



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Thays Ingrid dos Santos Nunes

Existência e unicidade de solução para problemas envolvendo o operador Laplaciano

Recife-PE
Dezembro de 2019

Existência e unicidade de solução para problemas envolvendo o operador Laplaciano

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Yane Lísley Ramos Araújo (orientadora)

Recife-PE
Dezembro de 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- N972e Nunes, Thays Ingrid dos Santos
Existência e unicidade de solução para problemas envolvendo o operador Laplaciano / Thays Ingrid dos Santos
Nunes. - 2019.
89 f. : il.
- Orientador: Yane Lisley Ramos Araujo.
Inclui referências.
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2020.
1. Existência e unicidade de solução. 2. Equação de Laplace. 3. Equação de Poisson. 4. Problemas de Dirichlet. I. Araujo, Yane Lisley Ramos, orient. II. Título

Thays Ingrid dos Santos Nunes

Existência e unicidade de solução para problemas envolvendo o operador Laplaciano

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 17/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dra. Yane Lísley Ramos Araújo (orientadora)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - (UFRPE)

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza
Universidade Federal Rural de Pernambuco - (UFRPE)

Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior
Universidade Federal de Pernambuco - (UFPE)

Recife-PE
Dezembro de 2019

"A beleza da matemática só se revela para quem a persegue mais pacientemente".

Maryam Mirzakhani.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força e saúde para enfrentar todas as dificuldades. À minha família, e em especial, aos meus pais, Susana e Tony, por todo amor, incentivo e apoio. Às minhas irmãs, Thayna e Thaynara, por todo carinho e por terem corrigido alguns dos meus trabalhos.

À minha orientadora, Prof.^a Yane Araújo, pelo empenho e dedicação na elaboração deste trabalho e todo apoio profissional e emocional concedido ao longo de toda minha trajetória no curso.

A todos os professores do curso por todo apoio e ensinamentos científicos, políticos, pedagógicos e sociais, de forma especial, ao Prof. Adriano Regis, que tornou a geometria ainda mais encantadora. Ao Prof. Renato Teixeira, pela orientação no meu primeiro pôster o qual me permitiu participar da Bienal de Matemática no Rio de Janeiro. À Prof.^a Tarciana Silva, pelos ensinamentos matemáticos e conselhos. Ao Prof. Clessius Silva, por proporcionar maravilhosas aulas e nunca me deixar assassinar a matemática. Aos professores Gilson Carvalho e Thiago Dias, por todos os ensinamentos matemáticos e apoio nas seleções de Mestrado. Aos professores Danilo Santos, Thamires Cruz e Ângela Didier, pelas orientações de monitoria. Ao Prof. Jorge Hinojosa, pela oportunidade de participar do 13º PIC - OBMEP. Agradeço também ao Prof. Severino Barros, pelas valiosas aulas e por acreditar no meu potencial, mesmo não seguindo uma carreira na área de educação e à Prof.^a Ana Paula, pelos ensinamentos e assistências em momentos difíceis.

Aos membros da banca, professores Eudes Mendes e José Júnior, pelas formidáveis contribuições na correção deste trabalho.

Ao Prof. Reginaldo Junior pelo auxílio com o editor de LaTeX o qual contribuiu na formatação deste texto.

À Hévila Holanda, por todo carinho, cuidado, companheirismo, apoio e compreensão durante a criação deste trabalho.

Por fim, ao grupo de amigos da escola, o bonde, por todos os momentos de descontração e aos colegas de curso pelos momentos de estudo e diversão, em especial a minhas queridas amigas, Aline e Elizabeth por todo apoio e companheirismo. E ao colega de curso, Matheus Henrique, pelas agradáveis parcerias em alguns trabalhos.

Resumo

No presente trabalho abordamos alguns conceitos básicos relativos à teoria das equações diferenciais parciais garantindo a existência de solução para problemas envolvendo o operador Laplaciano. Inicialmente, utilizamos o método de separação de variáveis e ferramentas da Análise de Fourier para assegurarmos a existência de solução clássica para problemas de Dirichlet no retângulo e no disco unitário envolvendo a equação de Laplace, bem como um princípio do máximo para garantirmos a unicidade da solução. Em seguida, utilizamos resultados da Análise Funcional e dos espaços de Sobolev para garantirmos sob certas condições a existência de uma única solução fraca para o problema de Dirichlet envolvendo a equação de Poisson.

Palavras-Chave: Existência e unicidade de solução; Equação de Laplace; Equação de Poisson; Problemas de Dirichlet.

Abstract

In this work we approach some basic concepts related to the theory of partial differential equations guaranteeing the existence of solution for problems involving the Laplacian operator. Initially, we use the method of variable separation and Fourier Analysis tools to ensure the existence of classical solutions to Dirichlet problems in the rectangle and unit disk involving the Laplace equation, as well as a maximum principle to ensure the uniqueness of the solution. Then, we use results from Functional Analysis and Sobolev spaces to ensure under certain conditions that there is only one weak solution to the Dirichlet problem involving the Poisson equation.

KeyWords: Existence and uniqueness of solution; Laplace equation; Poisson's equation; Dirichlet problems.

Sumário

Lista de Siglas e Abreviaturas	9
Lista de Figuras	10
Introdução	11
1 Conceitos e resultados preliminares	13
1.1 Tópicos de cálculo avançado	13
1.1.1 Teorema da função inversa e da função implícita	13
1.1.2 Derivação sob o sinal de integrais em intervalos limitados	17
1.1.3 As identidades de Green	20
1.2 Tópicos de séries de funções e séries de Fourier	22
1.2.1 Convergência de séries de funções	22
1.2.2 Séries de Fourier	28
1.2.3 Convergência das séries de Fourier	34
2 Equações diferenciais parciais	41
2.1 Conceitos básicos	41
2.2 Princípio de superposição	44
2.3 Condições de contorno e iniciais	47
2.4 Classificação das equações semilineares de segunda ordem	49
3 Existência e unicidade de solução clássica	52
3.1 Problema de Dirichlet no retângulo	53
3.2 Problema de Dirichlet no disco unitário	63
3.3 Unicidade de solução dos Problemas	72
4 Existência e unicidade de solução fraca	76
4.1 Tópicos de Análise Funcional e Medida e Integração	76
4.1.1 Teorema da Representação de Riesz-Fréchet	78
4.1.2 Teorema de Lax-Milgram	80
4.1.3 Existência e unicidade de solução fraca	86

Considerações Finais	88
Referências Bibliográficas	89

Lista de Siglas e Abreviaturas

$f(x^+)$ Limite de $f(t)$ quando t tende a x pela direita;

$f(x^-)$ Limite de $f(t)$ quando t tende a x pela esquerda;

$\log(a)$ Logaritmo natural de a ;

∇u O gradiente da função u ;

$C^k(A), C(A)$ Conjuntos das funções $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, k vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente, contínuas);

$C_{\mathbb{C}}^k(A), C_{\mathbb{C}}(A)$ Conjuntos das funções $u : A \rightarrow \mathbb{C}$, k vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente, contínuas);

$C_{per}(2l)$ Conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e periódicas de períodos $2l$.

$SC([a, b])$ Conjunto de funções reais seccionalmente contínuas em $[a, b]$;

$SC_{per}(2l)$ Conjunto das funções seccionalmente contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e periódicas de períodos $2l$.

Lista de Figuras

1.1	Forma Local das Submersões	15
1.2	Ideia da demonstração do Teorema de Fourier	37
3.1	Esquema do problema (3.3).	54
3.2	Esquema do problema de Dirichlet no disco unitário	63
3.3	$u(\eta) < M = u(\xi)$ implica que existe uma vizinhança V de η com $u(\omega) < M$, para todo $\omega \in V$	73

Introdução

O eixo deste trabalho é o da análise matemática, a qual foi desenvolvida formalmente no século XVII, durante a revolução científica, mas muitas das suas ideias estiveram implicitamente presentes nos primórdios da matemática grega, porém a análise real começou a expressar-se como disciplina independente quando o matemático Bernard Bolzano introduziu a definição moderna de continuidade em 1816. A relevância do estudo da análise matemática parte da necessidade de fornecer caracterizações rigorosas às ideias intuitivas do cálculo, uma vez que a análise é um ramo da matemática que se ocupa dos conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, medidas, limites, séries infinitas e funções analíticas.

Dentre as áreas de pesquisa da análise matemática, nosso trabalho está voltado ao estudo das equações diferenciais parciais o qual começou com a criação do cálculo diferencial e integral no século XVII, que a princípio foi conduzido pelas aplicações à mecânica de partículas. O êxito em tratar essas aplicações utilizando o cálculo diferencial, foi uma enorme motivação aos estudiosos do século XVIII em procurar modelos para problemas físicos que expressam os fenômenos em termos de equações diferenciais parciais, as quais possuem sérias dificuldades matemáticas em suas resoluções. Dentre as equações estudadas por matemáticos do século XVIII tem-se a equação de Poisson e seu caso particular, a equação de Laplace, as quais são os objetos de estudo deste trabalho.

Para resolução desses problemas físicos envolvendo determinadas equações diferenciais parciais, geralmente, necessitamos expressar uma dada função como séries de senos e/ou cossenos, e assim, se faz necessário o estudo da chamada Análise de Fourier que surgiu no século XVIII e tem seu nome inspirado no matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier, que em 1822 investigou séries de senos e/ou cossenos em sua pesquisa sobre a teoria analítica do calor.

O estudo das equações diferenciais parciais demanda o uso de variadas ferramentas da análise matemática. E, além de utilizarmos, no nosso trabalho, resultados da Análise no \mathbb{R}^n e da Análise de Fourier, também necessitamos de resultados da Análise Funcional, uma vez que procuramos soluções fracas e para isso precisamos definir os espaços de Hilbert. Estritamente, analisamos o Teorema da Representação de Riesz-Fréchet e uma consequência, o Teorema de Lax Milgram, o qual permite escrever todo funcional no dual de um espaço de Hilbert como uma forma bilinear e tem seu nome atribuído aos

matemáticos Peter David Lax e Arthur Norton Milgram.

O objetivo do nosso trabalho é garantir a existência e unicidade de soluções clássicas e fracas para problemas de Dirichlet. Para tanto, no Capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados preliminares da Análise no \mathbb{R}^n e séries de funções bem como das séries de Fourier que auxiliam o estudo dos capítulos subsequentes. Posteriormente, no Capítulo 2, apresentamos um estudo introdutório sobre as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) uma vez que nossos problemas envolvem tais equações. No Capítulo 3, determinamos a existência de soluções clássicas para os problemas de Dirichlet no retângulo e no disco unitário, através do método de separação de variáveis e das séries de funções, em particular as séries de Fourier. Por fim, no Capítulo 4, analisamos tópicos da Análise Funcional e dos espaços de Sobolev a fim de apresentarmos a demonstração do Teorema de Lax-Milgram e utilizá-lo para garantir a existência e unicidade de solução fraca para o problema de Dirichlet envolvendo a equação de Poisson.

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Em virtude do nosso trabalho estar relacionado fortemente às equações diferenciais parciais, em particular, à existência e unicidade de solução de problemas de Dirichlet, se faz necessário, apresentarmos alguns conceitos e resultados prévios. Sendo assim, dividimos este capítulo em três subtópicos, os quais auxiliarão o leitor na compreensão dos demais. Os tópicos abordam importantes teoremas da análise matemática, mais especificamente, Análise no \mathbb{R}^n e Análise de Fourier. Contudo, o leitor deve estar familiarizado com caracterizações e propriedades básicas de topologia no espaço euclidiano n dimensional e das funções de n variáveis, como por exemplo, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade. Além de resultados básicos da Álgebra Linear e das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's).

1.1 Tópicos de cálculo avançado

1.1.1 Teorema da função inversa e da função implícita

No decorrer dos próximos capítulos, precisaremos fazer certas mudanças de variáveis suaves, as quais serão possíveis através do Teorema da Função Implícita. Com isso, o objetivo desta seção é apresentar o Teorema da Função Implícita como consequência do Teorema da Função Inversa, para isso precisamos compreender alguns conceitos e propriedades da Análise no \mathbb{R}^n .

Sabemos da Álgebra Linear que a inversa de uma transformação linear ainda é uma transformação linear, bem como na Álgebra Abstrata, em que inversos de homomorfismo entre Anéis ou Grupos também são homomorfismos. No entanto, um fato interessante da análise é que uma função diferenciável e invertível, nem sempre possui inversa diferenciável. Um exemplo disto, é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, que é invertível em todo ponto, mas tem inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ que não é diferenciável em $x = 0$. Desse modo, denominamos de difeomorfismos as funções diferenciáveis com inversas também diferenciáveis. Precisamente, temos:

Definição 1.1. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Um **difeomorfismo** entre U e V é uma aplicação $f : U \rightarrow V$ tal que:

- i) f é uma bijeção diferenciável;
- ii) $f^{-1} : V \rightarrow U$ é diferenciável.

Definição 1.2. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, chama-se um **difeomorfismo local** quando para cada $x \in U$ existe uma bola aberta $B_x \subset U$ tal que f aplica B_x difeomorficamente sobre um aberto $V \ni f(x)$.

Observação 1.3. Vamos usar algumas propriedades fundamentais com relação ao conceito de difeomorfismo, as quais elencamos abaixo. Ressaltamos que nosso propósito é provar o Teorema da Função Implícita, a fim de utilizá-lo nos capítulos que seguem, para analisarmos certas mudanças de variáveis. Portanto, não demonstraremos tais propriedades, mas, o leitor interessado pode consultar [6] e [7].

- i) A composição de difeomorfismos é um difeomorfismo;
- ii) O inverso de um difeomorfismo é um difeomorfismo;
- iii) Todo difeomorfismo é um difeomorfismo local;
- iv) Todo difeomorfismo é um homeomorfismo;
- v) Um difeomorfismo local $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta.

De posse dos conceitos e propriedades de um difeomorfismo, temos um importante resultado da análise matemática: O Teorema da Função Inversa. O qual, sob certas hipóteses, permite inverter uma função, ainda que localmente. A demonstração do mesmo pode ser encontrar em [6].

Teorema 1.4. (Teorema da Função Inversa). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível então existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset U$ tal que $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Outro conceito importante é o de difeomorfismo vertical, que geralmente é interpretado como uma transformação geométrica $\varphi : U \rightarrow V$ que aplica diferencialmente o conjunto U sob o conjunto V , de forma invertível. Estritamente, temos:

Definição 1.5. Um difeomorfismo $g : U \rightarrow V$, entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^{m+n}$, será chamado de **difeomorfismo vertical** quando for do tipo

$$g(x, y) = (x, g_2(x, y)),$$

em que g_2 é uma aplicação de U em \mathbb{R}^n .

Observação 1.6. Note que, o inverso de um difeomorfismo vertical é ainda um difeomorfismo vertical. Com efeito, se g é um difeomorfismo vertical, então g é um difeomorfismo e, assim, g^{-1} é um difeomorfismo. Além disso,

$$g(g^{-1}(x, y)) = g(g_1^{-1}(x, y), g_2^{-1}(x, y)) \Rightarrow (x, y) = (g_1^{-1}(x, y), g_2(g_1^{-1}(x, y), g_2^{-1}(x, y))).$$

logo, $g_1^{-1}(x, y) = x$, ou seja, g^{-1} é um difeomorfismo vertical.

Agora, apresentamos o conceito de submersão a fim de demonstrar o Teorema da Forma Local para Submersões, o qual servirá de lema para a demonstração do Teorema da Função Implícita.

Definição 1.7. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto, é uma **submersão**, se possui derivada $f'(z) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobrejetiva em todo ponto $z \in U$.

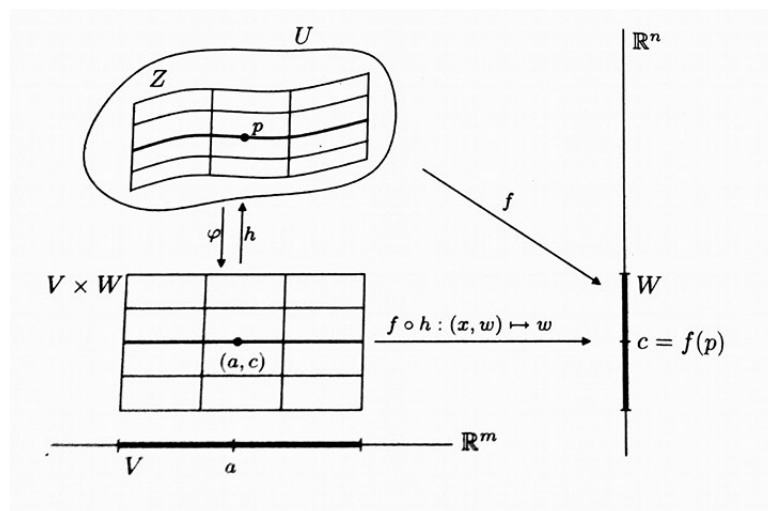
Um exemplo de submersão é o que ocorre no teorema a seguir.

Teorema 1.8. (Forma Local das Submersões). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Se, num ponto $p = (a, b) \in U$, a matriz*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p) \right] \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

é invertível então existem abertos $Z \ni p$ em \mathbb{R}^{m+n} , $V \ni a$ em \mathbb{R}^m , $W \ni c = f(p)$ em \mathbb{R}^n e um difeomorfismo vertical $h : V \times W \rightarrow Z$, de classe C^k , tal que $f(h(x, w)) = w$ para todo $x \in V$ e todo $w \in W$.

Figura 1.1: Forma Local das Submersões



Fonte: [6]

Demonstração: A ideia da prova consiste em utilizar o Teorema 1.4, Teorema da função Inversa. Para tanto, vamos considerar uma aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, definida

por $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. Observe que φ é de classe C^k , pois $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, por hipótese, é de classe C^k e a função identidade é de classe C^∞ . Assim, note que a matriz jacobiana de φ é da forma

$$J\varphi(z) = \begin{bmatrix} I(z) & 0(z) \\ X(z) & Y(z) \end{bmatrix};$$

em que, $I(z)$ é a matriz identidade de ordem $m \times m$, $0(z)$ é a matriz nula de ordem $m \times n$ e $Y(z)$ é a matriz de ordem $n \times n$ das derivadas parciais das funções coordenadas de f em relação às coordenadas de $y = (y_1, \dots, y_n)$, isto é,

$$Y(z) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(z) \right]_{n \times n}$$

com $i, j = 1, \dots, n$. Por outro lado, por hipótese, temos que $Y(p)$, com $p = (a, b)$, é invertível. Além disso, $\det(J\varphi(p)) = \det(Y(p))$. Então, $\varphi'(p) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é invertível. Daí, pelo Teorema da Função Inversa, Teorema 1.4, existe um aberto Z de \mathbb{R}^{m+n} , com $p \in Z$, tal que $\varphi|_Z$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \times W$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, em que $a \in V \subset \mathbb{R}^m$ e $f(a, b) = c \in W \subset \mathbb{R}^n$.

Sendo assim, considere $h : V \times W \rightarrow Z$ o difeomorfismo inverso de $\varphi|_Z$. Note ainda que $\varphi|_Z$ é um difeomorfismo vertical, logo pela Observação 1.6, temos que o difeomorfismo inverso h é da forma $h(x, w) = (x, h_2(x, w))$. Portanto, para qualquer $(x, w) \in V \times W$, obtemos

$$(x, w) = \varphi(h(x, w)) = \varphi(x, h_2(x, w)) = (x, f(h(x, w))) \Rightarrow f(h(x, w)) = w.$$

■

A partir deste momento, estamos prontos para demonstrar o Teorema da Função Implícita, o qual permite resolver implicitamente equações e sistemas e tem aplicações tanto na Análise como também em outras áreas da matemática, como Álgebra e Geometria.

Teorema 1.9. (Teorema da Função Implícita). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Se no ponto $p = (a, b) \in U$, com $f(p) = c$, a matriz*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p) \right] \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

é invertível. Então existem $Z \subset U$, aberto contendo p , $V \subset \mathbb{R}^m$, aberto contendo a , e $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , com $\xi(a) = b$, com a seguinte propriedade:

$$[(x, y) \in Z \text{ e } f(x, y) = c] \Leftrightarrow [x \in V \text{ e } \xi(x) = y].$$

Demonstração: Por hipótese, temos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. E, no ponto $p = (a, b) \in U$, com $f(p) = c$, a matriz

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p) \right] \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

é invertível. Então, pelo Teorema 1.8, Teorema da Forma Local das Submersões, existem abertos $Z \ni p$ em \mathbb{R}^{m+n} , $V \ni a$ em \mathbb{R}^m , $W \ni c = f(p)$ em \mathbb{R}^n e um difeomorfismo vertical $h : V \times W \rightarrow Z$, de classe C^k , o qual podemos definir como $h(x, w) = (x, h_2(x, w))$ que satisfaz a seguinte propriedade:

$$f(h(x, w)) = w, \quad \text{para todo } (x, w) \in V.$$

Observe que, h_2 é de classe C^k , pois h é de classe C^k e, além disso, $f(p) = c \in W$. Logo, podemos considerar a aplicação $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\xi(x) = h_2(x, c)$, que evidentemente é de classe C^k . Basta agora mostrarmos a equivalência:

$$[(x, y) \in Z \text{ e } f(x, y) = c] \Leftrightarrow [x \in V \text{ e } \xi(x) = y].$$

Note que, se $(x, y) \in Z$ e $f(x, y) = c$, tem-se, pela bijetividade de h , que existe um único $(v, w) \in V \times W$ tal que

$$h(v, w) = (x, y) \Rightarrow (v, h_2(v, w)) = (x, y) \Rightarrow x \in V \text{ e } h_2(x, w) = y$$

e, pelo Teorema 1.8, temos que

$$c = f(x, y) = f(h(v, w)) = w \Rightarrow x \in V \text{ e } h_2(x, c) = \xi(x) = y$$

isto é, $x \in V$ e $\xi(x) = y$. E, em particular, $\xi(a) = b$.

Reciprocamente, se $x \in V$ e $\xi(x) = y$, então, como $c \in W$, obtemos

$$h(x, c) = (x, h_2(x, c)) = (x, y) \in Z.$$

E, além disso, pela propriedade do Teorema 1.8, temos que $f(x, y) = f(h(x, c)) = c$. ■

1.1.2 Derivação sob o sinal de integrais em intervalos limitados

No Capítulo 3 apresentaremos dois problemas de Dirichlet envolvendo a equação de Laplace e, na busca por soluções destes problemas, vamos precisar do próximo teorema que é um bom exercício de análise e o qual nos possibilita, sob certas circunstâncias, derivarmos funções definidas através de uma integral, e mais ainda, permite derivarmos sob o sinal da integral.

Teorema 1.10. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo (finito ou infinito). Suponha que $F([a, b] \times I)$ é tal que a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe e é contínua em $[a, b] \times I$. Além disso, considere*

$$f(y) = \int_a^b F(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (1.1)$$

Então f é continuamente diferenciável em I e

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (1.2)$$

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em três partes.

Primeira parte: A função f definida em (1.1), é contínua em I . Note que, precisamos mostrar que dados $\varepsilon > 0$ e $y_0 \in I$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$, desde que $y \in I$ e $|y - y_0| < \delta$. Com efeito, fixemos $y_0 \in I$, daí, se y_0 está no interior do intervalo I , então existe $\eta > 0$ tal que $J = [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subset I$. Mas pode ocorrer o caso em que y_0 é um dos extremos de I , dependendo de qual extremo y_0 é de I : superior ou inferior. Podemos considerar $J = [y_0 - \eta, y_0] \subset I$ ou $J = [y_0, y_0 + \eta] \subset I$.

Por outro lado, por hipótese F é contínua em $[a, b] \times I$ e, em particular, é contínua em $[a, b] \times J$ que é um conjunto compacto em \mathbb{R}^2 . Assim, em qualquer caso, F é uniformemente contínua em $[a, b] \times J$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que podemos tomar menor que η), tal que

$$y \in J, \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |F(x, y) - F(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

E como $\delta < \eta$ temos que $y \in I$ e $|y - y_0| < \delta$, então $|y - y_0| < \eta$, ou seja, $y \in J$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(y_0)| &= \left| \int_a^b F(x, y) dx - \int_a^b F(x, y_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |F(x, y) - F(x, y_0)| dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Segunda parte: A função f definida em (1.1) é diferenciável em I e sua derivada é dada por (1.2).

Como vamos provar a diferenciabilidade de f em I , precisamos enfatizar que se I for da forma $I = [c, d]$, então a diferenciabilidade de f nos extremos significa garantir a existência dos seguintes limites:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(d + h) - f(d)}{h}.$$

Feita essa observação, estamos prontos para provar a diferenciabilidade de f em I , o que é equivalente a mostrar a diferenciabilidade de f no ponto $y_0 \in I$ fixo, porém arbitrário. Assim, dado $y_0 \in I$, considere J análogo ao da construção na etapa anterior. Sabemos que

$\frac{\partial F}{\partial y}$ é uniformemente contínua em $[a, b] \times J$, pois é uma função contínua num compacto. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, com $\delta < \eta$, tal que

$$z \in J, \quad |z - y_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Contudo, para $z \in J$ tal que $|z - y_0| < \delta$, pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, existe um ponto intermediário \bar{z}_x entre z e y_0 tal que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) = \frac{F(x, z) - F(x, y_0)}{z - y_0}$$

e, além disso, como \bar{z}_x está entre z e y_0 , temos que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (1.3)$$

Portanto, se $z \in I$, $|z - y_0| < \delta$, então $z \in J$, pois $\delta < \eta$ e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(y_0)}{z - y_0} &= \int_a^b \frac{F(x, z) - F(x, y_0)}{z - y_0} dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Então, por (1.3) e (1.4) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(y_0)}{z - y_0} - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) dx \right| &= \left| \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right| dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que, fixado $y_0 \in I$ arbitrariamente, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $z \in J$, $|z - y_0| < \delta$, então, tem-se

$$\left| \frac{f(z) - f(y_0)}{z - y_0} - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) dx \right| < \varepsilon,$$

ou seja, f é diferenciável em I e, mais estritamente, tem-se

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in I.$$

Terceira parte: A função f' definida em (1.2) é contínua.

De fato, como $\frac{\partial F}{\partial y}$ é contínua em $[a, b] \times J$, basta proceder de forma análoga à demonstração feita na primeira etapa, trocando apenas f por f' e usar a continuidade uniforme de $\frac{\partial F}{\partial y}$ em $[a, b] \times J$. ■

1.1.3 As identidades de Green

No capítulo 4 apresentaremos um princípio do máximo para funções harmônicas o qual decorre das identidades de Green estudadas nos cursos de cálculo. Sendo assim, vamos elencar alguns destes resultados a fim de utilizá-los na demonstração do Teorema do Valor Médio em \mathbb{R}^2 que servirá como um lema para demonstrar o princípio do máximo. Destacamos que enunciamos, por simplicidade, os resultados em \mathbb{R}^2 , embora sejam válidos em \mathbb{R}^n . O leitor interessado na demonstração destes resultados pode consultar [4].

O Teorema da Divergência também conhecido como Teorema de Gauss, associa o fluxo de um campo vetorial por entre uma superfície com o comportamento do campo vetorial dentro da superfície. Mais precisamente, temos que

Teorema 1.11. (Teorema da Divergência). *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto conexo) limitado cuja fronteira ∂A é uma união finita de curvas suaves e considere $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 em \bar{A} . Então*

$$\int_{\bar{A}} \nabla \cdot F dx dy = \int_{\partial A} F \cdot \hat{n} ds$$

onde \hat{n} é a normal externa unitária.

Este resultado é fundamental para o estudo das EDP's, mas também tem aplicações na engenharia, como por exemplo, na dinâmica de fluidos e na eletroestática. Além disso, o Teorema 1.11 é uma consequência do Teorema de Green, o qual é um caso particular do Teorema de Stokes estudados nos cursos de cálculo. A seguir, enunciamos as identidades de Green as quais decorrem do Teorema da Divergência.

Teorema 1.12. (Primeira e Segunda Identidades de Green). *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto e conexo) onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\bar{A})$. Então valem as seguintes identidades:*

$$\begin{aligned} \int_{\bar{A}} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx dy &= \int_{\partial A} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \\ \int_{\bar{A}} (v \Delta u - u \nabla v) dx dy &= \int_{\partial A} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \end{aligned}$$

em que $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária externa \hat{n} .

Teorema 1.13. (Terceira Identidade de Green). *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto e conexo) limitado onde vale o teorema da divergência e seja $u \in C^2(\overline{A})$. Então, qualquer que seja $\xi \in A$, tem-se*

$$u(\xi) = \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi \right) ds + \int_A F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta.$$

Definição 1.14. *Seja $y \in \mathbb{R}^n$, com $y = (y_1, \dots, y_n)$, definimos o **operador Laplaciano** de u por*

$$\Delta u(y) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y).$$

Uma função $u \in C^2(A)$ é dita **harmônica** quando $\Delta u(y) = 0$, para todo $y \in A$, ou seja, u uma função tal que o divergente do gradiente se anula.

Exemplo 1.15. Dentre os diversos exemplos de funções harmônicas, as funções constantes e afins $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, definidas em \mathbb{R} , são os exemplos mais simples de funções harmônicas. Em \mathbb{R}^2 temos as funções harmônicas $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $g(x, y) = x^2 - y^2$ e $h(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Além disso, pela linearidade do operador Laplaciano, temos que se v e w são funções harmônicas, então a função $v + \lambda w$ é uma função harmônica.

Uma consequência imediata dessas identidades de Green, Teorema 1.12, é o corolário a seguir, no qual adicionamos a hipótese da função $u \in C^2(A)$ ser uma função harmônica.

Corolário 1.16. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto e conexo) onde vale o teorema da divergência e $u \in C^2(\overline{A})$ tal que $\Delta u = 0$ em A . Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\overline{A}} |\nabla u|^2 dx dy = \int_{\partial A} u \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad e \quad \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

O resultado abaixo, Teorema do Valor Médio, garante que o valor de uma função harmônica u em um ponto ξ é precisamente a média de u ao redor de ξ .

Teorema 1.17. (Teorema do Valor Médio). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e u uma função harmônica em A . Então, quaisquer que sejam $\xi \in A$ e $R > 0$ com $\overline{B(\xi; R)} \subset A$,*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds.$$

Demonstração: Para quaisquer que sejam $\xi \in A$ e $R > 0$ com $\overline{B(\xi; R)} \subseteq A$, podemos aplicar o Teorema 1.13, Terceira Identidade de Green, a $B(\xi; R)$, pois $B(\xi; R)$ é um domínio limitado onde vale o teorema da divergência e $u \in C^2(\overline{B(\xi; R)})$. Daí, considerando

o campo vetorial definido por $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \log |\xi - \omega|$ e usando que u é harmônica, obtemos que

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi; R)} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi \right) ds + \int_{B(\xi; R)} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta$$

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi; R)} u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} ds - \int_{\partial B(\xi; R)} \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi ds.$$

Além disso, se $\eta \in \partial B(\xi; R)$, então

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \log |\xi - \eta| = \frac{1}{2\pi} \log R,$$

$$\frac{\partial F_\xi}{\partial n}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\xi - \eta|} = \frac{1}{2\pi R}.$$

Assim,

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds - \frac{\log R}{2\pi} \int_{\partial B(\xi; R)} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

E como u é harmônica, pelo Corolário 1.16, tem-se

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds.$$

■

1.2 Tópicos de séries de funções e séries de Fourier

O escopo deste tópico concerne no estudo introdutório sobre as séries de Fourier necessário para o estudo das Equações Diferenciais Parciais trabalhadas nos capítulos subsequentes. Vale destacar que os seguintes conceitos tiveram como referências os livros [3], [4] e [5].

1.2.1 Convergência de séries de funções

A série de Fourier de uma determinada função é um caso particular de série de funções, e nesse sentido estamos interessados na convergência de tais séries, portanto é necessário enunciarmos conceitos e resultados sobre convergências das séries de funções.

Definição 1.18. Sejam $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas definidas em $A \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge pontualmente** em A para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ se, e somente se, dados $x \in A$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. E **converge uniformemente** em A para

uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in A$ e para todo $n \geq n_0$.

Com isso, caracterizamos que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

converge pontual (respectivamente, uniformemente) em A se, e somente se, a sequência de funções

$$\sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in A,$$

converge pontualmente (respectivamente, uniformemente) em A . Mais especificamente, definimos

Definição 1.19. Sejam $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções definidas em $A \subset \mathbb{R}^m$, com $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a série de funções $\sum f_n(x)$ **converge pontualmente** em A se, e somente se, dados $x \in A$ e $\varepsilon > 0$, existir $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| < \varepsilon.$$

E **converge uniformemente** em A se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Observamos que, as definições de convergência pontual e uniforme, se diferenciam por uma sutil mas fundamental dependência do natural n_0 , em que na convergência pontual o n_0 pode depender de x , enquanto que, na convergência uniforme, o mesmo n_0 funciona para todos valores de x , ou seja, só depende de $\varepsilon > 0$.

O teorema a seguir garante que uma sequência de funções contínuas converge para um função que ainda preserva a continuidade.

Teorema 1.20. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_{\mathbb{C}}(A)$. Se a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, então $f \in C_{\mathbb{C}}(A)$.

Demonstração: Queremos mostrar que $f \in C_{\mathbb{C}}(A)$. Isto é, fixado arbitrariamente $x_0 \in A$, precisamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, desde que $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$. De fato, como a sequência de funções converge uniformemente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para uma função f , então existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in A, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.5)$$

Além disso, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $C_{\mathbb{C}}(A)$, em particular temos que f_{n_0} é contínua em x_0 , então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.6)$$

Logo, se $x \in A$, $|x - x_0| \leq \delta$, por (1.5) e (1.6), temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Outra propriedade interessante é o Teste M de Weierstrass, que garante, sob certas circunstâncias, a convergência uniforme das séries de funções e o qual funciona como uma espécie de Teste da Comparação para séries numéricas. Sobretudo, reduz o problema de verificar a convergência de uma série de funções ao da convergência de uma série numérica.

Teorema 1.21. (Teste M de Weierstrass). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_{\mathbb{C}}(A)$. Se existe uma sequência numérica $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, satisfazendo, $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in A$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a série de funções $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em A .*

Demonstração: Note que queremos mostrar a convergência uniforme da série de funções $\sum f_n(x)$. Mas, primeiramente vamos demonstrar a convergência pontual em A . Com efeito, por hipótese, sabemos que a série numérica $\sum M_n$ converge, logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l \geq n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=n}^l M_k < \varepsilon.$$

Daí, qualquer que seja $x \in A$, tem-se

$$\left| \sum_{k=n}^l f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^l |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^l M_k < \varepsilon \quad (1.7)$$

então a série $\sum f_n(x)$ converge pelo critério de Cauchy. Assim, considere $f(x)$ a soma da série, isto é, para cada $x \in A$, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in A. \quad (1.8)$$

Com isso, fixado $x \in A$, tomemos o limite $l \rightarrow +\infty$ em (1.7), pois agora sabemos que existe. Isto é,

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} M_k \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0. \quad (1.9)$$

Por outro lado, quaisquer que sejam $x \in A$ e $n \geq n_0$, obtemos de (1.8) e (1.9) que

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} M_k \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Portanto, como n_0 não depende de ε , obtemos de (1.10) que $\sum f_n$ converge uniformemente. ■

O seguinte teorema nos diz que podemos trocar a ordem de um limite com uma integral, desde que a sequência de funções convirja uniformemente. Mas para enunciarmos tal resultado, necessitamos do conceito de função seccionalmente contínua.

Definição 1.22. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função *seccionalmente contínua* em $[a, b]$ se existe uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ tal que f seja contínua em cada subintervalo (x_j, x_{j+1}) e existem os limites

$$f(x_j^+) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_j^-) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x).$$

Basicamente, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se ela tiver somente um número finito de descontinuidades, todas de primeiras espécie, em qualquer intervalo limitado.

Teorema 1.23. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_{\mathbb{C}}([a, b])$ que converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função $f \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$. Então, qualquer que seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente contínua, temos que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

Demonstração: Considere arbitrariamente uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente contínua, queremos mostrar que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

De fato, como g é seccionalmente contínua definida no compacto $[a, b]$ então é limitada, logo, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Além disso, como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $C_{\mathbb{C}}([a, b])$ que converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função $f \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$ e g é seccionalmente contínua, então existem as integrais:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

Por outro lado, pela convergência uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para a função f , temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in [a, b], n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

Então, se $n \geq n_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f_n(x)g(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))g(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|g(x)dx \\ &< \frac{\varepsilon M}{M(b-a)} \int_a^b dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

■

Uma consequência do Teorema 1.23 é mais uma propriedade importante sobre séries de funções, a qual assegura que podemos "integrar termo a termo" a série $\sum f_n$, desde que a série convirja uniformemente.

Corolário 1.24. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_{\mathbb{C}}([a, b])$. Se $\sum f_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função $f \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$, então qualquer que seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente contínua, temos que*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

Demonstração: A demonstração segue imediatamente do Teorema 1.23, basta considerarmos a seguinte sequência:

$$F_n = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad x \in [a, b]$$

e como $\sum f_n$ converge uniformemente para f então a sequência (F_n) converge uniformemente para f , logo, para qualquer que seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente contínua, temos, pelo Teorema 1.23, que

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n g(x)dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b F_n g(x)dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x)g(x)dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x)g(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

■

Por fim, temos o seguinte teorema que está ligado a derivação de séries, no qual assegura que, sob certas hipóteses, podemos "derivar termo a termo".

Teorema 1.25. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_{\mathbb{C}}^1([a, b])$. Se a série $\sum f_n(x_0)$ converge em algum ponto $x_0 \in [a, b]$ e a série das derivadas $\sum f'_n(x)$ converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função $g \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$. Então a série $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função $f \in C_{\mathbb{C}}^1([a, b])$ e $f' = g$.*

Demonstração: Fixado $x \in [a, b]$ arbitrariamente, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\int_{x_0}^x f'_n(t)dt = f_n(x) - f_n(x_0).$$

Além disso, como $\sum f'_n(t)$ converge uniformemente para $g(t)$, então pelo Corolário 1.24 podemos integrar a série de x_0 até x e, assim, ficamos com

$$\int_{x_0}^x g(t)dt = \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)).$$

E, como $\sum f_n(x_0)$ converge, então a série $\sum f_n(x)$ também converge para um função $f(x)$. Assim,

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt + f(x_0), \quad (1.11)$$

note ainda que, como $x \in [a, b]$ é arbitrário, temos que $f \in C_{\mathbb{C}}^1([a, b])$, e derivando (1.11) temos que $f' = g$. Agora, basta mostrar que $\sum f_n(x)$ converge uniformemente. De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela convergência de $\sum f'_n(x)$ e $\sum f_n(x_0)$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$ implica:

$$\begin{aligned} \left| f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \\ \left| g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Portanto, quando $x \in [a, b]$, obtemos que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x g(t)dt + f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x g(t)dt - \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_k(x_0)) \right| + \left| f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| \\ &< \left| \int_{x_0}^x g(t)dt - \int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^n f'_k(x) \right) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} \left| g(t)dt - \sum_{k=1}^n f'_k(x) \right| dt + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

1.2.2 Séries de Fourier

A partir de tentativas de encontrar soluções para problemas envolvendo determinadas Equações Diferenciais Parciais percebeu-se, ao longo da história, a necessidade de expressar uma dada função como uma séries de senos e/ou cossenos. Mais especificamente, gostaríamos de saber quando é possível expressar uma dada função $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.12)$$

além disso, como calculamos os coeficientes a_n e b_n conhecendo a função f e em que

sentido a série em (1.12) converge. Mais adiante, iremos definir a série em (1.12) como a Série de Fourier de f . Nosso objetivo agora é responder a tais questionamentos, para isso, o leitor deve estar familiarizado com os conceitos e resultados de funções periódicas e de funções trigonométricas.

Primeiramente, vamos determinar os coeficientes a_n e b_n em termos da função f , para tanto, precisamos definir o seguinte produto interno.

Definição 1.26. Sejam $f, g \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$, definimos o **produto interno** entre f e g da seguinte forma

$$(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \quad (1.13)$$

em que $\overline{g(x)}$ é o complexo conjugado de $g(x)$, $x \in [a, b]$.

Observação 1.27. Da continuidade das funções e das propriedades de integrais, como por exemplo, a linearidade, podemos observar que, de fato, a expressão em (1.13) é um produto interno, uma vez que, satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $(f|f) \geq 0$, $\forall f \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$;
- ii) $(f|f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$;
- iii) $(\alpha f + g|h) = \alpha(f|h) + (g|h)$, $\forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$; (linearidade)
- iv) $(f|g) = \overline{(g|f)}$ (simetria hermitiana).

Naturalmente, a mesma fórmula de produto interno em (1.13) define o produto interno em $C([a, b])$, na qual ficamos, estritamente, com:

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Salientamos que f e g são ortogonais em $C_{\mathbb{C}}([a, b])$ se, e somente, se $(f|g) = 0$. E uma família de funções é dita ortogonal em $C_{\mathbb{C}}([a, b])$ quando as funções são ortogonais duas a duas.

Agora, a fim de simplificar a notação consideremos as seguintes funções:

$$\varphi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [-l, l] \text{ e } n \in \mathbb{N}; \quad (1.14)$$

$$\psi_n(x) = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [-l, l] \text{ e } n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.15)$$

Observação 1.28. As funções definidas acima em (1.14) e (1.15) são periódicas de período fundamental $T = \frac{2l}{n}$. E, particularmente, $2l$ é um período comum a essas funções, uma vez que é um múltiplo do período fundamental.

O resultado a seguir nos auxiliará na determinação dos coeficientes a_n e b_n . A demonstração segue de um cálculo direto a partir do uso de fórmulas trigonométricas e pode ser encontrada em [4].

Proposição 1.29. *Sejam φ_n e ψ_n da forma (1.14) e (1.15), respectivamente. Então, o conjunto $\{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ é ortogonal em $C([-l, l])$ e valem as seguintes relações de ortogonalidade:*

$$\int_{-l}^l \psi_n(x)\psi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m, n \in \mathbb{Z}^+, m \neq n, \\ l, & \text{se } m = n \in \mathbb{N}, \\ 2l & \text{se } m = n = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x)\psi_m(x)dx = 0, \quad \forall; n \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (1.17)$$

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ l, & \text{se } m = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Observação 1.30. Nos problemas que vamos analisar no Capítulo 3, estamos interessados em funções que serão integradas em intervalos semelhantes ao intervalo de $[0, l]$. Contudo, as funções φ_n e ψ_n não são ortogonais em $[0, l]$, por isso usamos o produto interno em $[-l, l]$, na tentativa de facilitar o cálculo dos coeficientes a_n e b_n .

Com isso, podemos determinar uma fórmula para os coeficientes a_n e b_n . Primeiramente, vamos supor que podemos escrever uma dada função f como em (1.12) e, além disso, vamos supor que podemos integrar termo a termo e para isso precisamos supor que a série convirja uniformemente em (1.12). Observe que, podemos reescrever (1.12) em função de φ_n e ψ_n , assim

$$f = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\psi_n + b_n\varphi_n). \quad (1.19)$$

Notemos que, pela Proposição 1.29, o produto interno de f com ψ_0 em $[-l, l]$ é da forma

$$\begin{aligned} (f|\psi_0) &= \int_{-l}^l \left(\frac{a_0}{2}\psi_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\psi_n(x) + b_n\varphi_n(x)) \right) \psi_0(x)dx \\ &= \frac{a_0}{2}(\psi_0|\psi_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-l}^l \psi_n(x)\psi_0(x)dx + b_n \int_{-l}^l \varphi_n(x)\psi_0(x)dx \right) \\ &= a_0l. \end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$a_0 = \frac{1}{l}(f|\psi_0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)\psi_0(x)dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)dx.$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} (f|\psi_n) &= a_n(\psi_n|\psi_n) = a_n l, \\ (f|\varphi_n) &= b_n(\varphi_n|\varphi_n) = b_n l. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{l}(f|\psi_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (1.20)$$

$$b_n = \frac{1}{l}(f|\varphi_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.21)$$

Por outro lado, podemos inverter o processo, isto é, dada $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as integrais em (1.20) e (1.21) fazem sentido e são iguais aos coeficiente a_n e b_n , respectivamente, então podemos formar a série em (1.12). As equações em (1.20) e (1.21) são chamadas de fórmulas de Euler-Fourier. Sendo assim, definimos a série de Fourier do seguinte modo:

Definição 1.31. Sejam $l > 0$ e $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. A *série de Fourier de f* é a série

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.22)$$

na qual os coeficiente a_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ e b_n , $n \in \mathbb{N}$ são dados pelas fórmulas de Euler-Fourier. Além disso, tais coeficiente são chamados de *coeficientes de Fourier de f* .

Observação 1.32. Note que, cada um dos termos da série (1.22) é uma função periódica de período $2l$ e portanto, se a série convergir para cada $x \in \mathbb{R}$, ela convergirá para uma função periódica de período $2l$. Por outro lado, se a função f for tal que $f(-l) \neq f(l)$ não aguardamos que a série de Fourier de f irá convergir para $f(x)$, para todo $x \in [-l, l]$. Além do mais, estudamos, naturalmente, séries de Fourier de funções da reta na reta que são periódicas. Outro fato interessante, é que se $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ for tal que $f(-l) = f(l)$ e sua série de Fourier convergir para $f(x)$, quando $x \in [-l, l]$, logo, $S[f]$ convergirá em \mathbb{R} para a extensão periódica de período $2l$ de f .

Observação 1.33. Sabemos que, se uma função integrável $g : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, então

$$\int_{-l}^l g(x)dx = 0,$$

e, podemos observar que os coeficientes de Fourier de f são dados em funções de f e das funções trigonométricas seno e cosseno, as quais são ímpar e par, respectivamente. Portanto, se f é uma função par temos que $b_n = 0$, pois o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar. Por outro lado, se f é uma função ímpar tem-se que $a_n = 0$. Consequentemente, a série de Fourier de uma função par é uma série de cossenos, enquanto $S[f]$ de uma função ímpar é uma série de senos.

Podemos reescrever a série de Fourier de uma forma mais sucinta, chamada de Série de Fourier complexa de f . Para isto, usaremos a fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim, como a função seno é ímpar, obtemos

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} \right) - ib_n \left(\frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{in\pi x/l} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-in\pi x/l} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier complexa de f é da forma

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\pi x/l}, \quad (1.23)$$

em que, $\hat{f}(n)$, também chamado de coeficientes de Fourier complexos de f , são da forma

$$\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}, \quad (1.24)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.25)$$

$$\hat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.26)$$

Daí, usando as identidades em (1.20), (1.21), (1.24), (1.25) e (1.26). Podemos, observar que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.27)$$

Observação 1.34. Note que, a convergência da série de Fourier de f em (1.22) é equivalente à convergência da série Fourier complexa de f em (1.23), no sentido da existência do limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k \hat{f}(n) e^{in\pi x/l}.$$

Existem algumas propriedades importantes das séries de Fourier de funções seccionalmente contínuas, as quais vamos elencar a seguir e que nos auxiliarão na demonstração do fundamental Teorema de Fourier que iremos apresentar posteriormente. Ressaltamos que as demonstrações de tais resultados podem ser encontradas em [4] e usam, basicamente, as propriedades de convergência de séries, as relações de ortogonalidades e as equações de Euler-Fourier.

Proposição 1.35. (Desigualdade de Bessel). *Sejam $f \in SC[-l, l]$ e*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

sua série de Fourier. Então as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

convergem e vale a desigualdade Bessel

$$l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \right) \leq \|f\|^2.$$

no qual

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)}, \quad \forall f \in SC([-l, l]).$$

Na sua forma complexa, a desigualdade de Bessel é dada por:

Corolário 1.36. (Forma Complexa da Desigualdade de Bessel). *Sejam $f \in SC[-l, l]$ e $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ a sequência dos coeficientes de Fourier complexos de f . Então a série*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k \hat{f}(n) e^{in\pi x/l}$$

converge e vale a desigualdade de Bessel na sua forma complexa

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2l} \|f\|^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx.$$

O próximo corolário é uma consequência simples da desigualdade de Bessel a qual é importante para a teoria das séries de Fourier:

Corolário 1.37. (Lema de Riemann-Lebesgue). *Se $f \in SC([-l, l])$ e se*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

for sua série de Fourier, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

E, como consequência temos a forma complexa do Lema de Riemann-Lebesgue:

Corolário 1.38. (Forma Complexa do Lema de Riemann-Lebesgue). *Se $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$ for seccionalmente contínua, então*

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

1.2.3 Convergência das séries de Fourier

Os resultados de convergência das séries de Fourier são de suma importância no estudo das EDP's, pois sob certas hipóteses nos permite escrever uma função como série de senos e/ou cossenos. A priori, vamos analisar o Teorema de Fourier, o qual garante a convergência pontual das séries de Fourier. Mas antes vamos analisar o seguinte lema que nos auxiliará na demonstração do Teorema de Fourier o qual, na realidade, é um caso particular do mesmo.

Lema 1.39. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2l$ seccionalmente contínua e f' seccionalmente contínua. Se f é contínua na origem com $f(0) = 0$, então a série de Fourier de f na origem converge para $f(0)$, ou seja,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Demonstração:

Queremos mostrar que a série de Fourier de f converge na origem para $f(0)$. Para tanto, vamos analisar a convergência da forma complexa da série de Fourier por esta ser mais concisa.

Primeiramente, consideremos a seguinte função auxiliar:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1}, & \text{se } x \neq 0, \quad x \in [-l, l] \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que g é periódica de período $2l$, pois f é periódica e:

$$e^{i\pi(x+2l)/l} - 1 = e^{i2\pi} e^{i\pi x/l} - 1 = e^{i\pi x/l} - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Agora, mostraremos que g é seccionalmente contínua, de fato, como $f(0) = 0$ e f' é seccionalmente contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} \\ &= \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \left(\frac{x}{e^{i\pi x/l} - e^0} \right) \right) \\ &= \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \left(\frac{e^{i\pi x/l} - e^0}{x} \right)^{-1} \right) \\ &= \frac{f'(0^+)}{i\pi/l} = \frac{-il}{\pi} f'(0^+) = g(0). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{-il}{\pi} f'(0^-).$$

Logo existem os seguintes limites laterais $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$. Além disso, como $f \in SC_{per}(2l)$ e a função $e^{i\pi x/l} - 1$ é contínua, periódica de período $2l$ e apenas se anula em $x = 0$ no intervalo $[-l, l]$, então g é seccionalmente contínua. Assim, pelo Corolário 1.38, Forma Complexa do Lema Riemann-Lebesgue, temos

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \hat{g}(n) = 0.$$

Observe também que,

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \hat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) (e^{in\pi x/l} - 1) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) e^{-i(n-1)\pi x/l} dx - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^m \hat{f}(k) &= \hat{f}(-n) + \hat{f}(-n+1) + \cdots + \hat{f}(m-1) + \hat{f}(m) \\ &= \hat{g}(-n-1) - \hat{g}(-n) + \hat{g}(-n) - \hat{g}(-n+1) + \cdots + \\ &\quad \hat{g}(m-2) - \hat{g}(m-1) + \hat{g}(m-1) - \hat{g}(m) \\ &= \hat{g}(-n-1) - \hat{g}(m). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^m \hat{f}(k) = 0.$$

ou seja, a série de Fourier de f no ponto $x = 0$ converge. ■

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema de Fourier, o qual garante, sob certas hipóteses, que nos pontos onde f é contínua sua série de Fourier converge para a própria imagem de f nesses pontos, mas nos pontos em que f é descontínua a série de Fourier converge para o ponto médio dos limites laterais de f calculados nesses pontos de descontinuidade.

Teorema 1.40. (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua de período $2L$ com f' seccionalmente contínua. Então a série de Fourier da função f , converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Demonstração: Para demonstrar este teorema utilizaremos o Lema 1.39. Para tanto, a ideia é transformar a função f até obter uma outra função como a do Lema 1.39 e para isso utilizamos uma transformação como ilustrado na Figura 1.2.

Com isso, considere $x_0 \in \mathbb{R}$. Inicialmente, vamos definir uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva o ponto $(x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2)$ na origem $(0, 0)$. Logo,

$$T(x, y) = (x - x_0, y - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2).$$

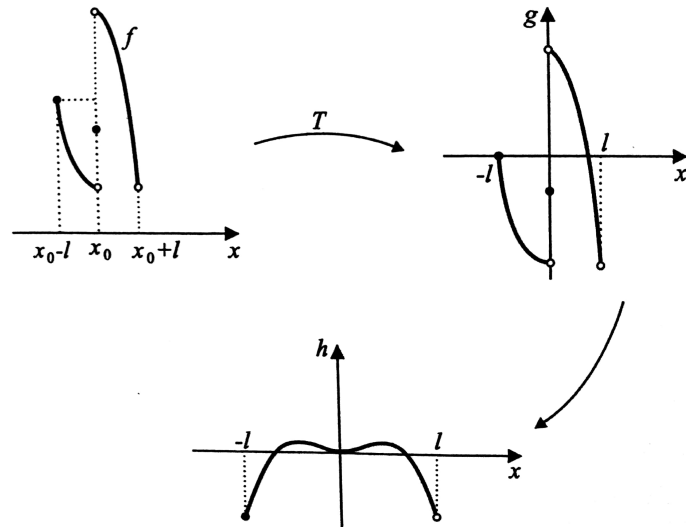
Observe que a transformação T leva o gráfico de f nos seguintes pontos:

$$(x - x_0, f(x) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2),$$

que é o gráfico da função g dada por:

$$g(x) = f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Figura 1.2: Ideia da demonstração do Teorema de Fourier



Fonte: [4]

Estamos procurando uma função que se enquadre nas hipóteses do Lema 1.39. Note que g é uma função periódica de período $2l$ e seccionalmente diferenciável, pois $f, f' \in SC_{per}(2l)$. Contudo, a função g definida acima não é necessariamente contínua em $x = 0$. Por outro lado, temos que

$$\frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = 0.$$

Logo, consideremos a função

$$h(x) = \begin{cases} [g(x^+) + g(x^-)]/2, & \text{se } x \neq 0, \ x \in [-l, l], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Notemos que $g, g' \in SC_{per}(2l)$ então $h, h' \in SC_{per}(2l)$. E, por construção, h é contínua na origem, com $h(0) = 0$. Portanto, aplicando o Lema 1.39 para a função h , temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{h}(k) = 0.$$

Além disso,

$$\hat{h}(k) = \frac{\hat{g}(k) + g(-k)}{2},$$

assim,

$$\sum_{k=-n}^n \hat{h}(k) = \frac{\hat{g}(-n) + g(n)}{2} + \dots + \frac{\hat{g}(n) + g(-n)}{2} = g(-n) + \dots + g(n) = \sum_{k=-n}^n \hat{g}(k).$$

Agora, vamos calcular os coeficientes de Fourier da função g na forma complexa, na

tentativa de relacioná-los com os coeficientes $\hat{f}(n)$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) e^{-ik\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left(f(x+x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right) e^{-ik\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\pi(u-x_0)/l} du + \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{-ik\pi x/l} dx \\ &= \hat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\hat{g}(0) &= \hat{f}(0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \\ \hat{g}(k) &= \hat{f}(k) e^{-ik\pi x_0/l} \quad k \neq 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^n \hat{g}(k) &= \hat{f}(-n) e^{-i(-n)\pi x_0/l} + \dots + \left(\hat{f}(0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right) + \dots + \hat{f}(n) e^{-in\pi x_0/l} \\ &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.\end{aligned}$$

Daí, tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$, obtemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x_0}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l} \right).$$

■

Após estudarmos o Teorema de Fourier é natural nos questionarmos sobre a convergência uniforme da série de Fourier de uma determinada função e se a mesma converge para própria função. A resposta é sim, mas desde que a função seja contínua, periódica e diferenciável a menos de um número finito de pontos com derivada periódica e seccionalmente contínua.

Mas antes de demonstrarmos tal resultado precisamos enunciar a seguinte propriedade, que nos dá informações sobre a série de Fourier da derivada de uma função. A demonstração deste resultado segue do Lema 1.38, Forma Complexa do Lema de Riemann-

Lebesgue, e do Teorema 1.21, Teste M de Weierstrass. O leitor interessado pode encontrar a demonstração em [4].

Proposição 1.41. *Se $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC_{per}(2l)$, então os coeficientes de Fourier complexos de f e f' satisfazem*

$$(\hat{f}')(n) = \frac{in\pi}{l} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, durante a demonstração precisaremos da seguinte desigualdade

Proposição 1.42. (Desigualdade de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz (CBS)). *Sejam $f, g \in SC([-l, l])$ quaisquer. Então, temos*

$$|(f|g)| \leq \|f\| \|g\|,$$

no qual

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)}, \quad \forall f \in SC([-l, l]).$$

Agora estamos prontos para provarmos o próximo resultado, o qual garante, sob certas hipóteses, convergência uniforme das séries de Fourier.

Teorema 1.43. (Convergência uniforme das séries de Fourier). *Se $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então a série de Fourier de f converge para f uniformemente em \mathbb{R} .*

Demonstração: Queremos mostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{-in\pi x/l}$$

converge uniformemente para f . Então, pelo Teorema 1.40, Teorema de Fourier, e pelo Teorema 1.21, Teste M de Weierstrass, basta mostrarmos que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| \leq K, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que pelo Teste M de Weierstrass temos a convergência uniforme e pelo Teorema de Fourier temos que a série converge para f .

De fato, considere $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, usando a Proposição 1.41, Proposição 1.42 para \mathbb{R}^{2N} ,

desigualdade CBS, e a desigualdade de Bessel, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| &= |\hat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|} |\hat{f}'(n)| \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \frac{1}{\pi} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\sqrt{l}}{\pi\sqrt{2}} \|f'\| \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = K.\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Equações diferenciais parciais

O estudo das equações diferenciais iniciou-se com a criação do cálculo diferencial e integral no século XVII guiado por suas aplicações a problemas provenientes da física. As equações diferenciais parciais aparecem em muitos problemas de pesquisa tanto no campo da matemática aplicada, que constituem uma importante ferramenta para a resolução de uma série de problemas ligados também a outras áreas, como por exemplo, física, química, biologia e até alguns ramos das engenharias; quanto na matemática pura, na busca por resultados relativos à existência, unicidade e comportamento de soluções. As equações diferenciais parciais, assim como as equações diferenciais ordinárias, são geralmente utilizadas para descrever fenômenos físicos. O objetivo geral do nosso trabalho é garantir a existência e unicidade de solução para problemas de Dirichlet envolvendo EDP's elípticas de segunda ordem, mais especificamente, operador Laplaciano. Sendo assim, nesse capítulo elencaremos os conceitos e resultados básicos referentes às EDP's, possibilitando um embasamento teórico para compreendermos os próximos capítulos.

2.1 Conceitos básicos

Uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes, uma função incógnita (variável dependente) e suas derivadas parciais com respeito as variáveis independentes é denominada de equação diferencial parcial. Mais estritamente, temos o seguinte conceito:

Definição 2.1. Uma *equação diferencial parcial (EDP)* na variável dependente $u(x)$ e nas variáveis independentes x_1, \dots, x_n é uma equação da forma

$$G \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}(x), \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x) \right) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

com $x = (x_1, \dots, x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n$, em que A é um aberto e G uma função dada.

Vejamos alguns exemplos clássicos desse tipo de equação:

Exemplo 2.2. Equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad (2.2)$$

em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. No caso que f é identicamente nula a equação (2.2) é conhecida como Equação de Laplace. Esta equação está relacionada a problemas que independem do tempo, como a função potencial elétrico num meio dielétrico sem cargas elétricas e a energia potencial de uma partícula em que agem apenas forças gravitacionais.

Exemplo 2.3. Equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (2.3)$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α é uma constante chamada de constante de difusividade térmica. A equação do calor está geralmente associada a fenômenos de difusão, como por exemplo, transmissão de calor em sólidos.

Exemplo 2.4. Equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (2.4)$$

em que $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, e c é uma constante positiva chamada a velocidade de propagação da onda. E, está, geralmente, relacionada à propagação de ondas lineares.

Exemplo 2.5. Equação de Sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \text{sen}(u(x, t)) = 0.$$

Exemplo 2.6. Equação de Korteweg e de Vreis (KdV):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

em que $x, t \in \mathbb{R}$. E, assim como a equação da onda, a equação KdV descreve propagação de ondas lineares em meios dispersivos não dissipativos, como as ondas em canais rasos.

Exemplo 2.7.

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^{xy}.$$

Como vimos, o Laplaciano de u é definido

$$\Delta u(y) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y).$$

com $y \in \mathbb{R}^n$, com $y = (y_1, \dots, y_n)$. Assim, as equações (2.2), (2.3) e (2.4) em dimensões maiores são, respectivamente, da seguinte forma:

1. Equação de Poisson: $\Delta u(x) = f(x)$;
2. Equação de Calor: $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \Delta u(x, t)$;
3. Equação da onda: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t)$;

com $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Observamos que analisar as derivadas de maior ordem nas equações diferenciais parciais, nos trará algumas informações relevantes sobre a classificação das EDP's. Assim como as equações diferenciais ordinárias, podemos classificar as equações diferenciais parciais quanto à ordem e linearidade.

Definição 2.8. A *parte principal* de uma equação diferencial parcial é a parcela que contém as derivadas de maior ordem da equação.

Definição 2.9. A *ordem* de uma EDP é determinada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação. Ou seja, na equação (2.1) a ordem da equação é k quando G é não constante e está em função de alguma das derivadas de ordem k .

Definição 2.10. Diremos que uma equação diferencial parcial é *linear* se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação, caso contrário, é dita não linear.

Dentre as equações diferenciais parciais lineares podemos classificá-las ainda quanto à homogeneidade. Embora possamos fazer as seguintes considerações para EDP's lineares de qualquer ordem, consideramos, por simplicidade, a forma geral de uma EDP linear de segunda ordem, que pode ser expressa na forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0 \quad (2.5)$$

em que algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo, pois a EDP é de segunda ordem.

Assim, dizemos que uma EDP é homogênea se o termo independente na equação (2.5), $d(x)$, é identicamente nulo, caso contrário, diremos que a EDP é não homogênea.

No contexto das equações diferenciais parciais não lineares subclassificamos em semilineares, para tanto precisamos analisar a parte principal da EDP. Sendo assim, a parte principal da equação (2.5) é da forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Daí, dentre as EDP's não-lineares, classificamos em semilineares as que possuem parte principal linear. Com isso, a forma geral de uma EDP semilinear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Mais adiante classificaremos essas equações quanto ao tipo: Parabólica, elíptica e hiperbólica.

Observação 2.11. Note que, as equações (2.2), (2.3), e (2.4), respectivamente, as equações de Poisson, do calor e da onda, são equações lineares homogêneas de segunda ordem, salvo o caso da equação de Poisson, a qual será homogênea quando $f \equiv 0$. Entretanto, as equação de Sine-Gordon e a KdV são semilineares de segunda e terceira ordem, respectivamente. Por outro lado, a equação (2.7) é não-linear de segunda ordem, pois sua parte principal, $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, não é linear. Note ainda que a equação $u_x + u = \cos(xy)$ é um exemplo EDP de primeira ordem não homogênea, uma vez que a função cosseno não é identicamente nula.

2.2 Princípio de superposição

As equações diferenciais parciais lineares têm propriedades interessantes, como por exemplo, o princípio de superposição, que nos auxiliará no capítulo seguinte, quando estivermos interessados em encontrar um candidato à solução do problema. Mas, para isto, vejamos conceitos e resultados que nos auxiliarão na apresentação e demonstração de tal princípio.

Intuitivamente, uma solução é uma função que satisfaz a equação, entretanto, há muitas interpretações possíveis dessa noção. A priori, vamos definir solução clássica para uma EDP. Contudo, não existe apenas este sentido de solução como veremos Capítulo 4.

Definição 2.12. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. As *soluções clássicas* para uma equação diferencial parcial são funções, $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $u \in C(A)$ ou $u \in C^k(A)$ que satisfazem a equação.

Mais adiante, Capítulo 3, encontramos soluções clássicas para o problema de Dirichlet no retângulo e no disco unitário.

As argumentações feitas a seguir são válidas para EDP's lineares de ordem qualquer, mas para facilitar nossa compreensão, consideraremos uma equação da forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0$$

sendo a ordem da equação $k = 1$ ou $k = 2$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Observe que, se $k = 1$, então $a_{ij} \equiv 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e existe $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $b_j \neq 0$. E, se $k = 2$ existe um $a_{ij} \neq 0$.

Com isso, seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e considere que as funções reais a_{ij} , b_j e c , com $i, j \in \{1, \dots, n\}$, contínuas em A . Podemos definir uma transformação

$$L : C^k(A) \longrightarrow C(A)$$

em que $Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x)$, $x \in A$.

Evidentemente, a transformação L definida acima é linear, pois estamos trabalhando com EDP's lineares. Além disso, assim como acontece com EDOs lineares homogêneas, qualquer combinação linear de soluções da equação $Lu = 0$ é também solução, tal resultado é conhecido como o princípio de superposição em sua forma finita.

Proposição 2.13. (Princípio de Superposição na forma finita). *Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se u_1, \dots, u_m são funções de classe C^k em A satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu_i = 0$, com $i = 1, \dots, m$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, então*

$$u(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i(x)$$

também satisfaz $Lu = 0$.

Demonstração: Utilizando o princípio de indução finita em $m \in \mathbb{N}$ temos que, se $m = 1$, nada há o que fazer, pois $u(x) = u_1$ e por hipótese $Lu_1(x) = Lu(x) = 0$. Agora, suponhamos que, u_1, \dots, u_{m-1} são funções de classe C^k em A satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu_i = 0$, com $i = 1, \dots, m$ e, tais que,

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i(x),$$

com $L\bar{u} = 0$. Mostraremos que $Lu = 0$, com

$$u(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i(x).$$

Com efeito,

$$Lu(x) = L \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i(x) \right) = L \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i(x) + \alpha_m u_m(x) \right) = L(\bar{u} + \alpha_m u_m(x)).$$

Como L é um operador linear, $L\bar{u}(x) = 0$ e $Lu_m(x) = 0$. Então, $Lu(x) = L\bar{u}(x) +$

$$\alpha_m Lu_m(x) = 0.$$

■

Um fato interessante sobre as equações diferenciais parciais é que o espaço de soluções da equação $Lu = 0$ pode ter dimensão infinita, o que não acontece com às EDO's. Por exemplo, se estamos procurando soluções clássicas da equação linear homogênea $u_{xy}(x, y) = 0$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é natural resolvermos por integração. Assim, fixamos y e integrando em relação a x , temos que,

$$u_y(x, y) = G(y)$$

em que $G \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função arbitrária. Dado isso, fixamos agora a variável x e integramos em relação a y , obtendo

$$u(x, y) = g(y) + f(x)$$

sendo $g \in C^2(\mathbb{R})$ uma primitiva de G e $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função arbitrária, pois estamos procurando $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Mais estritamente, o espaço das soluções clássicas da EDP $u_{xy} = 0$ é o conjunto:

$$V = \{u \in C^2(\mathbb{R}^2); u(x, y) = g(y) + f(x), g, f \in C^2(\mathbb{R})\}.$$

Note que, o espaço V tem dimensão infinita, nos conduzindo ao questionamento com relação a possibilidade de obtermos uma solução como "combinação infinita" de outras soluções. E isto é possível, mas sob certas condições, dispostas no seguinte princípio:

Proposição 2.14. (Princípio de Superposição na forma infinita). *Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $\{u_m\}$ é um conjunto de funções da classe C^k em A satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu_m = 0$ e se (α_m) é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em A , então u satisfaz a EDP $Lu = 0$.

Demonstração: A proposição fora enunciada de forma geral, para $k \in \mathbb{R}$. Mas, a fim de simplificar a demonstração, basta mostrarmos no caso $k = 1$ ou $k = 2$.

Por hipótese, temos, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, que

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em A . Logo, as séries

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) \quad e$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j x_i}(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j x_i}(x)$$

são convergentes. Sendo assim, para todo $x \in A$, tem-se

$$Lu(x) = a_{ji}(x) \sum_{j,i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j x_i}(x) + b_i(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)$$

$$Lu(x) = \sum_{j,i=1}^n a_{ji}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j x_i}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

$$Lu(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\sum_{j,i=1}^n a_{ji}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_j x_i}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) + c(x)u_m(x) \right)$$

$$Lu(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m Lu_m(x) = 0,$$

pois $\{u_m\}$ em A satisfaz a EDP linear homogênea $Lu_m = 0$. ■

Vale destacar que a escolha por separarmos uma seção para esta propriedade é que este princípio é de fundamental importância, quando utilizarmos, posteriormente, o método de separação de variáveis, o qual nos dará um candidato a solução do problema.

2.3 Condições de contorno e iniciais

Sabemos que na solução geral de uma EDO linear surgem constantes arbitrárias e podemos determiná-las impondo condições iniciais e/ou de contorno, obtendo a unicidade da solução. Porém, para as EDP's a situação é diferente, até mesmo no caso linear, ainda que encontremos uma solução, a mesma envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, possuindo um grau de generalidade maior com relação à forma da solução.

Procuramos soluções definidas em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Logo, é natural substituir, nas condições de contorno, os extremos dos intervalos pela fronteira da região A .

Definição 2.15. (Condições de contorno). são condições impostas sobre o valor da solução e/ou de suas derivadas na fronteira da região, e assim, uma equação diferencial com condições de contorno está associada a um problema de contorno.

Observação 2.16. Há condições que aparecem naturalmente na modelagem de fenômenos físicos que não dependem do tempo. Além disso, quando estudamos EDP's podemos encontrar frequentemente condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial A \quad (2.6)$$

em que α e β são constantes dadas, f é uma função dada em ∂A e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de u na direção normal a ∂A . E, se $\beta = 0$, a condição (2.6) é conhecida como **condição de Dirichlet** e, quando $\alpha = 0$, temos uma **condição de Neumann**.

No caso das EDP's dispomos de mais de uma variável dependente, então é natural fixarmos uma das variáveis e estabelecer o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis, e assim, podemos generalizar o conceito de condição inicial.

Definição 2.17. (Condições iniciais). são condições impostas sobre o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva inicial, se $n = 2$, ou de uma superfície, se $n = 3$. O problema associado é um problema de valor inicial ou de Cauchy.

Além disso, quando temos um problema em que são impostas condições de contorno e iniciais, eles são chamados de problemas mistos. Vejamos alguns exemplos.:

Exemplo 2.18. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Então

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{em } A, \\ u|_{\partial A} &= f \end{aligned}$$

é um problema de contorno, no qual $u|_{\partial A} = f$ é a condição de contorno, mais especificamente, temos uma condição de Dirichlet. Este é um importante problema o qual é um dos focos do nosso trabalho e será abordado no próximo capítulo.

Exemplo 2.19. O problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) &= f(y), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

é um problema de valor inicial, onde $u(0, y) = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$ e a curva inicial é o eixo y .

Exemplo 2.20. O problema abaixo, envolvendo a equação da onda, é um problema misto, onde a segunda equação são as condições contorno e as duas últimas são as condições de iniciais. E para que exista solução é necessário que f satisfaça a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(l)$.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty),$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, l].$$

Analisando tais problemas, que consistem de uma EDP e condições de contorno e/ou iniciais, surgem os seguintes questionamentos:

1. existe solução?
2. a solução é única?
3. a solução depende dos dados iniciais e/ou de contorno?

Para discutir a existência de soluções, é fundamental especificar a classe de funções em que procuramos solução, e mais ainda, em que sentido as condições de contorno e/ou iniciais são satisfeitas. Quando há a existência de solução, desejamos saber se há unicidade dentro da classe específica. Além disso, a discussão da dependência da solução nos dados iniciais e/ou de contorno é muito relevante, uma vez que os dados de um problema físico são experimentais e contêm erros de medida. Assim, é conveniente perguntarmos se pequenas variações nos dados causam pequenas variações na solução, e se isto acontecer, diremos que a solução depende continuamente dos dados iniciais e/ou de contorno. Neste caso, o problema é dito bem posto.

2.4 Classificação das equações semilineares de segunda ordem

Uma EDP semilinear de segunda ordem com duas variáveis independentes é da forma

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (2.7)$$

e sua parte principal é o operador

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}.$$

Em analogia ao estudo das cônicas da geometria analítica, obtemos as seguintes definições:

Definição 2.21. Suponha que a , b , e c são contínuas em um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e não se anulam simultaneamente. **O discriminante da equação** (2.7) é a função $\delta : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = (b(x, y))^2 - a(x, y)c(x, y).$$

Definição 2.22. O operador L e a EDP descritos anteriormente, são ditos

1. **parabólicos** no ponto $(x, y) \in A$, se $\delta(x, y) = 0$;
2. **hiperbólicos** no ponto $(x, y) \in A$, se $\delta(x, y) > 0$;
3. **elípticos** no ponto $(x, y) \in A$, se $\delta(x, y) < 0$.

Quando algum dos itens da definição acima são satisfeitos em todos os pontos de A , dizemos que a EDP e o operador L associado são parabólicos (respectivamente hiperbólicos, elípticos) em A . Equações que mudam de tipo no domínio de definição dos seus coeficientes são ditas de **tipo misto**, assim como para o operador associado o qual será de tipo misto.

Exemplo 2.23. As EDP's abaixo são, respectivamente, elíptica, parabólica e hiperbólica em todo o plano.

1. Equação de Poisson: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$
2. Equação do calor: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
3. Equação da onda: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Exemplo 2.24. A equação de Tricomi, $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ é de tipo misto, pois como seu discriminante é $\delta(x, y) = -y$, então é elíptica no semiplano $y > 0$, parabólica no eixo dos x e hiperbólica no semiplano $y < 0$.

A partir de tais classificações, são observadas características importantes referente ao tipo da solução. Posteriormente faremos determinadas mudanças de variáveis, as quais manteremos o tipo da equação diferencial parcial, e isto se deve a seguinte proposição:

Proposição 2.25. *O tipo de uma EDP não varia sob mudanças de variáveis "bem comportadas", no sentido de que $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ são (mudanças de variáveis) com derivadas até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in A$ com jacobiano $J(x_0, y_0) \neq 0$.*

Demonstração:

Para tanto, precisamos supor que $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ são funções com derivadas até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in A$ com jacobiano $J(x_0, y_0) \neq 0$

$$\mathbf{J}(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

e suponha também que $J(x_0, y_0) \neq 0$. Então, pela continuidade, o jacobiano não se anula em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) . Daí, pelo Teorema da Função Implícita, Teorema 1.9, somos capazes de resolver localmente $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ em uma vizinhança do ponto $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ e as funções x e y são de classe C^2 nesta vizinhança. Portanto, defina $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, e, pela regra da cadeia, encontramos u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} e concluímos que se u for uma solução clássica da equação (2.7) então v será solução clássica da equação

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (2.8)$$

em que

$$A(\xi, \eta) = a(x, y)(\xi_x)^2 + 2b(x, y)\xi_x\xi_y + c(x, y)(\xi_y)^2,$$

$$B(\xi, \eta) = a(x, y)\xi_x\eta_x + b(x, y)[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x] + c(x, y)\xi_y\eta_y,$$

$$C(\xi, \eta) = a(x, y)(\eta_x)^2 + 2b(x, y)\eta_x\eta_y + c(x, y)(\eta_y)^2.$$

Com isso, o discriminante da equação (2.8) é

$$\Delta(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) = \delta(x, y)J(x, y)^2$$

em que $\delta(x, y)$ é o discriminante da equação (2.7). Dessa forma, o sinal de $\Delta(\xi_0, \eta_0)$ é igual ao sinal de $\delta(x_0, y_0)$, pois o jacobiano nunca se anula em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) .

■

Capítulo 3

Existência e unicidade de solução clássica

No capítulo anterior, dentre os exemplos de EDP's, apresentamos a equação de Laplace, que apareceu primeiramente em um artigo de hidrodinâmica em 1752. Contudo, seu nome fora dado em homenagem a Pierre-Simon Laplace, que em 1782, estudou amplamente suas soluções enquanto investigava a atração gravitacional entre corpos no espaço. Esta equação aparece em muitos problemas da física matemática e, em geral, está relacionada a processos estacionários, nos quais não há dependência do tempo.

Existem alguns problemas naturais sujeitos a equação de Laplace, que estão relacionados desde a biologia e a física, como por exemplo, a densidade de substâncias, problemas de minimização de energia e problemas de obstáculo de uma membrana; além de problemas na teoria de jogos e probabilidade. Apresentamos uma motivação clássica para o estudo da equação de Laplace a partir do estudo do problema de densidade de substâncias, a qual pode ser encontrada referência [12]. Salientamos, que nesta parte, deixaremos de lado o íntegro rigor matemático.

Estritamente, este modelo, esta relacionado à densidade de uma determinada substância, com densidade u que está confinada em equilíbrio num corpo A . Logo, para qualquer subconjunto V de A o fluxo de u ao longo de V é zero, ou seja,

$$\int_{\partial V} F \cdot \hat{n} dS = 0,$$

em que F denota o fluxo de densidade e \hat{n} o vetor normal unitário em ∂V . Pelo Teorema 1.11, Teorema da Divergência, temos que

$$\int_V \nabla \cdot F dX = 0.$$

Daí, como V é arbitrário, concluimos que $\nabla \cdot F = \text{div}(F) = 0$ em A . Por outro lado, em muitas aplicações físicas, faz sentido que a densidade u flua da região de maior concen-

tração para de menor concentração. Com isso,

$$F = -c_A \nabla u,$$

com $c_A > 0$ é uma constante que representa propriedades de condutividade do domínio A . Portanto,

$$\nabla \cdot F = -c_A (\nabla \cdot \nabla u) = 0$$

ou seja, $\Delta u = 0$, pois $c_A \neq 0$. Destacamos que a hipótese de que $F = -c_A \nabla u$, com $c_A > 0$ constante, representa uma condição de homogeneidade do corpo A , uma vez que desprezamos a possibilidade de meio heterogêneo. Perante problemas mais reais, em que A é heterogêneo, a constante c_A é substituída por uma matriz $a_{ij}(X)$ definida positiva.

Neste capítulo, abordamos sobre problemas de Dirichlet envolvendo a equação de Laplace que são problemas de contorno com condição imposta sob a solução na fronteira da região. Mais especificamente, estamos interessados no problema de Dirichlet clássico para a equação de Laplace em certas regiões do plano. Nesse sentido procuramos soluções clássicas, ou seja, $u = u(x) \in C^2(A) \cap C(\bar{A})$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, que satisfaçam

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{em } A, \\ u &= f & \text{em } \partial A, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $f \in C(\partial A)$ é dada. Doravante, vamos analisar a existência e unicidade de soluções para o problema de Dirichlet (3.1) com A sendo um retângulo e um disco unitário, os quais são domínios limitados.

3.1 Problema de Dirichlet no retângulo

Nesta seção procuramos soluções clássicas para o problema de Dirichlet (3.1) com $A = (0, a) \times (0, b)$. Ou seja, procuramos solução para o seguinte problema:

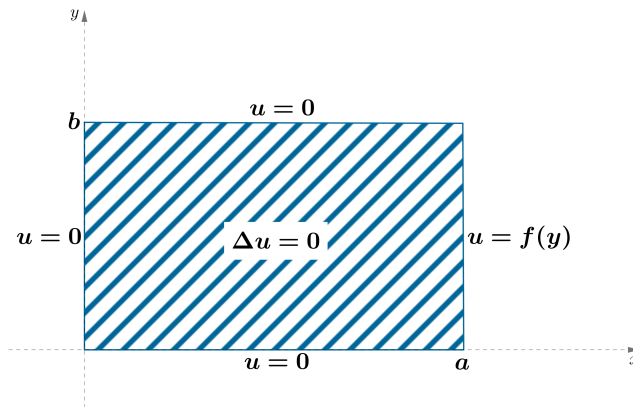
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{em } A = (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) &= g(x), \quad u(x, b) = h(x), & x \in [0, a] \\ u(0, y) &= k(y), \quad u(a, y) = f(y), & y \in [0, b] \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $g, h \in C([0, a])$ e $f, k \in C([0, b])$ são funções dadas. A fim de resolvê-lo, vamos considerar o seguinte caso particular

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= 0 \quad \text{em } A = (0, a) \times (0, b) \\
 u(x, 0) &= 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x \in [0, a] \\
 u(0, y) &= 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $f \in C([0, b])$ satisfaz $f(0) = f(b) = 0$.

Figura 3.1: Esquema do problema (3.3).



Fonte: Produzido pela autora.

Basicamente, resolver o problema de Dirichlet no retângulo, consiste em dividi-lo em quatro outros problemas análogos ao (3.3), e assim, a solução do problema (3.2) será a combinação destas soluções, caso exista solução para o problema (3.3). Portanto, nosso objetivo, é inicialmente resolver o problema (3.3).

Com isso, a fim de encontrarmos um candidato a solução do problema (3.3), vamos utilizar o método de separação de variáveis, que consiste em supor que a solução da EDP, que é um função de mais de uma variável, pode ser escrita como o produto de funções relativas a cada uma das variáveis, ou seja, no nosso caso procuramos soluções da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Daí, substituindo na equação de Laplace, temos que

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

mas, como queremos soluções não triviais, isto é, não queremos soluções identicamente nulas, temos que $Y(x) \neq 0$ e $X(x) \neq 0$. Daí, multiplicando por $\frac{1}{X(x)Y(y)}$, temos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{3.4}$$

Podemos notar que em (3.4) o lado esquerdo da igualdade só depende de x enquanto o lado direito só depende de y , sendo assim,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

em que λ é uma constante. Assim, obtemos, as seguintes EDO's

$$X''(x) = \lambda X(x),$$

$$-Y''(y) = \lambda Y(y).$$

Observação 3.1. Observe que o método de separação de variáveis pode ser utilizado em EDP's nas quais, depois de substituirmos a solução na forma (3.1), conseguimos isolar as funções em termos das variáveis x e y .

Aplicando as condições de contorno homogêneas do problema (3.3) no candidato a solução $u(x, y) = X(x)Y(y)$, obtemos dois problemas de contorno envolvendo EDO's:

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X \quad \text{em } (0, a); \\ X(0) &= 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} -Y'' &= \lambda Y \quad \text{em } (0, b); \\ Y(0) &= 0 = Y(b). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, precisamos determinar, se possível, as soluções para os problemas (3.5) e (3.6). O valor λ para que (3.6) tenha solução não trivial é chamado de autovalor do problema (3.6) e as soluções não triviais correspondentes são as autofunções relativas ao autovalor λ .

Além disso, estamos procurando soluções reais e como λ é tal que $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$, então os casos interessantes são quando $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais ainda, asseguramos, que os autovalores λ do problema (3.6) são reais positivos.

Lema 3.2. *Se estamos procurando soluções reais para o problema em (3.6), então os autovalores λ são reais positivos.*

Demonstração:

Por certo, se $\lambda \in \mathbb{C}$ chegamos em um absurdo, visto que, se Y for uma autofunção associada, com $Y \in C_{\mathbb{C}}^2((0, b)) \cap C_{\mathbb{C}}([0, b])$, então, como $Y'' = -\lambda Y$, existirão os seguintes

limites

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^+} Y''(y) &= -\lambda \lim_{y \rightarrow 0^+} Y(y) = -\lambda Y(0) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow b^-} Y''(y) &= -\lambda \lim_{y \rightarrow b^-} Y(y) = -\lambda Y(b) = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, como Y é contínua em $[0, b]$, então para cada $y \in [0, b]$ tem-se

$$\begin{aligned}-\lambda \int_0^y Y(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^y Y''(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0^+} [Y'(y) - Y'(t)]; \\ -\lambda \int_y^b Y(y) dy &= \lim_{s \rightarrow b^-} \int_y^s Y''(y) dy = \lim_{s \rightarrow b^-} [Y'(s) - Y'(y)].\end{aligned}$$

Assim, existem os limites

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} Y'(t) &= Y'(y) + \lambda \int_0^y Y(y) dy; \\ \lim_{s \rightarrow b^-} Y'(s) &= Y'(y) - \lambda \int_y^b Y(y) dy.\end{aligned}$$

Portanto, podemos integrar as funções Y'' e Y' no intervalo $[0, b]$, pois ambas são contínuas em $(0, b)$ e existem os limites laterais $\lim_{t \rightarrow 0^+} Y'(t)$ e $\lim_{s \rightarrow b^-} Y'(s)$. Logo,

$$\lambda(Y|Y) = (\lambda Y|Y) = (-Y''|Y) = - \int_0^b Y''(y) \overline{Y(y)} dy.$$

Façamos $u = \overline{Y(y)}$ e $dv = Y''(y) dy$ e, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda(Y|Y) &= - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ s \rightarrow b^-}} \int_t^s Y''(y) \overline{Y(y)} dy \\ &= - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ s \rightarrow b^-}} \left(Y'(y) \overline{Y(y)} \Big|_t^s - \int_t^s Y'(y) \overline{Y'(y)} dy \right) \\ &= - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ s \rightarrow b^-}} \left(Y'(s) \overline{Y(s)} - Y'(t) \overline{Y(t)} - \int_t^s |Y'(y)|^2 dy \right) \\ &= [- \lim_{s \rightarrow b^-} Y'(s) \overline{Y(0)} + [\lim_{t \rightarrow 0^+} Y'(t) \overline{Y(b)} + \int_0^b |Y'(y)|^2 dy \\ &= (Y'|Y').\end{aligned}$$

Pois, como $Y(0) = 0 = Y(b)$, então $\overline{Y(0)} = 0 = \overline{Y(b)}$. Além disso, se $Y' \equiv 0$ então Y é constante (pois $Y \in C_{\mathbb{C}}^2((0, b))$), mas, note que a única solução constante do problema é $Y \equiv 0$, sendo assim, $(Y'|Y') > 0$ e como estamos interessados nas soluções não triviais, então $(Y|Y) > 0$. Portanto, como $\lambda(Y|Y) = (Y'|Y') > 0$, temos que $\lambda > 0$. E note também que λ é real, pois

$$\lambda(Y|Y) = (\lambda Y|Y) = (-Y''|Y) = (Y| - Y'') = \bar{\lambda}(Y|Y).$$

■

Logo basta procurarmos soluções não triviais no caso $\lambda > 0$. E, sabemos da teoria básica das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem homogêneas, que a solução geral da EDO do problema (3.6) é da forma

$$Y(y) = A \cos(\sqrt{\lambda}y) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}y)$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias. Aplicando as condições de contorno do problema (3.6), ficamos com

$$\begin{cases} Y(0) = A = 0 \\ Y(b) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}b) = 0. \end{cases}$$

Daí, como $A = 0$, tem-se $B \neq 0$, pois do contrário $Y \equiv 0$, o que não queremos, uma vez que estamos procurando soluções não triviais. Sendo assim, o $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}b) = 0$, ou seja, $\sqrt{\lambda}b = n\pi$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Então, os autovalores do problema (3.6) são da forma

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

E, desta forma, as autofunções associadas são

$$Y_n(y) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b]. \quad (3.7)$$

Observe que os valores negativos de n não fornecem novas soluções pois a função seno é ímpar, portanto todas as autofunções associadas ao autovalor λ_n são múltiplos de Y_n .

Agora, basta encontrarmos as soluções do problema (3.5) para $\lambda = \lambda_n$. Primeiramente, note que, a solução geral da equação $X'' = \lambda X$ é

$$X(x) = Ce^{\sqrt{\lambda}x} + De^{-\sqrt{\lambda}x},$$

e para $\lambda = \lambda_n$ é dada por

$$X_n(x) = C_n e^{\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} + D_n e^{\left(\frac{-n\pi x}{b}\right)}.$$

Deste modo, impondo a condição de contorno do problema (3.5), obtemos que $X_n(0) = C_n + D_n = 0$, logo, $D_n = -C_n$, e as soluções são da forma

$$X_n(x) = C_n \left(e^{\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} - e^{\left(\frac{-n\pi x}{b}\right)} \right) = 2C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, a] \quad (3.8)$$

Sendo assim, de (3.7) e (3.8) temos que a sequência de soluções é da seguinte forma

$$u_n(x, y) = 2B_n C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x}{b} \right). \quad (3.9)$$

Buscamos então uma solução do problema (3.3) da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (3.10)$$

E, impondo a condição de contorno em $x = a$, obtemos

$$f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi a}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad y \in [0, b]. \quad (3.11)$$

Note que $E_n \operatorname{senh}(n\pi a/b)$ é uma constante, e, além disso, como $a \neq 0$, temos que $\operatorname{senh}(n\pi a/b) \neq 0$. Assim, na tentativa de escrever $f(y)$ como a sua série de Fourier, concluímos de (3.11), que

$$E_n = \frac{b_n}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

em que

$$b_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{b} \right) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

ou seja, b_n é o coeficiente de Fourier da função f . Portanto, temos o seguinte candidato à solução do problema (3.3)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (x, y) \in [0, a] \times [0, b]. \quad (3.13)$$

Observe que, se pudermos derivar esta série termo a termo, então u dada por (3.13) é, de fato, solução da equação de Laplace. Pois,

$$u_{xx}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 \pi^2 b_n}{b^2} \right) \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right);$$

$$u_{yy}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-n^2 \pi^2 b_n}{b^2} \right) \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right).$$

Logo, $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Observe também que a função seno hiperbólico é estritamente crescente, então para todo $x \in [0, a]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$0 = \frac{\operatorname{senh}(n\pi 0/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \leq \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \leq \frac{\operatorname{senh}(n\pi a/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} = 1.$$

Com isso, a série em (3.13) convergirá se a série de Fourier de f convergir. Contudo, a convergência das derivadas é mais complexa, necessitando de hipóteses referentes à diferenciabilidade de f . Mas, para evitar isso, podemos reescrever a série (3.13) um pouco diferente, usando o coeficiente dado em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &= \int_0^b f(t) \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dt \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt, \end{aligned}$$

em que,

$$K(x, y, t) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right). \quad (3.14)$$

O lema a seguir, nos garante certas propriedades para o núcleo definido em (3.14).

Lema 3.3. *A série definida em (3.14) converge uniformemente em $[0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para uma função $K \in C^\infty([0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que satisfaz $K_{xx} + K_{yy} = 0$.*

Demonstração: A fim de simplificarmos a notação, considere

$$K_n(x, y, t) = \frac{2}{b} \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a, 0) \quad \text{e} \quad y, t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$K(x, y, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x, y, t).$$

Primeiramente, vamos mostrar que a série definida em (3.14) converge uniformemente em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para qualquer que seja $\varepsilon \in (0, a)$. Com efeito, se $0 \leq \bar{x} = (\pi x/b) < \bar{a} = (\pi a/b)$, então

$$0 \leq \frac{\operatorname{senhn}\bar{x}}{\operatorname{senhn}\bar{a}} = \frac{e^{n\bar{x}} - e^{-n\bar{x}}}{e^{n\bar{a}} - e^{-n\bar{a}}} = \frac{e^{n\bar{x}}(1 - e^{-2n\bar{x}})}{e^{n\bar{a}}(1 - e^{-2n\bar{a}})} = e^{-n(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 - e^{-2n\bar{x}}}{1 - e^{-2n\bar{a}}} < e^{-n(\bar{a}-\bar{x})}, \quad (3.15)$$

pois o seno hiperbólico e a função exponencial são estritamente crescente. Portanto, se $x \in [0, a - \varepsilon]$, obtemos, do fato da função seno ser limitada e de (3.15) que

$$\frac{b}{2}|K_n(x, y, t)| \leq e^{\left(\frac{-n\pi(a-x)}{b}\right)} \leq e^{\left(\frac{-n\pi\varepsilon}{b}\right)};$$

e, como a série $\sum e^{\left(\frac{-n\pi\varepsilon}{b}\right)}$ converge (pois é uma série geométrica com razão $e^{-\pi\varepsilon/b} < 1$), temos, pelo Teste M de Weierstrass, Teorema 1.21, que a série $\sum K_n(x, y, t)$ converge para uma função $K(x, y, t)$ contínua em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, para qualquer que seja $\varepsilon \in (0, a)$. Logo, $K \in C([0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Então, como $K_n \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, podemos, pelo Teorema 1.25 derivar a série em (3.14) termo a termo, e analisando agora a série das derivadas, temos que

$$\frac{\partial K_n}{\partial x}(x, y, t) = \frac{2n\pi \cosh(n\pi x/b)}{b^2 \sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

e, assim, de forma análoga ao que fizemos em (3.15), se $x \in [0, a - \varepsilon]$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial K_n}{\partial x}(x, y, t) \right| &\leq \frac{2\pi}{b^2} n e^{-n(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 + e^{-2n\bar{x}}}{1 - e^{-2n\bar{a}}} \\ &\leq \frac{2\pi}{b^2} n e^{(-n\pi\varepsilon/b)} \frac{2}{1 - e^{(-2\pi a/b)}} \\ &= C n e^{-\alpha n} \end{aligned} \tag{3.16}$$

em que C e α são constantes positivas. Como a série $\sum k e^{-\alpha n}$ converge, temos, pelo Teste M de Weierstrass, que a série das derivadas $\sum \frac{\partial K_n}{\partial x}$ converge uniformemente. Analogamente, derivando em relação a y e a t , obtemos

$$\left| \frac{\partial K_n}{\partial y}(x, y, t) \right| \leq C n e^{-\alpha n} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial K_n}{\partial t}(x, y, t) \right| \leq C n e^{-\alpha n}$$

e, novamente, pelo Teste M de Weierstrass as séries das derivadas $\sum \frac{\partial K_n}{\partial x}$, $\sum \frac{\partial K_n}{\partial y}$ e $\sum \frac{\partial K_n}{\partial t}$ convergem uniformemente. Procedendo por indução, temos que, se $i \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{\partial^i K_n}{\partial x^i} \right| \leq C n^i e^{-\alpha n}, \quad \left| \frac{\partial^i K_n}{\partial y^i} \right| \leq C n^i e^{-\alpha n}, \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial^i K_n}{\partial t^i} \right| \leq C n^i e^{-\alpha n},$$

em que C e α são constantes positiva, e, portanto, as séries das derivadas de qualquer ordem convergem uniformemente em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Usando, indução, o Teorema que permite derivar sob o sinal da integral, Teorema 1.10, para cada variável, e o fato de que $\varepsilon \in (0, a)$ é arbitrário, concluimos que $K \in C^\infty([0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e que suas derivadas são obtidas derivando a série termo a termo. Para finalizar, basta mostrarmos

que $K_{xx} + K_{yy} = 0$. De fato, observe que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 k_n}{\partial x^2}(x, y, t) &= \frac{2n^2\pi^2}{b^3} \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right); \\ \frac{\partial^2 k_n}{\partial y^2}(x, y, t) &= -\frac{2n^2\pi^2}{b^3} \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right).\end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial^2 k_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k_n}{\partial y^2} = 0$, e assim, $K_{xx} + K_{yy} = 0$. ■

Agora, vamos demonstrar, com o auxílio dos lemas anteriores, que o candidato que encontramos para solução do problema (3.3) é, de fato, solução.

Teorema 3.4. *Seja $f \in C([0, b])$ diferenciável em $(0, b)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, b])$ e suponha que $f(0) = f(b) = 0$. Então a série (3.13) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$, além disso $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$ dada por*

$$u(x, y) = \int_0^b f(t)K(x, y, t)dt, \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, b] \quad (3.17)$$

é solução para o problema (3.3), com

$$K(x, y, t) = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh(k\pi x/b)}{\sinh(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right). \quad (3.18)$$

Demonstração:

Note que como $f(0) = f(b) = 0$, podemos considerar a extensão ímpar e periódica de período $2b$ de f . Além disso, sabemos que $f \in C([0, b])$ é diferenciável em $(0, b)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, b])$, então $F \in C_{per}(2b)$ e $F' \in SC_{per}(2b)$. Logo, pela demonstração do Teorema 1.43, temos que a série $\sum \hat{F}(n)$ dos coeficientes de Fourier complexos de F converge absolutamente. Além disso, como F é uma função ímpar, temos, pela Observação 1.33, que sua série de Fourier real é uma série em senos e, assim, os coeficientes complexos satisfazem

$$\hat{F}(0) = 0, \quad \hat{F}(n) = -\frac{ib_n}{2}, \quad \hat{F}(-n) = \frac{ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

em que,

$$b_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b F(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{F}(n) + \hat{F}(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{F}(n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{F}(-n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{F}(n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-ib_n}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ib_n}{2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a série $\sum b_n$ converge absolutamente. E, como a função seno hiperbólico é estritamente crescente e a função seno é limitada, temos que, se $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$,

$$\left| b_n \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right| \leq |b_n|. \quad (3.19)$$

Logo, pelo Teste M de Weierstrass, Teorema 1.21, a série (3.13) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$ para a função $u \in C([0, a] \times [0, b])$.

No entanto, fixando $x \in [0, a)$ e tomando $0 < \delta < a - x$, temos que a série (3.14) converge uniformemente em $[0, a - \delta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal como visto na demonstração do Lema 3.3. E, para $x \in [0, a - \delta]$, pelo Corolário 1.24, podemos "integrar termo a termo" e obtemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{b} \right) dt \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \\ &= \int_0^b f(t) \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{b} \right) \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dt \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt. \end{aligned}$$

Além disso, ainda pelo Lema 3.3, $K \in C^\infty([0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $K_{xx} + K_{yy} = 0$. Usando o Teorema 1.10, a expressão (3.17) e indução, obtemos que $u \in C^\infty([0, a) \times [0, b] \times \mathbb{R})$ e

$$u_{xx} + u_{yy} = \int_0^b f(t) [K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t)] dt = 0$$

desde que $(x, y) \in [0, a) \times [0, b]$. Note também que, como

$$K_n(x, 0, t) = 0, \quad K_n(x, b, t) = 0 \quad \text{e} \quad K_n(0, y, t) = 0$$

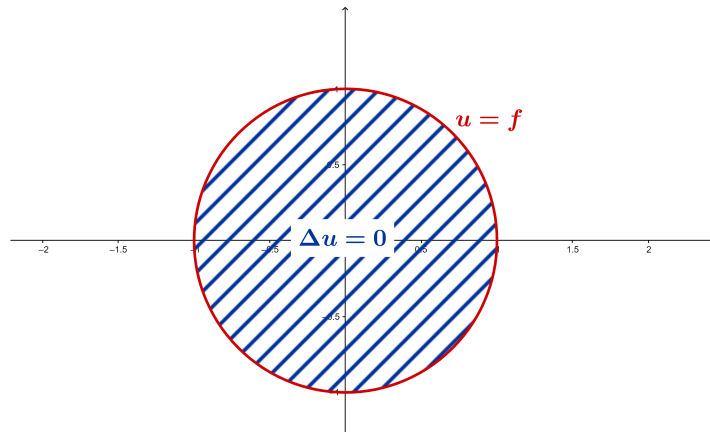
quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x, y, t \in \mathbb{R}$, u satisfaz as condições de contorno em $y = 0$, $y = b$ e $x = 0$. E como a série de Fourier de f converge uniformemente em $[0, b]$ fica

evidente que $u(a, y) = f(y)$, para todo $y \in [0, b]$. Dessa forma u é solução de (3.3). ■

3.2 Problema de Dirichlet no disco unitário

Agora, vamos considerar o problema (3.1), em que A é o disco unitário, ou seja, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 1\}$. Como na Figura 3.2.

Figura 3.2: Esquema do problema de Dirichlet no disco unitário



Fonte: Produzido pela autora.

Observe que para aplicarmos diretamente o método de separação de variáveis precisamos que a região de interesse A possa ser escrita como um produto cartesiano de intervalos abertos, uma vez que vamos tentar resolver problemas envolvendo EDO's. Entretanto, a geometria do problema de Dirichlet no disco unitário, a princípio, não nos permite aplicar diretamente o método de separação de variáveis, mas, a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 1\}$ pode ser vista como o produto cartesiano em coordenadas polares. Sendo assim, façamos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, 1)$. Logo, das identidades trigonométricas, temos que

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{se } x \neq 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Daí, façamos $v(r, \theta) = u(x, y)$ e, pela regra da cadeia, obtemos

$$\Delta u = [(r_x)^2 + (r_y)^2]v_{rr} + 2(\theta_x r_x + \theta_y r_y)v_{r\theta} + [(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2]v_{\theta\theta} + (r_{xx} + r_{yy})v_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy})v_\theta.$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, & r_{xx} &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r}, \\ r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{sen} \theta, & r_{yy} &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos^2 \theta}{r}. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta, & \theta_{xx} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{r^2}, \\ \theta_y &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} \cos \theta, & \theta_{yy} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{r^2}. \end{aligned}$$

Portanto, o laplaciano em coordenadas polares é dado pela seguinte expressão

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta};$$

e considerando $g(\theta) = f(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$, temos que $g \in C_{per}(2\pi)$. Assim, procuramos então $v \in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0, 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ v(r, \theta + 2\pi) &= v(r, \theta), r \in [0, 1], \theta \in \mathbb{R}, \\ v(1, \theta) &= g(\theta). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Observação 3.5. Note que o discriminante da EDP em (3.21) é $\delta(r, \theta) = \frac{-3r^2}{4} < 0$, ou seja, é do mesmo tipo da equação de Laplace: do tipo elíptica. Isto decorre do Teorema 2.25, pois o jacobiano da mudança de coordenadas que fizemos é:

$$\mathbf{J}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \neq 0$$

ou seja, a mudança de variável é "bem comportada".

Observação 3.6. Note que, a mudança de coordenadas não funciona bem na origem, porém queremos que v seja de classe C^2 em $[0, 1] \times \mathbb{R}$, tal que $v(0, \theta)$ não dependa de θ . Além disso, a EDP do problema (3.21) é mais complicada do que a do problema anterior, uma vez que tem coeficientes variáveis que se anulam em $r = 0$, logo, esperamos mais dificuldades para determinar a solução.

Agora estamos prontos para encontrar um candidato à solução do problema (3.21) pelo método de separação de variáveis. Assim, procuramos soluções

$$v(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta),$$

substituindo na EDP em (3.21), obtemos

$$r^2\varphi''(r)\psi(\theta) + r\varphi'(r)\psi(\theta) + \varphi(r)\psi''(\theta) = 0. \quad (3.22)$$

E, multiplicando (3.22) por $\frac{1}{\varphi(r)\psi(\theta)}$, temos que

$$\frac{r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) &= 0, \\ \psi(\theta + 2\pi) &= \psi(\theta), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0. \quad (3.24)$$

De forma análoga ao problema de Dirichlet no retângulo, quando λ for um autovalor de (3.23) com autofunção ψ de classe C^1 , tem-se integrando de 0 a 2π , que

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^2 dt &= \lambda \int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{\psi(t)} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \psi''(t)\overline{\psi(t)} dt \\ &= -\psi'(t)\overline{\psi(t)}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt \\ &= -\psi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} + \psi'(0)\overline{\psi(0)} + \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Assim, $\lambda \geq 0$ e, caso $\lambda = 0$, temos

$$\int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt = 0,$$

o que implica que $\psi' \equiv 0$, pois ψ é de classe C^1 . Com isso, ψ é constante e é solução de (3.23). Por outro lado, se $\lambda > 0$, a solução geral da EDO em (3.23) é da forma

$$\psi(\theta) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sen(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Portanto, como ψ é periódica de período 2π , temos

$$A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta + 2\sqrt{\lambda}\pi) + B_\lambda \sen(\sqrt{\lambda}\theta) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sen(\sqrt{\lambda}\theta),$$

assim, $\sqrt{\lambda} = k$, com $k \in \mathbb{N}$. Portanto, os autovalores de (3.23) são da forma k^2 , $k \in \mathbb{Z}$ e as autofunções associadas são

$$\psi_k(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\theta), \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.25)$$

Além disso, para $\lambda = k^2$ na equação (3.24), temos

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - k^2 \varphi(r) = 0, \quad (3.26)$$

que é a equação de Euler de segunda ordem e, para resolvê-la, procuramos uma solução da forma $\varphi(r) = r^\alpha$. Daí, substituindo em (3.26), temos

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - k^2 r^\alpha = 0.$$

Logo, $(\alpha^2 - k^2)r^\alpha = 0$ e, como queremos soluções não triviais, temos que $\alpha^2 - k^2 = 0$, ou seja, $\alpha = \pm k$. Portanto, a solução geral de (3.26) é

$$\varphi_k(r) = C_k r^\alpha + D_k r^{-\alpha}.$$

Se $k = 0$, façamos $v = \varphi'_0$ e para $r \neq 0$ a equação (3.26) fica da seguinte forma

$$r v'(r) + v(r) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rv) = 0.$$

E, como procuramos soluções contínuas, obtemos que $rv = D_0$, em que D_0 é uma constante. Assim,

$$\varphi'_0(r) = \frac{D_0}{r}$$

o que implica que

$$\varphi_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r).$$

Sendo assim, a solução geral de (3.26) é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= C_k r^\alpha + D_k r^{-\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \varphi_0(r) &= C_0 + D_0 \ln(r). \end{aligned}$$

No entanto, estamos procurando soluções de (3.21) contínuas em $[0, 1] \times \mathbb{R}$, esperamos apenas soluções contínuas de (3.26) que sejam contínuas em $r = 0$, isto é, só procuramos as funções φ_k tal que $D_k = 0$. Em razão disso, as soluções de (3.26) que nos interessam são as da forma

$$\varphi_k = C_k r^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.27)$$

Então, procuramos soluções de (3.21) da forma

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)] r^k,$$

e, usando a fórmula complexa, ficamos com

$$v(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} r^{|k|}. \quad (3.28)$$

Agora, aplicando a condição $v(1, \theta)$, temos que

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta},$$

assim,

$$c_k = \hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt.$$

Daí,

$$v(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt e^{ik\theta} r^{|k|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik(\theta-t)} r^{|k|} \right] dt.$$

Logo,

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt, \quad (3.29)$$

em que,

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} r^{|k|} \quad (3.30)$$

é o núcleo de Poisson do disco unitário.

Observação 3.7. A série em (3.30) converge, desde que $0 \leq r < 1$, pois as séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (re^{it})^k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (re^{-it})^k$$

convergem, uma vez que são séries de potências com razão menor que um. E, usando a

fórmula de Euler, obtemos

$$\begin{aligned}
 P_r(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (re^{it})^k + \sum_{k=1}^{+\infty} (re^{-it})^k \\
 &= 1 + \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} \\
 &= \frac{1 - r^2}{1 - re^{-it} - re^{it} + r^2} \\
 &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.
 \end{aligned}$$

Mostraremos os seguintes lemas que são propriedades da função $P_r(t)$ as quais serão fundamentais na demonstração do resultado que garante a existência de solução para o problema de Dirichlet no disco unitário.

Lema 3.8. *Seja $P(r, t) = P_r(t)$, $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$. Então, para cada $r \in [0, 1)$ fixo, temos que $P(r, \cdot) \in C_{per}(2\pi)$, $P \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R})$ e*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

em $(0, 1) \times \mathbb{R}$.

Demonstração: Sabemos que, para cada $0 \leq r < 1$, temos que $P(r, \cdot)$ dada por

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

é periódica de período 2π , pois a função cosseno é periódica de período 2π . Além disso, quando $0 \leq r < 1$, então

$$|1 - 2r \cos t + r^2| \geq 1 + r^2 - 2r |\cos t| \geq 1 + r^2 - 2r = (1 - r)^2 > 0$$

ou seja, $1 - 2r \cos t + r^2 \neq 0$ e, temos que $P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$, uma vez que P é o quociente de duas funções contínuas no qual o denominador é não nulo. Além disso, se $(r, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 P_r &= \frac{2r^2 \cos t + 2 \cos t - 4r}{(1 - 2r \cos t + r^2)^2}, \\
 P_{rr} &= \frac{-4(r^2 + 3)r \cos t + 12r^2 + 8 \cos^2 t - 4}{(1 - 2r \cos t + r^2)^3}, \\
 P_{tt} &= \frac{2r(r^2 - 1)((r^2 + 1) \cos t - 4r \sin^2 t - 2r \cos^2 t)}{(1 - 2r \cos t + r^2)^3}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

em $(0, 1) \times \mathbb{R}$. ■

Lema 3.9. *Quaisquer que sejam $r \in [0, 1)$ e $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1. \quad (3.32)$$

Em particular, $P(r, t) > 0$ para $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Demonstração:

Primeiramente vamos mostrar a igualdade em (3.31), para tanto, é suficiente mostrarmos que $|re^{i\theta} - e^{it}|^2 = 1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2$. De fato,

$$\begin{aligned} |re^{i\theta} - e^{it}|^2 &= (re^{i\theta} - e^{it})(re^{-i\theta} - e^{-it}) \\ &= r^2 - r(e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}) + 1 \\ &= 1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2. \end{aligned}$$

Agora, para mostrarmos a igualdade em (3.32), vamos escrever o núcleo de Poisson do disco unitário dado em (3.30) de outra maneira. Assim, como P é uma função real, podemos analisar P como a parte real da série que o define, mais especificamente, temos que

$$\begin{aligned} P(r, t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} r^{|k|} \\ &= \Re \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} r^{|k|} \right) \\ &= \Re \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\cos(kt) + i \operatorname{sen}(kt)) r^{|k|} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(kt) r^{|k|} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kt) r^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \cos(kt) r^{-k} \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kt) r^k. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Considere $r \in [0, 1)$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Como o cosseno é uma função limitada, então podemos majorar a série (3.33) por uma série geométrica com razão menor que um, assim, a série (3.33) converge uniformemente em $[0, R] \times \mathbb{R}$ qualquer que seja $R \in [0, 1)$. Logo, escolhendo $R > r$, podemos integrar (3.33) termo a termo e pelo Lema 3.8, $P(r, t)$ é periódica de período 2π como função de t , então temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} P(r, t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kt) r^k \right] dt \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = 1. \end{aligned}$$

■

Até o momento utilizamos o método de separação de variáveis para nos fornecer um candidato à solução do problema (3.21). Todavia, precisamos examinar, de maneira análoga ao problema de Dirichlet no retângulo, em que sentido a função v definida em (3.29) é solução do problema (3.21). Mais especificamente, vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.10. *Seja $v(r, \theta)$ definida por (3.29), então, $v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ satisfazendo,*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

em $(0, 1) \times \mathbb{R}$, além disso, $v(r, \theta)$ converge uniformemente a $g(\theta)$ quando $r \rightarrow 1^-$. E, defina $u : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(x, y) = \begin{cases} v(r, \theta), & \text{se } x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \in [0, 1), \theta \in \mathbb{R}, \\ f(x, y), & \text{se } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Então u é solução do problema de Dirichlet no disco unitário A .

Demonstração: Sabemos, pelo Lema 3.8, que $P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$. Logo, pela continuidade de g , o Teorema 1.10 e indução, podemos derivar sob o sinal da integral infinita vezes, assim, $v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ e, quando $r \in (0, 1)$, temos, pelo Lema 3.8, que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, \theta - t) + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}(r, \theta - t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}(r, \theta - t) \right] dt = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

Agora, mostraremos que $v(r, \theta)$ converge uniformemente a $g(\theta)$ quando $r \rightarrow 1^-$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < 1 - r < \eta \Rightarrow |v(r, \theta) - g(\theta)| < \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Para tanto, precisamos majorar a diferença $|v(r, \theta) - g(\theta)|$. Note que, pelo Lema 3.9, temos que

$$\begin{aligned} |v(r, \theta) - g(\theta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') P_r(\theta - \theta') d\theta' - g(\theta) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') P_r(\theta - \theta') d\theta' - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) P_r(\theta - \theta') d\theta' \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') (g(\theta') - g(\theta)) d\theta' \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') |g(\theta') - g(\theta)| d\theta'. \end{aligned}$$

Assim, façamos a mudança de variável $t = \theta - \theta'$ e, obtemos

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt.$$

E, como P_r e g são periódicas de período 2π , temos que

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt. \quad (3.34)$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} P_r(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0, \quad t \in [-\pi, \pi], \\ +\infty, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Desse modo, para majorar a integral (3.34) é preciso dividi-la em duas partes, uma quando t está próximo de zero e outra quando t está longe de zero.

Assim, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como g é contínua em $[-\pi, \pi]$ e periódica de período 2π , g é uniformemente contínua e portanto existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\pi}{2}$ e

$$\theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad |\theta - \theta'| < \delta \Rightarrow |g(\theta) - g(\theta')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.35)$$

Além disso, g é limitada, logo existe $M > 0$ tal que $|g(t)| \leq M$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Com isso, usando (3.34) e (3.35), o Lema 3.9 e o fato de P_r ser par, pois o cosseno é uma função

par, obtemos

$$\begin{aligned}
 |v(r, \theta) - g(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) 2M dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) 2M dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) dt + \frac{M}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \right] \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 < \delta \leq t \leq \pi \Rightarrow \cos t \leq \cos \delta \Rightarrow 1 - 2r \cos t + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2 > 0.$$

Daí,

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} = P_r(\delta).$$

Portanto,

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M P_r(\delta).$$

Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} = 0.$$

Observe também que, pela convergência uniforme da função g , δ não depende de θ e, assim, existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < 1 - r < \eta \Rightarrow P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Notemos que η depende de δ mas não de θ . Então,

$$0 < 1 - r < \eta \Rightarrow |v(r, \theta) - g(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, uma vez que $P(r, \cdot)$ é periódica, temos que $v \in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times \mathbb{R})$ e é solução do problema (3.21) desde que definamos $v(1, \theta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} v(r, \theta) = g(\theta)$. Portanto, $u(x, y) = v(r, \theta)$ é solução do problema de Dirichlet no disco unitário. ■

3.3 Unicidade de solução dos Problemas

Nas duas seções anteriores explicitamos soluções dos problemas de Dirichlet no retângulo e no disco unitário, no entanto, não garantimos a unicidade de tais soluções.

No caso de problemas elípticos, a unicidade é, geralmente, obtida através de princípios do máximo ou mínimo. Estes princípios, usualmente, permite a obtenção de informações sobre soluções de EDP's sem, necessariamente, conhecermos explicitamente essas soluções.

Teorema 3.11. (Princípio do Máximo Forte). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto conexo e $u : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em \bar{A} e harmônica em A . Se u atinge seu máximo em A , isto é, existe $\xi_0 \in A$ tal que $u(\xi) \leq u(\xi_0)$, qualquer que seja $\xi \in \bar{A}$. Então u é constante em \bar{A} .*

Demonstração: Sabemos que u é contínua em \bar{A} , logo é limitada superiormente, e, além disso, atinge máximo em A , isto é, existe $\xi_0 \in A$ tal que

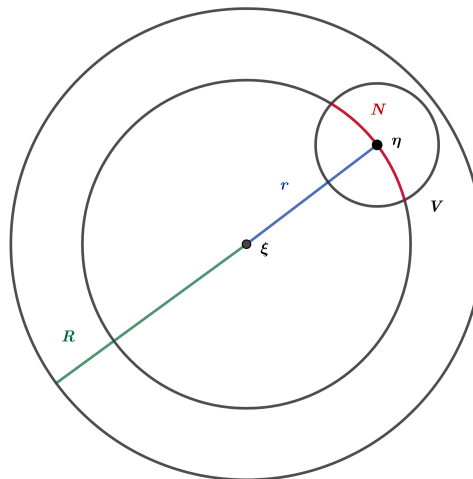
$$u(\xi_0) = M = \max\{u(\xi) : \xi \in A\}.$$

Assim, se considerarmos $S = \{\xi \in A : u(\xi) = M\}$, então $S \neq \emptyset$. Além disso, S é fechado em A , pois é a imagem inversa do fechado $\{M\}$ pela função contínua $u|_A$, ou seja, $(u|_A)^{-1}(\{M\}) = S$. Por outro lado, S é aberto em A . Com efeito, seja $\xi \in S$ arbitrário e $R > 0$ tais que $\overline{B(\xi; R)} \subseteq A$. Além disso, u é harmônica no aberto A , logo, pelo Teorema 1.17, Teorema do Valor Médio, obtemos que

$$M = u(\xi) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} u ds, \quad \forall r \in (0, R). \tag{3.36}$$

Queremos mostrar que $B(\xi; R) \subseteq S$. Assim, suponha, por absurdo, que $B(\xi; R) \not\subseteq S$, logo existe $\eta \in B(\xi; R)$ tal que $\eta \notin S$. Então, $u(\eta) < M = u(\xi)$. Como u é contínua, existe uma vizinhança V de η em $B(\xi; R)$ tal que $u(\omega) < M$, para todo $\omega \in V$, como esquematizado na Figura 3.3.

Figura 3.3: $u(\eta) < M = u(\xi)$ implica que existe uma vizinhança V de η com $u(\omega) < M$, para todo $\omega \in V$



Fonte: Produzido pela autora.

Daí, façamos $r = |\xi - \eta|$, $N = V \cap \partial B(\xi; r)$, logo

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) \setminus N} u ds + \frac{1}{2\pi r} \int_N u ds \\ &< \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) \setminus N} ds + \frac{M}{2\pi r} \int_N ds = M, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Sendo assim, $B(\xi; R) \subseteq S$ e S é aberto. Sabemos $A = S \cup (A \setminus S)$. Como A é conexo e S é fechado e aberto em A , então $S = A$, pois $S \neq \emptyset$ e, assim, u é constante em A . Portanto, por continuidade u é constante em \bar{A} . ■

Observação 3.12. Observe que vale o princípio do mínimo, pois basta aplicar o princípio do máximo para a função $-u$.

Observe que o fato de $A \subset \mathbb{R}^n$ ser conexo é fundamental, pois o A pode ser um aberto não conexo com a função u atingindo máximo ou mínimo em \bar{A} , mas u não ser constante.

Exemplo 3.13. Sejam $A = (-1, 1) \cup (2, 3)$ e $u : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-1, 1], \\ -1, & \text{se } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Notemos que, $\Delta u = u'' = 0$, o máximo e o mínimo de u é atingido, respectivamente para todo ponto $x \in [-1, 1]$ e para todo $y \in [2, 3]$. Entretanto, u não é constante.

Uma consequência imediata do Teorema 3.11 garante a unicidade para solução do problema de Dirichlet no retângulo e no disco unitário, uma vez que tanto o retângulo quanto o disco unitário são domínios (aberto e conexo) limitados e, além disso, já exibimos uma solução para cada problema.

Corolário 3.14. Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto conexo limitado, $f \in C(A)$ e $g \in C(\partial A)$. Então existe no máximo uma solução $u \in C^2(A) \cap C(\bar{A})$ do problema

$$\Delta u = f, \text{ em } A$$

$$u|_{\partial A} = g, \text{ em } \partial A.$$

Demonstração: Suponha que u e v são soluções do problema acima. Daí, considere $w = u - v$, então $w \in C^2(A) \cap C(\bar{A})$ é harmônica em A , então w atinge seu máximo e mínimo em ∂A . Logo, pelo princípio do máximo para funções harmônicas, w é constante em \bar{A} , por outro lado, $w|_{\partial A} = 0$, ou seja, esta constante é nula. Portanto, $u = v$.



Neste caso a condição de A ser limitado é preponderante para garantir que o mínimo seja atingido na fronteira. Pois pode ocorrer a seguinte situação:

Exemplo 3.15. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > |x|\}$ e $u : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = x^2 - y^2$. Sabemos que $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = |x|\}$ e A é um domínio. Observe que $u > 0$ em A e satisfaz o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \text{ em } A, \\ u = 0, \text{ em } \partial A. \end{cases}$$

Contudo, $u \equiv 0$ também é solução do problema acima, ou seja, não temos unicidade de solução. Mas perceba que isto não anula a veracidade do Corolário 3.14, pois $u(x, y) \leq 0$ e $u(0, 1) = -1$, o mínimo não é atingido na fronteira, e isso ocorre pois A não é limitado.

Capítulo 4

Existência e unicidade de solução fraca

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que dados A um aberto limitado e $f \in L^2(A)$ existe uma única função $u \in H_0^1(A)$ que é solução para o problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{em } A \\ u &= 0 & \text{em } \partial A. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para tanto, precisamos definir alguns conceitos e resultados preliminares da Análise Funcional e Medida e Integração que nos darão base para compreender o ambiente que estamos trabalhando e em que sentido estamos procurando soluções. Vale destacar que o leitor deve estar familiarizado com propriedades abordadas num curso introdutório de medida e integração bem como conceitos e resultados básicos da Análise Funcional.

4.1 Tópicos de Análise Funcional e Medida e Integração

Neste capítulo vamos utilizar teoremas da Análise Funcional no estudo das EDP's. Mais especificamente, vamos garantir, através do Teorema de Lax-Milgram, a existência e unicidade de solução fraca para um problema Dirichlet. Sendo assim, vamos elencar alguns conceitos e resultados preliminares da Análise Funcional a fim de demonstrarmos o teorema de Lax-Milgram. Destacamos que tais conceitos e resultados podem ser encontrados nas referências [8], [9], [10] e [11].

Definição 4.1. Uma *métrica* em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa $(x, y) \in M \times M$ um valor real $d(x, y)$ denominado distância, a qual, para quaisquer $x, y, z \in M$, são satisfeitas as seguintes propriedades:

- i) Se $x = y$, então $d(x, y) = 0$;
- ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetria);

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade Triangular).

Um **espaço métrico** é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .

Definição 4.2. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** quando satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$. Em que, $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
- ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$;
- iii) Para quaisquer $u, v \in V$, tem-se $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (Desigualdade Triangular).

O número real $\|u\|$ é chamado de norma do vetor u .

Daí, considerando um espaço vetorial normado podemos ainda vê-lo como um espaço métrico, se induzirmos a métrica d através de uma norma do seguinte modo: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Um resultado importante da Análise Real, é que uma sequência é de Cauchy se, e somente se, converge para um valor que está em \mathbb{R} o que nos garante a completude dos números reais. Contudo essa propriedade nem sempre é válida para espaços métricos, pois nem sempre uma sequência de Cauchy é convergente e converge para um ponto do espaço métrico. Basta considerarmos a sequência $x_n : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1]$ que é de Cauchy mas converge para $x = 0$ que não pertence ao intervalo $(0, 1]$. Então, os espaços nos quais toda sequência de Cauchy é convergente são denominados espaços completos. Mais especificamente:

Definição 4.3. Um **espaço métrico** (M, d) é **dito completo** se toda sequência de Cauchy for convergente para um ponto de M .

Por outro lado, quando um espaço métrico completo é um espaço vetorial normado temos a seguinte caracterização:

Definição 4.4. Se V é um espaço vetorial normado tal que toda sequência de Cauchy em V converge em V , então V é chamado de **espaço de Banach**.

Esses conceitos são fundamentais para que possamos compreender o espaço que vamos trabalhar nos próximos resultados, os espaços de Hilbert.

Definição 4.5. Diremos que H é um **espaço de Hilbert** quando é um espaço de Banach com norma proveniente de um produto interno.

Embora o leitor deva estar familiarizado com as propriedades destes espaços, se faz necessário destacarmos o seguinte resultado que será fundamental na demonstração dos subsequentes teoremas. O leitor interessado, pode encontrar a demonstração em [9].

Teorema 4.6. *Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Hilbert. Então H é a seguinte soma direta*

$$H = Y \oplus Y^\perp$$

em que Y^\perp é o complemento ortogonal de Y .

Sabemos da Álgebra Linear que um funcional linear é um operador linear $f : V \rightarrow K$ em que V é um espaço vetorial sob o corpo K . E quando V é um espaço vetorial normado, temos que um funcional linear é limitado, se existe $M > 0$ tal que para todo $x \in V$, tem-se

$$|f(x)| \leq M\|x\|.$$

E, assim faz sentido definirmos a norma de f como

$$\|f\|_* = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} |f(x)|. \quad (4.2)$$

Sendo assim, o espaço dual de V é o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em V que forma um espaço vetorial com norma dada em (4.2) e o qual denotamos por V^* . Além disso, f é um funcional linear limitado se, e somente se, é contínuo. O próximo resultado nos permite escrever qualquer funcional linear limitado num espaço de Hilbert como um produto interno.

4.1.1 Teorema da Representação de Riesz-Fréchet

Teorema 4.7. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet). *Seja H um espaço de Hilbert. Então dado qualquer $f \in H^*$, existe um único $z \in H$, que depende de f , tal que*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad \forall x \in H$$

além disso, $\|z\|_H = \|f\|_*$.

Demonstração: Primeiramente, mostraremos a existência de $z \in H$. Assim, considere $N(f) = \{x \in H; f(x) = 0\}$ o núcleo do funcional $f \in H^*$. Então vamos analisar os seguintes casos:

1º caso: Se $N(f) = H$, então $f \equiv 0$ e, assim, existe $z = 0$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle = 0$, para todo $x \in H$.

2º caso: Se $N(f) \neq H$, então $N(f)^\perp \neq \{0\}$. De fato, como f é contínua e $N(f)^\perp = f^{-1}(\{0\})$, ou seja, $N(f)^\perp$ é a imagem inversa de um conjunto fechado logo é um subespaço fechado de H logo, pelo Teorema 4.6, $H = N(f) \oplus N(f)^\perp$ e, assim, $N(f)^\perp \neq \{0\}$. Daí,

existe $z_0 \in N(f)^\perp$ tal que $z_0 \neq 0$. Com isso, fixando arbitrariamente $x \in H$, considere $u \in H$ dado da forma

$$u = f(x)z_0 - f(z_0)x.$$

Daí, pela linearidade de f , temos que

$$f(u) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0,$$

isto é, $u \in N(f)$, logo $\langle u, z_0 \rangle = 0$, pois $z_0 \in N(f)^\perp$. Assim, pelas propriedades de produto interno, ficamos com

$$\begin{aligned} \langle u, z_0 \rangle = 0 &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\|z_0\|^2 - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle. \end{aligned}$$

E, como $z_0 \neq 0$, temos

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \langle x, z_0 \rangle.$$

Portanto, mostramos que existe $z \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad \forall x \in H,$$

com $z = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} z_0$. Agora, mostraremos a unicidade do vetor $z \in H$. Para tanto, suponha por absurdo, que z não é único, ou seja, existem $z_1 \neq z_2$ em H tais que

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle x, z_1 \rangle - \langle x, z_2 \rangle &= 0, \quad \forall x \in H \Rightarrow \\ \langle x, z_1 - z_2 \rangle &= 0, \quad \forall x \in H \Rightarrow \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

o que é um absurdo, logo z é único.

Com isso, basta mostrarmos $\|f\|_* = \|z\|_H$. De fato, quando $f = 0$ nada temos que provar. Se $f \neq 0$ então $z \neq 0$. Como $f(x) = \langle x, z \rangle$, para todo $x \in H$ em particular para $x = z$, temos

$$\|z\|_H^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\|_* \|z\|_H. \quad (4.3)$$

como $z \neq 0$, de (4.3) obtemos que

$$\|z\|_H \leq \|f\|_* \quad (4.4)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\|_H \|z\|_H.$$

Daí, segue que

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \|z\|_H,$$

isto é,

$$\|f\|_* \leq \|z\|_H. \quad (4.5)$$

Portanto, de (4.4) e (4.5) obtemos que $\|f\|_* = \|z\|_H$. ■

Definição 4.8. Sejam V um espaço vetorial normado e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Então

i) B é **contínua** se existe $C > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in V;$$

ii) B é **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que

$$|B(v, v)| \geq C \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

4.1.2 Teorema de Lax-Milgram

O Teorema a seguir é uma consequência do Teorema da Representação de Riesz-Fréchet e basicamente nos permite expressar todo funcional $f \in H^*$ como uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e coerciva.

Teorema 4.9. (Teorema de Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então dado $\varphi \in H^*$ existe um único $u \in H$ tal que

$$\varphi(v) = B(v, u), \quad \forall v \in H.$$

Demonstração: Primeiramente, fixamos $u \in H$ e consideremos a aplicação $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(v) = B(v, u)$. Como B é bilinear e contínua, então φ é linear contínua,

ou seja, $\varphi \in H^*$. Assim, pelo Teorema 4.7, Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, existe um único $z \in H$ tal que

$$\varphi(v) = B(v, u) = \langle v, z \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Então, de forma natural, definimos a aplicação $T : H \rightarrow H$ dada por $T(u) = z$. Logo,

$$B(v, u) = \langle v, T(u) \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Note que T é linear, pois como B é linear e, assim, para todo $u, w, v \in H$ e para todo $\beta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle v, T(u + \beta w) \rangle &= B(v, u + \beta w) \\ &= B(v, u) + \beta B(v, w), \\ &= \langle v, T(u) \rangle + \beta \langle v, T(w) \rangle, \\ &= \langle v, T(u) + \beta T(w) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle v, T(u + \beta w) - (T(u) + \beta T(w)) \rangle, \quad \forall v \in H,$$

então

$$T(u + \beta w) = (T(u) + \alpha T(w)).$$

Além disso, T é contínua. Pois como B é bilinear existe $C > 0$, tal que

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle = B(T(u), u) \leq C\|u\|\|T(u)\|.$$

Logo, $\|T(u)\| \leq C\|u\|$.

Observe que a unicidade de z não garante a unicidade de u . Para tanto, precisamos mostrar que T é uma aplicação bijetiva. Para provarmos isto, vamos mostrar primeiramente a injetividade e por fim a sobrejetividade da aplicação T . Assim, se $T(u_1) = T(u_2)$ então, como T é linear, temos que $T(u_1 - u_2) = 0$. Por outro lado, temos que B é uma forma bilinear coerciva, logo existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|u\|^2 \alpha \leq |B(u, u)| \leq |\langle u, T(u) \rangle| \leq \|T(u)\|\|u\|.$$

Logo

$$\|T(u)\| \geq \alpha\|u\|. \tag{4.6}$$

Assim, de (4.6), obtemos

$$0 \leq \|u_1 - u_2\| \alpha \leq \|T(u_1 - u_2)\| = 0$$

e, como $\alpha > 0$, temos que $\|u_1 - u_2\| = 0$ o que implica em $u_1 = u_2$, então T é injetiva. Agora vamos mostrar que T é sobrejetiva. Para tanto, considere $Im(T) \subset H$ como o conjunto imagem de T , então basta mostrar que $Im(T) = H$. Sendo assim, observe que a $Im(T)$ é um conjunto fechado em H , pois seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um sequência de $Im(T)$ convergente, ou seja, $z_n \rightarrow z \in H$, então existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em H tal que $T(u_n) = z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois é convergente, logo dado $\varepsilon > 0$, temos que $\alpha\varepsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_n - z_m\| < \alpha\varepsilon$, para todo $n, m \geq n_0$. Assim, de (4.6) e da linearidade de T , obtemos que

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|T(u_n) - T(u_m)\| = \|z_n - z_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0,$$

ou seja, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em H , então pela completude de H temos que $u_n \rightarrow u \in H$. E, como T é contínua, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(u_n) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = T(u) = z.$$

Então, $z \in Im(T)$. Portanto, $Im(T)$ é um conjunto fechado em H . Além disso, quando $w \in Im(T)^\perp$ temos que

$$0 = \langle w, A(u) \rangle = B(w, u), \quad (4.7)$$

e, em particular, (4.7) é válido para $u = w$, pois $w \in H$. sendo assim, $B(w, w) = 0$ e, como B é uma forma bilinear coerciva, obtemos

$$0 = \|B(w, w)\| \geq \alpha \|w\|^2 \geq 0.$$

Logo, como $\alpha > 0$, temos que $\|w\|^2 = 0$, ou seja, $w = 0$. Isto nos diz que $Im(T)^\perp = \{0\}$. Logo, pelo Teorema 4.6, $Im(T) = H$, isto é, T é sobrejetiva. E, portanto, T é bijetiva, assim para $z \in H$ existe um único $u \in H$ tal que

$$\varphi(v) = B(v, u), \quad \forall v \in H.$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Agora vamos definir a integral de Lebesgue, mas para isto precisamos compreender o conceito de função mensurável que é uma condição necessária para que uma função seja integrável no sentido de Lebesgue. Tal integral é mais forte no sentido de que há um classe maior de funções integráveis a Lesbegue do que a Riemann. Mas para compreendermos

o conceito de função mensurável precisamos definir uma coleção de conjuntos chamados de σ -álgebra. Ao leitor interessado nas minúcias destes conceitos, recomendamos, a referência [2].

Definição 4.10. Seja X um conjunto não vazio. Uma família \mathcal{A} de subconjuntos de X é chamada σ -álgebra se:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
2. Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$;
3. Se a $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em \mathcal{A} , então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

E chamamos o par ordenado (X, \mathcal{A}) de espaço mensurável.

Definição 4.11. Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável. Dizemos que função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *mensurável na σ -álgebra \mathcal{A} ou \mathcal{A} -mensurável*, se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X / f(x) > \alpha\}$$

pertence a \mathcal{A} . E podemos definir os seguintes conjuntos,

$$\begin{aligned} M(X, \mathcal{A}) &= \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; f \text{ é mensurável}\}; \\ M^+(X, \mathcal{A}) &= \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; f \text{ é mensurável e } f \geq 0\} \end{aligned}$$

em que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definição 4.12. Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável. Uma *medida* é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ii) Seja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos em \mathcal{A} tal que $B_n \cap B_m = \emptyset$ para $n \neq m$ então

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

E chamamos o trio (X, \mathcal{A}, μ) de espaço de medida.

Observação 4.13. Observe que do item *ii*) da definição acima pode ocorrer da série $\sum \mu(B_n)$ não convergir. Contudo, se $\mu(B_n) < +\infty$ dizemos que μ é uma medida σ -finita. Além disso, se $\mu(B) < +\infty$, para todo $B \in \mathcal{A}$ então μ é dita uma medida finita.

Observação 4.14. Dizemos que um conjunto $B \in \mathcal{A}$ tem medida nula quando $\mu(B) = 0$ e que uma propriedade é válida em quase todo ponto (q.t.p), se existe um conjunto $E \in \mathcal{A}$ de medida nula tal que a propriedade é válida $X - E$.

Definição 4.15. Uma função real é dita *simples* se assume somente um número finito de valores reais. Considere $\{a_1, \dots, a_n\}$ os valores finitos de f e $E_i = f^{-1}(a_i) \in \mathcal{A}$, com $i = 1, \dots, n$. Então, podemos representar uma função simples mensurável como a combinação finita de funções características, isto é,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

em que

$$\mathcal{X}_{E_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E_i \\ 0, & \text{se } x \notin E_i. \end{cases}$$

e esta representação é única.

Definição 4.16. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples em $M^+(X, \mathcal{A})$ com representação padrão. Definimos a integral de f relativa a medida μ como

$$I(f) = \int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

Observação 4.17. Ressaltamos que o leitor deve estar familiarizado com as propriedades desta integral. Visto que nosso objetivo é utilizá-la na aplicação que faremos mais adiante, a qual garantirá a existência e unicidade de solução fraca para o problema (4.1).

Agora estamos prontos para definir os espaços L^2 e os espaços de Sobolev. Ao leitor interessado nesses espaços, indicamos a referência [1] a qual foi utilizada neste trabalho.

Definição 4.18. Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Definimos

$$\mathcal{L}^2(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^2 d\mu < +\infty \right\}$$

Dessa forma, faz sentido definirmos a norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

em que $\mathcal{L}^2(X)$ é um espaço normado com esta norma.

Observação 4.19. Note que $\|f\|_2 = 0$ é equivalente à $f = 0$ q.t.p em X . Assim, definimos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \iff f - g = 0 \quad \text{q.t.p em } X.$$

Então, defina $L^2(X) = \mathcal{L}^2(X) / \sim = \{[f]; f \in \mathcal{L}^2(X)\}$. Por simplicidade, doravante, consideraremos $[f] = f$.

Lema 4.20. (Desigualdade de Hölder - caso particular). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f, g \in L^2(A)$. Então*

$$\int_A |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Definição 4.21. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ compacto. Definimos o **suporte** de u como o seguinte conjunto

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in A; u(x) \neq 0\}} \cap A,$$

ou seja, é o suporte de u é o fecho do complementar do conjunto de todos os pontos que de $x \in A$ tais que $u(x) = 0$.

Sendo assim, uma função é dita **suporte compacto** se $\text{supp}(u)$ for um conjunto compacto.

Assim, denotemos por $C_0^\infty(A)$ o conjunto das funções que possuem derivadas de todas ordem com suporte compacto contido ($\subset\subset$) em A , ou seja,

$$C_0^\infty(A) = \{f \in C^\infty(A); f(x) = 0 \ \forall x \in A/K, \text{ com } K \text{ compacto}\}$$

Definição 4.22. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O espaço de Sobolev $W^{1,2}(A)$ é definido por

$$W^{1,2}(A) = \left\{ u \in L^2; \exists \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2; \int_A u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_A \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \ \forall \varphi \in C_0^\infty, \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

- i) Por simplicidade vamos denotar o espaço $W^{1,2}(A)$ pelo espaço $H^1(A)$
- ii) Note que o espaço $H^1(A)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_2 + \|\nabla u\|_2$$

é um espaço vetorial normado.

- iii) Além disso, denotamos por $H_0^1(A)$ o fecho de $C_0^\infty(A)$ em $W^{1,2}(A)$;

Lema 4.23. (Desigualdade de Poincaré - caso particular). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Então existe $C > 0$, que depende de A , tal que*

$$\|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(A).$$

- i) Pela desigualdade de Poincaré, garantimos que a norma $\|u\|_{H_0^1}$, a norma de u no espaço $H_0^1(A)$, é equivalente a norma $\|\nabla u\|_2$, desde que A seja um domínio;
- ii) $H_0^1(A)$ é um espaço de Hilbert.

4.1.3 Existência e unicidade de solução fraca

A fim de solucionarmos o problema (4.1) precisamos apresentar o sentido de solução que estamos procurando. Assim, faremos uma motivação variacional a fim de definir o conceito de solução fraca para o problema (4.1).

Primeiramente, multiplicando a equação $-\Delta u = f$ por uma função $\varphi \in C_0^\infty(A)$ e integrando, obtemos

$$-\int_A \Delta u \varphi = \int_A f \varphi. \quad (4.8)$$

Da Primeira Identidade de Green sabemos que

$$\int_A \Delta u \varphi + \int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\partial A} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

E como a função $\varphi \in C_0^\infty(A)$, então $\varphi = 0$ em ∂A . Daí,

$$-\int_A \Delta u \varphi = \int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi. \quad (4.9)$$

Logo, substituindo em (4.9) (4.8), obtemos

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_A f \varphi.$$

Portanto, definimos solução fraca para o problema (4.1) da seguinte forma:

Definição 4.24. Seja A um domínio limitado. Dizemos que $u \in H_0^1(A)$ é uma **solução fraca** do problema (4.1) se

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_A f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(A).$$

Agora, mostraremos, através do Teorema de Lax- Milgram, que existe uma única solução fraca do problema (4.1).

Inicialmente, temos que $H_0^1 = H_0^1(A)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_A \nabla u \cdot \nabla v$$

com norma dada por

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_A |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então considere a aplicação $B : H_0^1(A) \times H_0^1(A) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$B(u, \varphi) = \int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi.$$

Observe que pela linearidade da integral obtemos que B é uma forma bilinear. Além disso, B é contínua. De fato, pela propriedade de integral e da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|B(u, \varphi)| = \left| \int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi \right| \leq \int_A |\nabla u \cdot \nabla \varphi| \leq \int_A |\nabla u| |\nabla \varphi|. \quad (4.10)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_A |\nabla u| |\nabla \varphi| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla \varphi\|_2 = \|u\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}. \quad (4.11)$$

Assim, de (4.10) e (4.11), obtemos

$$|B(u, \varphi)| \leq \|u\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}.$$

Notemos também que B é coerciva, pois

$$|B(u, u)| = \left| \int_A |\nabla u|^2 \right| = \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Agora, considere a aplicação $F : H_0^1(A) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(\varphi) = \int_A f \varphi$$

note que, pela linearidade da integral, temos que F é um funcional linear. E, além disso, F é contínua. De fato, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$|F(\varphi)| = \left| \int_A f \varphi \right| \leq \int_A |f| |\varphi| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

E, pela desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_2 \|\varphi\|_2 \leq \|f\|_2 C \|\nabla \varphi\|_2 = K \|\varphi\|_{H_0^1}$$

em que $K = C \|f\|_2$.

Com isso, aplicando o Teorema 4.9, Teorema de Lax-Milgram, temos que existe única $u \in H_0^1(A)$ tal que

$$B(u, \varphi) = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(A).$$

Portanto,

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_A f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(A).$$

ou seja, existe uma única solução fraca para o problema (4.1).

Considerações Finais

Neste trabalho nos embasamos na teoria da análise matemática como ferramenta para o estudo das equações diferenciais parciais, mais especificamente, utilizamos resultados e conceitos da Análise no \mathbb{R}^n , Análise de Fourier e Análise Funcional bem como conceitos e resultados da Teoria de EDO's e de Medida e Integração, a fim de determinarmos a existência e unicidade de solução clássica e fraca para problemas envolvendo o operador Laplaciano. O que nos possibilitou perceber que a depender da região na qual o problema é analisado e da noção de solução considerada, utilizamos várias técnicas de resolução aplicando diversos conceitos da análise.

Sendo assim, cumprimos os objetivos previamente estabelecidos os quais nos conduziram a perceber a importância do estudo de resultados clássicos da análise matemática na teoria das EDP's bem como as dificuldades encontradas que surgem quando mudamos o sentido de solução que estamos procurando. Além disso, nos possibilitou um embasamento teórico para dar continuidade em um curso de Pós-graduação.

Referências Bibliográficas

- [1] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential*. Universitext, Springer, New York, 2011.
- [2] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. 2a. ed. New York: Wiley Classics Library, 1995.
- [3] FIGUEIREDO, D. G. de, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Projeto Euclides).
- [4] IÓRIO, V. de M. *EDP Um curso de graduação*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Coleção Matemática Universitária).
- [5] IÓRIO, V. de M.; JÚNIOR, R. I. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2013.(Coleção Projeto Euclides).
- [6] LIMA, E. L. *Análise Real: Vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Projeto Euclides).
- [7] LIMA, E. L. *Curso de Análise: Vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Projeto Euclides).
- [8] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. (Coleção Projeto Euclides).
- [9] OLIVEIRA, César R, de. *Introdução à Análise Funcional*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.(Coleção Projeto Euclides).
- [10] PISKE, A. *Integração: Riemann e Lebesgue, um estudo comparativo* . 2013. 143pp.Trabalho de Conclusão de Curso -Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.
- [11] SILVA, J. F. F. da. *O Teorema de Lax Milgram e Aplicações*. 2014. 53pp. Trabalho de Conclusão de Curso - pela Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014.
- [12] TEIXEIRA, E. V. *Um convite à análise geométrica de EDPs elípticas de 2ª ordem*.2011. 53pp. Notas de Aula -Universidade Federal do Ceará, 2011.