



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

## **Construções de Fractais com o GeoGebra e Dimensão Fractal**

**Rafael Almeida Souto**

**Orientador Prof<sup>o</sup> Dr. Thiago Yukio Tanaka**

**Coorientador Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Ângela Caldas Didier**

RECIFE

2021





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Rafael Almeida Souto**

## **Construções de Fractais com o GeoGebra e Dimensão Fractal**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de graduado.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Thiago Yukio Tanaka  
Coorientador: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Ângela Caldas Didier

RECIFE

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S728c Souto, Rafael Almeida  
Construção de fractais com o GeoGebra e dimensão fractal /  
Rafael Almeida Souto. – 2021.  
112 f.

Orientador: Thiago Yukio Tanaka.  
Coorientadora: Maria Ângela Caldas Didier.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação – Licenciatura em  
Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Departamento de Matemática, Recife, BR-PE, 2021.  
Inclui bibliografia.

1. Geometria 2. Fractais 3. Quarta dimensão 4. Matemática  
5. GeoGebra (Software) I. Tanaka, Thiago Yukio, orient. II. Didier,  
Maria Ângela Caldas, coorient. III. Título

CDD 510



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

## FICHA DE AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA MONOGRAFIA

### 1. IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO

Nome: Rafael Almeida Souto

CPF: 703.681.494-20

### 2. TÍTULO DA MONOGRAFIA

Construções de Fractais com o GeoGebra e Dimensão Fractal

### 3. BANCA EXAMINADORA

1º Profº Thiago Yukio Tanaka (Presidente)

2º Profº Gilson Simões Ferreira Júnior

3º Profº Edgar Corrêa de Amorim Filho

### 4. PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO DA MONOGRAFIA

Comissão Examinadora	Domínio do assunto	Apresentação e redação	Defesa	Média por examinador
Profº Thiago Yukio Tanaka				
Profº Gilson Simões Ferreira Júnior				
Profº Edgar Corrêa de Amorim Filho				
Média final				

5. MÉDIA FINAL (\_\_\_\_\_)

Recife, 21 de dezembro de 2021.

\_\_\_\_\_  
Presidente

\_\_\_\_\_  
2º Membro

\_\_\_\_\_  
3º Membro

*Dedico este trabalho a todos os que me ajudaram ao longo desta caminhada.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, Fernando Reis Souto Filho, Kátia Regina Almeida da Silva Souto, minha irmã Paula Renata Almeida Souto de Santana e à toda minha família, que me apoiou e possibilitou que eu aproveitasse minha graduação da forma que aproveitei. À minha namorada, Thayná da Costa Ribeiro, por sempre estar do meu lado me mantendo de pé, me incentivando e me fazendo acreditar que ia dar certo, aos irmãos que encontrei na universidade, Érick Caetano Alves do Nascimento, Gabriel Silva de Lucena, Lucas Rodrigues Wanderley, Marcos Miguel da Silva Filho, Pedro Victor Souza Freitas, Túlio José de Souza Santos e Yasmin Alves Sobrinho Lira, estar com vocês até o último dia foi essencial, nada melhor do que um grupo de amigos que está junto nas horas de seriedade e estudo e também nas horas de descontração e leveza. Obrigado por tudo que fizeram por mim, percebendo ou não o que estavam fazendo! Também gostaria de agradecer a todos os professores que fizeram parte da minha formação, pelas disciplinas ministradas, votos de apoio e confiança, encorajamento, conselhos, elogios e críticas. Em especial, um agradecimento à professora Maria Ângela Caldas Didier e ao professor Thiago Yukio Tanaka, primeiros a confiar e investir em mim. Vocês me fizeram evoluir muito em termos acadêmicos e não acadêmicos, serei eternamente grato e espero que continuemos nossa parceria. Também agradeço às pessoas que de alguma forma contribuíram de alguma forma com os estudos sobre Geometria Fractal, a pesquisadora Laura Alves Pacífico da Silva e o professor do campus do Cabo de Santo Agostinho da UFRPE, João Antônio Miranda Gondim. Gostaria de agradecer também aos demais funcionários, discentes e docentes do departamento. Por fim, gostaria de finalizar agradecendo aos professores Gilson Simões e Edgar Amorim por terem aceito participar da banca avaliadora e cujos comentários e sugestões certamente engrandecerão a versão final deste trabalho.





# Resumo

Neste trabalho apresentaremos os elementos e conceitos relacionados com a Geometria Fractal como sua definição, classificação em tipos, propriedades, e algumas características mensuráveis como suas medidas de área, perímetro e dimensão. No primeiro momento nos concentraremos na caracterização dos fractais mais clássicos da teoria como o triângulo de Sierpinski, a curva de Koch, o conjunto de Cantor, entre outros. Mostraremos como construir estes objetos utilizando a ferramenta matemática das transformações geométricas e suas traduções matriciais e a implementação destes conceitos por meio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que nos permite construir a grande maioria dos fractais que serão mencionados durante o trabalho. Por fim, apresentaremos também um estudo sobre o conceito de dimensão fractal, cujas aplicações são vastas em várias áreas como Economia, Medicina, Biologia entre outros. Mais precisamente, apresentaremos dois métodos de obtenção de dimensão fractal, o primeiro utilizando o método de Hausdorff-Besicovitch e uma segunda maneira utilizando o método de *box-counting*.

Acreditamos que esta monografia pode ser utilizada como um primeiro material norteador de estudos e pesquisa na área da Geometria Fractal, principalmente pela riqueza dos detalhes, em destaque para aqueles que desconhecem ou conhecem pouco sobre a teoria. Além disso, por trazermos métodos de construções com o GeoGebra, acreditamos que o material também serve de guia para direcionamento do uso da teoria em sala de aula para os discentes do curso de Licenciatura em Matemática, futuros docentes. Por fim, para aqueles que já possuem um conhecimento básico sobre os fractais, o estudo de dimensão serve de base para um direcionamento na aplicação deste objeto.

**Palavras-chave:** Geometria Fractal; GeoGebra; Dimensão Fractal.



# Abstract

In this work, we will present the elements and concepts related to Fractal Geometry such as its definition, classification into types, properties, and some measurable characteristics such as area, perimeter, and dimension measurements. At first, we will focus on the characterization of the most classic fractals of the theory, such as the Sierpinski triangle, the Koch curve, the Cantor set, among others. We will show how to build these objects using the mathematical tool of geometric transformations and their matrix translations and the implementation of these concepts through GeoGebra dynamic geometry *software*, which allows us to build the vast majority of fractals that will be mentioned during the work. Finally, we will also present a study on the concept of fractal dimension, whose applications are vast in various areas such as Economics, Medicine, Biology, among others. More precisely, we will present two methods of obtaining a fractal dimension, the first using the Hausdorff-Besicovitch method and a second way using the *box-counting* method.

We believe that this monograph can be used as the first guiding material for studies and research in the field of Fractal Geometry, mainly due to the richness of details, especially for those who are unaware or know little about the theory. In addition, by bringing construction methods with GeoGebra, we believe that the material also serves as a guide to guide the use of theory in the classroom for students of the Licentiate Degree in Mathematics, future teachers. Finally, for those who already have a basic knowledge of fractals, the dimension study serves as a basis for guiding the application of this object.

**Keywords:** Fractal Geometry; GeoGebra; Fractal Dimension



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Benoit Mandelbrot. Fonte: Wikipedia. . . . .	17
Figura 2 – Niels Von Koch. Fonte: Wikipedia. . . . .	19
Figura 3 – Giuseppe Peano. Fonte: Wikipedia . . . . .	19
Figura 4 – Zoom no fractal de Julia e Mandelbrot. Fonte: (7) . . . . .	20
Figura 5 – Divisão das primeiras iterações do tapete de Sierpinski em partes iguais. Fonte: (26) . . . . .	21
Figura 6 – Contagem de caixas sobre a curva de Koch para três fatores de redução diferentes. Fonte: (25) . . . . .	22
Figura 7 – Homepage do GeoGebra. Fonte: (24) . . . . .	23
Figura 8 – Triângulo de Sierpinski construído até a 4ª iteração. Fonte: Autoria própria. . . . .	27
Figura 9 – Tapete de Sierpinski. Fonte: (23). . . . .	27
Figura 10 – Pirâmide de Sierpinski de base triangular. Fonte: (22) . . . . .	28
Figura 11 – Pirâmide de Sierpinski de base quadrangular. Fonte: (21). . . . .	28
Figura 12 – Esponja de Menger. Fonte: (20) . . . . .	29
Figura 13 – Curva de Koch. Fonte: (19). . . . .	29
Figura 14 – Curva de Hilbert com 5 iterações. Fonte: (18). . . . .	30
Figura 15 – Curva de Hilbert com 3 iterações. Fonte: (17). . . . .	31
Figura 16 – Fractal tipo Dürer - Pentágono com 3 iterações. Fonte: (8). . . . .	31
Figura 17 – Fractal tipo Dürer - Hexágono com 3 iterações. Fonte: (8). . . . .	31
Figura 18 – Conjuntos de Julia. Fonte:(8) . . . . .	32
Figura 19 – Capturas de tela do jogo No Man’s Sky. Fonte: (16) . . . . .	33
Figura 20 – Brócolis romanesco e samambaia. Fonte: (15) . . . . .	34
Figura 21 – Rotação de centro $C = C'$ e ângulo $\alpha = 90^\circ$ . Fonte: autoria própria. . .	46
Figura 22 – Translação do triângulo dado na direção do vetor $(-1, 2)$ . Fonte: autoria própria. . . . .	47
Figura 23 – Reflexão do ponto $B$ em relação ao eixo $r$ de equação $y = x + 2$ . Fonte: autoria própria. . . . .	48

Figura 24 – Reflexão do ponto $B$ em relação ao eixo $r$ de equação $y = 0$ . Fonte: autoria própria. . . . .	48
Figura 25 – Homotetia em cada um dos vértices do pentágono $pol1$ com centro $F$ e razão $k = \frac{1}{2}$ . Fonte: autoria própria. . . . .	49
Figura 26 – Georg Cantor. Fonte: (14) . . . . .	50
Figura 27 – Conjunto de Cantor até sua 4ª iteração. Fonte: (8) . . . . .	50
Figura 28 – Resultado das aplicações de $T_1$ e $T_2$ nos pontos iniciais $(0, 0)$ e $(1, 0)$ . Fonte: autoria própria. . . . .	51
Figura 29 – Curva de Koch até sua 4ª iteração. Fonte: (34) . . . . .	52
Figura 30 – Resultado das aplicações de $T_1, T_2, T_3$ e $T_4$ nos pontos iniciais $(0, 0)$ e $(1, 0)$ . Fonte: autoria própria. . . . .	53
Figura 31 – Árvores Bifurcadas. Fonte: [13] . . . . .	54
Figura 32 – Retirada da malha e dos eixos da janela de visualização. Fonte: autoria própria. . . . .	55
Figura 33 – Construção dos segmentos $AB$ e $BC$ . Fonte: autoria própria. . . . .	55
Figura 34 – Construção do ângulo $\alpha$ . Fonte: autoria própria. . . . .	56
Figura 35 – Definindo a razão $r$ . Fonte: autoria própria. . . . .	56
Figura 36 – Construção do círculo $c$ . Fonte: autoria própria. . . . .	57
Figura 37 – Criação do ângulo $\beta$ e do ponto $B'$ . Fonte: autoria própria. . . . .	58
Figura 38 – Criação do segmento $CB'$ e do ponto $D$ . Fonte: autoria própria. . . . .	59
Figura 39 – Retirando o rótulo de $AB$ . Fonte: autoria própria. . . . .	60
Figura 40 – Ocultando a circunferência $c$ . Fonte: autoria própria. . . . .	60
Figura 41 – Criando uma nova ferramenta. Fonte: autoria própria. . . . .	61
Figura 42 – Construção de um novo ramo da árvore. Fonte: autoria própria. . . . .	62
Figura 43 – Figura resultante. Fonte: autoria própria. . . . .	62
Figura 44 – Reflexão em relação a uma reta. Fonte: autoria própria. . . . .	63
Figura 45 – Primeira até a quinta reflexão. Fonte: autoria própria. . . . .	63
Figura 46 – Árvores com diferentes tamanhos para os segmentos $AB, CD$ e amplitude para o ângulo $\alpha$ . Fonte: autoria própria. . . . .	64
Figura 47 – Criação os pontos $A$ e $B$ . Fonte: autoria própria. . . . .	65

Figura 48 – Construção do pol1. Fonte: autoria própria. . . . .	65
Figura 49 – Criação dos pontos médios D, E e F e do centro G. Fonte: autoria própria. . . . .	66
Figura 50 – Criação da lista l1. Fonte: autoria própria. . . . .	66
Figura 51 – Criação do triângulo l2. Fonte: autoria própria. . . . .	67
Figura 52 – Criação da lista l3. Fonte: autoria própria. . . . .	67
Figura 53 – Criação da lista l4. Fonte: autoria própria. . . . .	68
Figura 54 – Figuras dos Passos 9, 10 e 11, respectivamente. Fonte: autoria própria. . . . .	68
Figura 55 – Localizando a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE. Fonte: autoria própria. . . . .	69
Figura 56 – Criação do CONTROLE DESLIZANTE a. Fonte: autoria própria. . . . .	69
Figura 57 – Inserindo a condição para a exibição de l2. Fonte: autoria própria. . . . .	70
Figura 58 – Fractal quando $a=1$ , $a=3$ e $a=5$ . Fonte: autoria própria. . . . .	70
Figura 59 – Segmento inicial e as cinco primeiras iterações da curva de Koch no GeoGebra. Fonte: autoria própria. . . . .	72
Figura 60 – quadrado inicial e as cinco primeiras iterações do tapete de Sierpinski no GeoGebra. Fonte: autoria própria. . . . .	74
Figura 61 – Círculo de Sierpinski após executar o algoritmo acima no GeoGebra. Fonte: autoria própria. . . . .	75
Figura 62 – pirâmide inicial e as três primeiras iterações da pirâmide de Sierpinski no GeoGebra. Fonte: autoria própria. . . . .	76
Figura 63 – Cubo inicial e as duas primeiras iterações da esponja de Menger no GeoGebra. Fonte: autoria própria. . . . .	77
Figura 64 – Segmento inicial e as quatro primeiras iterações da curva de Peano no GeoGebra. Fonte: autoria própria. . . . .	79
Figura 65 – Figura inicial e cinco primeiras iterações da curva de Hilbert no GeoGe- bra. Fonte: autoria própria. . . . .	81
Figura 66 – Ideia geométrica da definição de dimensão de Hausdorff. Fonte: (3) . . . . .	86
Figura 67 – Da esquerda para a direita, conjuntos $E_0, E_1, E_2$ e $E_3$ . Fonte: (33) . . . . .	87
Figura 68 – Maneiras diferentes de definir as caixas. Fonte: (3) . . . . .	91
Figura 69 – Pôster de Geometria Fractal no V EMPA. Fonte: autoria própria. . . . .	96

Figura 70 – Integrantes do grupo de pesquisa durante o minicurso da XIV SEMAT. Fonte: autoria própria. . . . .	97
Figura 71 – Pôster apresentado no XXX CIC UFRPE. Fonte: autoria própria. . . . .	98
Figura 72 – Pôster apresentado no XXXI CIC UFRPE. Fonte: autoria própria. . . . .	98
Figura 73 – Capa prevista do artigo para a RPM. Fonte: (13) . . . . .	99
Figura 74 – Padrão em “M” do ativo da Brasil Bolsa Balcão (B3SA3). Fonte: Google.	102
Figura 75 – Esquema da transposição do Rio São Francisco. Fonte: (11) . . . . .	103
Figura 76 – Conjuntos de Julia preenchidos para diferentes valores de $c$ e a posição de $c$ em relação ao conjunto de Mandelbrot. Fonte: (2). . . . .	105



# Sumário

	Introdução . . . . .	17
1	<b>INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL . . . . .</b>	<b>26</b>
1.1	<b>Classificação dos Fractais e Fractais Clássicos . . . . .</b>	<b>26</b>
1.1.1	<b>Fractais Autossimilares . . . . .</b>	<b>26</b>
1.1.1.1	<b>Triângulo de Sierpinski . . . . .</b>	<b>26</b>
1.1.1.2	<b>Tapete de Sierpinski . . . . .</b>	<b>27</b>
1.1.1.3	<b>Pirâmide de Sierpinski . . . . .</b>	<b>27</b>
1.1.1.4	<b>Esponja de Menger . . . . .</b>	<b>28</b>
1.1.1.5	<b>Floco de neve de Koch . . . . .</b>	<b>29</b>
1.1.1.6	<b>Curva de Hilbert . . . . .</b>	<b>29</b>
1.1.1.7	<b>Curva de Peano . . . . .</b>	<b>30</b>
1.1.1.8	<b>Fractais do tipo Dürer . . . . .</b>	<b>31</b>
1.1.2	<b>Fractais Quase Autossimilares . . . . .</b>	<b>32</b>
1.1.3	<b>Fractais Naturais ou com Autossimilaridade Estatística . . . . .</b>	<b>33</b>
1.2	<b>Área, Perímetro, Volume e Dimensão de fractais autossimilares</b>	<b>34</b>
1.2.1	<b>Triângulo de Sierpinski . . . . .</b>	<b>36</b>
1.2.2	<b>Tapete de Sierpinski . . . . .</b>	<b>39</b>
1.2.3	<b>Floco de Neve de Koch . . . . .</b>	<b>40</b>
1.2.4	<b>Esponja de Menger . . . . .</b>	<b>42</b>
2	<b>CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM GEOGEBRA . . . . .</b>	<b>45</b>
2.1	<b>Transformações Geométricas . . . . .</b>	<b>46</b>
2.1.1	<b>O Conjunto de Cantor . . . . .</b>	<b>49</b>
2.1.2	<b>A Curva de Koch . . . . .</b>	<b>52</b>
2.2	<b>Utilizando o GeoGebra . . . . .</b>	<b>53</b>
2.2.1	<b>Árvores Bifurcadas . . . . .</b>	<b>54</b>
2.2.2	<b>O Triângulo de Sierpinski . . . . .</b>	<b>64</b>

2.2.3	Curva de Koch	71
2.2.4	Floco de Neve	73
2.2.5	O Tapete de Sierpinski	73
2.2.6	O Círculo de Sierpinski	74
2.2.7	A pirâmide de Sierpinski	75
2.2.8	Esponja de Menger	76
2.2.9	Curva de Peano	78
2.2.10	Curva de Hilbert	79
3	ESTUDOS SOBRE DIMENSÃO FRACTAL	82
3.1	Dimensão de Hausdorff	84
3.2	Dimensão de <i>Box-Counting</i>	89
4	COMENTÁRIOS ADICIONAIS E ESTUDOS FUTUROS	95
4.1	Trabalhos Desenvolvidos	95
4.1.1	Pôster no V EMPA	95
4.1.2	Minicurso XIV SEMAT UFRPE	96
4.1.3	Minicurso IV EEM UFRPE	97
4.1.4	Pôsteres XXX CIC e XXXI CIC UFRPE	97
4.1.5	Artigo de Divulgação para a Revista do Professor de Matemática	98
4.2	Trabalhos Futuros	99
4.2.1	Estatística - dois modos de obter o coeficiente de Hurst	100
4.2.2	Análise Grafista de Ações da Bolsa de Valores	101
4.2.3	Transposição do Rio São Francisco	103
4.2.4	Conjuntos de Julia e Mandelbrot no GeoGebra	104
	REFERÊNCIAS	107

# Introdução

## Elementos de destaque da Teoria dos Fractais

A geometria fractal é relativamente nova, se compararmos com as grandes áreas da Matemática, no entanto vem ganhando espaço rapidamente devido à sua aplicabilidade nas mais diversas áreas do conhecimento. Existem aplicações em estudo de solos, na medicina, no design gráfico e em vários outros cenários. Aqui cabe um exemplo especial, que é o da estatística, em conjunto com a economia. Este exemplo recebeu destaque pois faz parte dos planos de nossa pesquisa. Falaremos com mais detalhes no capítulo de comentários adicionais e trabalhos futuros ao final do trabalho. Continuando, a Geometria Fractal vem crescendo bastante por poder ser utilizado para entender ou descrever fenômenos que não se comportam de forma regular, “perfeita”, mas que ainda assim possuem um determinado padrão. Acontece que grande parte dos fenômenos naturais não são “bem comportados”, portanto a Geometria Fractal é uma boa ferramenta para descrevê-los, estudá-los e interpretá-los, por exemplo, por meio da ferramenta que conhecemos por dimensão fractal.

O termo fractal vem do latim *fractus*, que significa “quebrar”, e foi criado em 1975 pelo Matemático francês Benoit B. Mandelbrot.



Figura 1 – Benoit Mandelbrot. Fonte: Wikipedia.

Mandelbrot sempre se interessou pelos padrões encontrados na natureza, mas foi depois que entrou para a *International Business Machines Corporation (IBM)* e passou a ter acesso livre aos computadores de lá que pôde criar e exibir figuras geométricas fractais digitalmente. Em suas palavras:

Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvore não são suaves, nem os raios viajam em uma linha reta. (MANDELBROT, 1982, p.01)

No entanto, antes de Mandelbrot, outros pesquisadores já haviam se deparado com estruturas fractais, muito antes desse termo existir, como é o caso do matemático sueco Niels Fabian Helge Von Koch, que no ano de 1906 publicou um trabalho de nome *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane* ou “Um método geométrico elementar para o estudo de certas questões da teoria das curvas planas”, no qual dava uma curva alternativa à famosa função de Weierstrass, que é definida através de uma série de Fourier e é contínua em toda a reta real, porém não é diferenciável em ponto algum. Koch alegou que essa função não o satisfazia geometricamente, por não poder realmente ver que nenhum de seus pontos era “tangenciável”, e então apresentou pela primeira vez a famosa curva de Koch.

Até o momento em que Weierstrass inventou uma função contínua que não tinha uma derivada determinada para nenhum valor da variável, era uma opinião amplamente aceita no mundo científico que toda curva contínua tem uma tangente determinada (pelo menos um, exceto alguns pontos singulares) ; e sabemos que, de tempos em tempos, vários geômetras eminentes têm procurado consolidar essa opinião, fundada sem dúvida na representação gráfica das curvas, pelo raciocínio lógico. Embora o exemplo devido a Weierstrass tenha corrigido para sempre esse erro, este exemplo não satisfaz a mente do ponto de vista geométrico, porque a função em questão é definida por uma expressão analítica que esconde a natureza geométrica da curva correspondente, de modo que nós não vemos, deste ponto de vista, porque a curva não possui tangente; pelo contrário, parece estar em contradição com a realidade do fato, estabelecida pelo Weierstrass de forma puramente analítica. (KOCH, 1906, p.01)



Figura 2 – Niels Von Koch. Fonte: Wikipedia.

Outro caso famoso é a curva de Peano, primeira curva de preenchimento de espaço, descoberta pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1890. Trata-se de uma função sobrejetiva e contínua que parte do intervalo unitário e chega no quadrado unitário.



Figura 3 – Giuseppe Peano. Fonte: Wikipedia

Há diversos outros protagonistas que contribuíram para o crescimento e popularização na área de fractais com grandes exemplos de tais objetos como os matemáticos Waclaw Sierpinski, Georg Cantor, David Hilbert, dentre tantos outros.

Algumas características dos objetos fractais são: a *autossimilaridade*, que é a semelhança que uma parte tem com o todo (pode ser *exata*, *aproximada* ou *estatística*, mas em qualquer desses casos mantém uma semelhança independente da escala que observamos o objeto); a *complexidade infinita*, que se traduz em nunca termos uma imagem finalizada,

qualquer que seja a ampliação do objeto fractal; a *irregularidade*, no sentido de rugosidade (não suavidade) ou fragmentação e, por fim, a *dimensão não inteira*, que quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado.

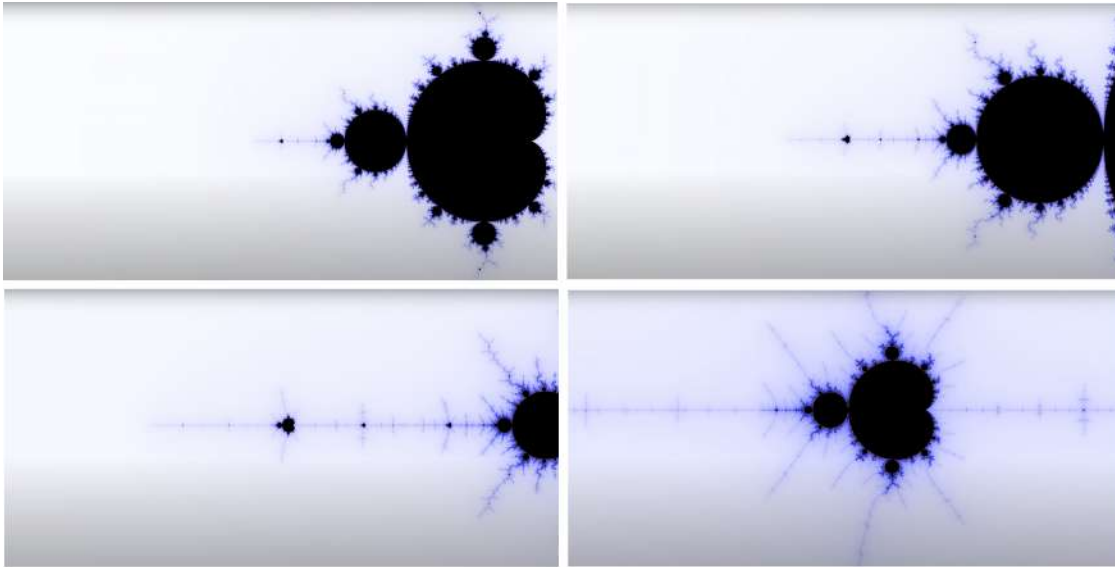


Figura 4 – Zoom no fractal de Julia e Mandelbrot. Fonte: (7)

Como dito acima, uma característica que vários objetos fractais possuem é possuir dimensão não inteira, como veremos mais à frente. Por enquanto, você pode entender dimensão como a noção canônica, na qual um ponto, uma linha, um plano e o espaço possuem dimensão respectivamente iguais a zero, um, dois e três. É preciso entender que essas classificações surgiram em momentos contemporâneos ou mesmo posteriores aos dos objetos fractais e inicialmente não foram bem aceitas pelos matemáticos da época que julgaram os fractais como objetos sem importância.

Tendo em vista que estes objetos não se comportam como os objetos da Geometria Euclidiana, em um primeiro momento percorreremos algumas curiosidades sobre as medidas de área e perímetro de alguns fractais. Mais ainda, decidimos aprofundar o nosso conhecimento tratando o conceito de dimensão fractal. Por possuírem complexidade infinita, os fractais tendem a ser objetos que não são suaves, mais precisamente eles apresentam certo grau de irregularidade, o que entenderemos por *rugosidade*. A dimensão fractal sob um certo sentido nos informa o quão rugoso é um objeto fractal. Estudamos duas maneiras de calcular a dimensão fractal: o método de Hausdorff-Besicovitch e o método

de *Box-Counting*. O primeiro método serve para fractais que possuem autossimilaridade exata, pois sua fórmula é desenvolvida a partir de divisões em partes iguais:

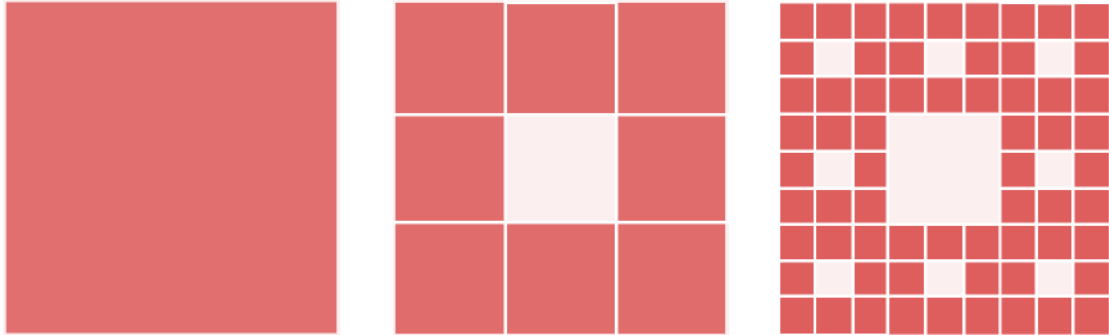


Figura 5 – Divisão das primeiras iterações do tapete de Sierpinski em partes iguais. Fonte: (26)

E o valor da dimensão pode ser feito através da relação  $D = \frac{\log n}{\log r}$ , em que  $D$  é a dimensão,  $n$  o número de partes resultante da divisão e  $r$  é o fator de redução. Por exemplo, o cálculo da dimensão fractal do triângulo de Sierpinski e do conjunto de Cantor tem como valor, respectivamente,  $D = \log_2 3$  e  $D = \log_3 2$ .

Já o método de *Box-Counting* que se traduz como “contagem de caixas”, pode ser utilizado de maneira mais geral a determinar a dimensão fractal quando não temos autossimilaridade exata. Consiste basicamente em envolver a figura fractal com cubos e contar o número de cubos que possuem interseção com a figura, após isso, refina-se o processo. Mais precisamente, iniciamos com um cubo que cubra totalmente o objeto em questão, logo este cubo contém uma representação do mesmo. A cada etapa particionamos os cubos da etapa anterior e contamos a quantidade de subcubos que contém alguma parte do objeto.

Repete-se esse processo e calcula-se a relação  $d_r = \frac{\log n}{\log r}$ , na qual  $r$  representa o fator de redução (com relação à escala da malha) e  $n$  a quantidade de cubos necessários para cobrir o fractal, assim,  $d_r$  tende à estabilizar em torno de um valor, que será a dimensão fractal  $D$ . Uma observação importante aqui é que os  $r$  em  $D$  e em  $d_r$  representam quantidades distintas, no primeiro é o fator de redução do objeto fractal e no segundo caso é o fato de redução da malha.

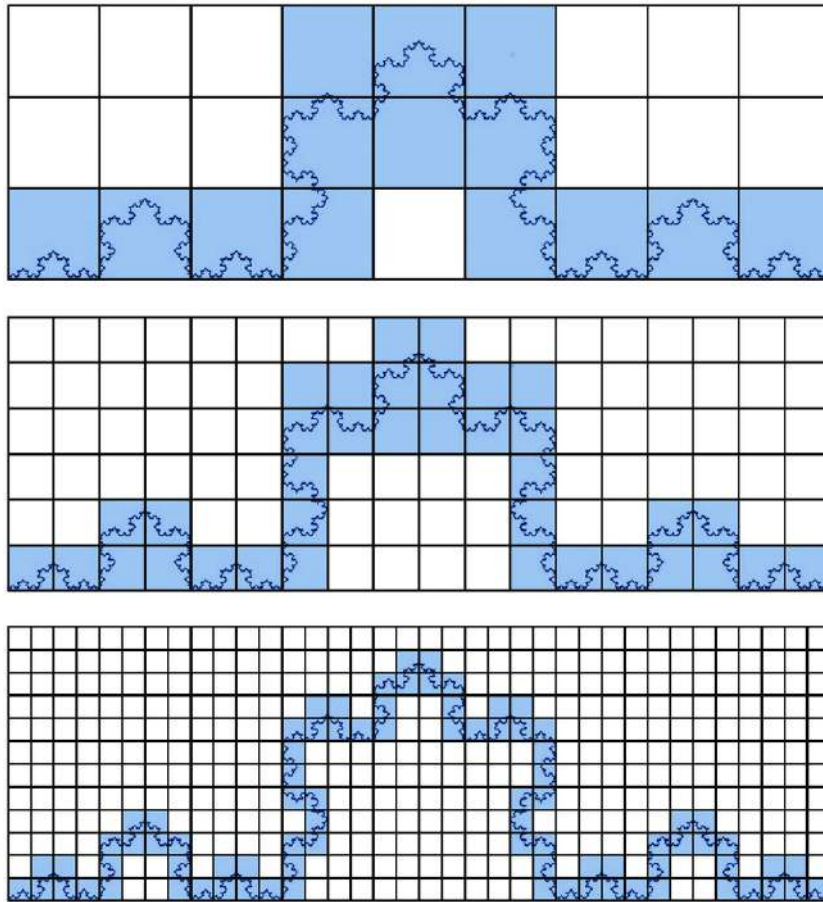


Figura 6 – Contagem de caixas sobre a curva de Koch para três fatores de redução diferentes. Fonte: (25)

Os tópicos apresentados acima serão pontos de discussão deste trabalho.

## Metodologia

Esta monografia é fruto de um trabalho em parceria conjunta com os docentes do Departamento de Matemática da UFRPE Maria Ângela Caldas Didier e Thiago Yukio Tanaka, e teve grande contribuição do discente do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE Lucas Rodrigues Wanderley. Há também contribuições da pesquisadora Laura Alves Pacífico da Silva e do docente da UFRPE João Antônio Miranda Gondim.

Começamos, os dois discentes, sob a orientação do professor Thiago Tanaka, a desenvolver estudos sobre fractais com os fractais clássicos, suas definições, construções, propriedades e aplicações. Inicialmente direcionamos nossa atenção para as propriedades envolvendo as medidas de área e perímetro de objetos fractais, pois estes podem ser



aplicados no Ensino Básico a partir do momento em que estuda-se o assunto das progressões geométricas. Além disso, vimos que este tema traz a primeira grande diferença entre objetos da Geometria Euclidiana e Geometria Fractal com a aparição curiosa de objetos cuja medida de perímetro é infinita e área é nula. Estes estudos resultaram em um pôster que foi apresentado no V Encontro de Matemática Pura e Aplicada da UEPB em junho de 2019.

À esta altura, a docente Maria Ângela Caldas Didier já havia se juntado ao grupo, com a intenção de desenvolver um projeto de iniciação científica pela UFRPE. Desde então foram realizadas duas iniciações científicas acerca do tema dos fractais. O foco da nossa primeira iniciação científica foi compreender as características de área, perímetro e dimensão (para fractais autossimilares), transformações geométricas e a construção de fractais através do *software* livre GeoGebra.

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica que pode ser acessado através de aplicativos para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux, ou simplesmente através do navegador. Possui inúmeras funcionalidades referentes à socialização de materiais, como uma rede social, além de possibilitar a criação de salas de aula, onde podemos postar atividades e supervisionar as respostas dos alunos, como um ambiente virtual de aprendizagem.

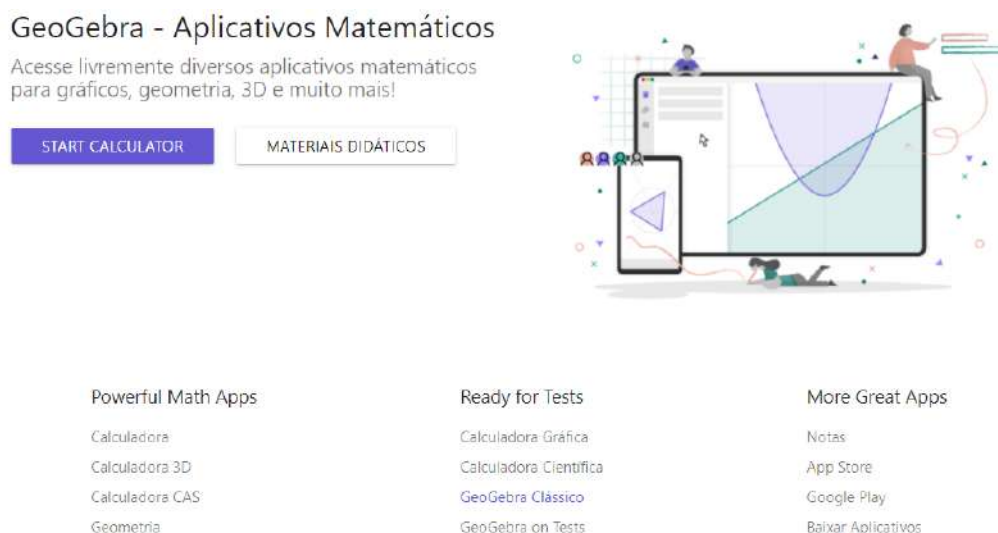


Figura 7 – Homepage do GeoGebra. Fonte: (24)

Assim, parte do estudo da primeira IC focou em aprender a manipular o GeoGebra, explorando todas as suas ferramentas com a possibilidade de usar planilhas, listas e até criar novas ferramentas, diferentes daquelas que o programa já oferece. Apresentaremos a construção de uma nova ferramenta no detalhamento das árvores bifurcadas ou na curva de Koch. Parte desses estudos serão apresentados ao decorrer dos Capítulos 1 e 2 deste trabalho.

Já no segundo projeto de IC, nos concentramos em compreender de forma mais aprofundada o conceito de dimensão fractal, e isto exigiu certo conhecimento de topologia geral e espaços métricos, visto que alguns temas destes assuntos acabam aparecendo ao estudar com mais rigor as dimensões de Hausdorff-Besicovitch e *box-counting*. Parte destes estudos serão apresentados no capítulo 3.

Sendo assim, este trabalho de conclusão de curso é a compilação mais detalhada de grande parte dos estudos e trabalhos que foram organizados ao decorrer desse tempo. Cada um desses tópicos será devidamente apresentado segundo a divisão descrita abaixo.

## Divisão do trabalho

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: No capítulo 1 apresentaremos com a riqueza dos detalhes os conceitos básicos acerca da Teoria dos Fractais como suas definições, classificações e propriedades, os fractais clássicos e algumas curiosidades envolvendo as medidas de área, perímetro e dimensão destes objetos. O Capítulo 2 discorrerá sobre o uso do *software* livre de geometria dinâmica, o GeoGebra, tal como as definições e exemplos de transformações geométricas que o GeoGebra lança mão de forma automatizada, mas cujo entendimento implica na compreensão dos algoritmos que devem ser seguidos para a construção de fractais clássicos na plataforma. Adiante, no Capítulo 3, apresentamos um estudo mais aprofundado sobre dimensão fractal abordando os conceitos de dimensão de Hausdorff e dimensão de *Box-Counting*, conceitos que são pré-requisitos essenciais para a continuidade dos estudos e pesquisas na parte das aplicações. No Capítulo 4 apresentamos comentários adicionais relevantes acerca do trabalho e perspectivas de estudos futuros.

Finalmente este trabalho foi construído e organizado de modo que ele fosse au-

tocontido de grande parte da teoria necessária para um bom entendimento do mesmo. Os requisitos consistem em conhecimentos básicos sobre Geometria Euclidiana, Cálculo Infinitesimal e alguns conhecimentos já vistos no Ensino Básico como Funções, Matrizes e Progressão Geométrica. Dessa forma, este trabalho é totalmente acessível para alunos de graduação dos cursos de Matemática de períodos iniciais e pode ser uma boa fonte de pesquisa para que discentes e docentes que queiram conhecer sobre o assunto da Geometria Fractal. Além disso, por trabalharmos com a construção de fractais com o GeoGebra, fornecendo todos os algoritmos de construção de grande parte dos objetos fractais apresentados, acreditamos que isso pode auxiliar os futuros professores em suas práticas docentes, trazendo elementos computacionais de geometria dinâmica de modo a auxiliar a sua prática. Acreditamos também que este material pode ser uma boa referência para um primeiro contato com o tema de dimensão fractal.

# 1 Introdução à Geometria Fractal

Neste capítulo trabalharemos todos os conteúdos básicos da Teoria dos Fractais desde elementos mais básicos como sua definição e suas classificações, bem como suas propriedades envolvendo cálculo de área, perímetro e dimensão. Além disso, mostraremos como construir muitos destes fractais utilizando o *software* GeoGebra.

## 1.1 Classificação dos Fractais e Fractais Clássicos

Iniciando o nosso estudo, apresentaremos algumas classificações de fractais que surgiram com o intuito de agrupar em classes semelhantes estes objetos. Ainda mais, apresentaremos grande parte dos fractais mais clássicos durante essa classificação. Basicamente os fractais podem ser classificados de três maneiras: autossimilares (ou com autossimilaridade exata), quase autossimilares e com autossimilaridade estatística.

### 1.1.1 Fractais Autossimilares

Por definição, os fractais autossimilares são aqueles cujas partes são cópias exatas da figura como um todo, porém em menor escala, e são definidos por sistemas de funções iteradas, os chamados fractais determinísticos ou geométricos. São caracterizados por possuírem uma regra fixa de substituição geométrica. Como exemplos temos os fractais que carregam o nome de Sierpinski, assim como os de Koch, a esponja de Menger, as curvas que preenchem o plano e os fractais do tipo Dürer.

#### 1.1.1.1 Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski, cujo nome se deve ao matemático polonês que o descreveu, Waclaw Sierpinski, é um fractal cujo processo de formação pode ser explicado da seguinte forma: inicialmente temos um triângulo (geralmente equilátero), e a partir dos pontos médios dos seus lados, construímos quatro triângulos menores, retirando o triângulo central

da figura. Esse processo deve ser repetido indefinidamente para cada triângulo resultante de cada iteração. Observe novamente a imagem:



Figura 8 – Triângulo de Sierpinski construído até a 4ª iteração. Fonte: Autoria própria.

### 1.1.1.2 Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski é um fractal cujo processo de formação pode ser explicado da seguinte forma: inicialmente temos um quadrado, e após dividirmos seus lados em três, construímos oito quadrados menores, retirando o quadrado central da figura. Esse processo deve ser repetido indefinidamente para cada quadrado resultante de cada iteração. Observe novamente a imagem:

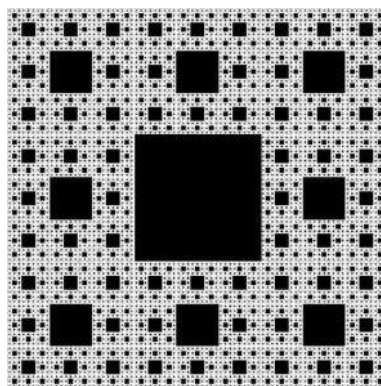


Figura 9 – Tapete de Sierpinski. Fonte: (23).

### 1.1.1.3 Pirâmide de Sierpinski

A pirâmide de Sierpinski possui duas versões bem difundidas. Uma delas tem formato inicial de tetraedro, com base triangular e uma segunda versão recorre sobre um pirâmide de base quadrangular. Para obter o fractal, a partir da pirâmide inicial (qualquer que seja a base, triangular ou quadrangular), marcamos os pontos médios de cada aresta do polígono e retiramos da parte interna da pirâmide o sólido cujos vértices são esses pontos médios. De forma recorrente, fazemos isso em cada uma das pirâmides menores

que surgem a cada nova etapa. A pirâmide de Sierpinski consiste no objeto espacial que é obtido quando esse processo ocorre indefinidamente.

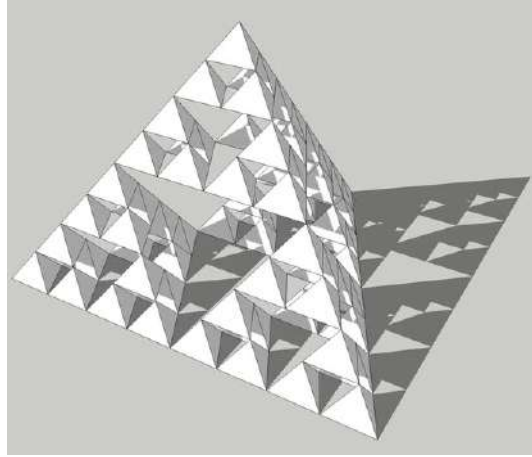


Figura 10 – Pirâmide de Sierpinski de base triangular. Fonte: (22)

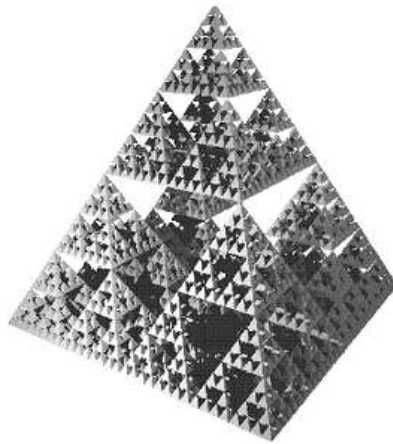


Figura 11 – Pirâmide de Sierpinski de base quadrangular. Fonte: (21).

#### 1.1.1.4 Esponja de Menger

O processo de formação da esponja de Menger parte de um cubo de lado  $l$ . Dividimos cada uma de suas arestas em três partes iguais e a partir dessas marcações formamos 27 cubos de lado  $\frac{l}{3}$ . Por fim retiramos desse sólido todos os cubos menores que não tem interseções com a arestas do cubo da iteração anterior. Este processo é repetido para cada cubo resultante de cada iteração.

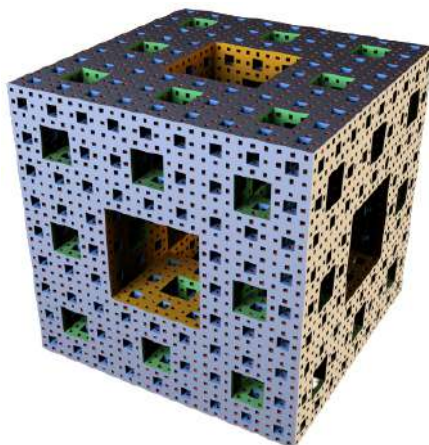


Figura 12 – Esponja de Menger. Fonte: (20)

#### 1.1.1.5 Floco de neve de Koch

Partimos de um triângulo equilátero, e dividimos cada um de seus lados em três partes iguais. Após isto construímos, no terço médio de cada lado, um novo triângulo equilátero. O último passo é apagar o terço médio de cada lado do triângulo original. Isso deve ser feito indefinidamente em cada segmento de cada nova iteração.

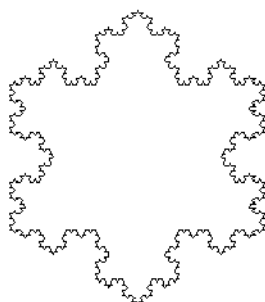


Figura 13 – Curva de Koch. Fonte: (19).

#### 1.1.1.6 Curva de Hilbert

A curva de Hilbert é um fractal extremamente interessante, pois é um exemplo de curva que preenche o plano. A construção parte de um quadrado. Em seguida construímos a figura geradora, que consiste em dividi-lo em quatro quadrados iguais, unindo os pontos centrais de cada um desses. Neste primeiro estágio da construção a curva é formada, não pelos quadrados, mas sim pelos segmentos de reta formados pela ligação desses pontos centrais. O segundo estágio de construção da curva consiste em subdividir cada um dos

quatro quadrados menores do estágio anterior em outros quatro quadrados congruentes e unir os pontos centrais desses novos dezesseis quadrados. Para o terceiro estágio, novamente, subdividem-se cada um dos dezesseis quadrados da figura anterior em quatro quadrados congruentes e unindo os pontos centrais desses sessenta e quatro quadrados, é formada a terceira curva. Ao realizar esse processo recursivo infinitamente, teremos a Curva de Hilbert.

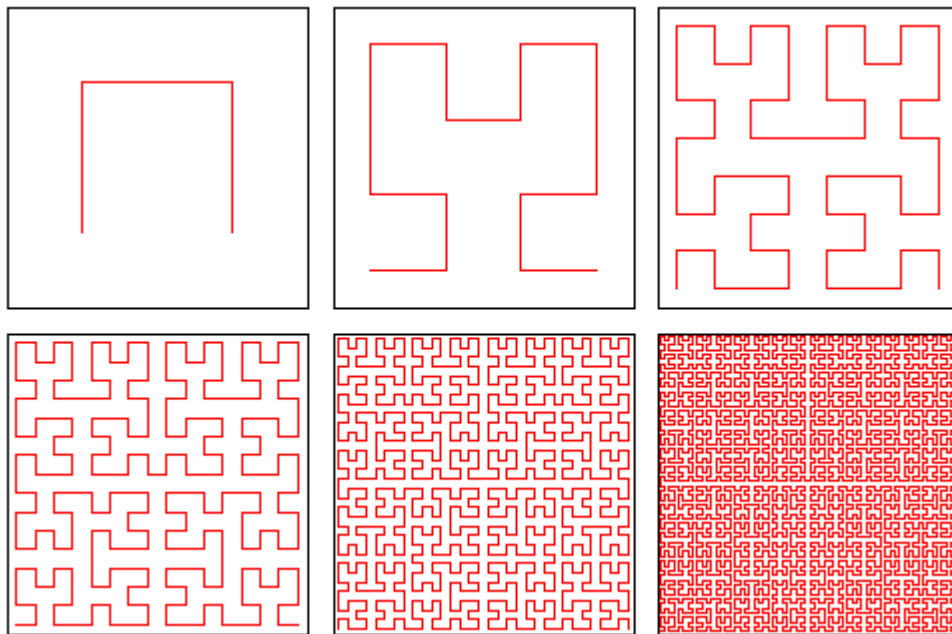


Figura 14 – Curva de Hilbert com 5 iterações. Fonte: (18).

#### 1.1.1.7 Curva de Peano

Assim como a curva de Hilbert, a curva de Peano também preenche um quadrado, porém seu processo de formação é diferente, partindo de um segmento, dividindo-o em 3 partes iguais e a partir do terço médio construímos dois quadrados não preenchidos. Esse procedimento deve se repetir para cada segmento resultante de cada iteração.



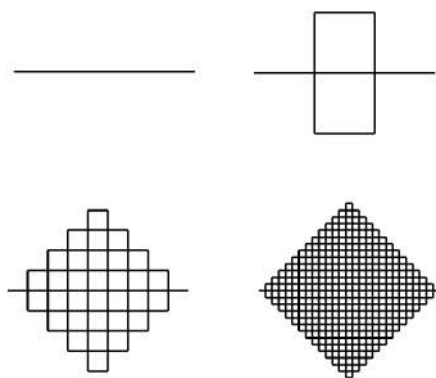


Figura 15 – Curva de Hilbert com 3 iterações. Fonte: (17).

### 1.1.1.8 Fractais do tipo Dürer

Os fractais desse tipo partem de um polígono regular, e em cada iteração cada vértice é substituído pelo mesmo polígono regular, em menor escala, de modo que um vértice do novo polígono coincida com o vértice do polígono que o originou e que ao menos outros dois vértices coincidam com os vértices de dois novos polígonos localizados nos vértices vizinhos. Para maiores informações sobre os fractais de Dürer, consulte (8).

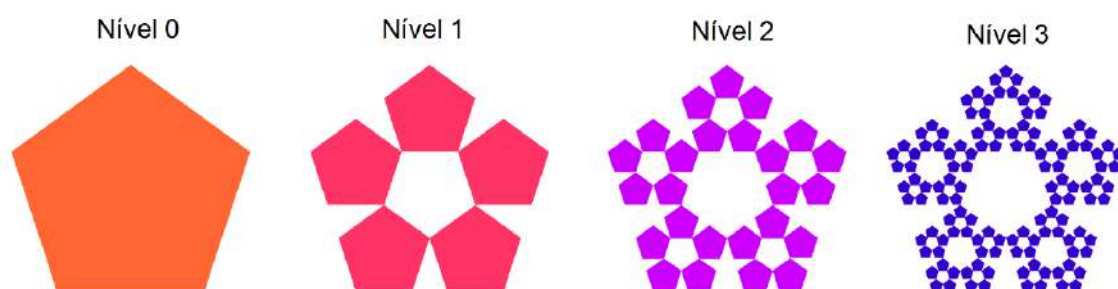


Figura 16 – Fractal tipo Dürer - Pentágono com 3 iterações. Fonte: (8).

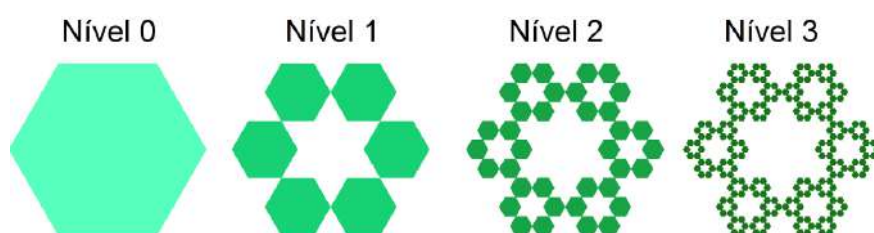


Figura 17 – Fractal tipo Dürer - Hexágono com 3 iterações. Fonte: (8).

### 1.1.2 Fractais Quase Autossimilares

Os fractais que pertencem a esta categoria são caracterizados por possuírem uma “quase autossimilaridade”, isto é, possuem partes semelhantes à figura original, com pequenas distorções, e por isso não são exatamente autossimilares. Como exemplo temos o fractal símbolo dessa área, que recebeu o nome do matemático que a popularizou - o Conjunto de Mandelbrot. Construído no plano complexo, é o resultado de iterações feitas indefinidamente em funções  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas por  $f_c(z) = z^2 + c$ , obedecendo alguns critérios sobre  $z$  e  $c$ . As noções importantes por trás destes objetos pode ser explicado por meio da Topologia.

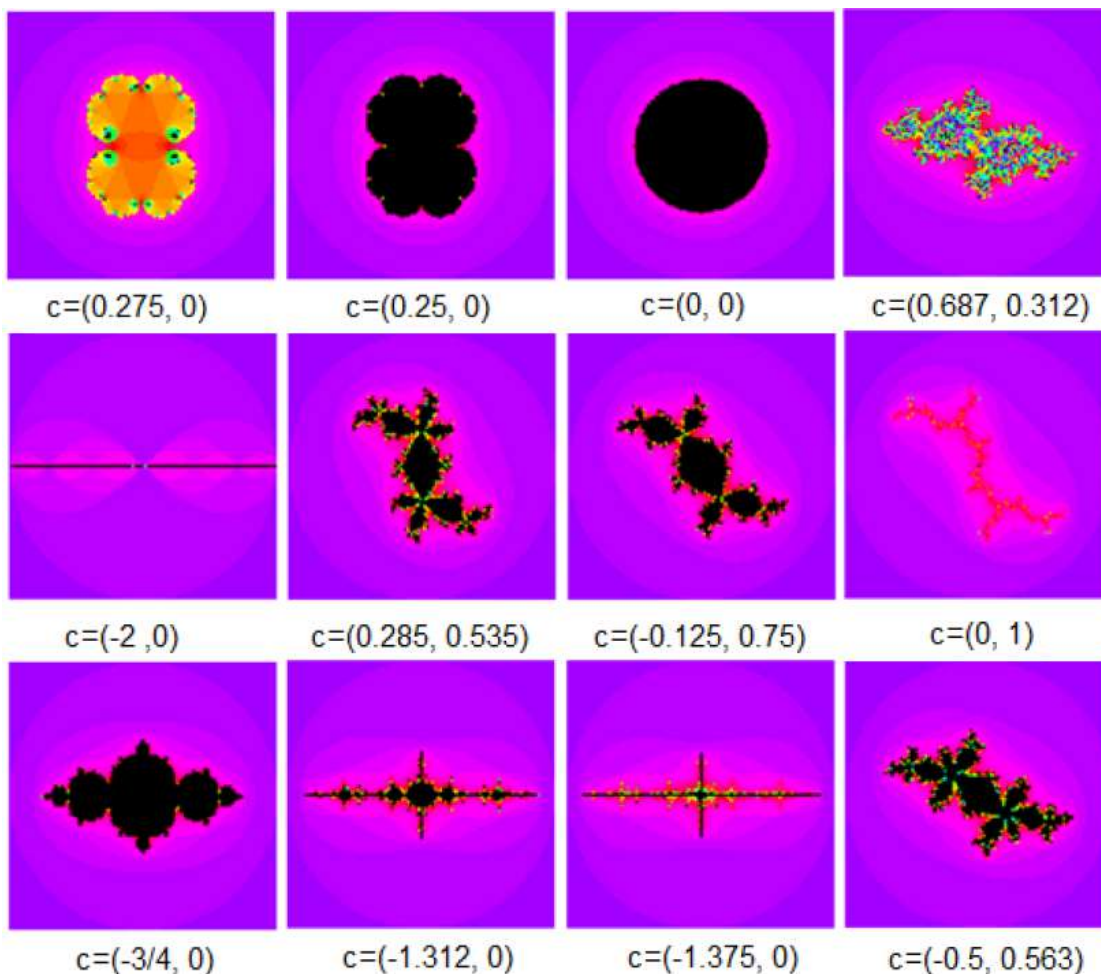


Figura 18 – Conjuntos de Julia. Fonte:(8)

### 1.1.3 Fractais Naturais ou com Autossimilaridade Estatística

Completando a classificação das categorias, temos aquela na qual se encontram os chamados fractais naturais, que são gerados por processos estocásticos, ou seja, diferente dos anteriores, no seu padrão de formação temos uma aleatoriedade, pois cada nova etapa acontece de maneira imprevisível, desse modo, os fractais dessa categoria são caracterizados por possuírem autossimilaridade estatística.

A autossimilaridade deste grupo está nas medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Como exemplo, temos os fractais encontrados na natureza e os fractais associados a simulações de imagens na computação gráfica. A figura 19 traz um exemplo de fractais com autossimilaridade estatística: o jogo No Man's Sky, jogo de exploração espacial cujos cenários foram construídos através de decisões aleatórias em cascata, que definiam como seria a vegetação de determinada região, quais criaturas fariam parte dela, qual o plano de fundo, entre outras coisas, o que caracteriza uma estrutura fractal.



Figura 19 – Capturas de tela do jogo No Man's Sky. Fonte: (16)



Figura 20 – Brócolis romanesco e samambaia. Fonte: (15)

## 1.2 Área, Perímetro, Volume e Dimensão de fractais autossimilares

Nesta seção nos dedicaremos à compreensão de algumas características físicas dos fractais autossimilares, como suas medidas de área, perímetro, volume e dimensão (por hora o cálculo da dimensão será feito através do método de Hausdorff apresentado na introdução deste trabalho).

Reforçamos que os conteúdos que utilizaremos aqui, que são de medidas de área e perímetro de figuras planas, área e volume de sólidos geométricos e também das progressões geométricas são desenvolvidos ainda no Ensino Básico. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no caso de sequências e progressões geométricas, podemos observar que o assunto é visto pela primeira vez no 4º ano e as habilidades envolvidas são as

- (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural;

Esses assuntos voltam a ser abordados no 7º ano do Ensino Fundamental, através da habilidade

- (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas,

Se consolidando na etapa do Ensino Médio, através da habilidade

- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Com relação aos cálculos de área e volume de sólidos geométricos, tais assuntos são vistos pela primeira vez no 6º ano do Ensino Fundamental e continuam sendo abordados no 7º e no 8º ano, por meio das habilidades

- (EF06MA24) (área e perímetro) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento;
- (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros;
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas e
- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos,

voltando a ser visto no Ensino Médio com as habilidades

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais e
- (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Se tratando de volume, é visto pela primeira vez no 5º ano, com a habilidade

- (EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos;

reaparecendo no 7º ano com a habilidade

- (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico);

e no Ensino Médio com a habilidade

- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras;

além de outras já citadas.

Dessa maneira quase todas as explicações que serão aqui expostas envolvendo todo o procedimento para indagar sobre as medidas de área e perímetro podem ser reformuladas e aplicadas nas práticas docentes dos futuros professores, oriundos do curso de Licenciatura em Matemática, de modo a enriquecer suas práticas.

A seguir serão apresentados os estudos das medidas de área e perímetro (e volume, quando necessário) de alguns fractais clássicos. Doravante utilizaremos  $uc$ ,  $ua$  e  $uv$  como as unidades de medida de comprimento, área e volume respectivamente.

### 1.2.1 Triângulo de Sierpinski

Agora que sabemos como esse fractal é formado, podemos estudar suas medidas de área e perímetro. A ideia aqui é tentar encontrar algum padrão nessas medidas a cada iteração e ver como se comportam à medida que o número de iterações aumenta.

#### Perímetro

Iniciemos estudando o seu perímetro e consideremos que o lado do triângulo tem medida  $l$  *uc*. Assim, inicialmente o perímetro da figura é  $P_0 = 3l$  *uc*. Após a primeira iteração, temos três triângulos menores, todos com a mesma medida de lado:  $\frac{l}{2}$  *uc*. Portanto o perímetro desse fractal na primeira iteração é  $P_1 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3l$  *uc*. Na segunda iteração, seguindo o algoritmo da formação do fractal, para cada triângulo resultante da iteração anterior surgem três novos triângulos, ou seja, temos 9 triângulos cujos lados medem  $\frac{l}{2^2}$  *uc*. Portanto  $P_2 = \frac{3^2}{2^2} \cdot 3l = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 3l$  *uc*. Por recorrência, podemos afirmar que o perímetro da  $n$ -ésima iteração do fractal,  $n \in \mathbb{N}$ , é  $P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3l$  *uc*, e quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $P_n \rightarrow \infty$ , isto é, o perímetro do Triângulo de Sierpinski é infinito.

Formalmente falando, o procedimento que garante a validade da generalização feita acima para  $P_n$  é o princípio de indução matemática. Para mostrar que de fato  $P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3l$  *uc*, devemos uma indução sobre  $n$ . Observe:

- Para  $n = 1$ : como vimos, na primeira iteração temos três triângulos menores, todos com a mesma medida de lado:  $\frac{l}{2}$  *uc*. Portanto o perímetro desse fractal na primeira iteração é  $P_1 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3l$  *uc*.
- Suponha que a afirmação é válida para  $n - 1$ , ou seja,  $P_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot 3l$  *uc*.
- Na  $n$ -ésima iteração surgem 3 triângulos para cada triângulo restante da iteração anterior, cada um com medida de lado igual a  $\frac{1}{2}$  da medida dos triângulos anteriores, ou seja, temos agora  $3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$  triângulos de lado medindo  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} l = \left(\frac{1}{2}\right)^n l$  *uc*. Sendo assim,  $P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3l$  *uc*.

Ao longo deste trabalho, aparecerão várias outras situações nas quais o princípio de indução pode ser utilizado para garantir a veracidade das afirmações, analogamente ao que foi feito acima. O leitor que possuir interesse pode realizar tais processos.

## Área

Agora, vamos ver o que acontece com a área deste fractal. Como já entendemos seu processo de formação, serei um pouco mais direto:

- Inicialmente: 1 triângulo de lado  $l$  *uc*  $\Rightarrow A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$  *ua*

- 1ª iteração: 3 triângulos de lado  $\frac{l}{2}$   $uc \Rightarrow A_1 = 3 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} ua = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} ua$
- 2ª iteração: 9 triângulos de lado  $\frac{l}{2^2}$   $uc \Rightarrow A_2 = 3^2 \cdot \left(\frac{l}{2^2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} ua.$

Novamente por recorrência, podemos afirmar que  $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} ua$ . Dessa forma, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $A_n \rightarrow 0$ . Isto significa que, apesar de possuir perímetro infinito, o Triângulo de Sierpinski possui área 0.

### Dimensão

Por último, vamos avaliar sua dimensão fractal, seguindo o mesmo raciocínio que usamos para estudar a área e o perímetro:

- inicialmente temos um triângulo de lado  $l$ , e seguindo o processo de iteração desse fractal:
- 1ª iteração: temos 3 triângulos de lado  $\frac{l}{2}$ , então o fator de redução foi 2;
- 2ª iteração: são 9 triângulos de lado  $\frac{l}{2^2}$ , e o fator de redução em relação à figura inicial foi  $2^2$
- De maneira geral, na  $n$ -ésima iteração temos que o número de triângulos é  $3^n$  e o fator de redução é  $2^n$ , logo  $D = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \approx 1,58$ .

Perceba que por partirmos de uma figura plana, o triângulo inicial possui dimensão igual a 2. Porém a medida que retiramos partes deste triângulo com sua construção, e com o cálculo acima, podemos ver que retiramos desta figura praticamente toda a sua área, uma vez que área do Triângulo de Sierpinski tem medida nula, dessa forma, sob um certo sentido diminuiremos a dimensão. Como a figura ainda será plana e não se reduzirá a uma linha em etapa alguma, a dimensão também não pode ser 1. Dessa forma a dimensão de aproximadamente 1,58 nos dá a noção intuitiva que a figura final é algo cuja forma está entre uma linha e uma figura plana, sendo mais parecido com uma estrutura plana.



## 1.2.2 Tapete de Sierpinski

De maneira análoga à da discussão sobre área e perímetro do triângulo de Sierpinski, devemos tentar encontrar algum padrão nessas medidas a cada iteração e ver como se comportam à medida que o número de iterações aumenta.

### Perímetro

Iniciemos estudando o seu perímetro e consideremos que o lado do quadrado mede  $luc$ . Assim, inicialmente o perímetro da figura é  $P_0 = 4l uc$ . Após a primeira iteração, temos oito quadrados menores, todos com a mesma medida de lado:  $\frac{l}{3} uc$ . Então após a primeira iteração o perímetro desse fractal é  $8 \cdot \frac{4l}{3}$ . Ao realizar mais uma iteração, pode-se observar que o perímetro do tapete de Sierpinski é  $P_2 = 8 \cdot 8 \cdot \frac{4l}{3^2} = \frac{8^2}{3^2} \cdot 4l uc$ . Na terceira iteração, seguindo o algoritmo da formação do fractal, para cada quadrado resultante da iteração anterior surgem oito novos quadrado, ou seja, temos 512 quadrados cujos lados medem  $\frac{l}{3^3} uc$ . Portanto  $P_3 = \frac{8^3}{3^3} \cdot 4l = \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot 4l uc$ . Por recorrência, podemos afirmar que o perímetro da  $n$ -ésima iteração do fractal,  $n \in \mathbb{N}$ , é  $P_n = \left(\frac{8}{3}\right)^n \cdot 4luc$ , e quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $P_n \rightarrow \infty$ , isto é, o perímetro do tapete de Sierpinski é infinito.

### Área

Quanto à sua área, vamos fazer os cálculos mais rapidamente, como fizemos com o triângulo.

- Inicialmente: 1 quadrado de lado  $l uc \Rightarrow A_0 = l^2 ua$
- 1ª iteração: 8 quadrados de lado  $\frac{l}{3} uc \Rightarrow A_1 = 8 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \cdot l^2 ua$
- 2ª iteração: 64 quadrados de lado  $\frac{l}{3^2} uc \Rightarrow A_2 = 8^2 \cdot \left(\frac{l}{3^2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot l^2 ua$ .

Novamente por recorrência, podemos afirmar que  $A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n ua$ . Dessa forma, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $A_n \rightarrow 0$ . Isto significa que, apesar de possuir perímetro infinito, o tapete de Sierpinski também possui área 0.

### Dimensão

Quanto à sua dimensão, perceba que

- inicialmente temos um quadrado de lado  $l$ , e seguindo o processo de iteração desse fractal:
- 1ª iteração: temos 8 quadrados de lado  $\frac{l}{3}$ , então o fator de redução foi 3;
- 2ª iteração: são 8<sup>2</sup> quadrado de lado  $\frac{l}{3^2}$ , e o fator de redução em relação à figura inicial foi 3<sup>2</sup>
- De maneira geral, na  $n$ -ésima iteração temos que o número de quadrados é  $8^n$  e o fator de redução é  $3^n$ , logo  $D = \frac{\log 8}{\log 3} = \log_3 8 \approx 1,89$ .

Diferente do triângulo de Sierpinski que retiramos um quarto do triângulo central em cada etapa, no tapete retiramos em cada etapa um nono representando o quadrado central de cada novo quadrado. Dessa forma, intuitivamente o quadrado é mais preenchido do que o triângulo em cada etapa, isso é reforçado com o fato de sua dimensão ser aproximadamente 1,89. Ainda assim, a medida de área do Tapete de Sierpinski é zero.

Além dos fractais falados acima, existem outros com características não intuitivas, como é o caso do floco de neve de Koch, que também possui perímetro infinito, porém possui área finita (não nula), ou da esponja de Menger, que possui área infinita e medida de volume nula.

### 1.2.3 Floco de Neve de Koch

Agora que compreendemos como ocorre a formação deste fractal, vamos estudar suas medidas de perímetro e área em cada iteração e tentar encontrar um padrão para conjecturar como se comportam no infinito.

#### Perímetro

- Inicialmente, três segmentos de tamanho  $l \Rightarrow P_0 = 3l$  uc.
- 1ª iteração: doze segmentos de tamanho  $\frac{l}{3}$  uc  $\Rightarrow P_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{l}{3} = 3l \cdot \frac{4}{3}$  uc.

- 2ª iteração: quarenta e oito segmentos de tamanho  $\frac{l}{3^2}$   $uc \Rightarrow P_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{l}{3^2} = 3l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 uc$ .
- 3ª iteração: cento e noventa e dois segmentos de tamanho  $\frac{l}{3^3}$   $uc \Rightarrow P_3 = 3 \cdot 4^3 \cdot \frac{l}{3^3} = 3l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 uc$ .

Assim, é possível observar um padrão e conjecturar que  $P_n = 3 \cdot l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ , e quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $P_n \rightarrow \infty$ .

### Área

- Inicialmente, um triângulo de lado  $l \Rightarrow A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}ua$
- 1ª iteração: um triângulo de lado  $l$  e três triângulos de lado  $\frac{l}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{(\frac{l}{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12}ua$
- 2ª iteração: um triângulo de lado  $l$ , três triângulos de lado  $\frac{l}{3}$  e doze triângulos de lado  $\frac{l}{3^2} \Rightarrow A_2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} + 12 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9}ua$
- 3ª iteração: um triângulo de lado  $l$ , três triângulos de lado  $\frac{l}{3}$ , doze triângulos de lado  $\frac{l}{3^2}$  e quarenta e oito triângulos de lado  $\frac{l}{3^3} \Rightarrow A_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 ua$

Portanto, na  $n$ -ésima iteração a área deste fractal é  $A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

Assim, podemos escrever  $A_n$  como uma soma entre  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$  e os termos de uma  $PG$  com termo inicial  $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$  e razão  $\frac{4}{9}$ , cuja soma finita é

$$S_n = \frac{\sqrt{3}l^2}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)}$$

e fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}l^2}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{l^2 \cdot 3\sqrt{3}}{20}$$

Portanto,  $A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3l^2\sqrt{3}}{20} \approx 0,7 \cdot l^2 ua$ .

### Dimensão

Quanto à sua dimensão, note que, olhando para cada segmento que compõe o contorno do triângulo original, temos

- inicialmente temos um segmento de tamanho  $l$ , e seguindo o processo de iteração desse fractal:
- 1ª iteração: temos 4 segmentos de lado  $\frac{l}{3}$ , então o fator de redução foi 3;
- 2ª iteração: são  $4^2$  segmentos de lado  $\frac{l}{3^2}$ , e o fator de redução em relação à figura inicial foi  $3^2$
- De maneira geral, na  $n$ -ésima iteração temos que o número de segmentos é  $4^n$  e o fator de redução é  $3^n$ , logo  $D = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4 \approx 1,26$ .

Perceba que este fractal inicialmente tem dimensão 1, pois trata-se de um triângulo não preenchido, ou seja, das linhas que fazem o contorno de um triângulo, e à medida que sua construção se desenvolve, são acrescentados cada vez mais segmentos à figura, tornando-a “densa” e “rugosa”, com a formação de pequenas “pontas”, que é o que faz o perímetro ser infinito. Nesse sentido, é esperado que a dimensão seja maior do que 1. Como a figura é essencialmente uma “curva” limitando uma região, é esperado também que a dimensão não fosse nada próximo de 2, e comparando com o triângulo de Sierpinski, sua dimensão deveria ser menor do que 1,58, então seu valor de dimensão ser aproximadamente 1,26 faz sentido sob esse aspecto.

### 1.2.4 Esponja de Menger

Em nosso último exemplo, com o objetivo de fugir um pouco de figuras planas, ou seja, saindo do plano e partindo para o espaço tridimensional, analisaremos a área, volume e dimensão da Esponja de Menger.

Vamos ver o que acontece com suas medidas de área e volume à medida que o número de iterações aumenta.

#### Área

- Inicialmente, temos um cubo de lado  $l$   $uc \Rightarrow A_0 = 6l^2$   $ua$

- 1ª iteração: 20 cubos de lado  $\frac{l}{3}$  uc  $\Rightarrow A_1 = 6 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^2 = 6l^2 \cdot \frac{20}{9}$  ua
- 2ª iteração: 20<sup>2</sup> cubos de lado  $\frac{l}{3^2}$  uc  $\Rightarrow A_2 = 6 \cdot \left(\frac{l}{3^2}\right)^2 = 6l^2 \cdot \frac{20^2}{9^2}$  ua
- 3ª iteração: 20<sup>3</sup> cubos de lado  $\frac{l}{3^3}$  uc  $\Rightarrow A_3 = 6 \cdot \left(\frac{l}{3^3}\right)^2 = 6l^2 \cdot \frac{20^3}{9^3}$  ua

Portanto, é possível enxergar um padrão em suas medidas de área e conjecturar que na  $n$ -ésima iteração desse fractal, temos que  $A_n = 6l^2 \cdot \frac{20^n}{9^n}$  ua, e como trata-se de uma figura com complexidade infinita, devemos fazer  $n$  crescer indefinidamente. Quando isso acontece, é possível ver que  $A_n \rightarrow \infty$ .

### Volume

Quanto ao volume da esponja de Menger, o cálculo é semelhante:

- Inicialmente, um cubo de lado  $l$  uc  $\Rightarrow V_0 = l^3$  uv
- 1ª iteração: 20 cubos de lado  $\frac{l}{3}$  uc  $\Rightarrow V_1 = 20 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3 = 20 \cdot \frac{l^3}{3^3}$  uv
- 2ª iteração: 20<sup>2</sup> cubos de lado  $\frac{l}{3^2}$  uc  $\Rightarrow V_2 = 20^2 \cdot \left(\frac{l}{3^2}\right)^3 = 20^2 \cdot \frac{l^3}{3^6}$  uv
- 3ª iteração: 20<sup>3</sup> cubos de lado  $\frac{l}{3^3}$  uc  $\Rightarrow V_3 = 20^3 \cdot \left(\frac{l}{3^3}\right)^3 = 20^3 \cdot \frac{l^3}{3^9}$  uv

Assim, na  $n$ -ésima iteração da esponja de Menger, temos que seu volume é  $V_n = \frac{l^3}{3^{3n}}$  uv, e quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $V_n \rightarrow 0$ . Logo podemos concluir que o volume deste fractal é nulo.

### Dimensão

Finalmente, o cálculo de sua dimensão se dá da seguinte forma:

- inicialmente temos um cubo de aresta  $l$ , e seguindo o processo de iteração desse fractal:
- 1ª iteração: temos 20 cubos de lado  $\frac{l}{3}$ , então o fator de redução foi 3;
- 2ª iteração: são 20<sup>2</sup> cubos de lado  $\frac{l}{3^2}$ , e o fator de redução em relação à figura inicial foi 3<sup>2</sup>

- De maneira geral, na  $n$ -ésima iteração temos que o número de cubos é  $20^n$  e o fator de redução é  $3^n$ , logo  $D = \frac{\log 20}{\log 3} = \log_3 4 \approx 2,72$ .

Este fractal parte de um cubo maciço, que possui dimensão 3, por ser uma figura espacial. Porém, à medida que o fractal é formado, vai perdendo cada vez mais partes de sua estrutura, ficando cada vez mais vazada, o que faz com que sua dimensão seja menor do que 3, mas essas perdas ainda não são suficientes para torná-lo uma figura planar. Como esta figura é uma versão tridimensional do tapete de Sierpinski, ao fazermos uma regra de três simples para ter uma noção mínima de sua dimensão, vamos obter um valor aproximadamente: dimensão 2 está para 1,89 assim como dimensão 3 está para  $x$ , resolvendo essa equação, obtemos  $x = 2,835$ , um valor próximo ao que encontramos.

Um cálculo de área e volume interessante de ser feito é o da pirâmide de Sierpinski, que tem semelhanças com o triângulo de Sierpinski e à esponja de Menger. Convidamos o leitor a desenvolver estes cálculos e tentar inferir algo, assim como fizemos em cada um dos exemplos acima.

## 2 Construção de Fractais com GeoGebra

Neste capítulo, iniciaremos com a teoria básica das transformações geométricas com o intuito de aplicar esta teoria na construção de fractais utilizando o *software* do GeoGebra e em seguida apresentaremos em detalhes duas construções nessa plataforma, além dos algoritmos escritos pelo grupo de pesquisa para construir vários outros fractais.

Na introdução apresentamos a plataforma do GeoGebra, falando do que se trata e de como e para quê pode ser acessada. Com relação aos materiais que podemos elaborar, existe uma gama gigantesca de possibilidades: ferramentas referentes à geometria plana, espacial, analítica, e praticamente todos os conteúdos matemáticos do ensino básico, além de algumas referentes ao ensino superior. Existe também a opção de trabalhar com planilhas, caixas de texto e com uma ferramenta chamada controle deslizante, com a qual é possível dinamizar as construções e literalmente ver o que acontece com uma representação à medida que variamos certo parâmetro.

Ao longo dos anos estudando Geometria Fractal, o nosso grupo de pesquisa teve um artigo aceito para publicação na Revista do Professor de Matemática (RPM) (13) que trata de dois fractais em específico: O Triângulo de Sierpinski e as Árvores Bifurcadas. No artigo, mostramos passo a passo como construir estes fractais no GeoGebra, com imagens dos comandos e do resultado de cada passo. Além disso, vinculado ao artigo, utilizamos a ferramenta de criação de livros na plataforma *online* do GeoGebra para elaborar um catálogo com vários fractais e o passo a passo para a criação de cada um deles e que já pode ser acessado na plataforma. O artigo foi publicado na edição 104 da Revista do Professor de Matemática.

Assim, recorreremos ao artigo da RPM e ao livro no GeoGebra (4) para a construção deste capítulo.

## 2.1 Transformações Geométricas

Transformações geométricas são aplicações bijetoras entre duas figuras geométricas, com o objetivo de “transformar” uma na outra. Falaremos de alguns tipos de isometrias, transformações geométricas que preservam as distâncias entre os pontos e as amplitudes dos ângulos, fazendo com que as figuras inicial e final sejam congruentes, e das homotetias, que são transformações geométricas que, a partir de um ponto  $P$  pré-fixado, chamado centro da homotetia, multiplicam a medida de qualquer segmento de reta que passe por  $P$  por uma constante  $k$ , também preservando as amplitudes dos ângulos. A seguir serão apresentadas algumas transformações geométricas necessárias para fazer representações de fractais.

**Definição 2.1** (Rotação). No plano uma rotação de centro  $G$  e amplitude  $\alpha$  (cujo sentido de crescimento é o anti-horário) é uma transformação geométrica que relaciona cada ponto  $A$  faz corresponder um ponto  $A'$  tal que  $\overline{GA} = \overline{GA'}$  e  $\widehat{AGA'} = \alpha$

**Exemplo 2.1.** Na figura abaixo é possível perceber que  $\widehat{ACA'} = \widehat{BCB'} = 90^\circ$  e a medida de comprimento dos segmentos se manteve após a rotação.

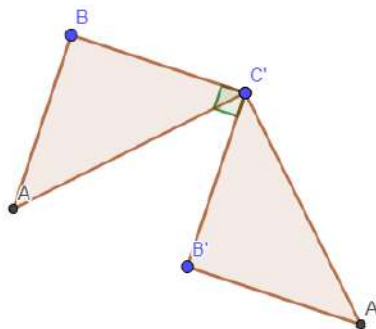


Figura 21 – Rotação de centro  $C = C'$  e ângulo  $\alpha = 90^\circ$ . Fonte: autoria própria.

Em termos de vetores e matrizes, podemos descrever a transformação acima da seguinte forma:

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas do vetor no qual a transformação  $T_1$  é aplicada.



**Definição 2.2** (Translação). No plano, a transformação que desloca um objeto na direção de um vetor é chamada translação, ou seja, é uma transformação da forma  $T(x, y) = (x + k_1, y + k_2)$ , ou ainda

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

**Exemplo 2.2.** Ao deslocar o triângulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(4, 1)$  e  $(5, 4)$  na direção do vetor  $(-1, 2)$ , estamos aplicando em cada um de seus vértices uma translação na direção do vetor  $(-1, 2)$  e o resultado é o seguinte:

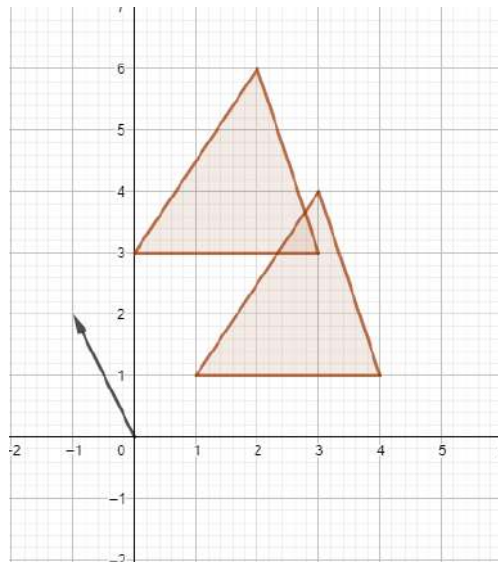


Figura 22 – Translação do triângulo dado na direção do vetor  $(-1, 2)$ .  
Fonte: autoria própria.

Vale ressaltar que é possível compor as duas transformações geométricas acima e aplicar tal composição em um vetor. Além disso, a ordem da composição pouco importa nesse caso, pois o vetor resultante será o mesmo:

**Definição 2.3** (Reflexão). No plano, uma reflexão em relação a um eixo  $r$  é a transformação que a cada ponto  $A$  faz corresponder um ponto  $A'$  tal que o eixo  $r$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AA'}$ . Assim, se o eixo  $r$  for uma reta que passa pela origem e considerando  $\alpha = \angle r, OX$ , podemos representar uma reflexão como

$$T(x, y) = (x \cdot \cos(2\alpha) + y \cdot \sin(2\alpha), x \cdot \sin(2\alpha) - y \cdot \cos(2\alpha))$$

ou ainda

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Ademais, se o eixo  $r$  for uma reta da forma  $ax + b$ , com  $b \neq 0$ , devemos transladá-lo juntamente com o ponto  $P = (x, y)$  na direção do vetor  $(0, -b)$ , obtendo assim o eixo  $r'$  e o ponto  $P' = (x, y - b)$ . Em seguida realizamos normalmente a reflexão de  $P'$  em relação ao eixo  $r'$  e por fim realizamos a translação do ponto  $P''$  resultante dessa reflexão na direção do vetor  $(0, b)$ .

### Exemplo 2.3. Exemplos de reflexão

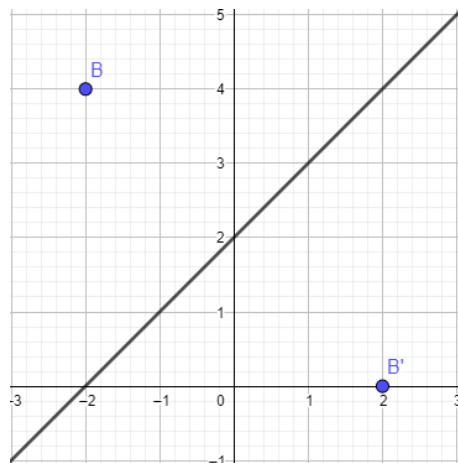


Figura 23 – Reflexão do ponto  $B$  em relação ao eixo  $r$  de equação  $y = x + 2$ .  
Fonte: autoria própria.

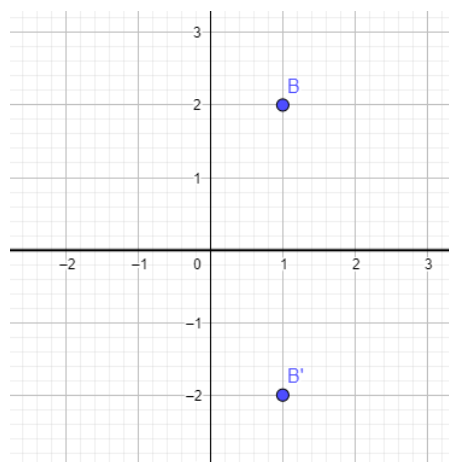


Figura 24 – Reflexão do ponto  $B$  em relação ao eixo  $r$  de equação  $y = 0$ .  
Fonte: autoria própria.

**Definição 2.4** (Homotetia). As homotetias são transformações que, a partir de um ponto fixado  $G = (x_0, y_0)$ , chamado centro da homotetia, multiplicam a medida de qualquer segmento de reta que passe por esse ponto por uma constante  $k$ . Formalmente, dado um ponto  $P$  e uma constante  $k \in \mathbb{R}$ , uma homotetia é uma função da forma  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $P$  do domínio um ponto  $P'$  do contradomínio tal que  $|\overline{OP}| = k \cdot |\overline{OP}'|$ . Ademais,

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.4.** Exemplo de homotetia

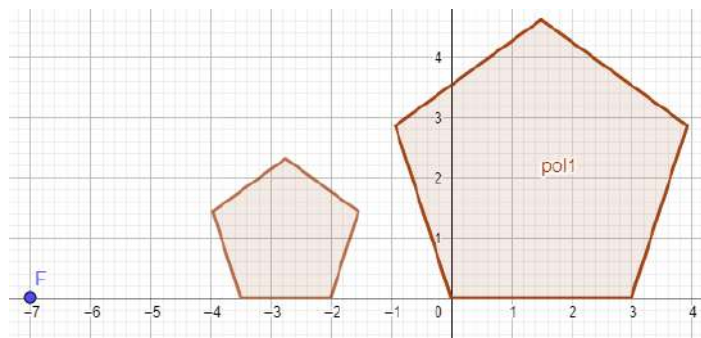


Figura 25 – Homotetia em cada um dos vértices do pentágono *pol1* com centro  $F$  e razão  $k = \frac{1}{2}$ . Fonte: autoria própria.

Agora que foram apresentadas as transformações geométricas, utilizaremos-as para construir algumas representações desses fractais. Construiremos mais dois fractais clássicos o Conjunto de Cantor e a Curva de Koch.

### 2.1.1 O Conjunto de Cantor

Começemos pelo conjunto de Cantor. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor foi um matemático alemão de grande importância para a teoria dos conjuntos (diferenciando os conjuntos enumeráveis dos não enumeráveis, provando a enumerabilidade de  $\mathbb{Q}$  e a não enumerabilidade de  $\mathbb{R}$ , além de ter sido orientado por ninguém menos do que o Karl Weierstrass, lendário matemático que assim como seu pupilo possui resultados que são vistos em grande quantidade até hoje. Em 1883 criou o primeiro dos “monstros matemáticos” que posteriormente passaram a ser conhecidos como fractais: o conjunto de Cantor.



Figura 26 – Georg Cantor. Fonte: (14)

A formação dese fractal consiste em partir de um segmento de reta, dividi-lo em três partes iguais e retirar da figura a parte central. Este processo é repetido indeterminadamente em cada segmento restante de cada iteração.



Figura 27 – Conjunto de Cantor até sua 4ª iteração. Fonte: (8)

Para construir este fractal em pontos da forma  $(0, 0)$  e  $(P, 0)$ , precisaremos aplicar duas composições diferentes de transformações geométricas, a saber:

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

correspondente a uma homotetia de razão  $\frac{1}{3}$  e centro na origem e uma translação na direção do vetor  $\vec{u} = \left(\frac{P}{3}, 0\right)$ , e a transformação  $T_2$ ,

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2P}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

uma translação na direção do vetor  $\vec{v} = \left(\frac{2P}{3}, 0\right)$ .

Inicialmente temos dois pontos ligados por um segmento de reta. Estes pontos estão relacionados com a transformação dada, e devem ser pontos de uma mesma reta horizontal

para que funcione (Se os pontos estiverem dispostos de forma diferente, a transformação deverá mudar). Para obter os pontos que compõem a iteração seguinte, devemos, em cada ponto da iteração atual, aplicar  $T_1$  e  $T_2$  e ligar os pontos resultantes por segmentos. Vale ressaltar que devemos ligar apenas os pontos que foram originados de um mesmo ponto na iteração anterior, por exemplo:

Nesse caso, as transformações  $T_1$  e  $T_2$  estão vinculadas aos pontos iniciais  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ :

$$T_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

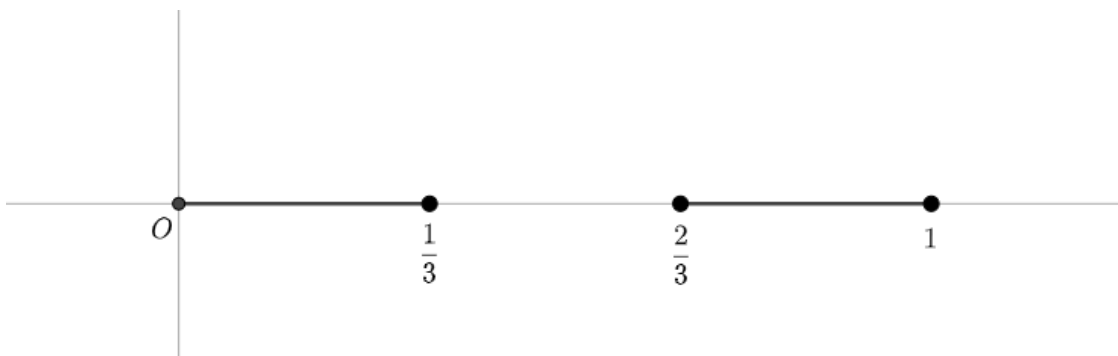


Figura 28 – Resultado das aplicações de  $T_1$  e  $T_2$  nos pontos iniciais  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Fonte: autoria própria.

Na imagem acima, perceba que ligamos o ponto  $(0, 0)$  ao ponto  $(\frac{1}{3}, 0)$  e o ponto  $(\frac{2}{3}, 0)$  ao ponto  $(1, 0)$ , pois os dois primeiros foram originados do ponto  $(0, 0)$  e os dois últimos do ponto  $(1, 0)$ , respectivamente.

### 2.1.2 A Curva de Koch

A curva de Koch é muito semelhante ao floco de neve de Koch, inclusive em seu processo de formação. O detalhe é que este fractal parte de um só segmento de reta.

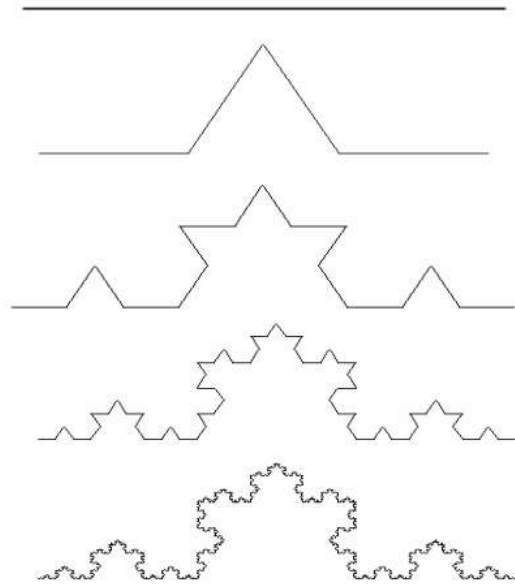


Figura 29 – Curva de Koch até sua 4ª iteração. Fonte: (34)

A curva de Koch, por sua vez, requer a aplicação de quatro composições de transformações geométricas. São elas:

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Uma homotetia de razão  $\frac{1}{3}$  e centro na origem;

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Uma homotetia de razão  $k = \frac{1}{3}$ , uma rotação de  $60^\circ$  e uma translação na direção do vetor  $\vec{u} = \left(\frac{P}{3}, 0\right)$ .

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2P}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Uma homotetia de razão  $k = \frac{1}{3}$ , uma rotação de  $150^\circ$ , e uma translação na direção do vetor  $\vec{u} = \left(\frac{2P}{3}, 0\right)$

$$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Uma homotetia de razão  $k = \frac{1}{3}$  e uma translação na direção do vetor  $\vec{u} = \left(\frac{P}{3}, 0\right)$ .

Novamente, iniciamos com dois pontos ligados por um segmento de reta. Para obter os pontos que compõem a iteração seguinte, devemos, em cada ponto da iteração atual, aplicar  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  e ligar os pontos resultantes por segmentos. Aqui o processo é um pouco diferente do que foi feito com o conjunto de Cantor. Para que a figura saia da forma desejada, deve-se ligar os pontos  $T_1(0, 0)$ ,  $T_2(0, 0)$ ,  $T_2(P, 0)$ ,  $T_3(0, 0)$  e  $T_4(P, 0)$ , nesta ordem. Por exemplo, se partirmos dos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , teremos

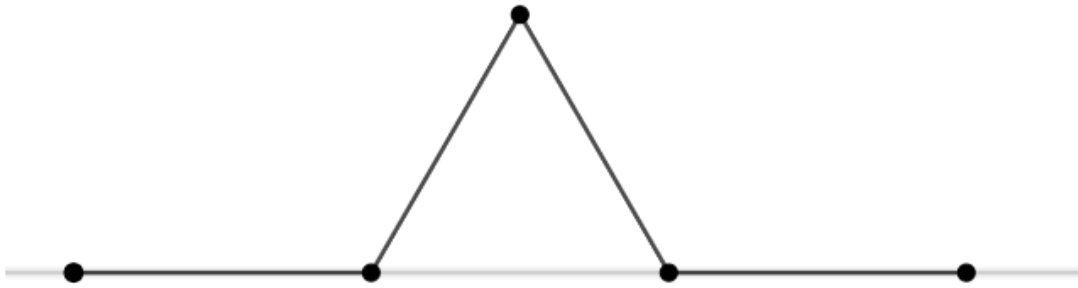


Figura 30 – Resultado das aplicações de  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$  nos pontos iniciais  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ .  
Fonte: autoria própria.

As transformações apresentas nesta seção são utilizadas pela plataforma GeoGebra de maneira automática, e nos poupa parte do trabalho. No entanto, a motivação para a elaboração desta seção foi dar o embasamento teórico necessário para que na próxima seção o usuário não se sentisse perdido, sem saber o porquê de estar executando certos comandos.

## 2.2 Utilizando o GeoGebra

Nesta seção apresentaremos um passo a passo dos algoritmos de construção no GeoGebra. Em especial, daremos destaque nas duas construções referentes ao triângulo de Sierpinski e as árvores bifurcadas, que foram tema de um artigo que está aceito para

publicação na Revista do Professor de Matemática (RPM) na edição de número 104. Além disso, apresentaremos outras construções com o passo, porém sem tanto detalhamento visual, apenas as linhas de comando do algoritmo.

### 2.2.1 Árvores Bifurcadas

As Árvores Bifurcadas são fractais gerados por funções iterativas tipo árvore, ou seja, têm em seu processo iterativo ramificações que assemelham-se a árvores. A sua construção parte de um segmento vertical (que será o tronco), e desse segmento teremos um ângulo de bifurcação onde o tronco se ramificará gerando, a partir de um fator de redução/ampliação fixado, novos “galhos” e a cada passo o número de galhos da árvore dobra. Um fato interessante é que podemos avaliar se a árvore será limitada ou não, conforme o valor de seu fator de redução/ampliação, que denotamos por  $r$ . Usando alguns elementos de trigonometria, mostra-se que para  $r < 1$  a árvore será limitada e para  $r \geq 1$ , não existe região que a limite. Na figura abaixo, temos variações de árvores de acordo com o ângulo de bifurcação.

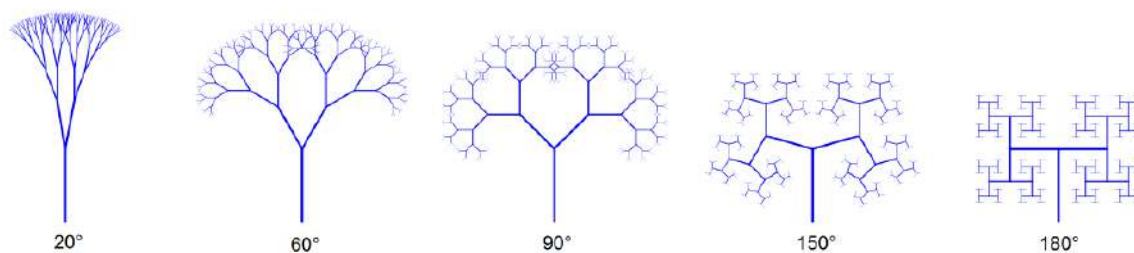


Figura 31 – Árvores Bifurcadas. Fonte: [13]

Utilizando o GeoGebra, é possível visualizar algumas iterações do processo de construção de uma Árvore Bifurcada. A seguir, apresentaremos o passo a passo da construção dessas árvores no GeoGebra.

Passo 1: Clique com o botão direito do mouse na janela de visualização do GeoGebra e desmarque as opções EXIBIR EIXOS e SEM MALHA para retirar os eixos e a malha da tela, seguindo os passos dados na figura abaixo:





Figura 32 – Retirada da malha e dos eixos da janela de visualização. Fonte: autoria própria.

Passo 2: Acesse a ferramenta SEGMENTO no menu principal para construir os segmentos AB e BC. Com a ferramenta, clique em dois lugares quaisquer da janela de visualização e isso formará o segmento AB. Em seguida, clique no ponto B e em outro local qualquer da janela para formar o segmento BC.



Figura 33 – Construção dos segmentos AB e BC. Fonte: autoria própria.

Observe que o segmento AB foi automaticamente rotulado por f e o segmento BC por g. Passo 3: Utilizando a ferramenta ÂNGULO no menu principal, vamos formar o ângulo entre os segmentos AB e BC. Com a ferramenta, clique nos segmentos AB e BC, nessa ordem, isso criará o ângulo  $\alpha$ .

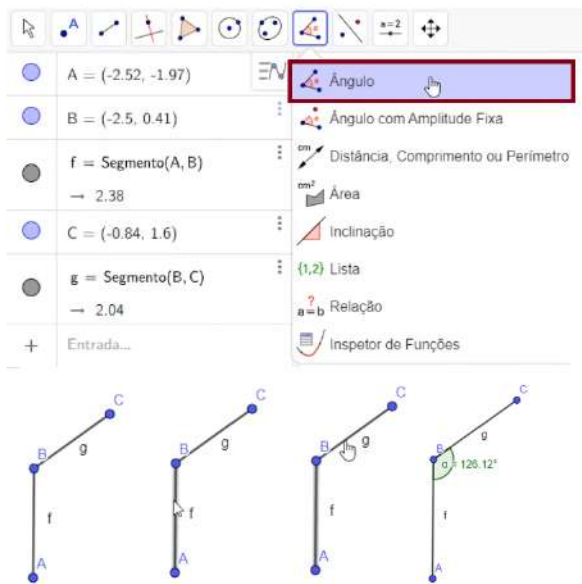


Figura 34 – Construção do ângulo  $\alpha$ . Fonte: autoria própria.

Passo 4: Na caixa de entrada, no canto inferior esquerdo da tela, digite  $r = f/g$  e pressione ENTER no teclado do seu computador/celular. Na janela de álgebra aparecerá como segue na figura abaixo:



Figura 35 – Definindo a razão  $r$ . Fonte: autoria própria.

Passo 5: Utilizando a ferramenta CÍRCULO: CENTRO & RAIOS, no menu principal, construa o círculo  $c$  centrado no ponto  $C$  com raio  $r \cdot g$ . Clique no ponto  $C$  e abrirá uma caixa de diálogo na qual você deve digitar  $r \cdot g$ .

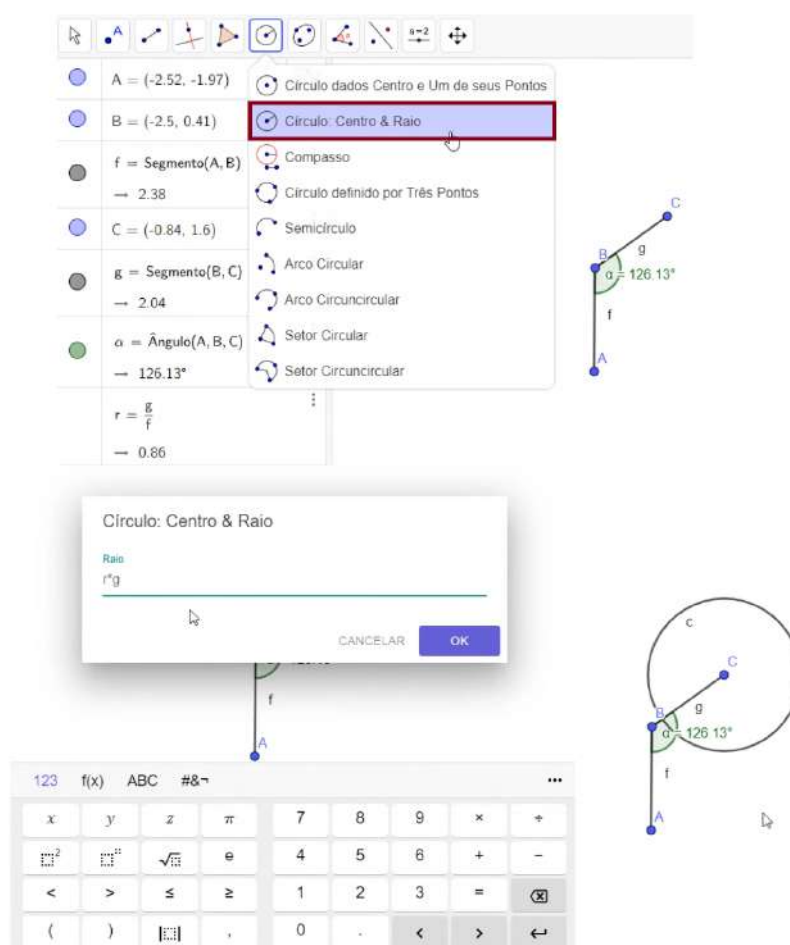


Figura 36 – Construção do círculo c. Fonte: autoria própria.

Passo 6: Utilizando a ferramenta ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA, no menu principal, crie um ângulo  $\beta$  com amplitude igual ao ângulo  $\alpha$ . Clique no ponto B e no ponto C, nessa ordem. Na caixa de diálogo que surgirá, digite  $\alpha$ . Isso automaticamente criará o ponto B'.

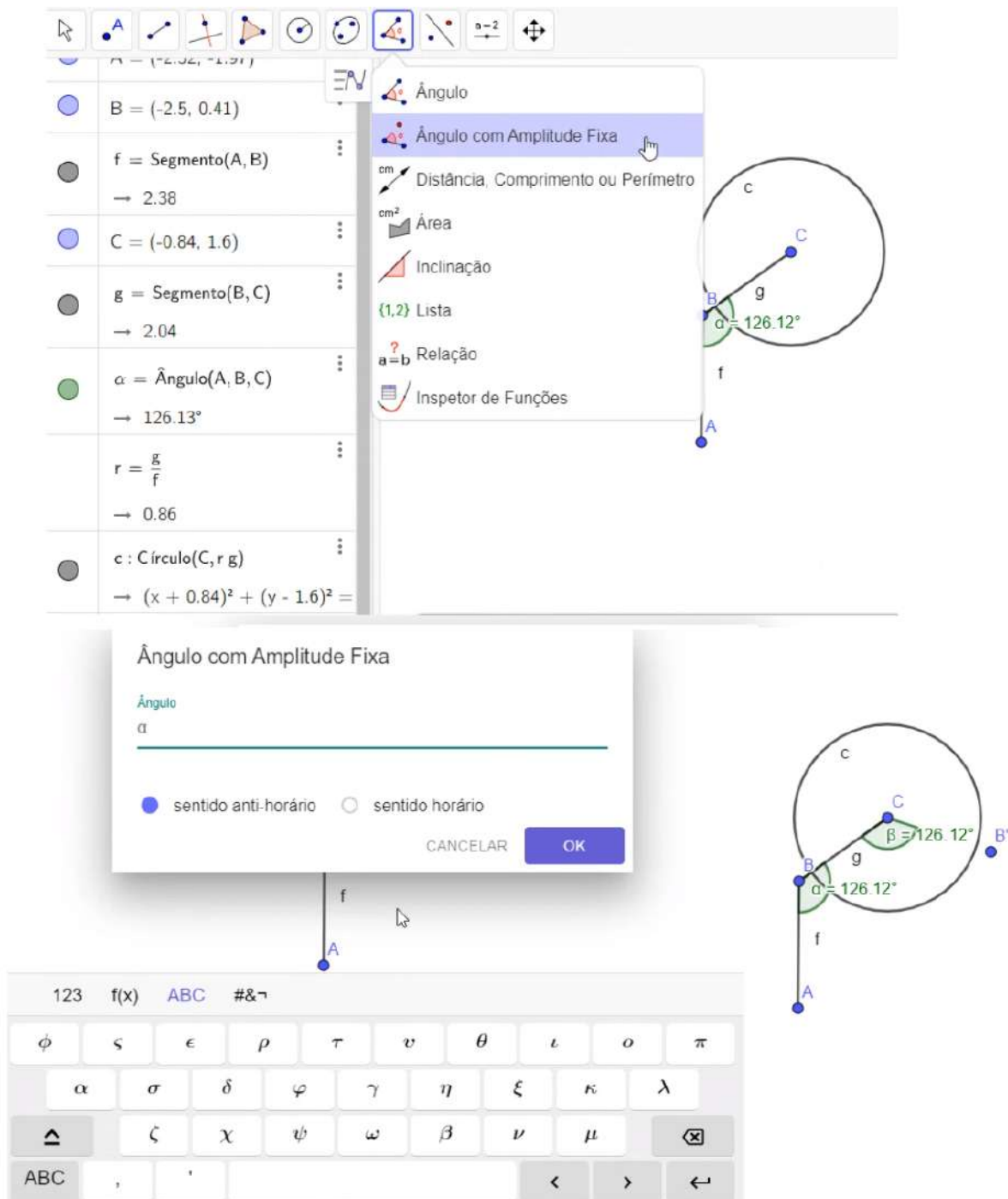


Figura 37 – Criação do ângulo  $\beta$  e do ponto  $B'$ . Fonte: autoria própria.

Passo 7: Novamente, utilizando a ferramenta SEMIRRETA, crie uma semirreta que parte do ponto C e passa por  $B'$ , rotulando-a por h (o comando de SEMIRRETA é encontrado no mesmo lugar onde fica o comando SEGMENTO). Com auxílio da ferramenta INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, no menu principal, clique na semirreta h e no círculo

c. Dessa forma, geramos o ponto D de interseção do segmento h com o círculo c.

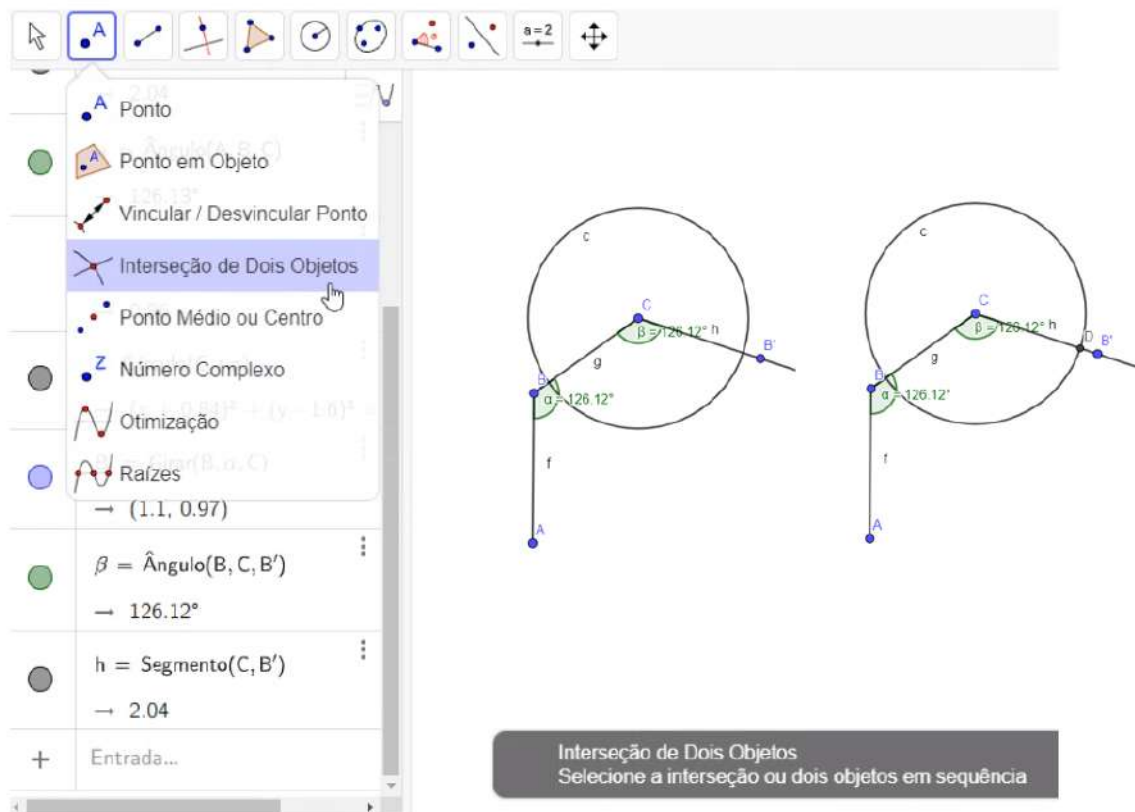


Figura 38 – Criação do segmento  $CB'$  e do ponto D. Fonte: autoria própria.

Passo 8: Retire os rótulos dos segmentos AB, BC e de todos os pontos clicando com o botão direito do mouse no objeto desejado e, na caixa de diálogo, desative a opção EXIBIR RÓTULO. Em seguida, oculte a circunferência c, os ângulos  $\beta$  e  $\alpha$ , o ponto B' e a semirreta h. Para isso, basta dar um clique com o botão direito do mouse no objeto em questão e desmarcar a opção EXIBIR OBJETO. Como exemplo, a figura seguinte apresenta o procedimento para retirar o rótulo do segmento AB:

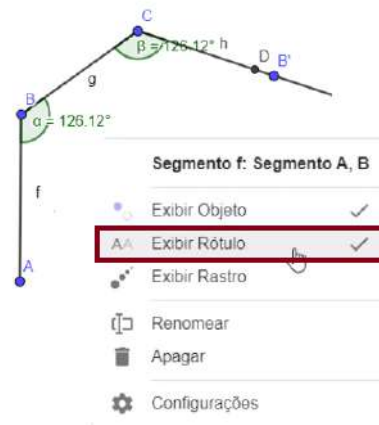


Figura 39 – Retirando o rótulo de AB. Fonte: autoria própria.

E a figura seguinte apresenta o procedimento para ocultar a circunferência c.

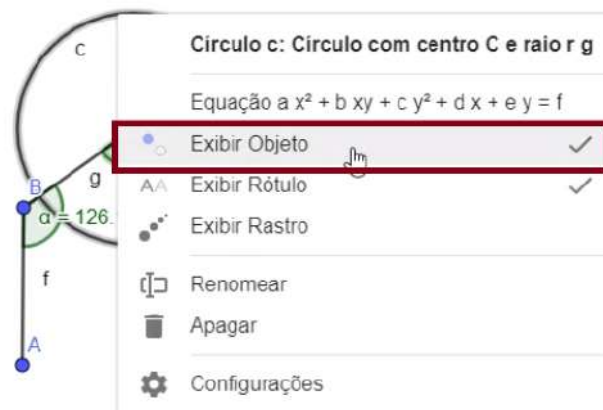


Figura 40 – Ocultando a circunferência c. Fonte: autoria própria.

Para retirar os demais rótulos e ocultar os demais objetos segue-se a mesma ideia.

Passo 9: Crie um segmento com os pontos C e D, e retire o seu rótulo. No próximo passo vamos criar uma nova ferramenta para o menu principal do GeoGebra. Essa ferramenta construirá novos ramos da Árvore Bifurcada. Passo 10: Clique nos 3 traços no canto superior direito da tela e escolha a opção FERRAMENTA. Na opção de FERRAMENTA clique na opção CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA. Daí, abrirá uma caixa de diálogo e você deverá selecionar em OBJETOS FINAIS o segmento “i:segmento CD” e o ponto “D: ponto de intersecção c, h”, nessa ordem. Em seguida, vá para a opção de NOME E ÍCONE e clique em concluir.

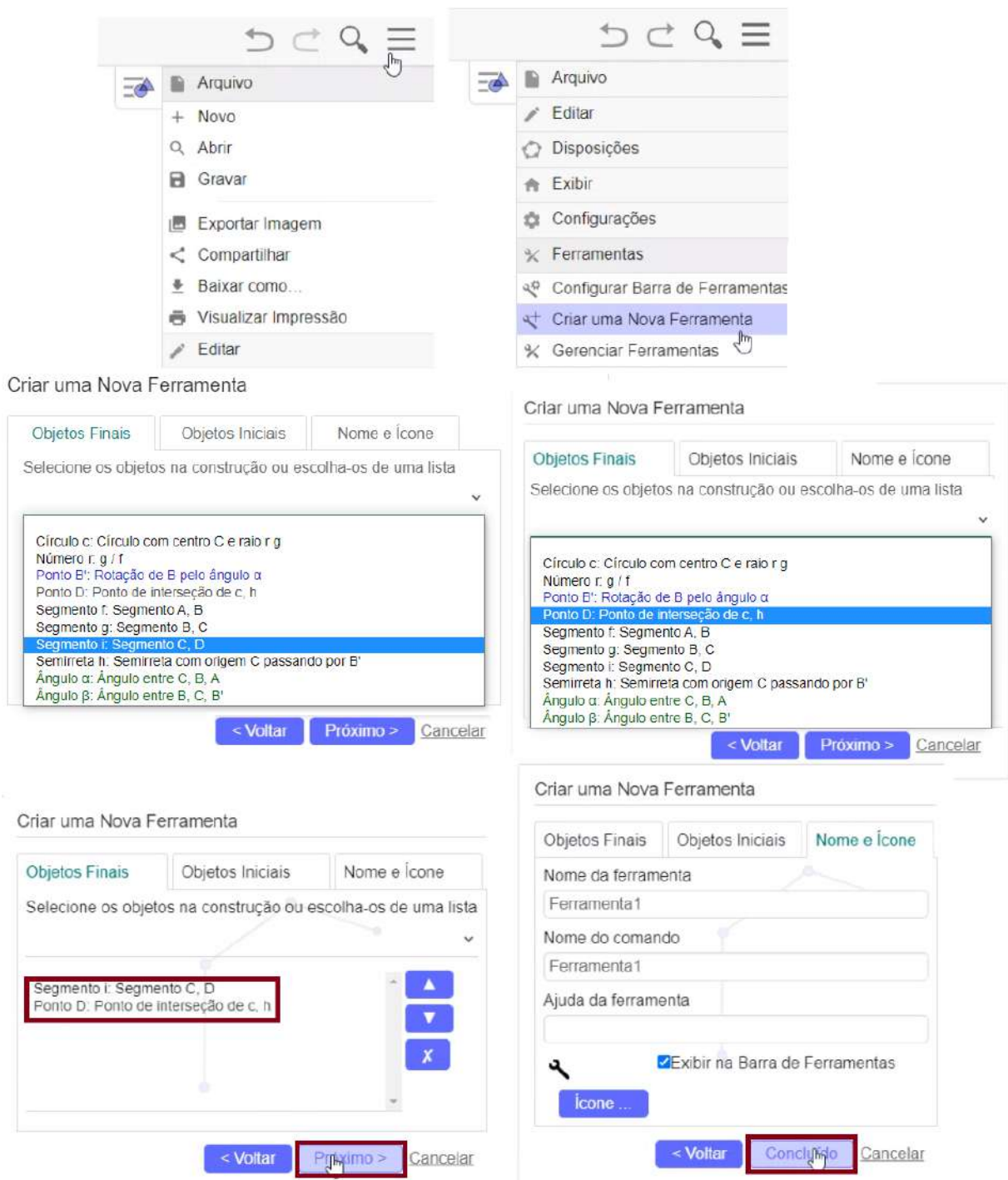


Figura 41 – Criando uma nova ferramenta. Fonte: autoria própria.

Passo 11: Selecione a ferramenta criada no Passo 10, denominada FERRAMENTA 1 no menu principal. Clique nos 3 últimos pontos da árvore, da esquerda para a direita da tela, e, a partir daí aparecerá um novo ramo da árvore.

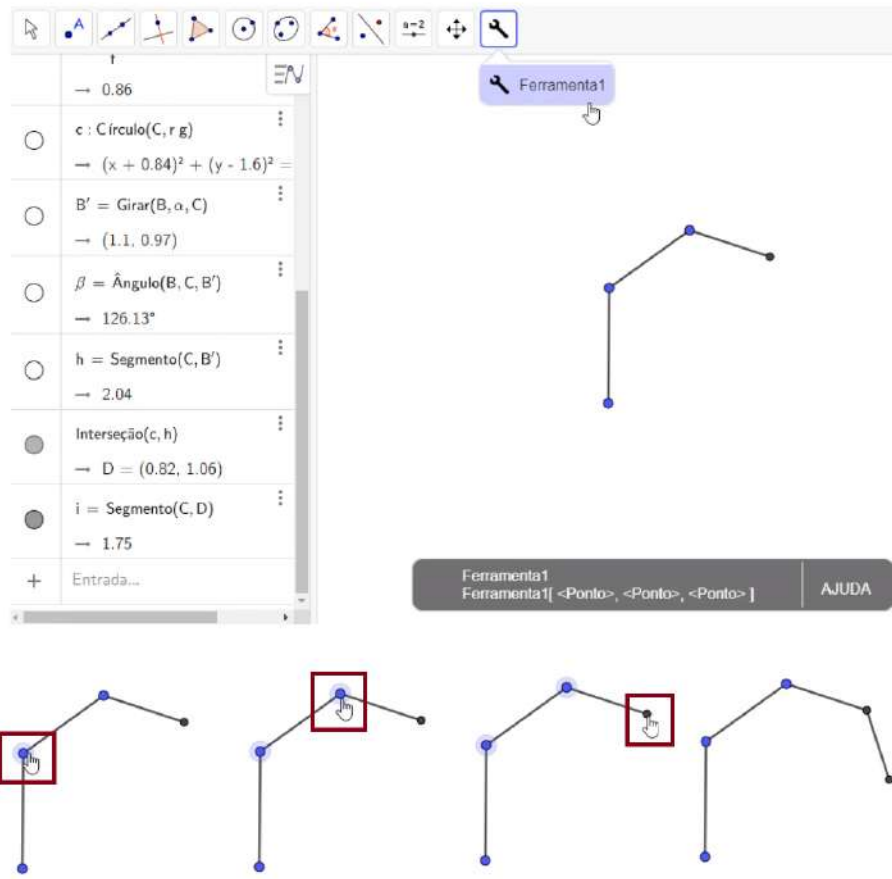


Figura 42 – Construção de um novo ramo da árvore. Fonte: autoria própria.

Realize esse procedimento por mais três vezes. E a figura resultante será:



Figura 43 – Figura resultante. Fonte: autoria própria.

Passo 12: No menu principal, escolha a ferramenta REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA. Selecione o último segmento da árvore e clique no segmento anterior a este, conforme figura abaixo. Como resultado obteremos um novo ramo que será a reflexão do segmento selecionado em relação ao segmento clicado. Note que na figura seguinte o quadrado representa o segmento que será refletido e a mão do mouse indicará o segmento que será o eixo de reflexão.



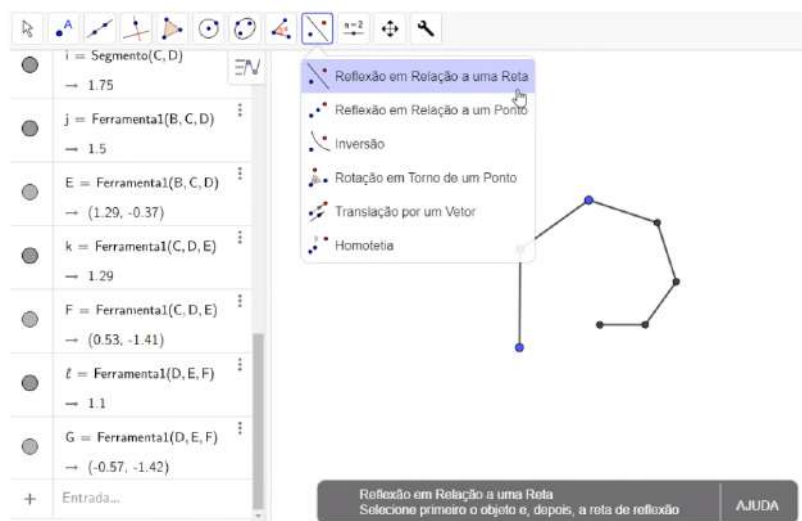


Figura 44 – Reflexão em relação a uma reta. Fonte: autoria própria.

Repita esse procedimento para cada figura selecionada conforme abaixo:

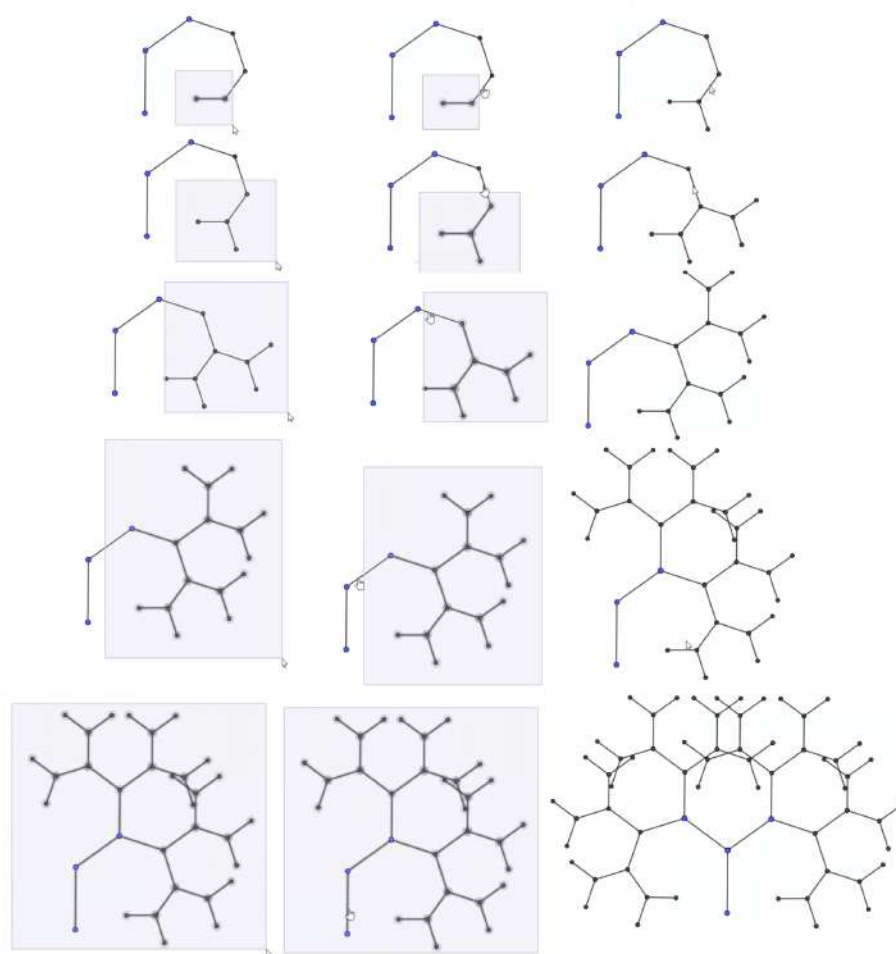


Figura 45 – Primeira até a quinta reflexão. Fonte: autoria própria.

Assim, você finalizará a sua árvore com o número de galhos que desejar. Observamos que se você alterar o tamanho dos segmentos AB e CD iniciais e/ou o ângulo  $\alpha$  você produzirá novas árvores bifurcadas, conforme as figuras a seguir:

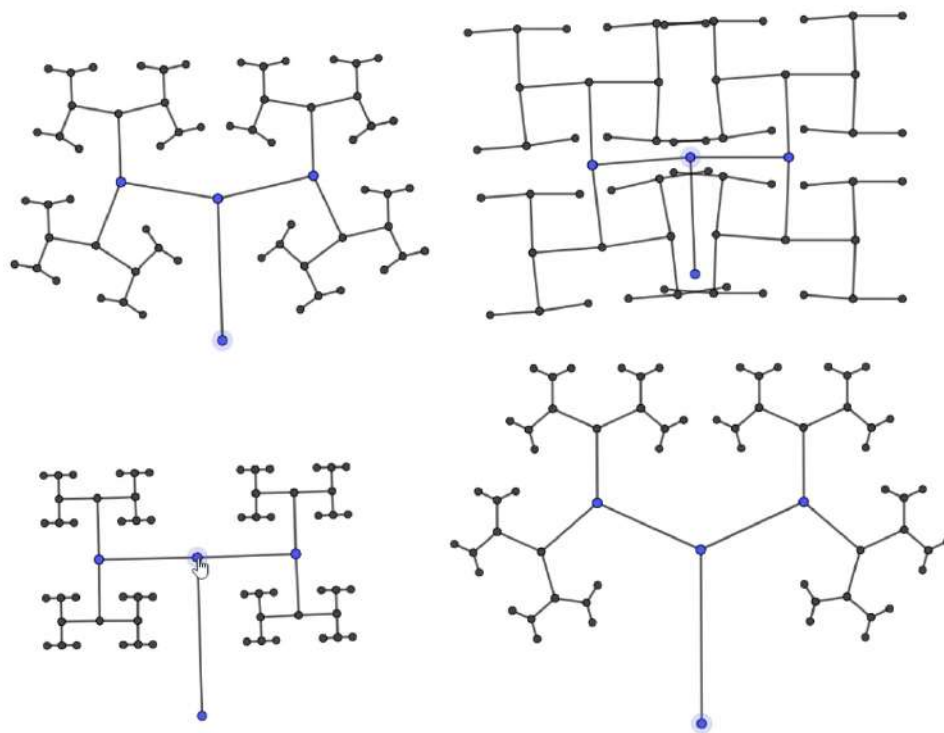


Figura 46 – Árvores com diferentes tamanhos para os segmentos AB, CD e amplitude para o ângulo  $\alpha$ . Fonte: autoria própria.

Você pode também alterar as cores da maneira que quiser e obter um resultado de acordo com seu gosto pessoal.

### 2.2.2 O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um fractal obtido a partir da seguinte construção recorrente: a partir de um triângulo equilátero, marcamos os pontos médios de cada lado e retiramos da figura o triângulo cujos vértices são esses pontos médios dos lados do triângulo anterior. A cada nova etapa repetimos o processo em cada novo triângulo equilátero resultante da etapa anterior. O Triângulo de Sierpinski é a figura obtida quando esse processo ocorre indefinidamente.

Passo 1: Selecione a ferramenta PONTO no menu principal e crie os pontos A e B no eixo das abscissas conforme a figura abaixo:

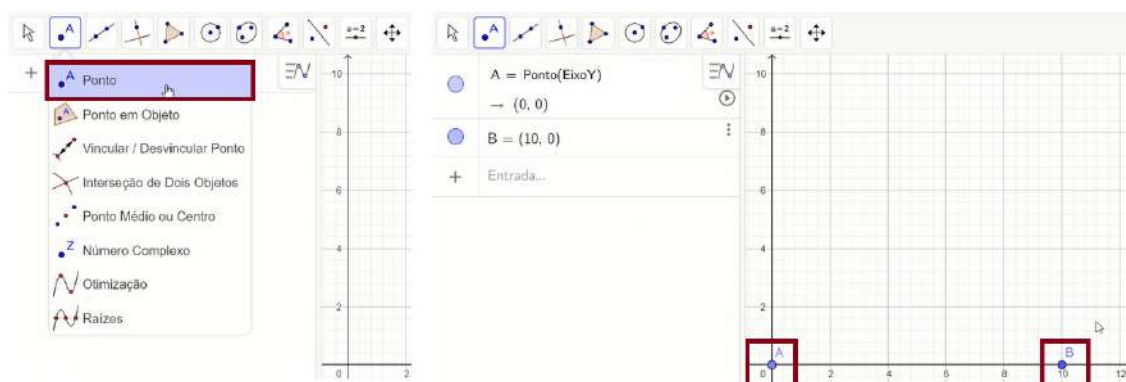


Figura 47 – Criação os pontos A e B. Fonte: autoria própria.

Passo 2: Oculte a malha e o eixo como feito na construção das árvores bifurcadas na seção anterior.

Passo 3: Selecione a ferramenta POLÍGONO REGULAR no menu principal e selecione os pontos A e B. Em seguida, na caixa de diálogo que surgirá, digite o número de vértices para produzir o polígono pol1.

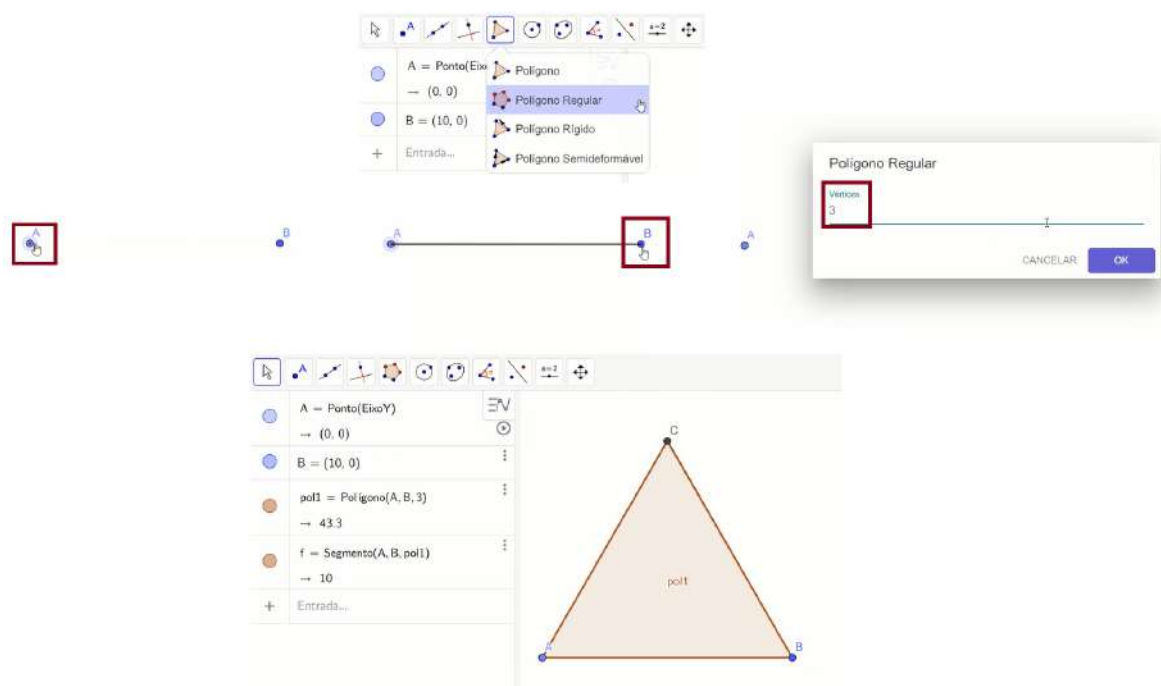


Figura 48 – Construção do pol1. Fonte: autoria própria.

Passo 4: Selecione a ferramenta PONTO MÉDIO OU CENTRO no menu principal. Clique no segmento BC para encontrar o ponto médio D. Da mesma forma, clique nos segmentos AC e AB para encontrar os pontos médios E e F, respectivamente. Em seguida,

ainda com a mesma ferramenta, clique no interior do polígono para encontrar o ponto G, centro do triângulo.

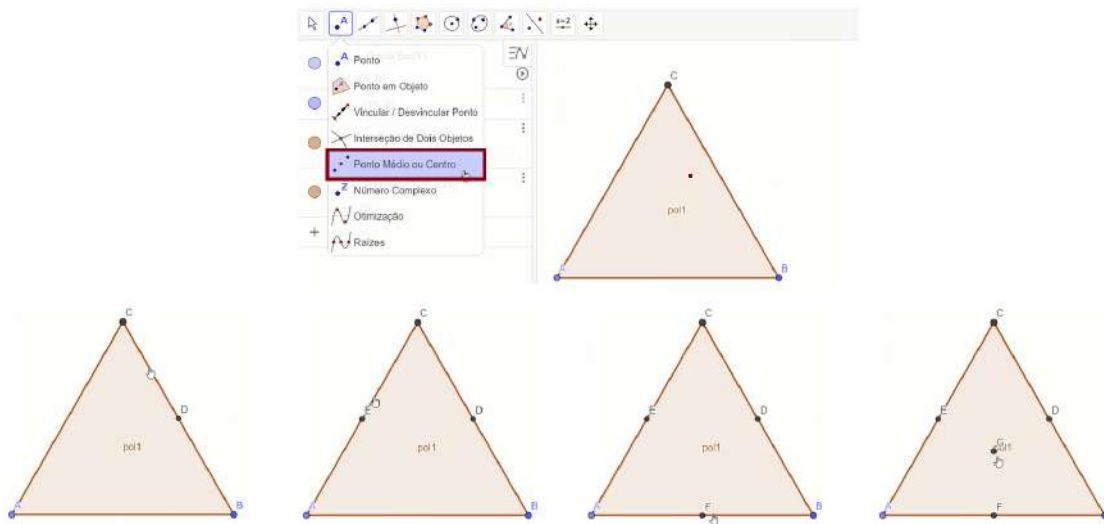


Figura 49 – Criação dos pontos médios D, E e F e do centro G. Fonte: autoria própria.

Passo 5: Na caixa de entrada, crie a lista l1 com os pontos A, B e C conforme a imagem

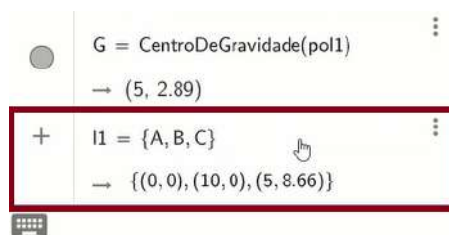


Figura 50 – Criação da lista l1. Fonte: autoria própria.

Passo 6: Na caixa de entrada, utilizando o comando HOMOTETIA, crie a lista l2 com o triângulo obtido aplicando o comando HOMOTETIA do pol1 no centro G com razão  $-1/2$  digitando  $l2=Homotetia(pol1,-1/2,G)$  e, em seguida, pressionando ENTER no teclado de seu computador/celular. Esta lista l2 aparecerá automaticamente na janela de álgebra do GeoGebra:

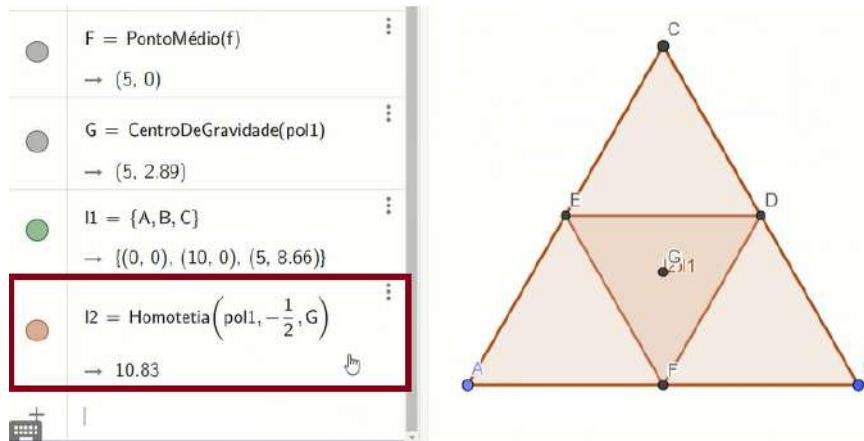


Figura 51 – Criação do triângulo l2. Fonte: autoria própria.

Passo 7: Ainda na caixa de entrada, utilizando o comando SEQUÊNCIA, crie uma lista l3 com três triângulos obtidos aplicando o comando HOMOTETIA da lista l2 nos vértices da lista l1 com razão 1/2. Ou seja, na caixa de entrada, digite  $l3 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l2, 1/2, \text{Elemento}(l1, i)), i, 1, 3)$  e pressione ENTER.

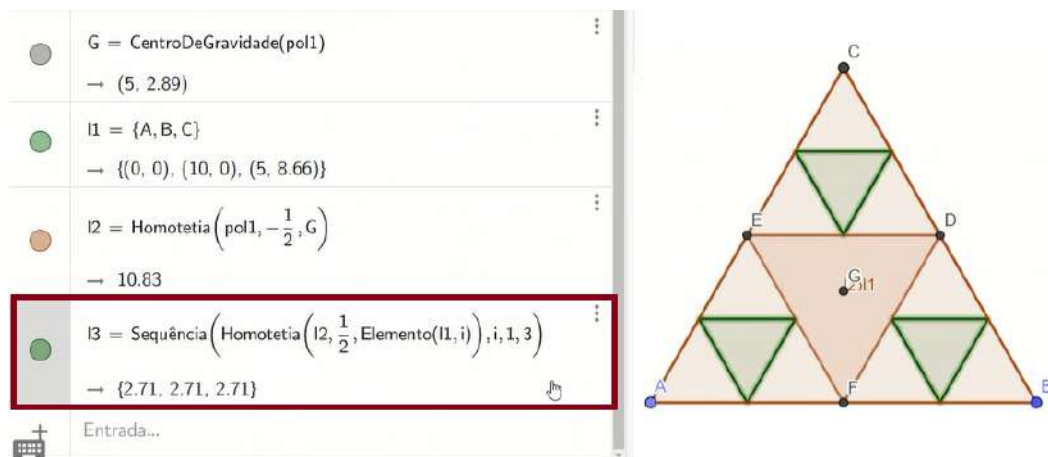


Figura 52 – Criação da lista l3. Fonte: autoria própria.

Passo 8: Novamente, na caixa de entrada, utilizando o comando SEQUÊNCIA, crie uma lista l4 com nove novos triângulos obtidos aplicando o comando HOMOTETIA da lista l3 nos vértices da lista l1 com razão 1/2 digitando  $l4 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l3, 1/2, \text{Elemento}(l1, i)), i, 1, 3)$  e, em seguida, pressionando ENTER.

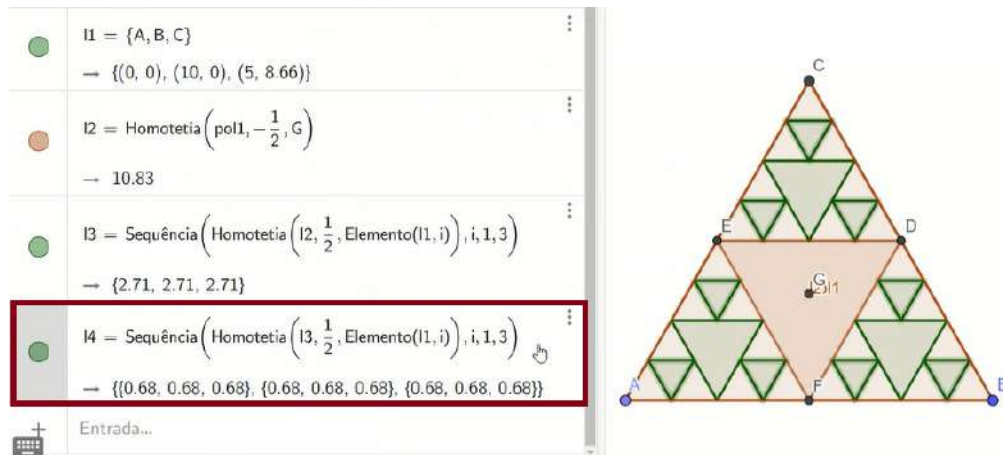


Figura 53 – Criação da lista l4. Fonte: autoria própria.

Daí em diante utilize a mesma ideia do passo anterior para produzir as listas seguintes.

Passo 9:  $l_5 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_4, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$ .

Passo 10:  $l_6 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_5, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$ .

Passo 11:  $l_7 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_6, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$ .

Veja as figuras abaixo.

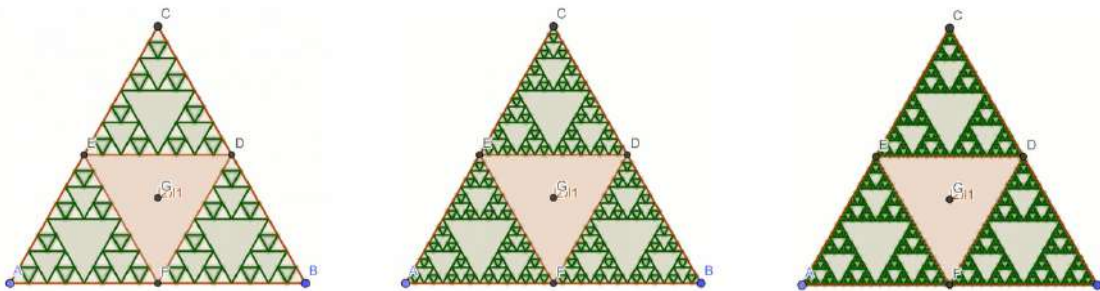


Figura 54 – Figuras dos Passos 9, 10 e 11, respectivamente. Fonte: autoria própria.

Aqui o fractal já está construído, porém só podemos observá-lo na iteração em que paramos a construção. É possível visualizar a formação desse fractal, etapa por etapa, de modo dinâmico. Para isso, utilizaremos a ferramenta chamada **CONTROLE DESLIZANTE**. Siga os passos abaixo.

Passo 12: Selecione a ferramenta **CONTROLE DESLIZANTE** no menu principal.

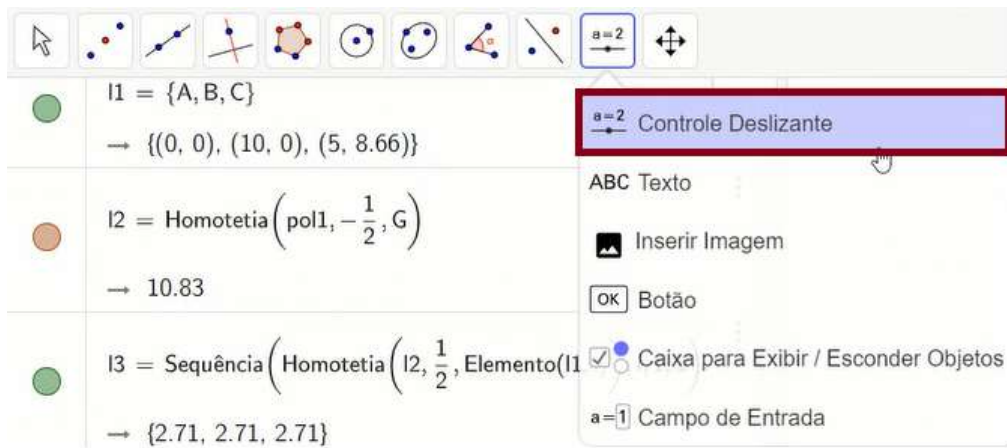


Figura 55 – Localizando a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE. Fonte: autoria própria.

Passo 13: Clique em qualquer lugar da tela. Daí aparecerá a caixa de diálogo do CONTROLE DESLIZANTE. Defina  $a=1$ , com formato de número e faça a variar no



Figura 56 – Criação do CONTROLE DESLIZANTE a. Fonte: autoria própria.

Passo 14: Na janela de álgebra, selecione a lista l2 e clique nos três pontos no canto superior direito. Escolha a opção de CONFIGURAÇÕES. Na caixa de diálogo, clique em AVANÇADO e digite em CONDIÇÃO PARA EXIBIR OBJETO(S)  $0 < a$ .



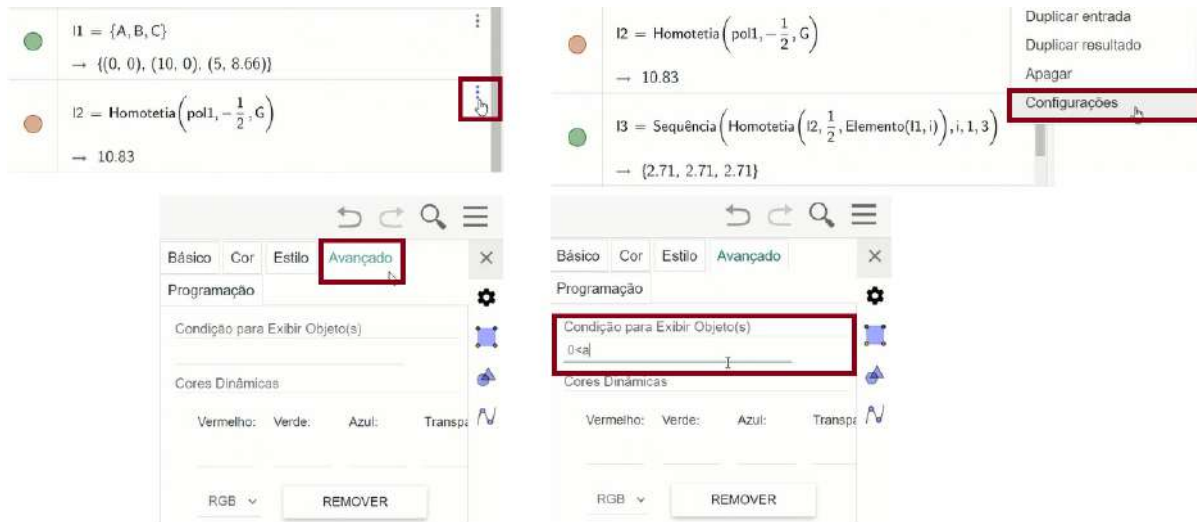


Figura 57 – Inserindo a condição para a exibição de I2. Fonte: autoria própria.

Seguindo o mesmo procedimento, configure os objetos I3, I4, I5, I6 e I7 para serem exibidos quando  $1 < a$ ,  $2 < a$ ,  $3 < a$ ,  $4 < a$  e  $5 < a$ , nessa ordem. Finalizado esse processo, não só esse fractal vai estar construído como também será possível ver cada passo de sua construção de forma dinâmica através do controle deslizante, pois à medida que “a” variar, veremos as iterações correspondentes da figura. Abaixo, veja o registro de alguns passos da construção do triângulo de Sierpinski.

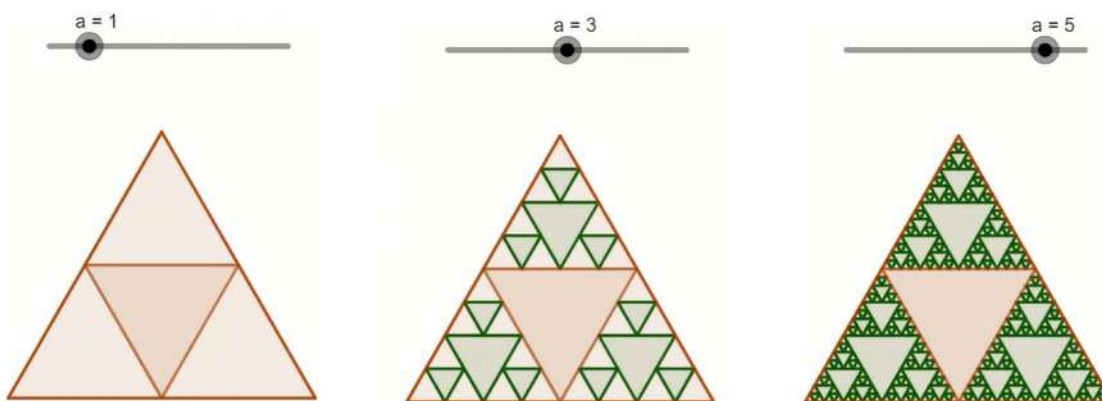


Figura 58 – Fractal quando  $a=1$ ,  $a=3$  e  $a=5$ . Fonte: autoria própria.

Uma construção, realizada pelos autores, do Triângulo de Sierpinski com controle deslizante e informações sobre suas medidas de área e perímetro pode ser encontrada no endereço eletrônico: <<https://www.geogebra.org/m/fnxpfrs2>>. Além desta construção,



o link acima possui também várias outras, de diversos fractais, todas com os devidos comentários e algoritmos de construção no GeoGebra. Os comentários e algoritmos citados também podem ser encontrados abaixo.

### 2.2.3 Curva de Koch

A Curva de Koch é formada a partir de um segmento que é dividido em três partes e sobre o terço médio construímos um triângulo equilátero e apagamos sua base (que corresponde ao terço médio do segmento). No segundo passo, repetimos o procedimento anterior em cada um dos quatro segmentos formados. Repetimos isso recursivamente para cada nova etapa. A Curva de Koch é a figura que surge quando esta construção se repete indefinidamente. Para construir este fractal, os seguintes passos devem ser executados:

Passo 1 - Criar dois pontos  $A$  e  $B$ ;

Passo 2 - Digitar os comandos " $A + (B - A)/3$ " e " $A + (B - A)2/3$ " para criar os pontos  $C$  e  $D$ ;

Passo 3 - Com a ferramenta "Polígono Regular" criar um triângulo a partir dos pontos  $C$  e  $D$ ;

Passo 4 - Ocultar o triângulo criado, deixando visíveis apenas seus vértices;

Passo 5 - Digitar " $l1 = \{A, C, E, D, B\}$ " para criar uma lista composta por esses pontos nessa ordem;

Passo 6 - Criar uma nova ferramenta, com " $l1$ " na aba "Objetos finais" e os pontos  $A$  e  $B$  como "Objetos iniciais". Pode nomear a ferramenta como "Curva de Koch";

Passo 7 - Limpar todos os objetos da janela de visualização;

Passo 8 - Utilizando a planilha, criar um ponto na célula  $A_1$  e outro na célula  $B_1$ ;

Passo 9 - Na célula  $A_2$ , digitar " $CurvadeKoch(A1,B1)$ ";

Passo 10 - Na célula  $B_2$  digitar " $Sequência(Segmento(Elemento(A2,i), Elemento(A2,i+1)),i, 1, Comprimento(A2)-1)$ ";

Passo 11 - Na célula  $A_3$ , digitar " $Concatenar(Sequência(CurvadeKoch(Elemento(A2,i),$

Elemento(A2,i+1)),i,1, Comprimento (A2)-1”;

Passo 12 - Arrastar a célula  $B2$  até a  $B3$ , a  $A3$  até a  $A6$  e finalmente, a  $B3$  até a  $B6$ ;

Passo 13 - Ocultar objetos da célula  $A3$  até a  $A6$ ;

Passo 14 - Criar um controle deslizante (chame-o de “a”) variando em números inteiros, indo de 0 a 5 e com incremento de 1;

Passo 15 - Criar um segmento entre os pontos  $A1$  e  $B1$ ;

Passo 16 - Nas configurações avançadas do segmento criado acima, em “Condições para Exibir Objeto(s)”, digitar “a==0” e teclar enter;

Passo 17 - Nas configurações avançadas das células  $B2$ ,  $B3$ ,  $B4$ ,  $B5$  e  $B6$ , novamente em “Condições para Exibir Objeto(s)”, digitar “a==1”, “a==2”, ..., “a==5”, respectivamente.

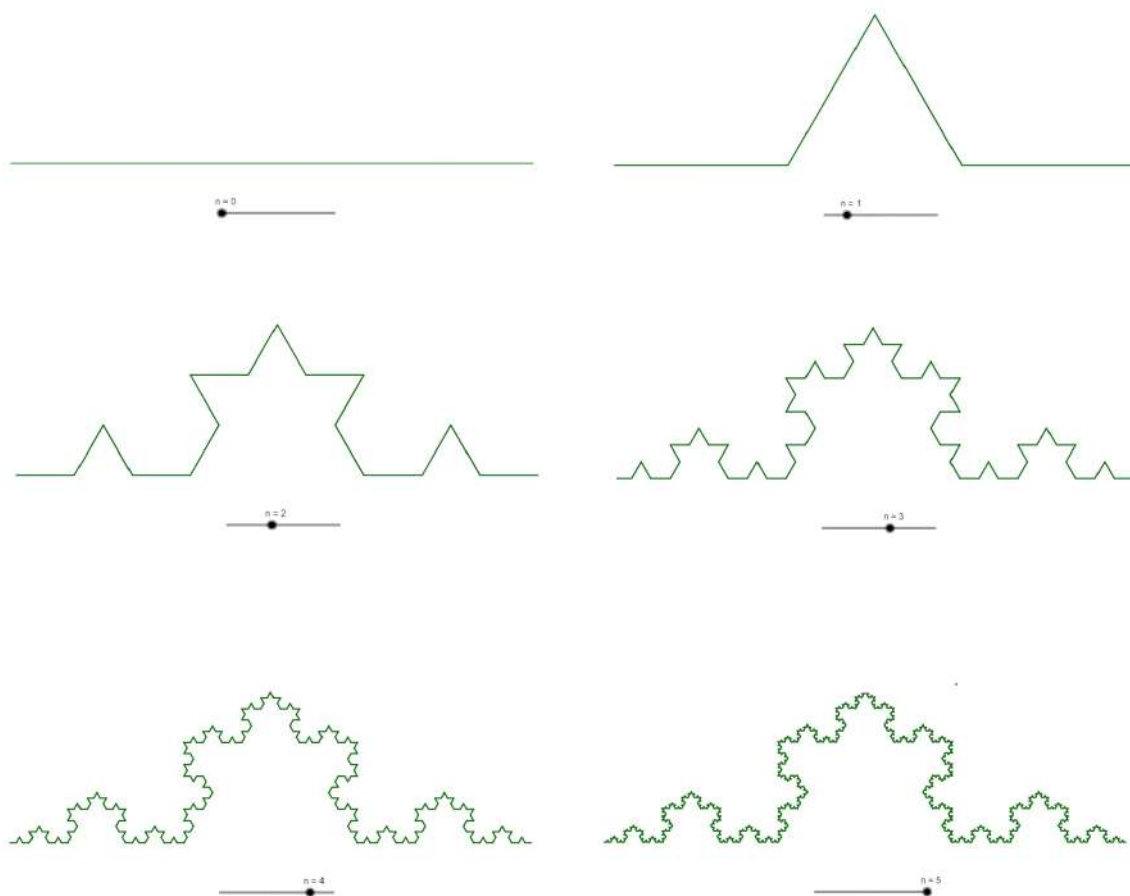


Figura 59 – Segmento inicial e as cinco primeiras iterações da curva de Koch no GeoGebra.  
Fonte: autoria própria.

### 2.2.4 Floco de Neve

A nossa construção desse fractal exigiu a criação de uma nova ferramenta, que a partir de um segmento, cria uma certa quantidade de pontos que formarão uma iteração da Curva de Koch, o uso de uma planilha para que, tomando dois pontos, pudéssemos aplicar a ferramenta criada neles e trabalhar com o comando "concatenar" (que cria os segmentos para ligar os pontos criados pela ferramenta já mencionada). A planilha se fez útil por facilitar o processo nas outras iterações, pois bastava copiar os comandos utilizados em determinada célula para as demais, criando quantas iterações fossem desejadas.

A construção desse fractal é análoga à da Curva de Koch, a diferença é que aqui o processo será realizado três vezes, com pontos iniciais escolhidos de forma que sejam os vértices de um triângulo equilátero.

### 2.2.5 O Tapete de Sierpinski

Para construir este fractal, os seguintes passos devem ser executados:

Passo 1 - Construir, a partir de dois pontos  $A$  e  $B$ , um quadrado, utilizando a ferramenta "polígono regular";

Passo 2 - Determinar o ponto médio de cada aresta do quadrado criado com a ferramenta "ponto médio ou centro";

Passo 3 - Determinar o centro do  $pol1$  com o mesmo comando;

Passo 4 - Digitar " $l1=homotetia(pol1,1/3, I)$ " para que apareça o quadrado menor central;

Passo 5 - Digitar " $l1=A,B,C,D,E,F,G,H$ " para criar uma lista com o ponto médio de cada uma das arestas e cada vértice do quadrado;

Passo 6 - Digitar " $l2=\{sequ\^encia(homotetia(l1',1/3, elemento(l1,i),i,1,8)\}$ ", o resultado será o fractal após a segunda iteração;

Passo 7 - Criar os próximos passos da construção do fractal, que são feitos de maneira análoga: digitar " $l3=sequ\^encia(homotetia(l2,1/3, elemento(l1,i),i,1,8)$ ", " $l4=sequ\^encia(homotetia(l3,1/3, elemento(l1,i),i,1,8)$ " e " $l5=sequ\^encia(homotetia(l4,1/3, elemento(l1,i),i,1,8)$ ";

Passo 8 - Criar um controle deslizante (chame-o de “a”), variando em números inteiros, indo de 0 a 5 e com incremento de 1; Passo 9 - Nas configurações de  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$  e  $l_5$ , em “condições para exibir objeto”, digitar “ $0 < a$ ”, “ $1 < a$ ”, “ $2 < a$ ”, “ $3 < a$ ” e “ $4 < a$ ”, respectivamente.

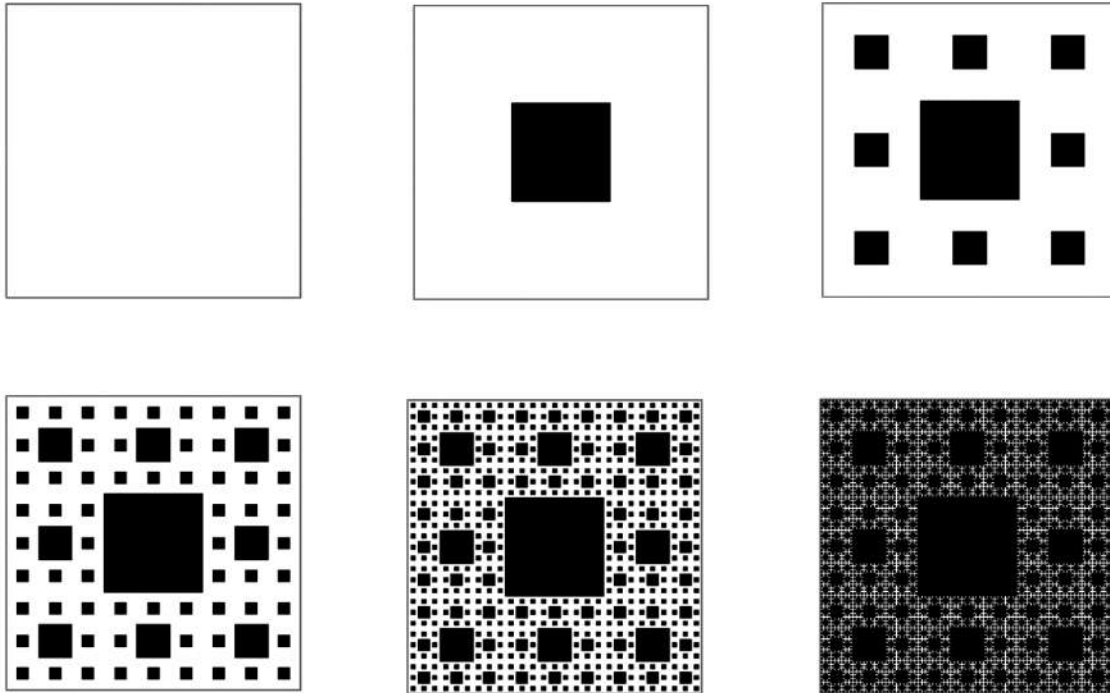


Figura 60 – quadrado inicial e as cinco primeiras iterações do tapete de Sierpinski no GeoGebra. Fonte: autoria própria.

### 2.2.6 O Círculo de Sierpinski

O Círculo de Sierpinski é um fractal gerado a partir de um círculo, em que na sua  $n$ -ésima iteração para  $n$  suficientemente grande é notável sua semelhança com o famoso Triângulo de Sierpinski (Para  $n=6$  já é possível perceber).

Passo 1 - Remova a malha e os eixos do GeoGebra;

Passo 2 - Crie uma circunferência em qualquer lugar utilizando a ferramenta “círculo dado centro e um de seus pontos”;

Passo 3 - Marque o ponto médio entre os dois pontos;

Passo 4 - Crie uma nova circunferência dado centro em  $C$  e ponto  $B$ ;

Passo 5 - Com a ferramenta de “Ângulo com Amplitude Fixa” clique nos pontos  $B$  e  $A$  e

escreva 120 graus no sentido anti-horário;

Passo 6 - Com a mesma ferramenta anterior e com as mesmas configurações clique nos pontos  $B'$  e  $A$ ;

Passo 7 - Novamente com a mesma ferramenta clique nos pontos  $A$  e  $B''$ ;

Passo 8 - Marque os pontos médios entre  $A$  e  $B'$ , e  $A$  e  $B''$ ;

Passo 9 - Crie novas circunferências dado centro nos novos pontos médios e com pontos em seus pontos da circunferência maior;

Passo 10 - Deixe apenas as circunferências e os pontos ocultando todo o resto;

Passo 11 - Crie uma nova ferramenta selecionando toda a circunferência maior;

Passo 12 - Deixe do jeito que tá e clique em concluir;

Passo 13 - Agora basta clicar nos centros e no ponto superior de cada circunferência;

Passo 14 - Repita esse processo até que esteja pronto o fractal.

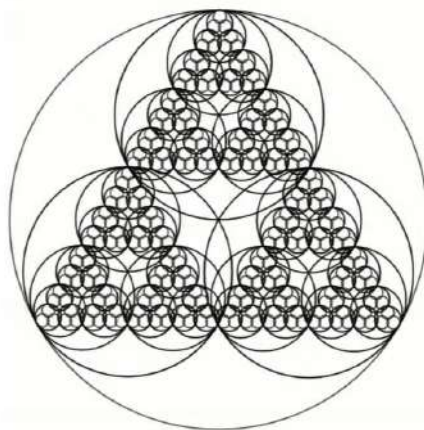


Figura 61 – Círculo de Sierpinski após executar o algoritmo acima no GeoGebra. Fonte: autoria própria.

### 2.2.7 A pirâmide de Sierpinski

Para construir esse fractal, os seguintes passos devem ser executados:

Passo 1 - Ativar a exibição da janela de visualização 3D, em “exibir”;

Passo 2 - Criar um tetraedro regular, usando a ferramenta de mesmo nome (chame-o de “a”);

Passo 3 - Criar, na janela de álgebra, a lista l1, composta pelos vértices do tetraedro (Certificar-se de que todos de fato estão visíveis na janela de visualização 3D. Caso contrário, criar novos pontos de mesmas coordenadas);

Passo 4 - Digitar na janela de álgebra “l2=Sequência(Homotetia(a, 1/3, Elemento(l1,i)), i,1,4)”;

Passo 5 - Digitar na janela de álgebra “l3=Sequência(Homotetia(l2, 1/3, Elemento(l1,i)), i,1,4)”;

Passo 6 - Digitar na janela de álgebra “l4=Sequência(Homotetia(l3, 1/3, Elemento(l1,i)), i,1,4)”;

Passo 7 - Criar um controle deslizante (chame-o de “n”) que varia em números inteiros, com valor mínimo 0 e valor máximo 3, com incremento 1;

Passo 8 - Nas configurações avançadas de l2, l3 e l4, em “condição para exibir objeto” digite “ $0 < a$ ”, “ $1 < a$ ” e “ $2 < a$ ”, respectivamente.

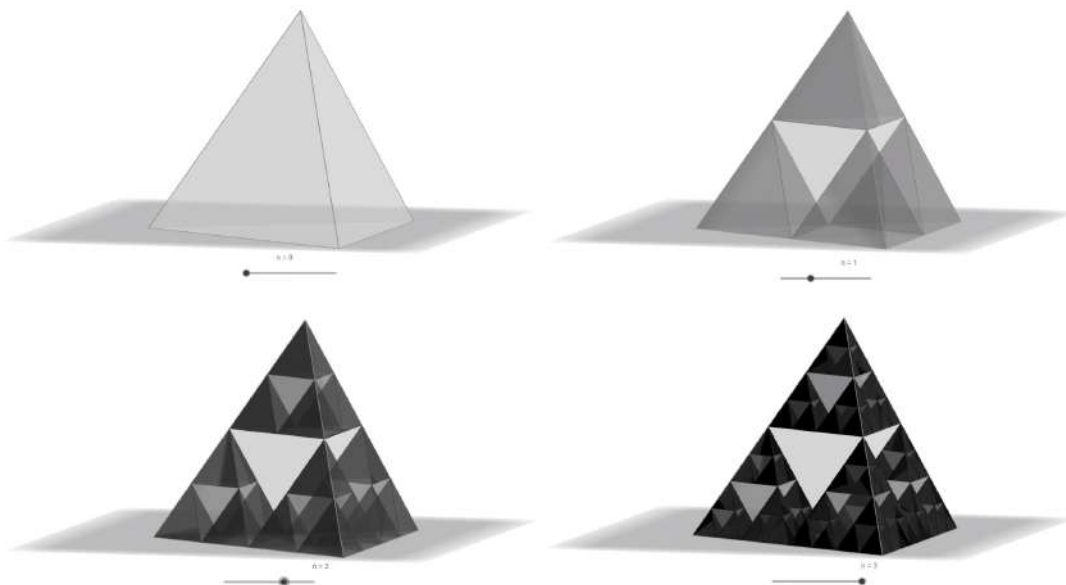


Figura 62 – pirâmide inicial e as três primeiras iterações da pirâmide de Sierpinski no GeoGebra. Fonte: autoria própria.

### 2.2.8 Esponja de Menger

Para construir este fractal, os seguintes passos devem ser executados:

Passo 1 - Ativar a exibição da janela de visualização 3D, em “exibir”;

Passo 2 - Criar um cubo, usando a ferramenta de mesmo nome (chame-o de “a”);

Passo 3 - Utilizando a ferramenta "ponto médio ou centro", criar o ponto médio de cada uma das arestas do cubo;

Passo 4 - Criar a lista  $l1$ , composta por todos os vértices e todos os pontos médios do cubo. A lista ficará com 20 elementos (certificar-se de que todos os pontos da lista estão visíveis na janela de visualização 3D. Caso contrário, criar novos pontos de mesmas coordenadas dos que não “existirem”);

Passo 5 - Digitar “ $l2=Sequência(Homotetia(a,1/3,Elemento(l1,i)),i,1,20)$ ” na janela de álgebra;

Passo 6 - Digitar “ $l3=Sequência(Homotetia(l2,1/3,Elemento(l1,i)),i,1,20)$ ” na janela de álgebra;

Passo 7 - Na janela de visualização 2, criar um controle deslizante (chame-o de “n”) que varia em números inteiros, com valor mínimo 0 e valor máximo 2, com incremento 1;

Passo 8 - Nas configurações avançadas de  $a$ ,  $l2$  e  $l3$ , em “condição para exibir objeto”, digite “ $0 == n$ ”, “ $1 == n$ ” e “ $2 == n$ ”, respectivamente.

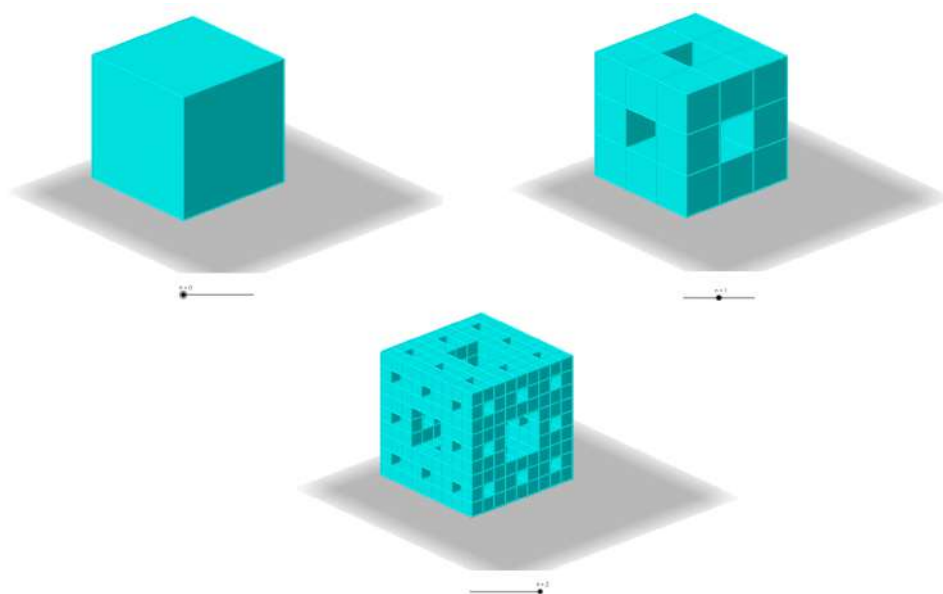


Figura 63 – Cubo inicial e as duas primeiras iterações da esponja de Menger no GeoGebra.  
Fonte: autoria própria.

### 2.2.9 Curva de Peano

Para construir esse fractal, os seguintes passos devem ser executados:

Passo 1 - Criar dois pontos  $A$  e  $B$ ;

Passo 2 - Digitar os comandos " $A + (B - A)/3$ " e " $A + (B - A)2/3$ " para criar os pontos  $C$  e  $D$ ;

Passo 3 - Usando a ferramenta "Polígono Regular", criar um quadrado clicando nos pontos  $C$  e  $D$ , e outro clicando nos pontos  $D$  e  $C$  (nessa ordem);

Passo 4 - Ocultar  $pol1$  e  $pol2$ , deixando visíveis apenas os pontos que representam seus vértices;

Passo 5 - Digitar " $l1=\{A,C,F,E,D,H,G,C,D,B\}$ " na janela de álgebra (nessa ordem);

Passo 6 - Criar uma nova ferramenta, com " $l1$ " na aba "objetos finais" e os pontos  $A$  e  $B$  na aba "objetos iniciais". Chame a nova ferramenta de "Curva de Peano";

Passo 7 - Apagar todos os objetos visíveis na janela de visualização;

Passo 8 - Utilizando a planilha, criar um ponto na célula  $A1$  e outro na célula  $B1$ ;

Passo 9 - Na célula  $A2$ , digitar " $CurvadePeano(A1,B1)$ ";

Passo 10 - Na célula  $B2$  digitar " $Sequência(Segmento(Elemento(A2,i), Elemento(A2,i+1)),i, 1, Comprimento(A2)-1)$ ";

Passo 11 - Na célula  $A3$ , digitar " $Concatenar(Sequência(CurvadePeano(Elemento(A2,i), Elemento(A2,i+1)),i,1,Comprimento(A2)-1)$ ";

Passo 12 - Arrastar a célula  $B2$  até a  $B3$ , a  $A3$  até a  $A5$  e finalmente, a  $B3$  até a  $B5$ ;

Passo 13 - Ocultar objetos da célula  $A3$  até a  $A5$ ;

Passo 14 - Criar um controle deslizante (chame-o de " $a$ ") variando em números inteiros, indo de 0 a 5 e com incremento de 1;

Passo 15 - Nas configurações avançadas das células  $B2$ ,  $B3$ ,  $B4$  e  $B5$ , novamente em "Condições para Exibir Objeto(s)", digitar " $0 < a$ ", " $1 < a$ ", " $2 < a$ " e " $3 < a$ ", respectivamente.



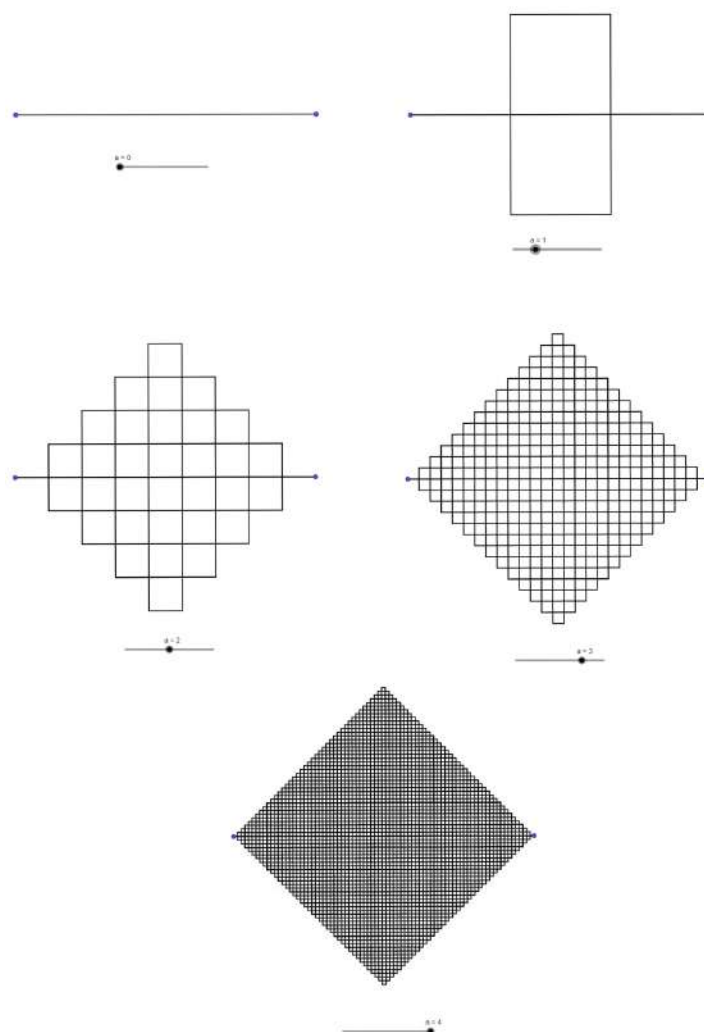


Figura 64 – Segmento inicial e as quatro primeiras iterações da curva de Peano no GeoGebra. Fonte: autoria própria.

### 2.2.10 Curva de Hilbert

Para construir esse fractal, os seguintes passos devem ser executados:

Passo 1 - Criar um controle deslizante (chame-o de “d”) que varia em números inteiros, com valor mínimo 1, valor máximo 6 e com incremento 1;

Passo 2 - Com a ferramenta “Polígono Regular” a partir de dois pontos  $A$  e  $B$ , construa um quadrado “pol1”;

Passo 3 - Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, marque o centro de “pol1” e chame-o de “M”;

Passo 4 - Digitar “ $lv = \{A, B, C, D\}$ ”, lista com vértices do pol1;

Passo 5 - Digitar “ $lp1=Sequência(PontoMédio(M,lv(i)),i,1,4)$ ”;

Passo 6 - Digitar “ $ls1=Segmento(lp1(1),lp1(4)),Segmento(lp1(1),lp1(2)),Segmento(lp1(2),lp1(3))$ ” e, na opção “Propriedades/Avançado/Condições de Exibição do Objeto”, inserir “ $d=1$ ”;

Passo 7 - Digitar “ $K=PontoMédio(lv(1),lv(4))$ ” e “ $Q=PontoMédio(lv(2),lv(3))$ ”;

Passo 8 - Digitar “ $lp2=PontoMédio(K,lp1(4)),PontoMédio(K,lp1(1)),PontoMédio(Q,lp1(3)),PontoMédio(Q,lp1(2)),PontoMédio(M,lp1(1)),PontoMédio(M,lp1(2))$ ”;

Passo 9 - Digitar “ $E1=Segmento(lp2(2),lp2(1)),Segmento(lp2(3),lp2(4)),Segmento(lp2(5),lp2(6)),Homotetia(ls1,1/2,lv(1)),Homotetia(ls1,1/2,lv(2)),Girar(Homotetia(ls1,1/2,lv(4)),90°,lp1(4)),Girar(Homotetia(ls1,1/2,lv(3)),-(90°),lp1(3))$ ” e, na opção “Propriedades/Avançado/Condições de Exibição do Objeto”, inserir “ $d=2$ ”;

Passo 10 - Digitar “ $lp3=PontoMédio(K,lp2(1)),PontoMédio(K,lp2(2)),PontoMédio(Q,lp2(3)),PontoMédio(Q,lp2(4)),PontoMédio(M,lp2(5)),PontoMédio(M,lp2(6))$ ”;

Passo 11 - Digitar “ $E2=Segmento(lp3(2),lp3(1)),Segmento(lp3(3),lp3(4)),Segmento(lp3(5),lp3(6)),Homotetia(E1,1/2,lv(1)),Homotetia(E1,1/2,lv(2)),Girar(Homotetia(E1,1/2,lv(4)),90°,lp1(4)),Girar(Homotetia(E1,1/2,lv(3)),-(90°),lp1(3))$ ” e, na opção “Propriedades/Avançado/Condições de Exibição do Objeto”, inserir “ $d=3$ ”;

Passo 12 - Digitar “ $lp4=PontoMédio(K,lp3(1)),PontoMédio(K,lp3(2)),PontoMédio(Q,lp3(3)),PontoMédio(Q,lp3(4)),PontoMédio(M,lp3(5)),PontoMédio(M,lp3(6))$ ”;

Passo 13 - Digitar “ $E3=Segmento(lp4(2),lp4(1)),Segmento(lp4(3),lp4(4)),Segmento(lp4(5),lp4(6)),Homotetia(E2,1/2,lv(1)),Homotetia(E2,1/2,lv(2)),Girar(Homotetia(E2,1/2,lv(4)),90°,lp1(4)),Girar(Homotetia(E2,1/2,lv(3)),-(90°),lp1(3))$ ” e, na opção “Propriedades/Avançado/Condições de Exibição do Objeto”, inserir “ $d=4$ ”;

Passo 14 - Digitar “ $lp5=PontoMédio(K,lp4(1)),PontoMédio(K,lp4(2)),PontoMédio(Q,lp4(3)),PontoMédio(Q,lp4(4)),PontoMédio(M,lp4(5)),PontoMédio(M,lp4(6))$ ”;

Passo 15 - Digitar “ $E4 = \text{Segmento}(lp5(2),lp5(1)), \text{Segmento}(lp5(3),lp5(4)), \text{Segmento}(lp5(5),lp5(6))$  Homotetia( $E3,1/2,lv(1)$ ), Homotetia( $E3,1/2,lv(2)$ ), Girar(Homotetia( $E3,1/2,lv(4)$ ),  $90^\circ lp1(4)$ ), Girar(Homotetia( $E3,1/2,lv(3)$ ),  $-(90^\circ),lp1(3)$ )” e, na opção “Propriedades/Avançado/Condições de Exibição do Objeto”, inserir “ $d=5$ ”;

Passo 16 - Digitar “ $lp6 = \text{PontoMédio}(K,lp5(1)), \text{PontoMédio}(K,lp5(2)), \text{PontoMédio}(Q,lp5(3)), \text{PontoMédio}(Q,lp5(4)), \text{PontoMédio}(M,lp5(5)), \text{PontoMédio}(M,lp5(6))$ ”;

Passo 17 - Digitar “ $E5 = \text{Segmento}(lp6(2),lp6(1)), \text{Segmento}(lp6(3),lp6(4)), \text{Segmento}(lp6(5),lp6(6))$ , Homotetia( $E4,1/2,lv(1)$ ), Homotetia( $E4,1/2,lv(2)$ ), Girar(Homotetia( $E4,1/2,lv(4)$ ),  $90^\circ,lp1(4)$ ), Girar(Homotetia( $E4,1/2,lv(3)$ ),  $-(90^\circ),lp1(3)$ )” e, na opção “Propriedades/Avançado/Condições de Exibição do Objeto”, inserir “ $d=6$ ”;

Passo 18 - Ocultar todos os pontos e lista de pontos da construção.

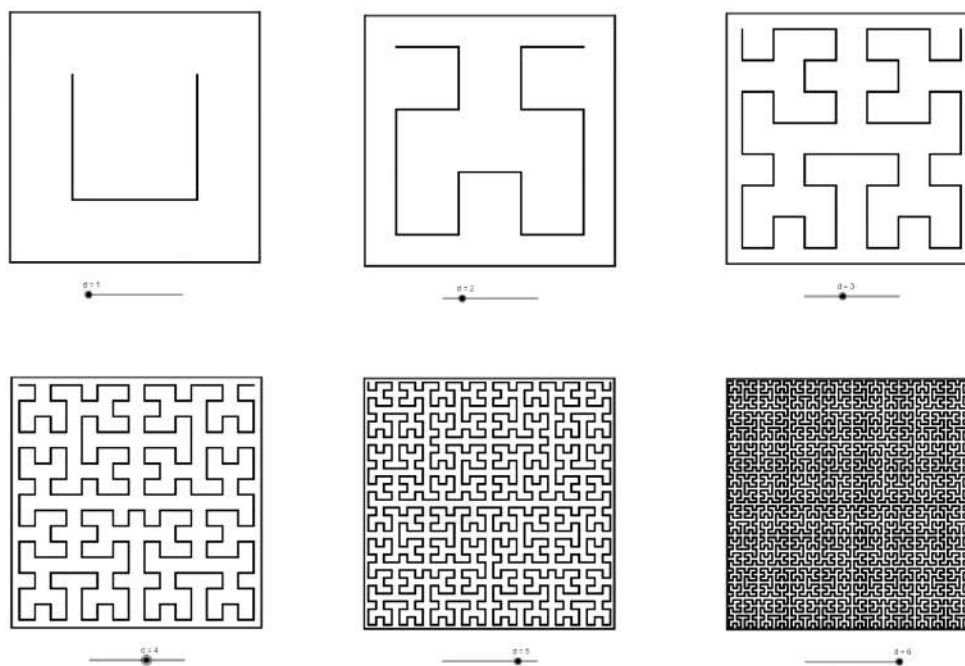


Figura 65 – Figura inicial e cinco primeiras iterações da curva de Hilbert no GeoGebra.  
Fonte: autoria própria.

A submissão desse artigo e a elaboração do livro dentro da plataforma GeoGebra marcaram o fechamento deste primeiro ciclo de iniciação científica, deixando também ideias de projetos futuros, como é o caso do artigo sobre os fractais do plano complexo que será melhor explicado no capítulo 4.

### 3 Estudos sobre Dimensão Fractal

Durante nosso segundo projeto de Iniciação Científica, nos debruçamos sobre o estudo de dimensão fractal, tema que vamos falar de forma mais aprofundada neste capítulo. O conceito de dimensão fractal merece uma atenção especial, pois foi a partir dele que pudemos relacionar a Geometria Fractal com outras áreas. Já existem diversos trabalhos publicados sobre o uso da dimensão fractal, dentre tantos já publicados, trouxemos alguns exemplares vistos durante uma revisão bibliográfica. Tratam-se de trabalhos de variadas áreas do conhecimento:

*Self-similar characteristics of the currency exchange rate in an economy in transition*(28).

Este trabalho apresenta uma análise das características autossimilares das séries temporais que descrevem a taxa de câmbio diária da unidade monetária romena “Leu” (ROL) em relação ao dólar americano (USD). A relevância desta investigação consiste em a taxa de câmbio ser um indicador adequado da dinâmica de uma economia em transição de uma estrutura de comando para uma de mercado aberto.

*Fractal Analysis of Nuclear Medicine Images for the Diagnosis of Pulmonary Emphysema Interpretations, Implications, and Limitations*(30).

Este artigo trata de um estudo focado na quantificação da distribuição heterogênea do radioaerossol da partícula de carbono nos pulmões através do cálculo da dimensão fractal de imagens obtidas em exames de medicina nuclear e dentre as conclusões está a sugestão de uso de análise fractal na prática clínica apenas com controle cuidadoso e compreensão completa dos significados físicos, por não ser tão precisa para um certo grau de pontos focais de baixa radioatividade mas ainda funcionar como parte integrante de uma base ampla de resultados que corroboram com as conclusões dos exames padrão.

*Applications of Fractals to Soil Studies - Capítulo do livro “Applications of Fractals to Soil Studies”*(27).

Discorre sobre a utilização de dimensão fractal para avaliar a mineralogia e as propriedades químicas dos solos, classificando-os quanto a esses parâmetros e identificando mudanças nos solos a partir de mais de uma análise, após certo intervalo de tempo, por exemplo. A análise pode ser feita através da observação de imagens da estrutura do solo, indiretamente a partir da densidade do solo ou dados de porosimetria (medição de porosidade) de mercúrio, por exemplo.

*Applications of fractals in medicine*(32).

Este trabalho apresenta um estudo direcionado à avaliação da dimensão fractal das estruturas fractais presentes nas nossas retinas, a fim de identificar aquelas que possuem algum tipo de patologia, diferenciando-as das que são saudáveis. Os resultados deste estudo foram positivos, mostrando que a dimensão fractal deste tipo de estrutura é realmente um bom indicador de normalidade ou anormalidade.

*Using Fractal Analysis in Modeling Trends in the National Economy* (31).

Como o próprio resumo diz,

O estudo tem como objetivo desenvolver uma metodologia de análise da tendência de concentração das atividades econômicas no núcleo central da rede policêntrica nacional. Foi realizada uma projeção espacial na plataforma ArcGIS, para o período 2000-2012, contendo o número de empresas, número de empregados, volume de negócios e lucro. As imagens originais foram convertidas em imagens criadas em tons de cinza de 8 bits (usando o software de código aberto ImageJ) e então analisadas pelo algoritmo Higuchi 1D Fractal Dimension usando o software de código aberto IQM Higuchi fractal dimension nos forneceu informações muito úteis sobre mais ou menos caótico disposto no espaço pelo número de empresas, o lucro, o número de funcionários e a rotatividade. (ANDRONACHE, 2016)

Os trabalhos apresentados acima reforçam a aplicabilidade deste conceito nas mais variadas áreas do conhecimento.

Apresentaremos agora dois tipos de dimensão: a dimensão de Hausdorff e a dimensão

de *Box-Counting*, que são formas diferentes de indicar a dimensão fractal. Existem diversas formas de discorrer sobre o que é dimensão. Uma delas considera que a dimensão é uma medida que indica quão densamente um objeto ocupa seu lugar no espaço que o situa. O fato de alguns fractais possuírem formas incomuns, alguns com uma infinidade de “buracos”, outros com uma infinidade de traços e outras características do tipo motivaram o estudo da sua dimensão. Além disso, apresentaremos também alguns exemplos de cálculo de dimensão com fractais autossimilares. Observamos nesse ponto que há uma série de conceitos e definições básicas decorrentes da topologia e da análise que não serão apresentadas aqui, mas que não prejudicam o entendimento dos conteúdos desse capítulo, uma vez que vamos sempre direcionar o entendimento de cada definição e construção. Um exemplo do que foi dito agora é o conceito de diâmetro, que para todo o estudo de dimensões fractais que será desenvolvido a seguir será utilizado e é válido lembrar que para um conjunto não vazio qualquer  $U \subset \mathbb{R}^n$ , seu diâmetro é definido como  $|U| = \max\{|x - y|, x, y \in U\}$ , ou seja, a maior distância entre dois pontos de  $U$ .

### 3.1 Dimensão de Hausdorff

O primeiro método de dimensão que iremos apresentar é a dimensão de Hausdorff, apresentada em 1918 pelo matemático alemão Felix Hausdorff e bastante conhecida por caracterizar as dimensões de objetos da geometria euclidiana (pontos com dimensão 0, retas com dimensão 1, figuras planas com dimensão 2 e figuras espaciais com dimensão 3). Nesta seção iremos apresentar as definições de conceitos prévios necessários para compreender o que é a dimensão de Hausdorff, além da sua definição propriamente dita e alguns exemplos no cálculo da dimensão de fractais autossimilares.

**Definição 3.1** ( $\delta$ -cobertura). Dado um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $\{U_i\}$  uma coleção enumerável (finita ou não) de conjuntos cujo diâmetro é menor que ou igual a  $\delta$  que cobre  $F$ , isto é,  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  e  $0 < |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$ , dizemos que  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ .

**Definição 3.2.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $s \geq 0$ . Para todo  $\delta > 0$ , iremos definir a *medida de Hausdorff* como sendo

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s; \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}.$$

Em outras palavras, observando o conjunto de todos os valores das somas das potências dos diâmetros de  $\delta$ -coberturas de  $F$ ,  $H_\delta^s(F)$  é o ínfimo deste conjunto, isso significa que precisamos minimizar a soma destas potências para obter  $H_\delta^s(F)$ .

Perceba que à medida que  $\delta$  diminui, a classe de  $\delta$ -coberturas de  $F$  também é reduzida, uma vez que vamos desconsiderar coberturas com conjuntos de diâmetros maiores, dessa forma, isso provoca um certo refinamento de modo que  $H_\delta^s(F)$  diminui, ou pelo menos não aumenta, à medida que  $\delta \rightarrow 0$ , e assim se aproxima de um limite. Concluimos assim que está bem definida a quantidade  $H^s(F)$  dada pela expressão a seguir

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F).$$

Considerando 0 ou  $\infty$ , esse limite sempre existe para qualquer subconjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.3.** Chamamos  $H^s(F)$  de *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $F$* .

É possível mostrar que  $H^s(\emptyset) = 0$  e que se  $E$  está contido em  $F$ , então  $H^s(E) \leq H^s(F)$ , que são propriedades esperadas de uma medida. Além disso, se  $\{F_i\}$  é qualquer coleção contável de conjuntos, então

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i).$$

É possível mostrar, não faremos aqui, que  $H^s$  é de fato uma medida em  $\mathbb{R}^n$ .

Faremos agora uma série de conclusões acerca das definições apresentadas, essas nos levarão à definição da dimensão de Hausdorff.

Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta < 1$ .

**Afirmção**  $H^s(F)$  é não crescente com relação a  $s$ .

*Demonstração.* Temos que  $H_\delta^s(F)$  não é crescente com  $s$ , pois como o diâmetro dos conjuntos são menores do que 1, as somas das potências dos diâmetros não aumentam. Como por definição  $H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$ , então  $H^s(F)$  também é não crescente com relação a  $s$ .

Vamos agora indagar sobre a relação entre as somas das potências dos diâmetros para potências distintas.

**Afirmção:** Se  $t > s$  então  $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$ .

*Demonstração:* Se  $t > s$  e  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$

Portanto, tomando o ínfimo de ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F).$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , podemos observar que se  $H^s(F)$  é finito, então  $H^t(F) = 0$  sempre que  $t > s$ . Assim, certamente há no gráfico de  $H^s(F)$  um ponto no qual o valor de  $H^s(F)$  salta de  $\infty$  para 0. A este valor para o qual o gráfico “salta” é dado o nome de *Dimensão de Hausdorff* de  $F$ , denotado por  $\dim_H F$ .

**Definição 3.4.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$ . A *dimensão de Hausdorff* de  $F$  é dada por

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0; H^s(F) = 0\} = \sup\{s; H^s(F) = \infty\}.$$

Assim,  $H^s(F) = \infty$ , se  $0 \leq s < \dim_H F$  e  $H^s(F) = 0$ , se  $s > \dim_H F$ . Observe o gráfico abaixo.

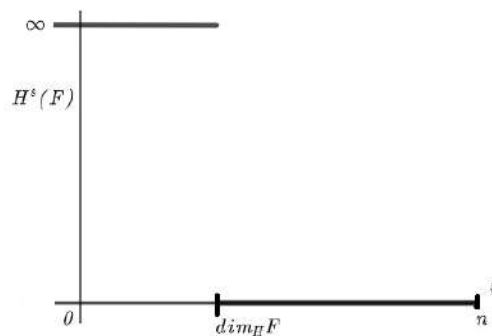


Figura 66 – Ideia geométrica da definição de dimensão de Hausdorff. Fonte: (3)

Se  $s = \dim_H F$ , então  $H^s(F)$  pode ser zero ou infinito ou pode satisfazer  $0 < H^s(F) < \infty$ .

Ao observar a quantidade de conceitos prévios necessários para definir a dimensão de Hausdorff e o modo como é definida, é perceptível que uma desvantagem desse método é a dificuldade que podemos enfrentar para calcular a dimensão de certos conjuntos.



A seguir iremos calcular a dimensão de Hausdorff de dois fractais, o primeiro é a poeira de Cantor, que ainda não foi apresentado neste trabalho, e o segundo é o conjunto de Cantor. Mais ainda, faremos o cálculo da dimensão do conjunto de Cantor utilizando os dois métodos (ainda não apresentamos o método de *box-counting*) com o objetivo de comparar os dois valores e cálculos envolvidos em cada um dos métodos.

**Exemplo 3.1.** (A poeira de Cantor). Como foi dito acima, este fractal ainda não foi apresentado, então é preciso entender como se dá seu processo de formação. Inicialmente temos um quadrado  $E_0$  de lado  $l$ , e dividindo cada uma de suas arestas em quatro partes iguais, formamos 16 novos quadrados iguais de lado  $\frac{l}{4}$ . Em seguida, numeramos cada quadrado a partir do canto superior esquerdo e seguindo da esquerda para a direita, removemos alguns quadrados, deixando apenas os de número 3, 5, 12 e 14. Repetindo esse processo em cada iteração para cada um dos quadrados restantes da iteração anterior, onde representaremos por  $E_n$  a  $n$ -ésima iteração. Na figura seguinte podemos ver os conjuntos  $E_0, E_1, E_2$  e  $E_3$ .

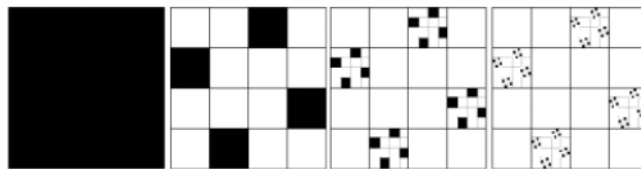


Figura 67 – Da esquerda para a direita, conjuntos  $E_0, E_1, E_2$  e  $E_3$ . Fonte: (33)

Afirmamos que a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor é 1.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, considere  $F$  a poeira de Cantor partindo de um quadrado de lado  $l = 1$ . Em sua  $n$ -ésima iteração, vamos tomar a cobertura dada por  $4^n$  quadrados de lado  $4^{-n}$ , ou seja, de diâmetro  $\delta = 4^{-n}\sqrt{2}$  em  $E_n$  (diagonal de um quadrado de lado  $4^{-n}$ , pois a diagonal do quadro é o seu diâmetro), assim obtemos uma estimativa para  $H_\delta^1(F) \leq 4^n 4^{-n}\sqrt{2}$ , pois somamos os diâmetros  $4^{-4}\sqrt{2}$  elevado a 1 (que é o índice  $s$  escolhido para a estimativa) dos  $4^n$  quadrados. Certamente, quando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $\delta \rightarrow 0$ , o que nos dá  $H^1(F) \leq \sqrt{2}$ . Sabemos que a aplicação da projeção ortogonal é Lipschitziana, isto é,  $d(proj(x), proj(y)) \leq d(x, y)$  sendo  $x, y \in \mathbb{R}^2$  e pela forma como  $F$  é

construído, temos que  $proj(F) = [0, 1]$  logo

$$1 = diam([0, 1]) = H^1([0, 1]) = H^1(proj(F)) \leq H^1(F).$$

A última desigualdade decorre da propriedade da medida de Hausdorff de uma aplicação Lipschitziana. Sendo assim, mostramos que  $1 \leq H^1(F) \leq \sqrt{2}$  e assim caímos no caso em que a medida de Hausdorff é finita para  $s = 1$ , logo  $\dim_H F = s = 1$ .

Agora iremos realizar o cálculo da dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor, que já foi apresentado neste trabalho.

**Exemplo 3.2.** Considere  $F$  o conjunto de Cantor. Afirmamos que se  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , então  $\dim_H F = s$  e  $\frac{1}{2} \leq H^s(F) \leq 1$ .

*Demonstração.* Vamos considerar o conjunto de Cantor partindo do ponto  $(0, 0)$  e indo até o ponto  $(1, 0)$ . Após sua primeira iteração, vamos retirar o terço médio e dividir esse intervalo em duas partes, são elas a esquerda  $F_E = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ , e a direita  $F_D = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Temos que  $F = F_E \cup F_D$ , e ambas as partes são semelhantes a  $F$ , distintas a menos de um fator de redução igual a  $\frac{1}{3}$ . Dessa forma, pela propriedade da união disjunta de medidas,

$$H^s(F) = H^s(F_E) + H^s(F_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F),$$

sendo o ponto crítico  $s = \dim_H F$ , e assumindo que  $\frac{1}{2} \leq H^s(F) < 1$ , podemos dividir ambos os lados na igualdade acima por  $H^s(F)$ , obtendo  $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s$ , e assim temos que  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Resta agora provar que  $\frac{1}{2} \leq H^s(F) < 1$  de fato é verdade. Com efeito, ao observar a  $k$ -ésima iteração do conjunto de Cantor, temos  $2^k$  intervalos de tamanho igual a  $3^{-k}$ . Dessa forma, tomando  $\delta = 3^{-k}$  na definição de medida de Hausdorff, podemos concluir que  $H_{3^{-k}}^s(F) = \sum (3^{-k})^s = 2^k (3^{-k})^s \leq 2^k 3^{-ks} = 1$ , já que  $s = \log_2 3$ . Portanto, se fizermos  $k \rightarrow \infty$ , obtemos  $H^s \leq 1$ .

Mostrar que  $\frac{1}{2} \leq H^s(F)$  é, em outras palavras, mostrar que

$$\sum |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2},$$

para  $s = \log_2 3$  e para qualquer cobertura  $|U_i|$ . Como o conjunto de Cantor parte de um intervalo, é natural assumir que essas coberturas são intervalos, e mais do que isso,

tratam-se de intervalos fechados contidos no intervalo  $[0, 1]$ . Sendo assim, para cada  $U_i$ , considere o número inteiro  $k$  tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Perceba que por possuir diâmetro (e neste caso comprimento) da forma como está descrito acima,  $U_i$  pode intersectar no máximo um intervalo da  $k$ -ésima iteração do conjunto de Cantor, visto a distância entre esses intervalos é no mínimo  $3^{-k}$ . Seguindo o mesmo raciocínio, se  $j \geq k$ , então  $U_i$  intersecta no máximo  $2^{j-k}$  subintervalos da  $j$ -ésima iteração do fractal. Por outro lado,  $2^{-k} = 3^{-sk}$  e  $3^{-sk} \leq 3^s |U_i|^s$ , portanto  $2^{j-k} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ . Assim, tomando  $j$  grande o suficiente para termos  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  para todo intervalo  $U_i$ , então  $U_i$  intersecta todos os  $2^j$  subintervalos de tamanho  $3^{-j}$  da iteração e a contagem de intervalos nos diz que  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ , e dividindo ambos os lados da última desigualdade por  $2^j$ , obtemos  $1 \leq \sum_i 3^s |U_i|^s$ , e como  $3^s = 2$  (pois  $3^{-s} = \frac{1}{2}$ ), ao dividirmos ambos os lados desta última inequação ficamos com  $\frac{1}{2} \leq \sum |U_i|^s$ , concluindo assim a demonstração.

## 3.2 Dimensão de *Box-Counting*

A dimensão de *box-counting* funciona exatamente da maneira que sugere: devemos “contar caixas”, mas não de forma aleatória, devemos seguir alguns passos e observar o que acontece à medida que o tamanho das caixas diminui. Assim como foi feito para a dimensão de Hausdorff, a seguir serão apresentados os conceitos prévios necessários para a compreensão da dimensão de *box-counting* e a sua definição propriamente dita, além de alguns exemplos. Dentre os exemplos estará o cálculo da dimensão de *box-counting* do conjunto de Cantor, para efeito de comparação com os cálculos e com o valor obtido através do método de Hausdorff.

**Definição 3.5** (*Box dimension*). Dado um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^2$ , denotamos por  $N_\delta(F)$  (para cada  $\delta > 0$ ) o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que podem cobrir o conjunto  $F$ , indicando o número de partes de tamanho aproximadamente  $\delta$  nos quais  $F$  pode ser dividido. A dimensão de  $F$  reflete a maneira como  $N_\delta$  cresce quando  $\delta \rightarrow 0$ . Se  $N_\delta(F)$  se aproxima de  $c\delta^{-s}$  para  $c$  e  $s$  constantes positivas, dizemos que  $F$  tem “*box dimension*”  $s$ . Para encontrar o valor de  $s$ , seguimos os seguintes passos lógicos:

Primeiramente temos que

$$N_\delta(F) \approx c \cdot \delta^{-s},$$

Portanto, tomando o logaritmo de base 10 em ambos os lados, ficamos com

$$\log N_\delta(F) \approx \log c - s \log \delta,$$

Assim, isolando  $s$  na relação acima, concluimos que

$$s \approx \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} + \frac{\log c}{\log \delta}.$$

e então podemos defini-lo como

$$s := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

com o segundo termo desaparecendo com o limite quando  $\delta$  tende a zero, pois nesse caso  $\log \delta \rightarrow -\infty$  e  $c$  é uma constante. Além disso, perceba que não podemos fazer uma afirmação semelhante para o primeiro termo, pois  $N$  depende de  $\delta$ .

**Definição 3.6** (Dimensões inferior e superior de *box-counting*). Seja  $F$  qualquer subconjunto não-vazio e limitado de  $\mathbb{R}^n$ . A *dimensão inferior* e a *dimensão superior de box-counting* de  $F$  são definidas da seguinte forma, respectivamente:

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Naturalmente,  $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$ , para qualquer subconjunto  $F$  limitado e não-vazio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.7** (Dimensão de *box-counting*). Se  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ , nos referimos a este valor como a dimensão de “*box-counting*” de  $F$  e denotamos por

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Daqui em diante vamos assumir que  $\delta > 0$  é pequeno o suficiente para garantir que  $-\log \delta$  e quantidades similares sejam estritamente positivos. Para evitar problemas como “ $\log 0$ ” ou “ $\log \infty$ ”, consideramos a *box-dimension* apenas para conjuntos limitados

e não-vazios.

Vale observar que existem diversas maneiras equivalentes de definir os conjuntos que formam as coberturas, a depender do formato das caixas mais cômodo em cada situação. Segundo (3), desde que os limites de dimensão inferior e superior existam, as seguintes maneiras de definir  $N_\delta(F)$  são equivalentes:

- (i) o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobrem  $F$ ;
- (ii) o menor número de bolas fechadas de raio  $\delta$  que cobrem  $F$ ;
- (iii) o menor número de cubos de lado  $\delta$  que cobrem  $F$ ;
- (iv) o número de cubos de lado  $\delta$  de uma malha quadriculada que intersectam  $F$ ;
- (v) o maior número de bolas disjuntas de raio  $\delta$  com centros em  $F$ .

As diferentes maneiras de definir  $N_\delta(F)$  estão ilustradas abaixo.

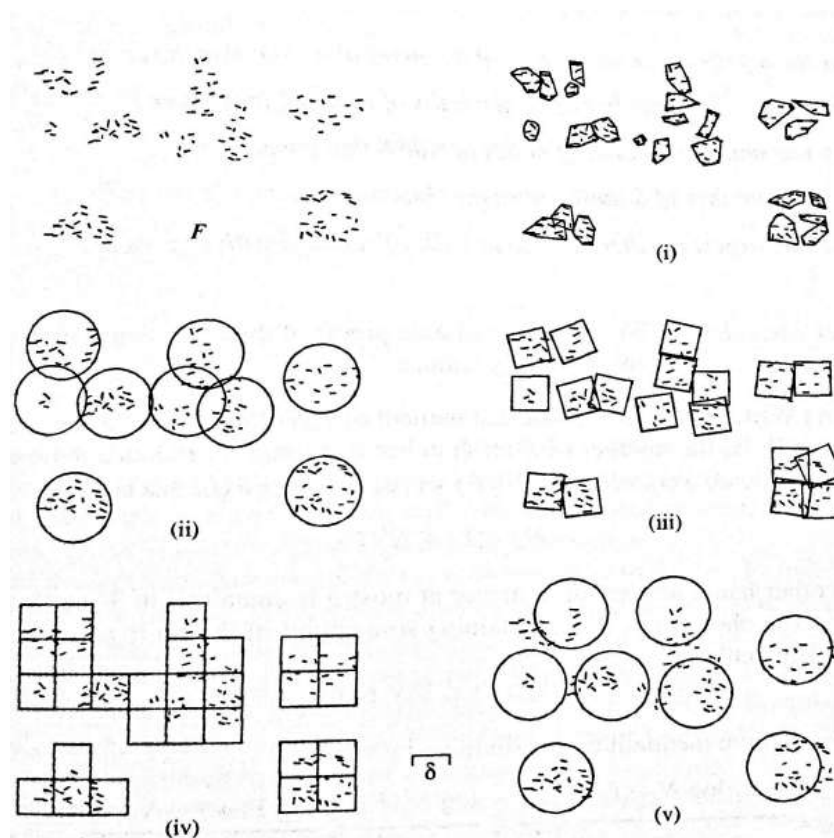


Figura 68 – Maneiras diferentes de definir as caixas. Fonte: (3)

Em nosso estudo (e na maioria das fontes que consultamos), foi utilizada a definição (iv).

A seguir será apresentado um exemplo do cálculo da dimensão fractal através de *box-counting*, mas precisamente do conjunto de Cantor:

**Exemplo 3.3.** Seja  $F$  o Conjunto de Cantor. Afirmamos que  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

*Demonstração.* De fato, se tomarmos  $\delta > 0$  satisfazendo  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ , então os  $2^k$  intervalos da  $k$ -ésima iteração de  $F$  cujos comprimentos são todos  $3^{-k}$  geram uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então  $N_\delta(F) \leq 2^k$ . Além disso, note que, após manipulações, vamos obter

$$\frac{1}{-\log 3^{-k}} \leq \frac{1}{-\log \delta} \leq \frac{1}{-\log 3^{-k+1}}.$$

Assim:

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{(k-1) \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento  $\delta$  com  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$  intersecta no máximo um dos intervalos da  $k$ -ésima etapa de comprimento  $3^{-k}$  usados na construção de  $F$  (o espaço entre os intervalos da  $k$ -ésima etapa é ao menos  $3^{-k}$ ). Existem  $2^k$  intervalos semelhantes, todos contendo pontos de  $F$ , então ao menos  $2^k$  intervalos de comprimento  $\delta$  são necessários para cobrir  $F$ . Portanto  $N_\delta(F) \geq 2^k$ , então

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{k \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Assim, como as dimensões inferior e superior de  $F$  possuem o mesmo valor  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , podemos concluir que a dimensão de *box-counting* do Conjunto de Cantor é de fato  $\frac{\log 2}{\log 3}$ .

Perceba que a dimensão de Hausdorff e de *Box-Counting* do conjunto de Cantor coincidem, mas nem sempre isso acontece. Em (3), podemos encontrar conjuntos onde  $\dim_H(F) \neq \dim_B(F)$ . Vale ressaltar que embora estas definições não sejam equivalentes, isto é, para um mesmo conjunto podemos encontrar valores diferentes associados as dimensões dadas, elas atendem ao que se propõe, medir o nível de rugosidade de um fractal.

Já calculamos, na seção 1.2.1, a dimensão do triângulo de Sierpinski utilizando a razão entre o número de partes da figura resultantes de uma divisão em partes iguais e

o fator de redução dessa divisão. Agora calcularemos a dimensão de deste fractal mais formalmente, através do método de *box-counting* e apesar de ser um método distinto do utilizado anteriormente, iremos obter o mesmo valor.

**Exemplo 3.4.** Seja  $F$  o Triângulo de Sierpinski originado a partir de um triângulo cuja medida de lado é 1. Então,  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 3}{\log 2}$ .

*Demonstração.* O  $k$ -ésimo estágio da construção deste fractal consiste de  $3^k$  triângulos equiláteros de lado medindo  $2^{-k}$  (considere  $2^{-k}$  o diâmetro de cada um desses triângulos). Dessa forma, se tomarmos  $\delta$  tal que  $2^{-k} < \delta \leq 2^{-k+1}$ , os  $3^k$  triângulos da  $k$ -ésima iteração formam uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então  $N_\delta(F) \leq 3^k$ . Realizando algumas manipulações, podemos concluir que

$$\frac{1}{-\log 2^{-k}} \leq \frac{1}{-\log \delta} \leq \frac{1}{-\log 2^{-k+1}}$$

Então

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{-\log 2^{k+1}} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Agora que calculamos a dimensão superior deste conjunto, partiremos para o cálculo de sua dimensão inferior. Para tanto, perceba que qualquer conjunto do plano com diâmetro  $\delta$ , em que  $2^{-k-1} \leq \delta < 2^{-k}$ , pode intersectar até 3 dos triângulos da  $k$ -ésima iteração do triângulo de Sierpinski e além disso, tal conjunto não pode intersectar dois triângulos com distância maior que ou igual a  $2^{-k}$ . Como sabemos, existem  $3^{-k}$  triângulos na  $k$ -ésima iteração deste fractal, todos contendo pontos de  $F$ , então são necessários pelo menos  $\frac{3^{-k}}{3}$  conjuntos de diâmetro  $\delta$  ou menor para cobrir  $F$ . Consequentemente  $N_\delta(F) \geq 3^{k-1}$ . Além disso,

$$\frac{1}{-\log 2^{-k-1}} \leq \frac{1}{-\log \delta}.$$

Então

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^{k-1}}{-\log 2^{-k-1}} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Novamente encontramos valores iguais para as dimensões superior e inferior de  $F$ , então podemos concluir que  $\dim_B F = \frac{\log 3}{\log 2}$ , finalizando assim a demonstração.

Como pudemos perceber, o cálculo da dimensão fractal através de *box-counting* é mais simples de fazer do que através do método de Hausdorff, pois apresenta mais de uma forma para definir as  $\delta$ -coberturas, o que é bem confortável, uma vez que à medida que o problema varia, podemos escolher o tipo de cobertura que mais convém. Por se mostrar mais simples até no cálculo de dimensão de fractais autossimilares, decidimos seguir com a utilização de *box-counting* nos nossos estudos futuros, como será discutido no capítulo 4.



## 4 Comentários Adicionais e Estudos Futuros

Apresentaremos agora comentários relevantes sobre o desenvolvimento deste trabalho, mas que não fazem parte da metodologia do mesmo, por isso resolvemos separar em um capítulo a parte. Além disso, visando a continuidade dos estudos e pesquisas nesta área, apresentaremos algumas de nossas ideias para trabalhos futuros.

### 4.1 Trabalhos Desenvolvidos

Nesta seção apresentaremos os trabalhos relacionados ao tema desta monografia que foram desenvolvidos até dezembro de 2021 dispondo-os em ordem cronológica. Estes trabalhos tiveram forte importância na formação do graduando por permitir que aprendesse a digitar textos matemáticos em  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , aumentasse seu rigor matemático (com a escrita de resumos e dos trabalhos propriamente ditos), se familiarizasse mais com o ato de falar em público, enriquecesse seu currículo na intenção de seguir carreira acadêmica e adquirisse experiência no geral através de participações em eventos dentro e fora do estado.

#### 4.1.1 Pôster no V EMPA

No V Encontro de Matemática Pura e Aplicada (EMPA) da Universidade Estadual da Paraíba, apresentamos um pôster intitulado “Geometria Fractal: Dimensão fractal como medida de rugosidade e previsão de padrões não recorrentes”, que tratava das principais características e sobre as primeiras ideias das dimensões de Hausdorff e *Box-Counting*, como as vistas na introdução deste trabalho. O resumo desse pôster foi publicado nos anais do evento e pode ser acessado através do link

[<https://sites.google.com/view/empa-uepb/anais>](https://sites.google.com/view/empa-uepb/anais)

## Geometria Fractal: dimensão fractal como medida de rugosidade e previsão de padrões não recorrentes

Lucas Rodrigues Wanderley, Rafael Almeida Souto,  
 Maria Ângela Caldas Didier (orientadora), Thiago Yukio Tanaka (orientador)

Universidade Federal Rural de Pernambuco, PE, Brasil  
 lucaswanderley199@gmail.com, rafael17souto@outlook.com,  
 maria.didier@ufrpe.br, thiago.tanaka@ufrpe.br




**Resumo**

Neste trabalho, vamos apresentar conceitos básicos referentes à geometria fractal, como fractais, construção e curiosidades sobre área, perímetro e dimensão. Além disso, abordaremos o método de Box-Counting para cálculo de dimensão fractal e sua aplicação para fazer estimativas acerca do comportamento de eventos que ocorrem através de padrões não recorrentes.

**1. Introdução**

O termo fractal, do latim fractus, significa "quebrado", foi criado pelo matemático francês Benoit B. Mandelbrot. Em geral, podemos descrever os fractais como objetos geométricos cuja repetição de um processo que ocorre indefinidamente. Alguns deles podem possuir características de autossimilaridade.



**Figura 1:** Triângulo de Sierpinski (à esquerda); Floco de neve de Koch (à direita).

A geometria fractal se faz útil ao tentar descobrir formas que não obedecem aos padrões da geometria euclidiana, como algumas das formas da natureza: rochas, nuvens, ladeiras de montanhas, identificação de certas árvores e até pulmões humanos. Vamos tratar, além das técnicas citadas acima, um pouco das relações existentes acerca dessa geometria, que é o conceito de dimensão fractal e seu entendimento como uma medida de rugosidade. Abordaremos as duas principais formas de se obter a dimensão fractal: a dimensão de Hausdorff e o método de Box-Counting. Utilizando o conceito de dimensão é possível obter respostas pontuais para fenômenos não recorrentes. Por exemplo, no caso da bolsa de valores, utilizando o método de Box-Counting é possível estimar possíveis valores em que as ações podem estar no fim de determinada quantidade de anos, assumindo que a dimensão do gráfico de preço de determinada ação permanece constante ao decorrer desses anos. Assim, isso pode ajudar em tomadas de decisões nessas situações de risco.

**2. Conceitos Básicos**

Vamos definir alguns dos conceitos mais importantes dentro da geometria fractal.

**Definição 1 (Autossimilaridade)** Dizemos que um fractal é autossimilar quando qualquer parte é semelhante ao todo.

Um exemplo presente em nosso cotidiano é o brócolis romanesco. Cada botão tem a mesma forma do romanesco inteiro.



**Figura 2:** Autossimilaridade do Brócolis Romanesco

Uma outra definição importante para o nosso estudo é o de dimensão fractal. A dimensão de um objeto depende do seu formato e em geral representa o espaço que uma entidade ocupa no espaço métrico em que está inserida.

Na geometria fractal, o conceito de dimensão está associado ao formato do objeto em questão que corresponde ao grau de irregularidade em diferentes escalas, descrevendo a fragmentação, o que explica o fato de terem dimensão não inteira. Das duas principais maneiras para calcular a dimensão fractal são a dimensão de Hausdorff e o método de Box-Counting.

**Definição 2 (Dimensão de Hausdorff)** A dimensão de Hausdorff permite calcular a dimensão de objetos ditos "pontuais" e fractais formados por segmentos de linhas lineares - o caso dos fractais de Koch e Sierpinski. Para o cálculo da dimensão desses fractais usamos a dimensão de Hausdorff, sendo:

$$n = p \cdot D \Rightarrow D = \frac{\ln(p)}{\ln(n)} \quad (1)$$

onde  $n$  é a quantidade total de partes e  $p$  o fator de redução, definido pela razão entre a medida inicial e a medida final.

Para explicar esta fórmula, consideremos um quadrado, cujo lado vamos dividir em 2, 3 e 4 partes.



**Figura 3:** Passos para o cálculo da dimensão

Podemos verificar que, para qualquer que sejam as dimensões autossimilares temos que a equação (1) é satisfeita, ou seja, a dimensão do quadrado permanece constante, ou seja 2. Há casos em que temos fractais não autossimilares e para estes casos devemos utilizar o método de Box-Counting.

**Definição 3 (Dimensão com Box-Counting)** Consiste em um processo de contagem de quadrados para fractais planares ou cubos para esferas, que envolvem determinado objeto fractal. Iniciamos com um quadrado que cubra totalmente o fractal, logo em seguida construímos uma representação da mesma. A cada etapa reduzimos a medida do lado e contamos a quantidade de quadrados que cobrem alguma parte do objeto em questão. Repetido esse processo e calcula-se o valor de redução.

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)} \quad (2)$$

onde  $r$  representa a redução feita na medida e  $N$  quantidade de quadrados necessários para cobrir o objeto, assim o tempo é estabelecido em termos de um valor, que será a dimensão fractal ( $d$ ).



**Figura 4:** Construção do triângulo de Sierpinski.

Outro fractal famoso é o floco de neve de Koch. Para obtê-lo partimos de um triângulo equilateral de lado 1 e dividimos cada um de seus lados em 3 pedacinhos iguais de tamanho 1. Do longo meio de cada lado, construímos um novo triângulo equilátero de lado 1, além de "apagar" seus bases. Esse processo se repete indefinidamente, e assim é construído o floco de neve de Koch.



**Figura 5:** Construção do floco de neve de Koch

Alguns fractais, além de possuírem dimensão fractal, possuem valores de perímetro e área não infinitos. Como exemplo, podemos calcular passo a passo o perímetro do floco de neve e verificar que, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $27^n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  e  $1/3^n$  representam o número de triângulos e o perímetro do floco, respectivamente.

Da mesma forma, ao calcularmos a área do triângulo de Sierpinski, quando tomamos o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que a área do triângulo  $\rightarrow 1/3$ , ou seja 0.

**4. Aplicações de Teoria**

Como o triângulo de Sierpinski é um fractal autossimilar, podemos calcular sua dimensão utilizando o método de Hausdorff, tendo assim um exemplo de aplicação deste método:

$$D = \frac{\ln(3)}{\ln(3)} = 1,58 \quad (3)$$

Da mesma forma poderíamos calcular a dimensão do floco de neve e encontrar:

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1,26 \quad (4)$$

Por outro lado, ao tratarmos de padrões não recorrentes, é inviável calcular a dimensão fractal pelo método de Hausdorff, e é neste tipo de caso que devemos utilizar o método de Box-Counting. Vejamos o caso da bolsa de valores, onde podemos calcular a dimensão do gráfico utilizando a contagem de caixas:



Utilizando essa técnica da dimensão, é possível fazer estimativas do futuro desse gráfico, levando em conta a dimensão medida e comparada em anos anteriores.

Em trabalhos futuros, pretendemos entender e calcular com maior precisão essas e outras estimativas utilizando o conceito de dimensão fractal.

**Referências**

[1] MANDELBROT, Benoit B. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman, 1977.

[2] MANDRETTA, Vera Silvia Fraga. Estudo e Aplicações da Geometria Fractal. João Pessoa: Universidade Federal do Paraíba, 2013.

Figura 69 – Pôster de Geometria Fractal no V EMPA. Fonte: autoria própria.

### 4.1.2 Minicurso XIV SEMAT UFRPE

Durante o estudo de transformações geométricas, apresentadas neste trabalho no Capítulo 2, tivemos a ideia de ministrar um minicurso que discorresse sobre o conjunto dos números complexos. Este tema é desenvolvido na disciplina de *Números* do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da UFRPE, mas por não fazer parte efetiva do currículo de Matemática do Ensino Básico, muitos alunos dos anos iniciais dos cursos de graduação em Exatas que necessitam deste conhecimento (Matemática, Física, Engenharias) acabam tendo contato com esse assunto somente em alguma disciplina específica com um tratamento mais direcionado, e dessa forma, acabam tendo uma dificuldade maior para entender esse assunto. Aproveitamos o fato de as transformações geométricas aparecerem também na teoria dos números complexos (que por sua vez estão relacionados aos conjuntos de Julia e Mandelbrot) para elaborar o minicurso intitulado “Números complexos e os conjuntos de Julia e Mandelbrot”, que teve duração de dois dias na XIV Semana de

Matemática da UFRPE (SEMAT-UFRPE).



Figura 70 – Integrantes do grupo de pesquisa durante o minicurso da XIV SEMAT. Fonte: autoria própria.

### 4.1.3 Minicurso IV EEM UFRPE

No IV Encontro de Estudantes de Matemática (EEM) da Universidade Federal Rural de Pernambuco, apresentamos o minicurso de dois dias intitulado “Utilizando o software GeoGebra para a construção de fractais”, no qual mostramos como usar as funções básicas do software e ensinamos a construir os fractais árvore bifurcada, floco de neve de Koch, árvore pitagórica e esponja de Menger. A construção destes fractais envolve a utilização de diversas ferramentas da plataforma e de ferramentas que o próprio usuário deve criar, com a função “Criar Nova Ferramenta”. A escolha destes fractais foi pensada para que apresentássemos o máximo de ferramentas diferentes para os participantes do minicurso, pois sua criação requer o uso de listas, planilhas, criação de novas ferramentas e utilização da janela 3D e de outros recursos tridimensionais. Parte desses estudos está apresentada no Capítulo 2 desta monografia.

### 4.1.4 Pôsteres XXX CIC e XXXI CIC UFRPE

Por ter participado do Programa de Iniciação Científica (PIC) da UFRPE por dois anos, participei de dois Congressos de Iniciação Científica (CIC) da UFRPE, evento no qual os membros do PIC devem apresentar um pôster sobre o trabalho que desenvolveram em suas respectivas pesquisas. Os títulos dos pôsteres apresentados referentes à primeira e à segunda IC foram, respectivamente “Construção e cálculo de medidas de objetos fractais

com o GeoGebra” e “Dimensão fractal e séries temporais: como estes conceitos estão relacionados?”



Figura 71 – Pôster apresentado no XXX CIC UFRPE. Fonte: autoria própria.



Figura 72 – Pôster apresentado no XXXI CIC UFRPE. Fonte: autoria própria.

#### 4.1.5 Artigo de Divulgação para a Revista do Professor de Matemática

Durante os primeiros meses que seguiram a pandemia no ano de 2020, resolvemos dar início ao trabalho de escrita de um artigo de revisão sobre fractais e GeoGebra, relacionados com o tema da primeira IC. Após demasiada procura, vimos que não há muitos artigos de revisão envolvendo esse tema. Este trabalho está essencialmente escrito no Capítulo 2.

A revista escolhida foi a Revista do Professor de Matemática (RPM), da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), cujo título foi “Construção de Fractais Geométricos com o GeoGebra: Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski”. A RPM está com Qualis previsto B3 no novo Qualis. O fator principal para a escolha desta revista foi a influência que este trabalho pode ter no Ensino Básico, pela simplicidade dos conceitos e pelas manipulações envolvendo o GeoGebra.

Após a escolha da revista e submissão, que ocorreu ainda no ano de 2020, o retorno do artigo para revisão e a ressubmissão ocorreu no primeiro semestre de 2021, tendo aceite somente no segundo semestre de 2021. O artigo está para ser publicado na próxima edição, de número 104.



Figura 73 – Capa prevista do artigo para a RPM. Fonte: (13)

## 4.2 **Trabalhos Futuros**

Durante nossa segunda IC, de Setembro de 2020 até Agosto de 2021, direcionamos o estudo dos fractais ao conceito de dimensão fractal, pois esta era uma maneira de trabalharmos com um estudo aplicado dessa teoria. Achamos incrível a quantidade de aplicações que poderiam ser feitas a partir deste conceito. Neste trabalho, não conseguimos apresentar as aplicações do estudo de fractais, mas achamos pertinente construir o capítulo 3 sobre os métodos de dimensão fractal para que os estudos apresentados fossem suficientes para que qualquer discente de graduação pudesse ter um material completo mas de nível básico sobre fractais.

Dentre essas aplicações, apresentaremos agora algumas que nos chamaram atenção, que foram parcialmente desenvolvidas durante a IC e serão retomadas em estudos futuros.

### 4.2.1 Estatística - dois modos de obter o coeficiente de Hurst

Diversos estudos de estatística foram desenvolvidos durante a segunda IC, mas não foram escritos aqui por não terem um direcionamento final para a parte de aplicações. Ao analisar diversos materiais já publicados acerca de dimensão fractal, um termo que apareceu algumas vezes nos chamou atenção: o Coeficiente de Hurst. Esta ferramenta estatística funciona como um medidor de memória longa em séries temporais, que são conjuntos de dados sobre determinado objeto de estudo dispostos de forma ordenada no tempo.

De maneira superficial, o coeficiente de Hurst aponta o quão interdependentes são os elementos de uma série temporal à medida que a variação de tempo aumenta. Acontece que existe uma maneira puramente estatística de obter o coeficiente de Hurst e uma maneira que lança mão de uma relação envolvendo dimensão fractal, a relação  $H = 2 + D$ , na qual  $D$  é a dimensão fractal e  $H$  o coeficiente de Hurst. Esta relação foi descrita pelo próprio Mandelbrot em seu livro *The Fractal Geometry of Nature* (1), publicado em agosto de 1982. Assim, nosso objetivo se tornou estudar séries temporais com características fractais através do coeficiente de Hurst, mais precisamente utilizando dimensão fractal para encontrá-lo. Mas para isso precisávamos saber qual a eficácia da relação  $H = 2 + D$  para esse objetivo, então decidimos aprender como obter o coeficiente de Hurst através da estatística  $R/S$  para então comparar os coeficientes encontrados em cada método e então avaliar a eficácia do primeiro utilizando o segundo (por ser o convencional) como parâmetro.

Com isso em mente, estudamos em nosso segundo ciclo de iniciação científica (2020 - 2021) conceitos envolvendo probabilidade, inferência estatística e séries temporais para entender o que é a estatística  $R/S$  de uma subsérie de uma série temporal. Dentre os conteúdos estudados podemos destacar as definições, exemplos e aspectos computacionais relacionados com série de incrementos, média, média parcial, valor acumulado, desvio acumulado, amplitude ajustada, desvio padrão, valor esperado, variáveis aleatórias, dentre vários outros tópicos que são pré-requisitos para os que foram citados.

Após compreender como é feito o cálculo da estatística  $R/S$  de uma série temporal,



o próximo passo seria a implementação desses conceitos através de um programa. A necessidade da utilização de recursos computacionais se dá pela forma como o coeficiente de Hurst é obtido através da Estatística  $R/S$ . Grosso modo, é preciso calcular a estatística  $R/S$  de todas as subséries possíveis de uma série temporal e observar o comportamento assintótico do valor esperado de cada um dos valores de  $R/S$ , e isso iria demandar muito tempo e muitos cálculos para ser feito “à mão”. Para tanto, procuramos por um trabalho que já trouxesse um programa pronto e o encontramos (6), porém tivemos dificuldade em compreender e manipular este programa por não termos o embasamento necessário em programação e começamos a estudar linguagem de programação. Atualmente estamos no ponto em que retomaremos os estudos de linguagem de programação para entender o programa e, em seguida, daremos prosseguimento ao trabalho inicial.

#### 4.2.2 **Análise Grafista de Ações da Bolsa de Valores**

Um dos eventos de atenção no Brasil no ano de 2020 foi um número recorde de novos CPF cadastrados na Brasil Bolsa Balcão (B3), bolsa de valores brasileira. Notícias como “Número de investidores na B3 cresce 92% em 2020; mulheres sobem 118%” (9), ou “Bolsa alcança recorde de 3 milhões de CPFs cadastrados” (10), foram muito divulgadas nesse período, trazendo os temas de Economia, finanças pessoais e investimentos ainda mais à tona.

A análise grafista de ações parte da hipótese que os ativos da bolsa tendem, em determinados momentos, a ter um comportamento previsível, de modo que comportamentos futuros tendem a repetir comportamentos passados. De maneira simples, cada ativo (ação) possui um valor especulativo de quanto a empresa vale em termos de seus resultados, seu patrimônio, seu potencial de gerar lucro em determinado tempo, seu endividamento (nem sempre dívida é algo ruim, pode estar relacionada à alavancagem da empresa, que em poucas palavras se traduz em tomar uma dívida para investir na própria empresa e acelerar o crescimento), sua governança corporativa e diversos outros fatores estruturais, administrativos e operacionais da própria empresa, sem contar com o fator especulativo do mercado, principalmente associado às notícias, que constantemente altera a relação de oferta e demanda das ações, influenciando diretamente seu preço.

Nessa perspectiva, uma de nossas intenções também era aplicar os estudos e simular alguns contextos envolvendo ativos da bolsa de valores com o objetivo de verificar como tudo isso funcionava sob a perspectiva da dimensão fractal, pois até onde estudamos é sabido que se o mercado estiver em tendência ou de alta ou de baixa, os ativos tendem a se comportar de maneira similar a de um esquema fractal, e se o mercado está lateralizado, i.e., sem tendência de alta ou baixa, essas previsões fractais não nos dão informações boas sobre previsões, de maneira que em tais situações as previsões tornam-se bastante incertas. Abaixo temos um esquema apresentando a análise de um padrão do tipo *M* no ativo da própria B3, cujo *ticker* é o B3SA3 e que pode ser visto em várias situações micro e macro em três momentos distintos de tempo, em uma intervalo de 5 anos, de 1 ano e de 6 meses.

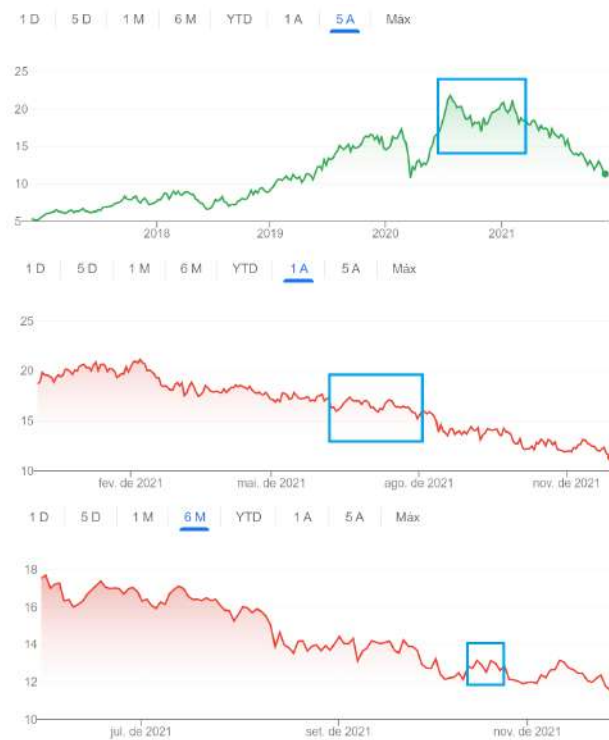


Figura 74 – Padrão em “M” do ativo da Brasil Bolsa Balcão (B3SA3). Fonte: Google.

Dessa forma, gostaríamos de implementar os estudos da dimensão fractal para poder comparar os valores de dimensão em diferentes escalas de tempo e ver se esses números vão nos trazer algumas informações importantes sobre valores futuros, pois uma vez que obtivéssemos esses resultados de dimensão em diferentes escalas de tempo de um mesmo ativo, acreditamos que poderemos minimamente tentar classificar padrões de comportamentos.



A análise grafista é antiga e atualmente há uma série de ferramentas utilizadas para analisar seus comportamentos, como as *Médias Móveis Exponenciais*, as *Bandas de Bollinger*, a retração de *Fibonacci*, entre tantos outros que não entraremos em detalhes aqui. Dessa forma, nosso intuito era desenvolver o nosso próprio método, com nossos próprios programas para desenvolver uma ferramenta de previsibilidade baseada em dimensão fractal.

### 4.2.3 Transposição do Rio São Francisco

Uma outra ideia era verificar se a transposição do Rio São Francisco fazia sentido em termos da dimensão fractal sob duas perspectivas: a primeira consistia em comparar as dimensões com e sem a transposição; a segunda, que depende da primeira, seria verificar, caso essas medidas fossem relativamente distintas, se a transposição ainda fazia com que o novo rio ainda tivesse um valor de dimensão semelhante ao valor médio das dimensões de objetos rios em mapas fluviais.



Figura 75 – Esquema da transposição do Rio São Francisco. Fonte: (11)

Apesar de nossa ideia ser de fácil entendimento, a quantidade de conhecimento da teoria dos fractais, de elementos de estatística e de programação computacional foi o limitante para que este subprojeto não fosse executado. Nossa intenção era analisar por meio de mapas fluviais se os objetos caracterizados como rios possuem uma dimensão

bem caracterizada, aproximadamente fixa ou mesmo dentro de um determinado intervalo numérico. Este trabalho exige também um conhecimento de campo direcionado para isso, pois sabemos que esses objetos de estudo também variam de acordo com a época do ano. Além disso, seriam necessários uma grande quantidade de mapas fluviais e em diferentes épocas do ano para que houvesse um refinamento dessas quantidades, i.e., um tratamento dos dados até que tudo pudesse ser implementado. Somente após essa primeira etapa, conseguiríamos calcular a dimensão do Rio São Francisco com e sem a transposição e também comparar se a dimensão do rio transposto ainda estava na faixa da dimensão dos valores de dimensões de rios que iríamos obter.

Como o limitante para este estudo era o tempo, uma vez que estávamos ainda desenvolvendo o projeto da IC e este está finalizado, já estamos verificando a viabilidade da continuação destes estudos em um futuro breve. Além do grupo de pesquisa, este trabalho está sendo desenvolvido em parceria com a doutoranda Laura Alves Pacífico da Silva.

#### 4.2.4 Conjuntos de Julia e Mandelbrot no GeoGebra

Os conjuntos de Julia e Mandelbrot são compostos por representações de números complexos no plano de Argand-Gauss determinados através de uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = z^2 + c$ , com  $z, c \in \mathbb{C}$ . A formação do conjunto de Julia referente a estes valores de  $z$  e  $c$  vem da iteração de  $f$ , que consiste em sua composição consigo mesma uma quantidade de vezes igual ao subíndice indicado nas equações abaixo:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f(z) = z^2 + c, \\ f_2(z) &= f(f(z)) = (z^2 + c)^2 + c, \\ f_3(z) &= f(f(f(z))) = ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c, \\ &\vdots \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Os valores de  $z$  e  $c$  determinam como será a aparência do conjunto, alterando a inclinação de seu eixo de simetria em relação ao eixo real (horizontal) ou seu nível de “retração” ou “expansão”.

Aqui também há detalhes topológicos que guiam a escolha desses pontos, mas falando em termos de GeoGebra, o que vai diferenciar os conjuntos de Julia do conjunto de Mandelbrot é a forma como vamos iterar a função: se para os conjuntos de Julia temos o que foi visto acima, para o conjunto de Mandelbrot, se olharmos de forma superficial e sem considerar as condições topológicas que estão por trás disso, há uma pequena mudança: a iteração é feita da seguinte forma: devemos considerar a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = z^2 + c$ , ou seja, em cada iteração sempre é somado o mesmo valor  $c$ , não um número complexo qualquer  $c$ :

$$f_1(z) = f(z) = z^2 + c,$$

$$f_2(z) = f(f(z)) = (z^2 + c)^2 + c,$$

$$f_3(z) = f(f(f(z))) = ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c,$$

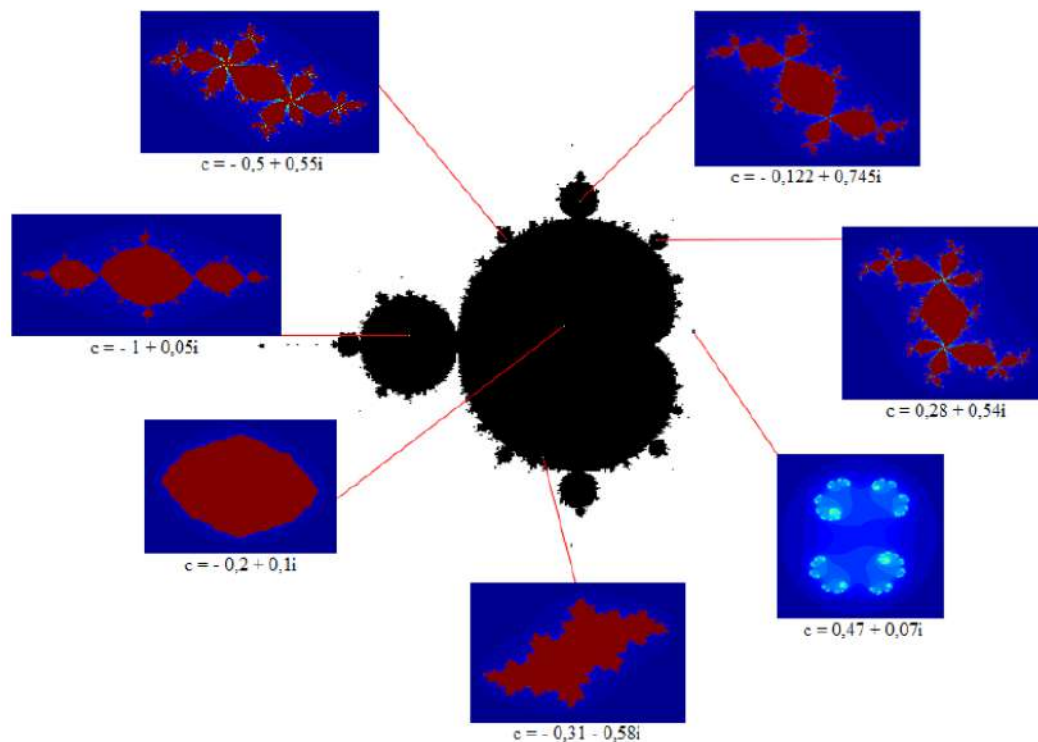
$$\vdots$$


Figura 76 – Conjuntos de Julia preenchidos para diferentes valores de  $c$  e a posição de  $c$  em relação ao conjunto de Mandelbrot. Fonte: (2).

Dentre os fractais mais famosos, certamente os conjuntos de Julia e Mandelbrot apresentados neste trabalho têm um grande destaque dentro dessa teoria. Apesar de seu

aspecto geométrico ser bastante conhecido, a sua definição precisa requer certa quantidade de conhecimentos de Topologia. Além disso, por se tratarem de fractais quase autossimilares, sua construção por meio do GeoGebra, diferente dos fractais com autossimilaridade exata, requer um refinamento das ferramentas utilizadas.

Já estamos desenvolvendo um trabalho propondo uma nova construção e de maneira dinâmica dos fractais conhecidos como os conjuntos de Julia e Mandelbrot por meio do *software* GeoGebra, que unifica a teoria necessária para seu entendimento e a construção com a utilização desta plataforma. Acreditamos que aliar o aspecto teórico com o da construção será uma maneira eficiente de difundir conhecimentos sobre a área, sobre o fractal e sobre o GeoGebra. Neste trabalho, estamos propondo a apresentação das definições destes fractais, os detalhes topológicos que as permeiam e as suas construções no GeoGebra com um nível de detalhamento e ilustração semelhante ao do nosso último artigo. Este trabalho está sendo desenvolvido pelo grupo de pesquisa de Fractais e o docente da UACSA-UFRPE João Antônio Miranda Gondim.

# Referências

- 1 MANDELBROT, Benoit B.; MANDELBROT, Benoit B. The fractal geometry of nature. New York: WH freeman, 1982.
- 2 RIBEIRO, Hosana. Conjunto de Julia. 2014. Dissertação (PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014.
- 3 FALCONER, Kenneth. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**. John Wiley & Sons, 2013.
- 4 Livro GeoGebra: Construção de Fractais de forma dinâmica. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fnxpfrs2>>. Acessado em 11 dez. 2021.
- 5 NUNES, Raquel Sofia Rebelo. Geometria Fractal e aplicações. Departamento de Matemática Pura–Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.
- 6 VEDOVATTO, Thiago. Medidas de memória longa em séries temporais: comparação de métodos de estimação do coeficiente de Hurst. 2014. Dissertação (Mestrado em Estatística)-Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- 7 The Edge of Infinity – Mandelbrot Fractal Zoom. [S.l.: s.n.], 2020. 1 vídeo (2h). Publicado pelo canal Maths Town. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=u1pwtSBTnPU>>. Acesso em 2 de ago de 2020.
- 8 RABAY, Yara Silvia Freire. Estudo e aplicações da geometria fractal. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- 9 FERRARI, Hamilton. Número de investidores na B3 cresce 92% em 2020; mulheres sobem 118%. Poder 360, 04 de janeiro de 2021. Disponível em <<https://www.poder360.com.br/>>. Acesso em 10 de dezembro de 2021.

- 10 FLACH, Natália. Bolsa alcança recorde de 3 milhões de CPFs cadastrados. CNN Brasil, 02 de outubro de 2020. Disponível em <<https://www.cnnbrasil.com.br/>>. Acesso em 5 jan. de 2021.
- 11 DOMINGUES, Filipe. Com mais de 90% da transposição concluída, impactos ambientais no Rio São Francisco ainda são incertos. G1, 21 de dezembro de 2019. Disponível em <<https://abre.ai/dDq3>>
- 12 COPIE DE BACKWARDS ITERATION JULIA SET. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/gyxfzqbb>>. Acesso em 15 fev. 2020.
- 13 Revista do Professor de Matemática. Disponível em <[26https://ww.rpm.org.br/](https://ww.rpm.org.br/)>. Acesso em 12 dez. 2020.
- 14 GEORG CANTOR. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Cantor](https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor)> . Acesso em: 21 set. 2021.
- 15 Curso de Fractais. Disponível em: <<https://pt.mathigon.org/course/fractals/introduction>>. Acesso em 24 set. 2021.
- 16 NO MAN'S SKY WIKI. Disponível em: <[https://nomanssky.fandom.com/wiki/Oria\\_V](https://nomanssky.fandom.com/wiki/Oria_V)>. Acesso em 25 nov. 2021.
- 17 AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM EM ARQUITETURA E DESIGN. Disponível em: <[http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/view.php?id=2089&pagenum=10&target\\_navigation\\_chapter=3713&show\\_navigation=1](http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/view.php?id=2089&pagenum=10&target_navigation_chapter=3713&show_navigation=1)>. Acesso em 13 abr. 2021.
- 18 STACKER OVERFLOW. Disponível em: <<https://stackoverflow.com/questions/36355943/how-can-i-improve-perfomace-of-hilbert-scan-of-image.>> Acesso em 20 set. 2021.
- 19 FILHO. Sérgio. A Curva de Koch (Fractal Floco de Neve). Disponível em: <<http://www.batebyte.pr.gov.br/Pagina/Curva-de-Koch-Fractal-Floco-de-Neve>>. Acesso em 30 jun. 2021.

- 20 ESPONJA DE MENGER. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Esponja\\_de\\_Menger&oldid=56231326](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Esponja_de_Menger&oldid=56231326)>. Acesso em: 27 out. 2021. <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Esponja\\_de\\_Menger](https://pt.wikipedia.org/wiki/Esponja_de_Menger)>.
- 21 Fractais 3D. Disponível em: <<http://amatematicaandaporai.blogspot.com/2008/08/fractais-3d.html>>. Acesso em 15 dez. 2020.
- 22 3D WAREHOUSE. Disponível em: <<https://3dwarehouse.sketchup.com/model/bdb71495-5386-4367-bbd7-2dadd0b29742/Pir%C3%A1mide-de-Sierpinski?hl=es>>. Acesso em 20 out. 2021.
- 23 <<https://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Tapete-de-Sierpinski/63420.html>>. Acesso em 22 jul. 2021.
- 24 GEOGEBRA. Disponível em: <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)>. Acesso em 27 dez. 2020.
- 25 RESEARCH GATE. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/figure/Applying-the-box-counting-method-to-the-Koch-curve-The-number-of-boxes-of-side-length-l\\_fig3\\_330955045](https://www.researchgate.net/figure/Applying-the-box-counting-method-to-the-Koch-curve-The-number-of-boxes-of-side-length-l_fig3_330955045)>. Acesso em 12 dez. 2021.
- 26 CASTRO, Cecília. Tapete de Sierpinski. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/mx3fh9xr>>. Acesso em 12 dez. 2021.
- 27 ANDERSON, Alison N.; MCBRATNEY, Alex B.; CRAWFORD, John W. Applications of fractals to soil studies. *Advances in Agronomy*, v. 63, p. 1-76, 1997.
- 28 SCARLAT, E. I.; STAN, Cristina; CRISTESCU, C. P. Self-similar characteristics of the currency exchange rate in an economy in transition. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 379, n. 1, p. 188-198, 2007.
- 29 ANDRONACHE, Ion C. et al. Using fractal analysis in modeling trends in the national economy. *Procedia Environmental Sciences*, v. 32, p. 344-351, 2016.
- 30 CHUNG, Hsiao-Wen; HUANG, Yih-Hwen. Fractal analysis of nuclear medicine images for the diagnosis of pulmonary emphysema: interpretations, implications, and limitations. *American Journal of Roentgenology*, v. 174, n. 4, p. 1055-1059, 2000.

- 31 ANDRONACHE, Ion C. et al. Using fractal analysis in modeling trends in the national economy. *Procedia Environmental Sciences*, v. 32, p. 344-351, 2016.
- 32 UAHABI, Kaoutar Lamrini; ATOUNTI, Mohamed. Applications of fractals in medicine. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, v. 42, n. 1, p. 167-174, 2015.
- 33 Cantor Dust. Disponível em <<https://philipvanegmond.nl/wiskunde/dim4-e.htm>>. Acesso em 10 set. 2021.
- 34 Curva de Koch até sua 4ª iteração. Disponível em <<https://renatamusta.wordpress.com/2014/05/22/the-koch-curve/>>. Acesso em 08 set. 2021.