $K < 0$, difeomorfa a um cilindro. Então S tem no máximo uma geodésica fechada simples.

Suponha que S contém uma geodésica fechada simples Γ . Pelo item 2 e pela existência de um difeomorfismo φ de S com o plano P menos um ponto $q \in P, \varphi(\Gamma)$ é fronteira de uma região simples de P contendo q . Suponha agora que S contém outra geodésica fechada e simples Γ' , afirmamos que não existe intersecção entre Γ e Γ' . Caso contrário, os arcos de $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\Gamma')$ entre dois pontos de intersecção consecutivos, r_1 e r_2 , seria a fronteira de uma região simples, contradizendo o item 2 (Figura 4.17).

Figura 4.17: Esquema da demonstração do item 3.



Fonte: CARMO, 2005, p. 332.

Nós podemos agora aplicar o teorema de Gauss-Bonnet à região R limitada por duas geodésicas simples sem interseção Γ e Γ' de S . Como $\chi(R) = 0$ (pode-se ver facilmente triangularizando a região), obtemos

$$\iint_R K d\sigma = 2\pi\chi(R) = 0,$$

o que é uma contradição, pois por hipótese $K < 0$.

- 4) Se existir duas geodésicas fechadas simples Γ_1 e Γ_2 , em uma superfície conexa e compacta S de curvatura positiva, então Γ_1 e Γ_2 se intersectam.

Suponha que as geodésicas Γ_1 e Γ_2 não se intersectam. Pelo item 1) sabemos que S é homeomorfa a uma esfera, então o conjunto formado por Γ_1 e Γ_2 é fronteira de uma região R e segue que $\chi(R) = 0$. Sabemos que a curvatura geodésica de uma geodésica é igual a 0 e por hipótese as geodésicas são fechadas e simples. Isto nos diz que a região R não possui ângulos externos. Logo, pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\iint_R K d\sigma = 0.$$

O que é uma contradição, pois por hipótese $K > 0$.

- 5) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, regular e fechada, cuja curvatura nunca se anula. Suponha que a curva descrita pelo vetor normal $n(s)$ na esfera unitária \mathbb{S}^2 é simples. Desta forma, $n(I)$ divide a esfera em duas regiões de áreas iguais.

Iremos assumir que a curva é parametrizada pelo comprimento de arco. Seja \bar{s} o comprimento de arco da curva $n = n(s)$ de \mathbb{S}^2 , onde $s(\bar{s})$ é a inversa de $\bar{s}(s)$. A curvatura geodésica \bar{k}_g de $n(s)$ é,

$$\bar{k}_g = \left\langle \frac{d^2 n}{d\bar{s}^2}, n \times \frac{dn}{d\bar{s}} \right\rangle$$

Observe que $n = b \times t$, desta forma, $n' = b' \times t + b \times t'$. Sabemos que, $b' = \tau \cdot n$ e $t' = k \cdot n$. Com isso, (derivando com respeito ao comprimento de arco \bar{s}) concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\bar{s}} &= \frac{dn}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (-\tau \cdot b - k \cdot t) \frac{ds}{d\bar{s}} \\ \frac{d^2n}{d\bar{s}^2} &= (-\tau \cdot b - k \cdot t) \frac{d^2s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau'b) \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 - (k^2 + \tau^2)n \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2. \end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \bar{s}(s) &= \int_{s_0}^s \|n'(t)\| dt \\ \Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} &= \|n'(s)\| = \sqrt{\langle n'(s), n'(s) \rangle} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= \langle -\tau \cdot b - k \cdot t, -\tau \cdot b - k \cdot t \rangle \\ \Rightarrow \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= \tau^2 \langle b, b \rangle + k^2 \langle t, t \rangle \\ \Rightarrow \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= k^2 + \tau^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 &= \frac{1}{k^2 + \tau^2}. \end{aligned}$$

Sendo assim obtemos,

$$\begin{aligned} \bar{k}_g &= \langle n'', n \times n' \rangle = \frac{ds}{d\bar{s}} \langle n'', (-\tau(n \times b) - k(n \times t)) \rangle \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} \langle n'', kb - \tau t \rangle \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{d^2s}{d\bar{s}^2} \langle -\tau b - kt, kb - \tau t \rangle + \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^3 \langle -k't - \tau'b, kb - \tau t \rangle \\ &\quad + \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^3 \langle -(k^2 + \tau^2)n, kb - \tau t \rangle \\ &= \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^3 (-k\tau' + k'\tau) \\ &= -\frac{\tau'k - k'\tau}{k^2 + \tau^2} \frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{d}{ds} \arctan \left(\frac{\tau}{k} \right) \frac{ds}{d\bar{s}}. \end{aligned}$$

Suponha sem perda de generalidade que $I = [0, l]$. Sendo assim $s([0, \bar{l}]) = [0, l]$,

temos

$$\int_0^l \bar{k}_g d\bar{s} = - \int_0^l \frac{d}{ds} \arctan\left(\frac{\tau}{k}\right) ds = 0,$$

pois α é curva fechada, daí, $\tau(0) = \tau(l)$ e $k(0) = k(l)$. Assim, aplicando o teorema Gauss-Bonnet a uma das regiões R cuja fronteira é dada por $n(I)$, usando o fato de que $K \equiv 1$ e a característica de R ser igual a 1, pois R é homeomorfo a uma região simples, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R K d\sigma + \int_{\partial R} \bar{k}_g d\bar{s} &= 2\pi \\ \Rightarrow \iint_R 1 d\sigma &= 2\pi = A(R). \end{aligned}$$

Sabemos que a área da esfera unitária é igual a 4π . Desta forma, mostramos o que desejamos.

- 6) Seja T um triângulo geodésico (isto é, os lados de T são geodésicas) de uma superfície orientada S . Assuma que a curvatura Gaussiana K não muda de sinal em T . Seja $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ os ângulos externos de T e seja $\varphi_1 = \pi - \theta_1$, $\varphi_2 = \pi - \theta_2$, $\varphi_3 = \pi - \theta_3$ ângulos internos. Pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_T K d\sigma &= 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) \\ \Rightarrow \iint_T K d\sigma &= -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i. \end{aligned}$$

Segue que a soma dos ângulos internos, $\sum_{i=1}^3 \varphi_i$, de um triângulo geodésico é igual a π se $K = 0$, maior que π se $K > 0$ e menor que π se $K < 0$.

Além disso, a diferença $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi$ é dada precisamente pela $\iint_T K d\sigma$. Se $K \neq 0$ em T , e a restrição de N a T é injetiva, esta integral é a área da imagem $N(T)$ de T pela aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Essa foi a forma que Gauss declarou

seu teorema: *O excesso do triângulo geodésico T é igual a área de imagem esférica $N(T)$.*

O fato acima está relacionado a uma polêmica sobre a demonstração do quinto axioma (axioma das paralelas), do qual segue que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a π . Considerando as geodésicas retas, é possível mostrar que as superfícies de curvatura Gaussiana negativa constante constitui um modelo local de uma geometria onde os axiomas de Euclides são válidos, exceto o quinto e o axioma que garante a possibilidade de estender linhas retas indefinidamente. Na realidade, Hilbert mostrou que não existe em \mathbb{R}^3 uma superfície de curvatura Gaussiana negativa constante cujas geodésicas podem ser estendidas indefinidamente (a Pseudoesfera, tem uma aresta circular de pontos singulares). Portanto, as superfícies de \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante negativa não fornecem um modelo para testar a independência do quinto axioma. Entretanto, usando a noção de superfície abstrata é possível contornar essa inconveniência e construir um modelo de geometria onde todos os axiomas de Euclides menos o quinto são válidos. Este axioma, é portanto, independente dos demais.

- 7) *Campo de vetores na superfície.* Seja v um campo de vetores diferenciável em uma superfície orientada S . Dizemos que p é um ponto singular de v se $v(p) = 0$. O ponto singular p é isolado se existe uma vizinhança V de p em S tal que v não tem pontos singulares em V além de p . Para cada ponto singular isolado p de um campo vetorial v , nós associamos um número inteiro, o índice de v , definido da seguinte maneira. Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal de $p = \mathbf{x}(0, 0)$ compatível com a orientação de S , e seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ curva parametrizada, simples, regular por partes, fechada e orientada positivamente tal que $\alpha[0, l] \subset \mathbf{x}(U)$ é fronteira de uma região R que contém p como seu único ponto singular. Seja $v = v(t), t \in [0, l]$, a restrição do campo v ao longo de α e seja $\varphi = \varphi(t)$ uma determinação diferenciável do ângulo formado de \mathbf{x}_u para $v(t)$. Uma vez que α é curva fechada, há um inteiro definido por

$$2\pi I = \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} dt,$$

onde I é chamado de índice de v em p .

Devemos mostrar que esta definição não depende da escolha da parametrização e da curva α com as propriedades acima. Seja $w_0 \in T_{\alpha(0)}S$ e seja $w(t)$ o transporte paralelo de w_0 ao longo de α . Seja $\psi(t)$ uma determinação diferenciável do ângulo formado de \mathbf{x}_u para $w(t)$. Então, como nós vimos na interpretação de K em termos

do transporte paralelo,

$$\psi(l) - \psi(0) = \iint_R K d\sigma.$$

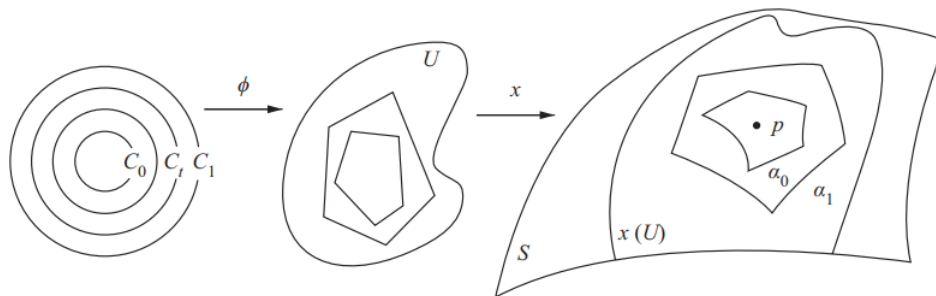
Ao subtrair as relações acima, obtemos

$$\iint_R K d\sigma - 2\pi I = (\psi - \varphi)(l) - (\psi - \varphi)(0) \tag{4.7}$$

Pelo Lema 1, podemos observar que $\psi - \varphi$ não depende de \mathbf{x}_u e conseqüentemente o índice I não depende da parametrização \mathbf{x} . A prova de que o índice não depende da escolha de α será apenas esboçada.

Sejam α_0 e α_1 duas curvas como na definição de índice, vamos mostrar que o índice de v é o mesmo para ambas as curvas. Inicialmente, suponha que os traços de α_0 e α_1 não se intersectam, então existe um homeomorfismo da região limitada pelos traços de α_0 e α_1 em uma região plana limitada por dois círculos concêntricos C_0 e C_1 . Uma vez que podemos obter uma família de círculos concêntricos C_t que dependem continuamente de t e deformam C_0 em C_1 , nós obtemos uma família de curvas α_t que dependem continuamente de t e deformam α_0 em α_1 (Figura 4.18).

Figura 4.18: Deformação de C_t .



Fonte: CARMO, 2005, p. 336.

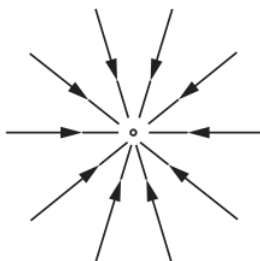
Denote por I_t o índice de v calculado com a curva α_t . Como o índice é uma integral, I_t depende continuamente de t , $t \in [0, 1]$. Sendo um inteiro, I_t é constante sobre está deformação e $I_0 = I_1$, como desejamos. Se os traços de α_0 e α_1 se intersectam então, basta escolher uma curva suficientemente pequena de modo que seu traço não tenha intersecção com α_0 e α_1 e aplicar o resultado anterior.

Deve-se notar que a definição de índice ainda pode ser aplicada quando p não é um ponto singular de v (isto é $v(p) \neq 0$). Acontece, entretanto, que o índice é zero. Isso decorre do fato de que, uma vez que I não depende de \mathbf{x}_u , podemos escolher \mathbf{x}_u como o próprio v , assim $\varphi(t) \equiv 0$.

Mostraremos alguns exemplos de índices de campos de vetores no plano xy que tem $(0, 0)$ como um ponto singular. As curvas que aparecem no desenho são as trajetórias dos campos de vetores.

Exemplo 23. Seja $w(x, y) = (-x, -y)$ (Figura 4.19).

Figura 4.19: Campo de vetores.



Fonte: CARMO, 2005, p. 336.

Considere a curva fechada $\alpha(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Restringindo w a curva α , obtemos

$$w(t) = w(\alpha(t)) = (-\cos t, -\sin t) = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi)),$$

observe que o ângulo positivo φ de $(1, 0)$ a $w(t)$ é dada por,

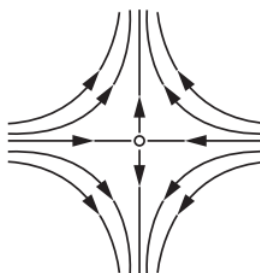
$$\cos \varphi = \cos(t + \pi) \Rightarrow \varphi = t + \pi.$$

Portanto, o índice é dado por

$$I = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} \Rightarrow I = \frac{3\pi - \pi}{2\pi} = 1.$$

Exemplo 24. Seja $w(x, y) = (-x, y)$ (Figura 4.20).

Figura 4.20: Campo de vetores.



Fonte: CARMO, 2005, p. 336.

Considere a curva fechada $\alpha(t) = (\cos t, \text{sen}t), t \in [0, 2\pi]$. Restringindo w a curva α , obtemos

$$w(t) = w(\alpha(t)) = (-\cos t, \text{sen}t) = (\cos(\pi - t), \text{sen}(\pi - t)).$$

Pelo mesmo cálculo do exemplo anterior, obtemos que o ângulo positivo φ de $(1, 0)$ a $w(t)$ é dado por $\varphi(t) = \pi - t$. Desta forma, o índice I é,

$$I = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{-\pi - \pi}{2\pi} = -1.$$

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta orientada e v um campo de vetores diferenciável em S cujos pontos singulares são isolados. Então v tem um número finito de singularidades, pois, caso contrário, o conjunto dos pontos singulares teria, por compacidade, um ponto de acumulação que seria uma singularidade não isolada. Seja $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ uma família de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de S . Seja β uma triangulação de S tal que,

1. Cada triângulo $T \in \beta$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{X}_\alpha\}$;
2. Cada triângulo $T \in \beta$ contém no máximo um ponto singular, e se existir, está no seu interior;
3. A fronteira de qualquer triângulo $T \in \beta$ está orientada positivamente.

Aplicando a Equação 4.7 em cada um dos triângulos $T \in \beta$ e somando os resultados, levando em consideração que a borda de cada triângulo aparece duas vezes com orientações opostas, nós obtemos

$$\iint_S K d\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^k I_i = 0,$$

onde I_i é o índice do ponto singular $p_i, i = 1 \dots k$. Pelo Corolário 2 segue que,

$$\sum_{i=1}^k I_i = \frac{1}{2\pi} \iint_S K d\sigma = \chi(S).$$

Assim, provamos o seguinte teorema.

Teorema 8. (Teorema de Poincaré) A soma dos índices de um campo de vetores diferenciável v com singularidades isoladas em uma superfície compacta S é igual a característica de Euler-Poincaré de S .

Este resultado implica que $\sum I_i$ não depende da escolha do campo v , apenas da topologia de S . Por exemplo, em qualquer superfície homeomorfa a uma esfera, todos os campos de vetores diferenciáveis com singularidades isoladas devem ter a soma de seus índices igual a 2. Em particular, nenhuma destas superfícies pode ter um campo de vetores diferenciável sem pontos singulares.

Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 2.ed, SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [2] STEWART J. **Cálculo, vol. 2**. 5.ed, Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2006.
- [3] O'NEILL, B. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press Inc. New York, 1966.
- [4] BOLDRINI, Luis José, et al. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986. Matemática Universitária, 2016.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 1**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 2**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [7] CARMO, Manfredo Perdigão. **A Geometria Riemanniana**. 5.ed, Editora IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [8] NUNES, Bruna. **Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet**. Trabalho de Conclusão de Curso, licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- [9] BERS, Lipman. **Riemann Surfaces**. New York University, Institute of Mathematical Sciences, New York, 1957-1958.
- [10] CARMO, Manfredo Perdigão **Differential Geometry of curves and surfaces**. 2.ed, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2016.
- [11] HOPF, Heinz **Compositio Math.** 2, 1935.
- [12] AHLFORS, Lars Valerian, and Leo Sario. **Riemann surfaces**. Princeton university press, N.J., 1960.
- [13] GAUSS, C. F. **General investigations of curved surfaces**. Morehead and Hillebeitel, tr., Princeton, 1827.