UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MATHEUS HENRIQUE SEVERINO DA SILVA

SOBRE UMA FAMÍLIA DE EQUAÇÕES DE VOLTERRA PROVENIENTES DA TEORIA VISCOELÁSTICA

RECIFE

2021

MATHEUS HENRIQUE SEVERINO DA SILVA

Sobre uma família de equações de Volterra provenientes da teoria viscoelástica [1]

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, Unidade Acadêmica de Recife.

Orientador: Prof. Dr. **Clessius Silva**

RECIFE

2021

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da FACEPE.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586s Silva, Matheus Henrique Severino
Sobre uma família de equações de Volterra provenientes da teoria viscoelástica / Matheus Henrique Severino Silva. - 2021.
57 f. : il.

Orientador: Clessius Silva.
Inclui referências e apêndice(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Viscoelástico. 2. Solução. 3. Resolvente. 4. Stokes. 5. Fluído. I. Silva, Clessius, orient. II. Título

CDD 510

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA MONOGRAFIA

1. IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO

Nome: Matheus Henrique Severino da Silva

N.º de matrícula: 200693693

2. TÍTULO DA MONOGRAFIA

Sobre uma família de equações de Volterra provenientes da teoria viscoelástica

3. ORIENTAÇÃO

Orientador: Prof.º Clessius Silva

4. BANCA EXAMINADORA

1º Prof.º Doutor Clessius Silva (Presidente)

2º Prof.º Doutor Fábio Lima Santos

3º Prof.ª Doutora Tarciana Maria Santos da Silva

4. PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO DA MONOGRAFIA

Comissão Examinadora	Domínio do Assunto	Apresentação e redação	Defesa	Média por examinador(a)
Prof.º Doutor Clessius Silva	10	10	10	10
Prof.º Doutor Fábio Lima Santos	10	10	10	10
Prof.ª Doutora Tarciana Maria Santos da Silva	10	10	10	10
Média Final	10	10	10	10

5. MÉDIA FINAL: 10 (dez)

Recife, 23 de julho de 2021.

Presidente　　　2º Membro　　　3º Membro

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais que, mesmo sem uma formação acadêmica, sempre fizeram o máximo, para que eu pudesse ter uma graduação.

Agradecimentos

Ao único Deus da minha vida, que me ajudou e capacitou. A Ele toda honra e glória.

À toda minha família, que sempre me apoiou e incentivou, em especial minha amada mãe Eldinice que mesmo não tendo muita afinidade com a matemática ajudou na minha descoberta por essa paixão, meu pai Genivaldo, que sempre deu o máximo para que eu pudesse estudar e meu irmão que sempre esteve apoiando meus estudos e descontraindo em horas oportunas.

À minha namorada Rafaela, a quem amo, e tem me ajudou em momentos de tensão e estresse, fazendo com que eu não desistisse de tudo. Ao Professor e Doutor Clessius Silva, o qual foi idealizador desse trabalho, que me acompanhou desde minha entrada na universidade, e sempre procurou explorar o máximo da minha capacidade. A ele sou grato pelo meu excelente desempenho durante a graduação.

Aos amigos e colegas, alunos da graduação em matemática do CEGEN-UFRPE e professores que muito me ajudaram, em especial Alex, Fernando, João Pedro, jhonata e Túlio, que me ajudaram de forma direta e indireta tornando essa jornada acadêmica leve e descontraída. Muito obrigado por tudo!

Muito obrigado por tudo!

Resumo

Utilizando ferramentas de Análise Funcional e Topologia, estudamos equações que descrevem o campo velocidade de um fluído viscoelástico, homogêneo, isotrópico incompressível tridimensional. Para garantir a existência e solução branda do problema proposto, foi estudado o comportamento da família resolvente associada ao operador de Stokes em espaços de potência fracionária.

Palavras-chave: Fluído Viscoelástico. Solução branda. Resolvente. Operador de Stokes.

Abstract

Using Functional Analysis and Topology tools, we study equations that describe the velocity field of a three-dimensional incompressible, homogeneous, isotropic viscoelastic fluid. To guarantee the existence and mild solution of the proposed problem, the behavior of the solving family associated with the Stokes operator in fractional power spaces was studied.

Keywords: Viscoelastic fluid. Mild solution. solving. Stokes Operator.

Lista de Figuras

1.1 Setor Σ_{η_0}. 15
1.2 Mapa $\lambda^{1+\alpha}$. 15
1.3 Região D_n 17

3.1 Caminho de Hankel $Ha = Ha(r, \theta)$ 51
3.2 Setores $S_{a,\phi}$ e $\Sigma_{a,\phi}$ 52

Sumário

Introdução **9**

1 Sobre a família resolvente associada ao operador de Stokes **14**

2 Existência de soluções brandas **28**

Conclusão **49**

3 APÊNDICE A **50**

Apêndice A **50**

3.1 Operadores setoriais e analiticidade 50

3.2 Miscelânea de resultados utilizados 55

Referências **57**

Introdução

Segundo Prüss (2013), se considerarmos um fluido viscoelástico incompressível isotrópico e homogêneo que ocupa uma região Ω, o campo velocidade $u(t,x)$ do fluido é governado pelas seguintes equações

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \displaystyle\int_0^t da(\tau)\Delta u(t-\tau,x) - \nabla p(t,x) + h(t,x),\ t>0,\ x\in\Omega, \\ \operatorname{div}(u)(t,x) = 0,\ t>0,\ x\in\Omega, \\ u(t,x) = 0,\ t>0,\ x\in\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x),\ x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

utilizando as condições de contorno antiderrapantes, isto é, a velocidade é nula na fronteira de Ω; aqui $p(t,x)$ denota a pressão hidrostática no fluido, h representa uma força externa, por exemplo a gravidade, e o núcleo $da(t)$ é o módulo de cisalhamento. A equação $\operatorname{div}(u)(t,x) = 0,\ t>0,\ x\in\Omega$, é consequência do fluido ser incompreensível. O caso $a(t)\equiv a_0$ para $t>0$ corresponde a um fluido Newtoniano com viscosidade $a_0>0$, e (1) torna-se então o bem conhecido sistema linear de Navier-Stokes.

Ainda segundo o Prüss (2013), materiais lineares isotrópicos e homogêneos são descritos por meio de duas funções materiais, o módulo de cisalhamento da e o módulo de compressão db. Se o material é além disso síncrono ou incompressível, apenas o módulo de cisalhamento é necessário. Vamos mencionar brevemente alguns modelos padrão bem conhecidos:

(i) Sólido de Hookean

$$a(t) = \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu},\ t>0.$$

(ii) Fluido Newtoniano

$$a(t) = \nu, \quad k(t) = \frac{t}{\nu},\ t>0.$$

(iii) Sólido de Kelvin-Voigt

$$a(t) = \nu + \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t/\nu}), \ t > 0.$$

(iv) Fluido de Maxwell

$$a(t) = \nu(1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \ t > 0.$$

(v) Sólido Poynting-Thompson

$$a(t) = \mu_0 t + \nu(1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \mu_0^{-1}\left[1 - \mu(\mu_0 + \mu)^{-1} e^{-\frac{\mu\mu_0 t}{\nu(\mu+\mu_0)}}\right] \quad t > 0.$$

(vi) Material Tipo-Potência

$$a(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad k(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \ t > 0, \text{ em que } \ \alpha \in (0,1).$$

A partir dessa discussão, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado suave, consideraremos a seguinte família de equações de Volterra não-lineares

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_0^t dg_\alpha(s)\Delta u(t-s,x) - \nabla p + h - (u\cdot\nabla)u, \text{ em } (0,\infty)\times\Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \text{ em } (0,\infty)\times\Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que p e h são funções dadas, $0 \leq \alpha < 1$ e $g_\alpha(t) = \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, $t > 0$. Estamos particularmente interessados na teoria de existência, unicidade, regularidade e continuação de soluções para o problema acima. Note que quando $0 < \alpha < 1$, dg_α denota o módulo de cisalhamento de um material Tipo-Potência. Por outro lado, o caso $\alpha = 0$ corresponde ao fluido Newtoniano com viscosidade 1, e o problema (2) torna-se as equações de Navier-

Stokes

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla p + h - (u \cdot \nabla)u, \text{ em } (0,\infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \text{ em } (0,\infty) \times \Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

Neste trabalho, desejamos discutir a existência e unicidade de solução para o problema (2) em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nossa estratégia será reescrever o problema (2) como uma equação integral em um espaço de Hilbert adequado. Consideremos a projeção ortogonal

$$P : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{H}_\sigma,$$

em que $\mathcal{H}_\sigma$ é o fecho de $\{u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0, u \cdot n = 0\}$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Aqui, n representa o campo normal unitário apontando para fora de $\partial\Omega$. O problema pode ser visto como uma equação integral de evolução abstrata sobre $\mathcal{H}_\sigma$ dada por

$$u(t) = \int_0^t g_\alpha(t-s)Au(s)ds + \int_0^t Ph(s)ds - \int_0^t P(u(s) \cdot \nabla)u(s)ds + u_0, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

em que $A : D(A) \subset \mathcal{H}_\sigma \to \mathcal{H}_\sigma$ é o operador de Stokes $A = P\Delta$ com domínio

$$D(A) := H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0\}.$$

Suponhamos por um momento que $u : [0,\infty) \to \mathcal{H}_\sigma$ satisfaz (4). Aplicando a transformada de Laplace formalmente, obtemos

$$\mathscr{L}\big(u(t)\big) = \mathscr{L}\left(\int_0^t g_\alpha(t-s)Au(s)ds + \int_0^t Ph(s)ds - \int_0^t P(u(s) \cdot \nabla)u(s)ds + u_0 \right)$$

Como a transformada de Laplace é uma aplicação Linear obtemos

$$\hat{u}(\lambda) = \mathscr{L}\left(\int_0^t g_\alpha(t-s)Au(s)ds \right) + \mathscr{L}\left(\int_0^t Ph(s)ds \right) - \mathscr{L}\left(\int_0^t P(u(s) \cdot \nabla)u(s)ds \right) + \mathscr{L}\big(u_0\big)$$

portanto

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}\mathscr{L}\big(g_\alpha(t-s)Au(s)\big) + \lambda^{-1}\mathscr{L}\big(Ph(s)\big) + \lambda^{-1}\mathscr{L}\big(P(u(s) \cdot \nabla)u(s)\big) + \lambda^{-1}u_0$$

em que $F(u) = -P(u \cdot \nabla)u$. Obtemos então

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-(\alpha+1)}A\hat{u}(\lambda) + \lambda^{-1}P\hat{h}(\lambda) + \lambda^{-1}\hat{F}(\lambda) + \lambda^{-1}u_0$$

daí

$$\hat{u}(\lambda) - \lambda^{-(1+\alpha)}A\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}P\hat{h}(\lambda) + \lambda^{-1}\hat{F}(\lambda) + \lambda^{-1}u_0$$

que equivale a

$$(1 - \lambda^{-(1+\alpha)}A)\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}[P\hat{h}(\lambda) + \hat{F}(\lambda) + u_0]$$

e concluímos que

$$\lambda^{-(1+\alpha)}(\lambda^{1+\alpha} - A)\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}[P\hat{h}(\lambda) + \hat{F}(\lambda) + u_0].$$

Tomando $\lambda^{1+\alpha} \in \rho(A)$, então

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^{1+\alpha}(\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1}\lambda^{-1}[P\hat{h}(\lambda) + \hat{F}(\lambda) + u_0]$$

isto é

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}P\hat{h}(\lambda) + \lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}\hat{F}(\lambda) + \lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}u_0.$$

Usando a transformada inversa de Laplace, deduzimos que

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)F(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds, \quad t \geq 0,$$

em que $E_\alpha(tA)$ é a transformada inversa de $\lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}$, se $t > 0$, e $E_{1+\alpha}(0A) := I$.[2] Na próxima Seção, mostraremos que esta função está bem definida para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Motivados pela discussão acima e pela literatura relacionada, ver por exemplo (PRÜSS, 2013), adotaremos o seguinte conceito de solução do problema (4):

Definição 0.1. Seja $\tau > 0$.

(i) Uma função $u : [0, \tau] \to \mathcal{H}_\sigma$ é chamada *solução branda* do problema (4) em $[0, \tau]$ se

[2] I denota o operador identidade.

$u \in C([0,\tau];\mathcal{H}_\sigma)$ e para todo $t \in [0,\tau]$

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)F(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds.$$

(ii) Uma função $u : [0,\tau) \to \mathcal{H}_\sigma$ é chamada *solução branda* do problema (4) em $[0,\tau)$ se para qualquer $\tau' \in [0,\tau)$, u é uma solução branda para (4) em $[0,\tau']$.

Nossos principais propósitos são determinar condições suficientes para existência e unicidade de solução branda do problema (4), analisar a possível continuação desta solução para um intervalo maximal de existência, e seguiremos as ideias apresentadas em Silva (2015) e Andrade, Viana e Silva (2021).

Capítulo 1

Sobre a família resolvente associada ao operador de Stokes

Este capítulo é dedicado a demonstrar as principais propriedades da família de operadores $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$. Primeiro demonstraremos sua boa definição, uma limitação uniforme, bem como sua continuidade forte, quando definidas sobre o espaço $\mathcal{H}_\sigma$. Em seguida, demonstraremos sua boa definição nos espaços de potência fracionária, uma limitação e também sua continuidade forte nesses espaços, ressaltamos que nesses espaços a limitação pode não ser uniforme em relação ao tempo.

Antes de provar o resultado de boa definição da família $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, precisamos fazer algumas considerações sobre o resolvente do operador de Stokes, bem como sobre o caminho no qual a integral da transformada inversa de Laplace foi aplicada ao definir a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$. Primeiro ressaltamos que segundo o (PRÜSS, 2013), o operador de Stokes definido sobre o espaço que aqui tratamos, é autoadjunto e semidefinido positivo, e como L^2 é um espaço de Hilbert, o espectro do operador está contido na semirreta real negativa, dessa forma, os pontos do plano complexo fora da semirreta real negativa está no resolvente do operador A.

Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H}_\sigma \to \mathcal{H}_\sigma$ o operador de Stokes $A = P\Delta$ com domínio

$$D(A) := H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0\}.$$

Sendo $\alpha \in [0, 1)$, considere $\eta_0 \in \left(\frac{(1+\alpha)\pi}{2}, \pi\right)$ tal que

$$\Sigma_{\eta_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \eta_0\} \subset \rho(A),$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma,\mathcal{H}_\sigma)} \leq C|\lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\eta_0},$$

para alguma constante $C > 0$. Seja $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+\alpha}\right)$; note que se $\arg(\lambda) = \eta$, então, pela fórmula de potenciação de De Moivre, $\arg(\lambda^{1+\alpha}) = (1+\alpha)\arg(\lambda) = (1+\alpha)\eta < \eta_0$. Ou seja, se $\arg(\lambda) = \eta$, então $\lambda^{1+\alpha} \in \Sigma_{\eta_0} \subset \rho(A)$ e $\|(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma,\mathcal{H}_\sigma)} \leq C|\lambda|^{-(1+\alpha)}$, ver Figuras 1.1 e 1.2.

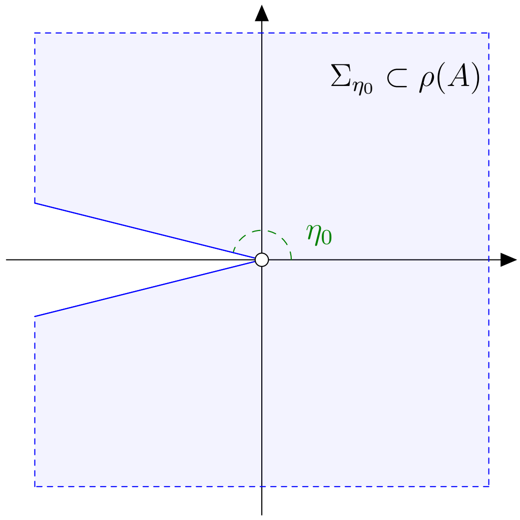


Figura 1.1: Setor Σ_{η_0}.

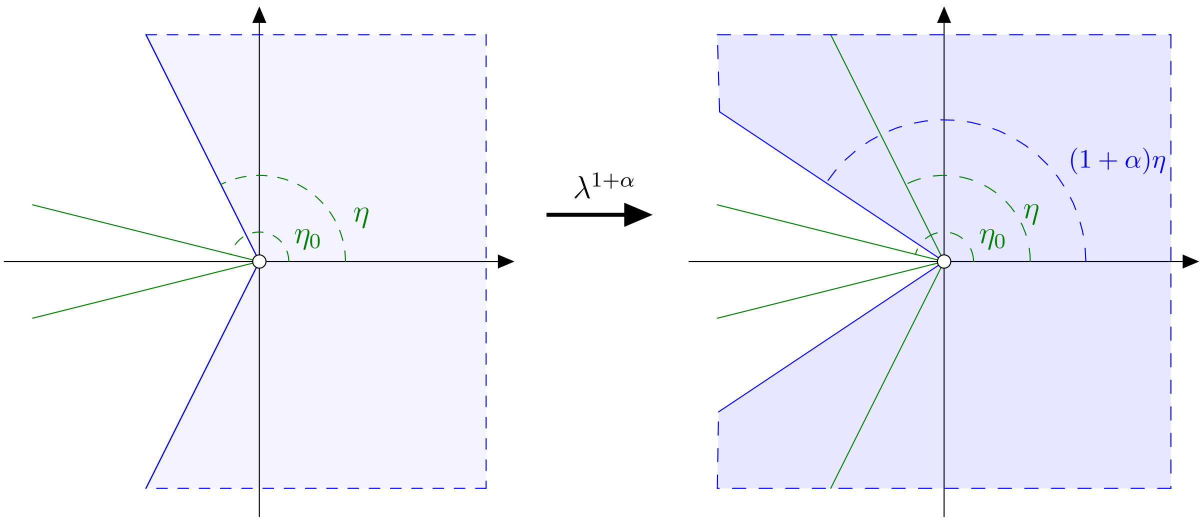


Figura 1.2: Mapa $\lambda^{1+\alpha}$.

Proposição 1.1. *Considere $\alpha \in [0,1)$. A função*

$$E_\alpha(tA) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} d\lambda, & se\ t > 0, \\ I, & se\ t = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que Ha é um caminho de Hankel adequado e I é o operador identidade, está bem definida e existe uma constante $M > 1$ tal que

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq M\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma},$$

para quaisquer $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{H}_\sigma$.

Demonstração. Para $r > 0$ e $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+\alpha}\right)$ seja

$$E_\alpha(tA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}d\lambda,\ t \geq 0,$$

em que Ha é o caminho de Hankel

$$\begin{aligned} Ha = Ha(r,\eta) &:= \{se^{i\eta} : r \leq s < \infty\} \cup \{re^{is} : |s| \leq \eta\} \cup \{se^{-i\eta} : r \leq s < \infty\} \\ &= Ha_1 + Ha_2 - Ha_3. \end{aligned}$$

Para cada $t > 0$ fixado, se assumirmos que $r = \frac{1}{t}$, então

- Sobre Ha_1

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ = &\ \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{se^{i\eta}t}s^\alpha e^{i\eta\alpha}((se^{i\eta})^{1+\alpha} - A)^{-1}e^{i\eta}xds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ \leq &\ \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} |e^{se^{i\eta t}}||se^{i\eta}|^\alpha\|\big((se^{i\eta})^{1+\alpha} - A\big)^{-1}\|_{\mathcal{H}_\sigma}|e^{i\eta}|\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\ \leq &\ \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} |e^{se^{i\eta t}}||se^{i\eta}|^\alpha C(|se^{i\eta}|^{1+\alpha})^{-1}|e^{i\eta}|\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\ \leq &\ \frac{C}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} |e^{s(\cos\eta + i\sin\eta)t}||s|^\alpha|e^{i\eta}|^\alpha|s|^{-\alpha-1}|e^{i\eta}|^{-\alpha-1}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\ = &\ \frac{C}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{-1}ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ \leq &\ \frac{C}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}tds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \frac{C}{2\pi}\frac{e^{\cos\eta}}{|\cos\eta|}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \end{aligned}$$

- Sobre Ha_2

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{-\eta}^{\eta} e^{re^{is}t}(re^{is})^{\alpha}((re^{is})^{1+\alpha}-A)^{-1}rie^{is}xds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}|e^{re^{is}t}(re^{is})^{\alpha}|\|\big((re^{is})^{1+\alpha}-A\big)^{-1}\|_{\mathcal{H}_\sigma}|rie^{is}|\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds\\
&\leq \frac{C}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}|e^{r(\cos s+i\sin s)t}||re^{is}|^{\alpha}|re^{is}|^{-(1+\alpha)}|rie^{is}|ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{C}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}|e^{r\cos st}||e^{i\sin st}||r|^{\alpha}|e^{is}|^{\alpha}|r|^{-(1+\alpha)}|e^{is}|^{-(1+\alpha)}|r||ie^{is}|ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{C}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}e^{\cos s}r^{1+\alpha}r^{-\alpha-1}ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{C}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}e^{\cos s}ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq \frac{C}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}e\,ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{C}{2\pi}e2\eta\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.
\end{aligned}
$$

• Sobre Ha_3 procedemos como em Ha_1.

Tomando $M > \max\{M_1, 1\}$, em que M_1 é a soma de todas as cotas obtidas acima, deduzimos que $E_\alpha(tA)$ está bem definido para cada $t \geq 0$.

Vamos mostrar agora que a integral em (1.1) é independente de $r > 0$ e de $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+\alpha}\right)$. Considere $r, r' \in (0,\infty)$ e $\eta, \eta' \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+\alpha}\right)$, sem perda de generalidade, suponha que $\eta' > \eta$ e $r > r'$. Seja D a região entre as curvas $Ha(r,\eta)$ e $Ha(r',\eta')$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $D_n := D \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$, (ver a Figura 1.3). Pelo Teorema da

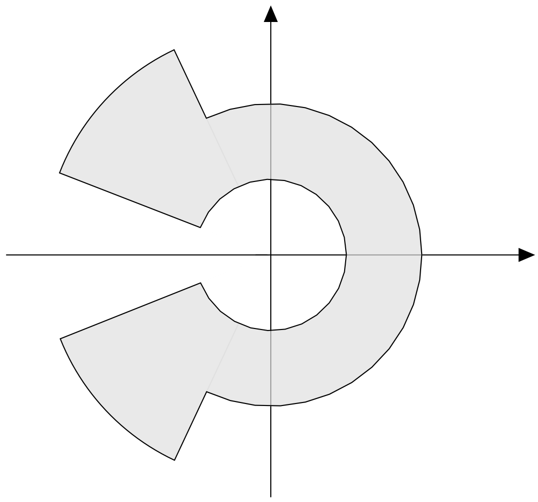


Figura 1.3: Região D_n

Integral de Cauchy,

$$\int_{\partial D_n} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}d\lambda = 0.$$

Seja R_1 e R_2 os arcos contidos em $\{z\in\mathbb{C} : |z| = n\}$, então

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{R_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}d\lambda\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)} &= \left\|\int_{\eta}^{\eta'} e^{tne^{si}}(ne^{si})^{\alpha}\left((ne^{si})^{1+\alpha}-A\right)^{-1} nie^{si}ds\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)}\\
&\leq \int_{\eta}^{\eta'} |e^{tne^{si}}||(ne^{si})^{\alpha}|\|\left((ne^{si})^{1+\alpha}-A\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)}|nie^{si}|ds\\
&\leq C\int_{\eta}^{\eta'} e^{nt\cos s}n^{\alpha}n^{-\alpha-1}nds\\
&\leq C\int_{\eta}^{\eta'} e^{nLt}ds = Ce^{nLt}(\eta'-\eta),
\end{aligned}$$

em que $L = \sup\limits_{s\in[\eta,\eta']}\cos s < 0$. Portanto, a integral acima tende para zero quando $n\to\infty$. Um procedimento similar mostra que a integral sobre o arco R_2 tem a mesma propriedade. Consequentemente,

$$\int_{Ha(\eta,r)} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}d\lambda = \int_{Ha(\eta',r')} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}d\lambda,$$

e isto conclui a demonstração. □

Observação 1.2. Se considerarmos $0<\alpha<c<1$ para algum c, então os ângulos η_0 e η não precisam depender de α (apenas de c). De fato, basta tomar $\eta_0\in\left(\frac{(1+c)\pi}{2},\pi\right)$ e $\eta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\eta_0}{1+c}\right)$. Portanto, se existir c tal que $0<\alpha<c<1$, podemos escolher um caminho Ha independente de α.

Consequentemente, se $\alpha_0,\alpha_n\in[0,1)$ para todo $n=1,2,\cdots$ são tais que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha_0$, podemos escolher um caminho Ha tal que E_{α_n} esteja bem-definido para todo $n=0,1,2,\cdots$.

O próximo resultado garante que dado $x\in\mathcal{H}_\sigma$, a famĺia $E_\alpha(\cdot A)x : [0,+\infty)\to\mathcal{H}_\sigma$ é uma função contínua. Essa propriedade é chamada de continuidade forte da família resolvente.

Proposição 1.3. *A família resolvente $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma$.*

Demonstração. Seja $\tau>0$ e considere $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,\tau)$ tal que $t_n\to\tau$ quando $n\to\infty$.

Claramente existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < t_n < \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, para $x \in \mathcal{H}_\sigma$

$$\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha}(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n})\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}x d\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Como na demonstração da Proposição 1.1, analisaremos a integral acima sobre os caminhos Ha_1, Ha_2 e Ha_3 separadamente. Aqui vamos considerar $r > 0$ constante.

• Sobre Ha_1,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{Ha_1}(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n})\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}x d\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
= &\left\|\int_r^\infty (e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}})(se^{i\eta})((se^{i\eta})^{1+\alpha} - A)^{-1}x e^{i\eta} ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
\leq & C\int_r^\infty \left|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}\right| s^{-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.
\end{aligned}$$

Como $\left|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}\right| s^{-1} \to 0$ quando $n \to \infty$ e

$$\left|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}\right| s^{-1} \leq (e^{\tau s\cos\eta} + e^{t_n s\cos\eta})s^{-1} \leq (e^{\tau s\cos\eta} + e^{cs\cos\eta})s^{-1},$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver APÊNDICE A, teorema 3.16),

$$\int_r^\infty \left|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}\right| s^{-1} ds \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

• Sobre Ha_2,

$$\left\|\int_{Ha_2}(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n})\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}x d\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq C\int_{-\eta}^{\eta}\left|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}\right| ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Como $\left|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}\right| \to 0$ quando $n \to \infty$ e

$$\left|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}\right| \leq e^{\tau r\cos s} + e^{t_n r\cos s} \leq 2e^{\tau r},$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{-\eta}^{\eta}\left|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}\right| ds \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

• Sobre Ha_3 procedemos como em Ha_1.

Portanto, $\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_nA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \to 0$ quando $n \to \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma$. Analogamente, se considerarmos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\tau,\infty)$ tal que $t_n \to \tau$ quando $n \to \infty$, então $\|E_\alpha(t_nA)x - E_\alpha(\tau A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \to 0$ quando $n \to \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma$.

Para mostrar a continuidade forte em $t = 0$, note que, pelo Teorema de Cauchy,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{Ha} e^{\lambda}\lambda^{-1}d\lambda\right) I,$$

em que I é o operador identidade. Logo, fixando $t > 0$, se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} - \lambda^{-1}]xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} - \lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)]xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}(\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1})[\lambda^\alpha - \lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)]xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}.
\end{aligned}$$

Novamente, analisaremos a integral acima sobre os caminhos Ha_1, Ha_2 e Ha_3 separadamente, aqui vamos considerar $r = \frac{1}{t}$.

• Sobre Ha_1,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty}\left\|e^{ste^{i\eta}}(se^{i\eta})^{-1}((se^{i\eta})^{1+\alpha} - A)^{-1}Axe^{i\eta}\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds\\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{-1}Cs^{-(1+\alpha)}ds\\
=\ & \frac{C}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{-\alpha-2}ds
\end{aligned}$$

uma vez que $\frac{1}{t} \leq s$, vale que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \frac{C}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{\alpha+2}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}ds\\
&= \frac{C}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{\alpha+2}\frac{e^{\cos\eta}}{|\cos\eta|} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \to 0^+$.

• Sobre Ha_2,

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \frac{C}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}\int_{-\eta}^{\eta} e^{tr\cos s}r^{-\alpha-2}rds$$

como $\frac{1}{r}=t$ tem-se, $r^{-\alpha-1}=r^{-(1+\alpha)}=t^{1+\alpha}$, portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \frac{C}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{1+\alpha}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s}ds\\ &\leq \frac{C}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{1+\alpha}e2\eta \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quanto $t\to 0^+$.

• Sobre Ha_3, basta proceder como sobre Ha_1.

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+}\|E_\alpha(tA)x-x\|_{\mathcal{H}_\sigma}=0, \text{ se } x\in D(A).$$

Resta mostrar que

$$\lim_{t\to 0^+}\|E_\alpha(tA)x-x\|_{\mathcal{H}_\sigma}=0, \quad \forall x\in\mathcal{H}_\sigma.$$

Como $D(A)$ é denso sobre $\mathcal{H}_\sigma$, dados $x\in\mathcal{H}_\sigma$ e $\varepsilon>0$ escolhemos $y\in D(A)$ e $\delta>0$ tais que

$$\|x-y\|_{\mathcal{H}_\sigma}\leq\frac{\varepsilon}{3M} \ \text{ e } \ \|E_\alpha(tA)y-y\|_{\mathcal{H}_\sigma}\leq\frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{se} \quad 0<t<\delta.$$

Então, para $0<t<\delta$

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(tA)x-x\|_{\mathcal{H}_\sigma} &= \|E_\alpha(tA)x-E_\alpha(tA)y+E_\alpha(tA)y-y+y-x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\ &\leq \|E_\alpha(tA)(x-y)\|_{\mathcal{H}_\sigma}+\|E_\alpha(tA)y-y\|_{\mathcal{H}_\sigma}+\|y-x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\ &\leq M\|x-y\|_{\mathcal{H}_\sigma}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3M}\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+}\|E_\alpha(tA)x-x\|_{\mathcal{H}_\sigma}=0, \quad \forall x\in\mathcal{H}_\sigma.$$

Isto conclui a demonstração. □

O próximo resultado garante a continuidade forte da família resolvente com respeito ao parâmetro $\alpha\in[0,1)$.

Proposição 1.4. *Sejam $\alpha_n,\alpha_0\in[0,1)$, com $n=1,2,\cdots$, tais que $\alpha_n\to\alpha_0$ quando*

$n \to \infty$. *Então para todo* $x \in \mathcal{H}_\sigma$ *e* $t \geq 0$,

$$E_{\alpha_n}(tA)x \to E_{\alpha_0}(tA)x, \quad \textit{quando} \;\; n \to \infty.$$

Além disso, essa convergência é uniforme para t *em intervalos limitados.*

Demonstração. Primeiramente, pela Observação 1.2 podemos escolher um (único) caminho Ha para o qual os operadores E_{α_0} e E_{α_n} estejam bem definidos. Sendo $x \in \mathcal{H}_\sigma$, então

$$E_{\alpha_n}(tA)x - E_{\alpha_0}(tA)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^{\alpha_n}(\lambda^{\alpha_n+1} - A)^{-1}x - \lambda^{\alpha_0}(\lambda^{\alpha_0+1} - A)^{-1}x]d\lambda,$$

para todo $t \geq 0$. Por um lado, como A é um operador setorial, logo

$$\begin{aligned} \|\lambda^{\alpha_n}(\lambda^{\alpha_n+1} - A)^{-1}x - \lambda^{\alpha_0}(\lambda^{\alpha_0+1} - A)^{-1}x\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq C(|\lambda|^{\alpha_n}|\lambda|^{-\alpha_n-1} + |\lambda|^{\alpha_0}|\lambda|^{-\alpha_0-1})\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= 2C|\lambda|^{-1}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $\lambda \in \rho(A)$ fixado

$$|e^{\lambda t}|\|\lambda^{\alpha_n}(\lambda^{\alpha_n+1} - A)^{-1}x - \lambda^{\alpha_0}(\lambda^{\alpha_0+1} - A)^{-1}x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \to 0, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty,$$

uniformemente para t em intervalos limitados[1]. Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos a demonstração. □

Agora estamos interessados em estudar o comportamento da família de resolvente nos espaços de potências fracionárias associados ao operador de Stokes $\mathcal{H}_\sigma^\beta := D((-A)^\beta)$, $\beta \geq 0$. Para $\beta \geq 0$ esta escala satisfaz

$$\mathcal{H}_\sigma^\beta \hookrightarrow H^{2\beta}(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Observamos que da continuidade da projeção $P : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{H}_\sigma$ os seguintes mergulhos são verificados

$$\mathcal{H}_\sigma^\beta \hookrightarrow L_\sigma^r(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad r \leq \frac{6}{3 - 4\beta}, \quad 0 \leq \beta < \frac{3}{4},$$

[1]Observe que $|e^{t\lambda}|$ é limitada se $t \in [0, \tau]$ e $\lambda \in Ha$.

e

$$\mathcal{H}_\sigma^\beta \hookleftarrow L^s_\sigma(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad s \geq \frac{6}{3-4\beta}, \quad -\frac{3}{4} < \beta \leq 0,$$

em que $L^q_\sigma(\Omega, \mathbb{R}^3)$ é o fecho de $\{u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0, u \cdot n = 0\}$ em $L^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$, ver por exemplo (GIGA, 1981; WAHL, 1985).

Proposição 1.5. *Sejam $\alpha \in [0,1)$ e $\beta \in [0,1)$, então existe $\tilde{M} > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}_\sigma$ e $t > 0$,*

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \leq \tilde{M} t^{-(1+\alpha)\beta} \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Demonstração. Sejam $\alpha \in [0,1)$ e $\beta \in [0,1)$. Procederemos de maneira análoga a demonstração da Proposição 1.1. Para $r > 0$ e $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+\alpha}\right)$

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} := \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (-A)^\beta (\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma},$$

em que Ha é o caminho tomado na demonstração da Proposição 1.1.

Para cada $t > 0$ fixado, se assumirmos que $r = \frac{1}{t}$, então:

• Sobre Ha_1, utilizando a Proposição 3.14 (APÊNDICE A),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_1} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (-A)^\beta (\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{t}}^\infty |e^{ste^{\cos\eta}} s^\alpha| \left\| (-A)^\beta (\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} x \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
\leq\ & \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{1}{t}}^\infty e^{st\cos\eta} s^\alpha s^{(1+\alpha)(\beta-1)} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
=\ & \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{1}{t}}^\infty e^{st\cos\eta} s^{\beta(1+\alpha)-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma},
\end{aligned}$$

em que k é a constante que aparece na Proposição 3.14 (APÊNDICE A).

Caso 1: Se $\beta(1+\alpha) - 1 \leq 0$. como $\frac{1}{t} \leq s$ então $\frac{1}{s^{-(\beta(\alpha+1)-1)}} \leq t^{1-\beta(1+\alpha)}$, daí

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2\pi} \int_{\frac{1}{t}}^\infty e^{st\cos\eta} s^{\beta(1+\alpha)-1} ds &\leq \frac{k}{2\pi} t^{1-\beta(1+\alpha)} \int_{\frac{1}{t}}^\infty e^{st\cos\eta} ds \\
&= \frac{k}{2\pi} \frac{e^{\cos\eta}}{|\cos\eta|} t^{-\beta(1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Caso 2: Se $\beta(1+\alpha) - 1 > 0$, integrando por partes

$$\frac{k}{2\pi} \int_{\frac{1}{t}}^\infty e^{st\cos\eta} s^{\beta(1+\alpha)-1} ds = \frac{k}{2\pi} \left[\frac{e^{st\cos\eta}}{t\cos\eta} s^{\beta(1+\alpha)-1} \right]_{\frac{1}{t}}^\infty$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{k}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty}\frac{e^{st\cos\eta}}{t\cos\eta}(\beta(1+\alpha)-1)s^{\beta(1+\alpha)-2}ds\\
\leq\ & \frac{k}{2\pi}\frac{e^{\cos\eta}}{|\cos\eta|}t^{-\beta(1+\alpha)}\\
&+\frac{k(\beta(1+\alpha)-1)t^{2-\beta(1+\alpha)}}{2\pi|\cos\eta|t}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty}e^{st\cos\eta}ds\\
=\ & \frac{k}{2\pi}\frac{e^{\cos\eta}}{|\cos\eta|}t^{-\beta(1+\alpha)}+\frac{k(\beta(1+\alpha)-1)e^{\cos\eta}}{2\pi|\cos\eta|^2}t^{-\beta(1+\alpha)}\\
<\ & \frac{ke^{\cos\eta}}{2\pi|\cos\eta|}\left(1+\frac{1}{|\cos\eta|}\right)t^{-\beta(1+\alpha)}.
\end{aligned}
$$

• Sobre Ha_2, utilizando a Proposição 3.14 (APÊNDICE A),

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_2}e^{\lambda t}\lambda^{\alpha}(-A)^{\beta}(\lambda^{1+\alpha}-A)^{-1}xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \frac{k}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}e^{tr\cos s}r^{\alpha}r^{(1+\alpha)(\beta-1)}rds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&= \frac{k}{2\pi}t^{-(1+\alpha)\beta}\int_{-\eta}^{\eta}e^{\cos s}ds\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq \frac{k\eta e}{\pi}t^{-(1+\alpha)\beta}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.
\end{aligned}
$$

• Sobre Ha_3, procedemos como em Ha_1.

Tomando $\tilde{M}>0$ como a soma das cotas acima, concluímos a demonstração. □

Observação 1.6. Dados $0\leq\theta\leq\beta<1$ e $x\in\mathcal{H}_\sigma^\theta$, a Proposição 1.5 implica

$$
\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta}=\|E_\alpha(tA)(-A)^\theta x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\beta-\theta}}\leq\tilde{M}t^{-(\beta-\theta)(1+\alpha)}\|(-A)^\theta x\|_{\mathcal{H}_\sigma}=\tilde{M}t^{-(\beta-\theta)(1+\alpha)}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\theta}.
$$

Particularmente, para $0\leq\theta<\frac{1}{2}$ a família de operadores $\{t^{\theta(1+\alpha)}E_\alpha(tA):\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\to\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}\}_{t>0}$ é uniformemente limitada, pois, se $x\in\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$

$$
\|t^{(1+\alpha)\theta}E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}\leq t^{(1+\alpha)\theta}\tilde{M}t^{-\theta(1+\alpha)}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}=\tilde{M}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}},
$$

portanto

$$
\|t^{(1+\alpha)\theta}E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}},\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}\right)}\leq\tilde{M},
$$

com $\tilde{M}$ independente de t. Além disso, dado $u_0\in\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ então

$$
\|t^{\theta(1+\alpha)}E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}\to 0, \tag{1.2}
$$

quando $t \to 0^+$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $x \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$ tal que $\|x - u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}}$, e escolha $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2M\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}}\right)^{-\theta(1+\alpha)}$, portanto, se $0 \leq t \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\|t^{\theta(1+\alpha)}E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \|t^{\theta(1+\alpha)}E_\alpha(tA)(u_0 - x)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} + t^{\theta(1+\alpha)}\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\
&\leq \tilde{M}t^{\theta(1+\alpha)}t^{-\theta(1+\alpha)}\|u_0 - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + Mt^{\theta(1+\alpha)}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Com isto concluímos a observação.

Proposição 1.7. *Sejam $\alpha, \beta \in [0, 1)$, então a família de operadores $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre o espaço $(\mathcal{H}_\sigma^\beta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$.*

Demonstração. Seja $\tau > 0$ e considere uma sequência $\{t_n\} \subset (0, \tau)$ tal que $t_n \to \tau$ quando $n \to \infty$. Então, para $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$,

$$\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha}\left(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}\right)\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}(-A)^\beta x d\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma}$$

Vamos analisar a integral acima sobre os caminhos Ha_1, Ha_2 e Ha_3 separadamente. Aqui consideraremos $r > 0$ constante.

• Sobre Ha_1,

$$\left\|\int_{Ha_1}\left(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}\right)\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}(-A)^\beta x d\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \int_r^\infty \left|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}\right| s^{-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta}.$$

Já vimos na demonstração da Proposição 1.3 que a integral do lado direito da desigualdade acima tende para 0 quando $n \to \infty$.

• Sobre Ha_2,

$$\left\|\int_{Ha_2}\left(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}\right)\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}(-A)^\beta x d\lambda\right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \int_{-\eta}^\eta \left|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}\right| ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta}.$$

Pela demonstração da Proposição 1.3, a integral do lado direito da desigualdade acima tenda para 0 quando $n \to \infty$.

• Sobre Ha_3 procedemos como sobre Ha_1.

Portanto, $\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \to 0$ quando $n \to \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$. Analogamente, se $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\tau, \infty)$ é uma sequência tal que $t_n \to \tau$ quando $n \to \infty$, então $\|E_\alpha(t_nA)x - E_\alpha(\tau A)x\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma} \to 0$ quando $n \to \infty$, para $x \in \mathcal{H}^\beta_\sigma$. Sendo assim, a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t>0}$ é fortemente contínua sobre $(\mathcal{H}^\beta_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma})$.

Para mostrar a continuidade forte em $t = 0$, note que, pelo Teorema de Cauchy,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{Ha} e^{\lambda}\lambda^{-1}d\lambda\right) I,$$

em que I é o operador identidade. Logo, fixando $t > 0$, se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma} &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} - \lambda^{-1}]xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^\alpha(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1} - \lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)]xd\lambda\right\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma}.
\end{aligned}$$

Novamente, analisaremos a integral acima sobre os caminhos Ha_1, Ha_2 e Ha_3 separadamente. Aqui consideraremos $r = \frac{1}{t}$.

• Sobre Ha_1,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma} &\le \frac{k}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{-1}s^{(1+\alpha)(\beta-1)}ds \\
&\le \frac{k}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{1+(1+\alpha)(1-\beta)}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}ds \\
&= \frac{k}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{(1+\alpha)(1-\beta)}\frac{e^{\cos\eta}}{|\cos\eta|} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \to 0^+$.

• Sobre Ha_2,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^{1+\alpha} - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{\mathcal{H}^\beta_\sigma} &\le \frac{k}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}\int_{-\eta}^{\eta} e^{tr\cos s}r^{-1}r^{(1+\alpha)(\beta-1)}rds \\
&= \frac{k}{2\pi}\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{(1+\alpha)(1-\beta)}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s}ds \\
&\le \frac{k}{2\pi}2\eta e\|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma}t^{(1+\alpha)(1-\beta)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quanto $t \to 0^+$.

• Sobre Ha_3, basta proceder como sobre Ha_1.

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = 0, \quad \text{se} \ \ x \in D(A).$$

Resta mostrar que

$$\lim_{t\to 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta.$$

Como $(D(A), \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$ é denso sobre $(\mathcal{H}_\sigma^\beta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$, dados $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$ e $\varepsilon > 0$, escolhemos $y \in D(A)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|x - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3M} \ \ \text{e} \ \ \|E_\alpha(tA)y - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \text{se} \ \ 0 < t < \delta.$$

Então, para $0 < t < \delta$

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} &= \|E_\alpha(tA)x - E_\alpha(tA)y + E_\alpha(tA)y - y + y - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \\
&\leq \|E_\alpha(tA)(x-y)\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \|E_\alpha(tA)y - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \|y - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \\
&\leq \|E_\alpha(tA)(-A)^\beta(x-y)\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \\
&= \|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|(-A)^\beta(x-y)\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \\
&\leq M\|x - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

Capítulo 2

Existência de soluções brandas

Neste capítulo mostraremos os principais resultados dessa monografia. Primeiro mostraremos um resultado de existência e unicidade de solução branda do problema, bem como regularidade em $\mathcal{H}_\sigma^\beta$. Para demonstrar esse resultados, precisamos supor o tempo de existência de solução suficientemente pequeno, entretanto essa suposição é amenizada pelo resultado que mostraremos a possibilidade de continuação da solução. Por fim, concluiremos o trabalho mostrando um critério de possibilidade de solução global via "explosão".

Para atingirmos os objetivos citados acima, consideraremos o Problema (2) com dado inicial $u_0 \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}} = H^1_{0,\sigma}$. Nós lembramos que $H^1_{0,\sigma}$ é o completamento do conjunto

$$C^1_{0,\sigma} := \{u \in C^1_0 \ : \ \operatorname{div}(u) = 0\}$$

com a norma $|||u||| = (\|\nabla u\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} + \|u\|^2_{\mathcal{H}_\sigma})^{\frac{1}{2}}$. Note que para todo $u \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$,

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = \|\nabla u\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Além disso, para $u \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ a função $\tilde{F}(u) = -(-A)^{-\frac{1}{4}}P(u \cdot \nabla)u$ está bem definida em $\mathcal{H}_\sigma$ e se $u, v \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$, então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\tilde{F}(u) - \tilde{F}(v)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq c(\|u\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})\|u - v\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \tag{2.1}$$

e

$$\|\tilde{F}(u)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq c\|u\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.2}$$

Para um melhor entendimento e demonstração dessas afirmações, recomendamos os trabalhos (FUJITA; KATO, 1964; WAHL, 1985).

Nesta seção, $\mathbf{B} : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ denotará a função Beta que é definida por

$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 (1 - s)^{a-1} s^{b-1} ds.$$

Teorema 2.1. *Considere $\alpha \in [0, 1/3)$. Seja $u_0 \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ e suponha que $Ph : (0, \infty) \to \mathcal{H}_\sigma$ é uma função contínua tal que $\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq ks^\gamma$, para algum $k > 0$ e $\gamma > \frac{\alpha-1}{2}$. Então existem uma constante $\tau_0 > 0$ e uma única solução branda $u \in C\Big([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\Big)$ para o problema (4). Além disso, para todo $0 < \theta < \frac{1-3\alpha}{4(1+\alpha)}$*

$$u \in C((0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta})$$

e

$$t^{(1+\alpha)\theta} \|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \to 0 \quad \textit{quando} \quad t \to 0.$$

Demonstração. Seja $\mu > 0$ tal que $\|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} < \frac{\mu}{2}$. Considere $\tau_0 > 0$ tal que para todo $0 \leq t \leq \tau_0$

$$\|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{2},$$

$$\tilde{M}k\mathbf{B}\left(\frac{1-\alpha}{2}, \gamma + 1\right) t^{\frac{1-\alpha}{2}+\gamma} \leq \frac{\mu}{4},$$

e

$$\tilde{M}c\mu t^{\frac{1-3\alpha}{4}} \leq \frac{1-3\alpha}{16}. \tag{2.3}$$

Considere o conjunto

$$K := \left\{ v \in C\Big([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\Big);\ \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \mu \right\}.$$

Sobre K definimos o operador

$$Tu(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds,$$

em que $\tilde{F}(u) = -(-A)^{-\frac{1}{4}} P(u \cdot \nabla)u$. Nosso propósito é mostrar que K é T-invariante e que T é uma contração. Inicialmente, provaremos que $T : K \to K$ está bem definido e dividiremos essa parte da demonstração nas duas afirmações seguintes. Usaremos (2.2) para estimar as desigualdades abaixo.

Afirmação 1: Se $u \in K$, então $Tu \in C\Big([0,\tau_0];\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\Big)$.

De fato, seja $\tau_1 \in (0,\tau_0]$ e considere $\{t_n\}_{n\mathbb{N}} \subset [0,\tau_1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \tau_1$. Então

$$
\begin{aligned}
& \|Tu(t_n) - Tu(\tau_1)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
= \;& \Big\| E_\alpha(t_nA)u_0 + \int_0^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t_n-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
& + \int_0^{t_n} E_\alpha((t_n-s)A)Ph(s)ds - E_\alpha(\tau_1 A)u_0 \\
& - \int_0^{\tau_1} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
& - \int_0^{\tau_1} E_\alpha((t_n-s)A)Ph(s)ds \Big\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
= \;& \Big\| E_\alpha(t_nA)u_0 - E_\alpha(\tau_1 A)u_0 + \int_0^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t_n-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
& - \int_0^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
& - \int_{t_n}^{\tau_1} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
& + \int_0^{t_n} E_\alpha((t_n-s)A)Ph(s)ds \\
& - \int_0^{t_n} E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)ds \\
& - \int_{t_n}^{\tau_1} E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)ds \Big\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
= \;& \Big\| E_\alpha(t_nA)u_o - E_\alpha(\tau_1 A)u_0 \\
& + \int_0^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} [E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A)]\tilde{F}(u)(s)ds \\
& + \int_0^{t_n} [E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A)]Ph(s)ds \\
& - \int_{t_n}^{\tau_1} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
& - \int_{t_n}^{\tau_1} E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)ds \Big\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
\leq \;& \|E_\alpha(t_nA)u_0 - E_\alpha(\tau_1 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_n}^{\tau_1}\|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds\\
&+\int_{t_n}^{\tau_1}\|E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds\\
:=\ & I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)+I_4(n)+I_5(n).
\end{aligned}
$$

Analisaremos separadamente cada termo $I_i(n)$, para $i=1,2,3,4,5$.

• Para $I_1(n)$: pela Proposição 1.7 a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$,logo é fácil notar que

$$
I_1(n):=\|E_\alpha(t_nA)u_0-E_\alpha(\tau_1A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\to 0,\quad \text{quando}\quad n\to\infty.
$$

• Para $I_2(n)$: como a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}$, pela Proposição 1.7, logo

$$
\begin{aligned}
&\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&=\|(-A)^{\frac{3}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\|(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}c\|u\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\to 0
\end{aligned}
$$

quando $n\to\infty$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
&\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&=\|(-A)^{\frac{3}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&=\|(-A)^{\frac{3}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&=\|(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq(\|(E_\alpha((t_n-s)A)_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}+\|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|)_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\tilde{M}\big((t_n-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}+(\tau_1-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\big)\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\tilde{M}c\big((t_n-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}+(\tau_1-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\big)\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq\tilde{M}c\mu^2\big((t_n-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}+(\tau_1-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\big),
\end{aligned}
$$

em que o último termo da desigualdade acima é integrável em s sobre $(0,t_n)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $I_2(n)\to 0$ quando $n\to\infty$.

• Para $I_3(n)$, note que

$$\begin{aligned}
& \|(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
= & \ \|(-A)^{\frac{1}{2}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
\leq & \ (\|E_\alpha((t_n-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}+\|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})ks^\gamma \\
\leq & \ \tilde{M}k\Big((t_n-s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}s^\gamma+(\tau_1-s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}s^\gamma\Big).
\end{aligned}$$

Como o lado direito da desigualdade acima é integrável em s sobre $(0,t_n)$, logo pelo mesmo argumento usado em $I_2(n)$, concluímos que $I_3(n)\to 0$ quando $n\to\infty$.

• Para $I_4(n)$:

$$\begin{aligned}
I_4(n) &= \int_{t_n}^{\tau_1}\|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \\
&= \int_{t_n}^{\tau_1}\|(-A)^{\frac{3}{4}}E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\
&= \int_{t_n}^{\tau_1}\|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\
&\leq \tilde{M}\int_{t_n}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\
&\leq \tilde{M}c\int_{t_n}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \\
&\leq \tilde{M}c\mu^2\int_{t_n}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}ds
\end{aligned}$$

Substituindo $\tau_1-s=x$ na desigualdade acima, tem-se $ds=-dx$ e além disso quando $s=t_n\Rightarrow x=\tau_1-t_n$ e quando $s=\tau_1\Rightarrow x=0$ portanto

$$\begin{aligned}
I_4(n) &\leq \tilde{M}c\mu^2\Big(-\int_{\tau_1-t_n}^{0}x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx\Big) \\
&= \tilde{M}c\mu^2\int_0^{\tau_1-t_n}x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx=\tilde{M}c\mu^2\frac{4}{1-3\alpha}(\tau_1-t_n)^{\frac{1-3\alpha}{4}}\to 0,
\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$.

• Para $I_5(n)$:

$$\begin{aligned}
I_5(n) &= \int_{t_n}^{\tau_1}\|E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \\
&= \int_{t_n}^{\tau_1}\|(-A)^{\frac{1}{2}}E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_n}^{\tau_1} \|(-A)^{\frac{1}{2}} E_\alpha((\tau_1 - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1 - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma}^{\frac{1}{2}} k s^\gamma ds \\
&= \tilde{M}k \int_{t_n}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} s^\gamma ds \\
&= \tilde{M}k \tau_1^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} \tau_1^\gamma \int_{t_n}^{\tau_1} \left(1 - \frac{s}{\tau_1}\right)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} \left(\frac{s}{\tau_1}\right)^\gamma ds
\end{aligned}
$$

Fazendo $x = \frac{s}{\tau_1}$, temos $\tau_1 dx = ds$, quando $s = t_n \Rightarrow x = \frac{t_n}{\tau_1}$ e quando $s = \tau_1 \Rightarrow x = 1$ portanto

$$
\begin{aligned}
I_5(n) &\leq \tilde{M}k \tau_1^{\gamma - \frac{1}{2}(1+\alpha)} \int_{\frac{t_n}{\tau_1}}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} x^\gamma \tau_1 dx \\
&= \tilde{M}k \tau_1^{\gamma + \frac{1}{2}(1-\alpha)} \int_{\frac{t_n}{\tau_1}}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} x^\gamma dx \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$
\lim_{n\to\infty} \|Tu(t_n) - Tu(\tau_1)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0.
$$

Um argumento similar prova o caso $\tau_1 \in [0, \tau_0)$ e $t_n \to \tau_1^+$. Sendo assim, $Tu \in C([0,\tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$.

Afirmação 2: $\|Tu(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \mu$, para todo $t \in [0, \tau_0]$ e $u \in K$.

De fato, se $u \in K$, então

$$
\begin{aligned}
\|Tu(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= \|E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s) ds \\
&\quad + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s) ds\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \frac{\mu}{2} + \int_0^t \|(-A)^{\frac{3}{4}} E_\alpha((t-s)A\|_{\mathcal{H}_\sigma} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds + \\
&\quad + \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}} E_\alpha((t-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \frac{\mu}{2} + \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\tilde{M}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
\leq\ & \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds + \tilde{M}k\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} s^\gamma ds \\
\leq\ & \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c\mu^2\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} ds \\
& +\tilde{M}kt^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}t^\gamma \int_0^t \left(1-\frac{s}{t}\right)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}\left(\frac{s}{t}\right)^\gamma ds
\end{aligned}
$$

Fazendo, na primeira integral, $t-s=x$ temos $ds=-dx$ quando $s=0 \Rightarrow x=t$ e $s=t \Rightarrow x=0$. Além disso, fazendo $\frac{s}{t}=x$, na segunda integral, temos, $ds=tdx$, daí quando $s=0 \Rightarrow x=0$, e $x=t \Rightarrow x=1$, portanto temos;

$$
\begin{aligned}
\|Tu(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c\mu^2\Big(-\int_t^0 x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx\Big) + \tilde{M}kt^{\gamma-\frac{1}{2}(1+\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}x^\gamma t dx \\
&= \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c\mu^2\int_0^t x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx + \tilde{M}kt^{\gamma-\frac{1}{2}(1+\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}x^\gamma t dx \\
&= \frac{\mu}{2} + \frac{4\tilde{M}c\mu^2}{1-3\alpha}t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} + \tilde{M}k\mathbf{B}\left(\frac{1-\alpha}{2},\gamma+1\right)t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)+\gamma} \\
&\leq \frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{4}+\frac{\mu}{4} = \mu.
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que T é uma contração sobre K, para isso usaremos a desigualdade (2.1). Se $u, v \in K$, então

$$
\begin{aligned}
\|Tu(t)-Tv(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= \left\|\int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s))ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&= \int_0^t \|(-A)^{\frac{3}{4}}E_\alpha((t-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&= \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}\|\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\left(\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}+\|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\right)\|u(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq 2\tilde{M}c\mu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}ds \sup_{0\leq t\leq\tau_0}\|u(t)-v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{8\tilde{M}c\mu}{1-3\alpha}t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)}\sup_{0\leq t\leq\tau_0}\|u(t)-v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Por (2.3) segue que $\frac{8\tilde{M}c\mu}{1-3\alpha}t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} \leq \frac{1}{2}$ para todo $t \in [0,\tau_0]$, logo T é uma contração sobre K e portanto possui um único ponto fixo $u \in K$ (APÊNDICE A, Teorema 3.15).

Para provar a unicidade da solução branda, considere $v \in C([0,\tau_0];\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$ outra solução branda do Problema (4). Então para todo $t \in [0,\tau_0]$

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= \left\| \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s))ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&= \int_0^t \|(-A)^{\frac{3}{4}} E_\alpha((t-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \|(\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} \|\tilde{F}(u)(s)-\tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} (\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \|u(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M}c \sup_{0\leq s\leq \tau_0} (\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} \|u(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Logo pela Desigualdade Singular de Gronwall, (ver APÊNCICE A, Lema 3.17), $\|u(t)-v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0$ para todo $t \in [0,\tau_0]$.

Para concluir a demonstração, considere $0 < \theta < \frac{1-3\alpha}{4(1+\alpha)}$, perceba que como $\alpha \in [0,\frac{1}{3})$ temos $\frac{1-3\alpha}{4(1+\alpha)} < \frac{1}{2}$. Então para todo $t \in (0,\tau_0]$,

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\
&= \left\| \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds + E_\alpha(tA)u_0 \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\
&\leq \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds \\
&\quad + \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds + \|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\
&= \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad + \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds + \|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad + \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)} \|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds + \tilde{M}t^{-\theta(1+\alpha)} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \tilde{M}c \int_0^t (t-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)} \|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tilde{M}k\int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}s^{\gamma}ds+\tilde{M}t^{-\theta(1+\alpha)}\|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
\leq\ & \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\{\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\}t^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}\int_0^t\left(1-\frac{s}{t}\right)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}ds\\
&+\tilde{M}kt^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}t^{\gamma}\int_0^t\left(1-\frac{s}{t}\right)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}\left(\frac{s}{t}\right)^{\gamma}ds+\tilde{M}t^{-\theta(1+\alpha)}\|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Fazendo $\frac{s}{t}=x$, nas duas integrais acima,temos $ds=tdx$, além disso, quando $s=0\Rightarrow x=0$, e quando $s=t\Rightarrow x=1$, daí;

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\{\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\}t^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)+1}\int_0^1(1-x)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}dx\\
&\quad+\tilde{M}kt^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)+\gamma+1}\int_0^1(1-x)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}x^{\gamma}dx+\tilde{M}t^{-\theta(1+\alpha)}\|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&= \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\{\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\}t^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)+1}\mathbf{B}\left(1-\Big(\frac{3}{4}+\theta\Big)(1+\alpha),1\right)\\
&\quad+\tilde{M}kt^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)+\gamma+1}\mathbf{B}\left(1-\Big(\frac{1}{2}+\theta\Big)(1+\alpha),\gamma+1\right)+\tilde{M}t^{-\theta(1+\alpha)}\|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Portanto, $u:(0,\tau_0]\to\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$ está bem definido. Além disso, da estimativa acima vemos que para $t>0$

$$
\begin{aligned}
t^{\theta(1+\alpha)}\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\{\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\}t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)}\mathbf{B}\left(1-\Big(\frac{3}{4}+\theta\Big)(1+\alpha),1\right)\\
&\quad+\tilde{M}kt^{\frac{1}{2}(1-\alpha)+\gamma}\mathbf{B}\left(1-\Big(\frac{1}{2}+\theta\Big)(1+\alpha),\gamma+1\right)\\
&\quad+t^{\theta(1+\alpha)}\|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}.
\end{aligned}
$$

Da Observação 1.6 segue que o lado direito da inequação acima tende para 0 quando $t\to0^+$. Com um argumento similar ao usado na Afirmação 1, provaremos que $u\in C\left((0,\tau_0];\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}\right)$. Seja $\tau_1\in(0,\tau_0]$ e considere $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,\tau_1)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\tau_1$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|u(t_n)-u(\tau_1)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \|E_\alpha(t_nA)u_0-E_\alpha(\tau_1A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}\\
&\quad+\int_0^{t_n}\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}ds\\
&\quad+\int_0^{t_n}\|(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_n}^{\tau_1}\|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}ds\\
&+\int_{t_n}^{\tau_1}\|E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}ds\\
:=\ & I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)+I_4(n)+I_5(n).
\end{aligned}
$$

Analisaremos separadamente cada termo $I_i(n)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

• $I_1(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$ pela Proposição 1.7.[1]

• Para $I_2(n)$, note que

$$
\begin{aligned}
&\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}\\
&=\|E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}+\theta}}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\left[\|E_\alpha((t_n-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}+\theta}}+\|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}+\theta}}\right]\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\tilde{M}\left[(t_n-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}+(\tau_1-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}\right]\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\tilde{M}c\left[(t_n-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}+(\tau_1-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}\right]\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 1.7 a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}+\theta}$, [2] e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue $I_2(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $I_3(n)$, note que

$$
\begin{aligned}
&\|[E_\alpha((t_n-s)A))-E_\alpha((\tau_1-s)A)]Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}\\
&\|[\|E_\alpha((t_n-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}+\|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}]\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}\\
&\leq\tilde{M}c\left[(t_n-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}+(\tau_1-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}\right]s^\gamma.
\end{aligned}
$$

Como $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é uma família fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue $I_3(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

[1]Podemos usar a Proposição 1.7, pois como $\theta < \frac{1-3\alpha}{4(1+\alpha)}$, logo $(1+\alpha)(\frac{1}{2}+\theta) < 1$.

[2]Neste caso, basta observar que $\theta < \frac{1-3\alpha}{4(1+\alpha)} \Leftrightarrow (1+\alpha)(\frac{3}{4}+\theta) < 1$.

• Para $I_4(n)$, basta notar que

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{\tau_1} \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((\tau_1-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}ds &= \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}+\theta}}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\
&\leq \tilde{M}c\int_{t_n}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \\
&\leq \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\int_{t_n}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}ds,
\end{aligned}$$

fazendo $\tau_1 - s = x$, na integral acima, temos $ds = -dx$, quanto aos limites de integração, quando $s = t_n \Rightarrow x = \tau_1 - t_n$ e quando $s = \tau_1 \Rightarrow x = 0$, dsí;

$$\begin{aligned}
&= \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\Big(-\int_{\tau_1-t_n}^{0}x^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}ds\Big) \\
&= \tilde{M}c\sup_{0\leq s\leq\tau_0}\|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\int_{0}^{\tau_1-t_n}x^{-(\frac{3}{4}+\theta)(1+\alpha)}ds
\end{aligned}$$

logo $I_4(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $I_5(n)$, note que

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}ds &= \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\
&\leq \tilde{M}k\int_{t_n}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}s^\gamma ds
\end{aligned}$$

dividindo por τ_1 e fazendo $\frac{s}{\tau_1} = x$ tem-se $ds = \tau_1 dx$, quanto aos limites de integração, quando $s = t_n \Rightarrow x = \frac{t_n}{\tau_1}$, e quando $s = \tau_1 \Rightarrow x = 1$, daí;

$$= \tilde{M}c\tau_1^{\gamma-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)+1}\int_{\frac{t_n}{\tau_1}}^{1}(1-x)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(1+\alpha)}s^\gamma dx,$$

logo $I_5(n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Um argumento similar demonstra o caso $\tau_1 \in (0, \tau_0)$ e $t_n \to \tau_1^+$. Portanto, $u \in C\Big((0,\tau_0];\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}\Big)$. Isto conclui a demonstração.

□

Daremos continuidade ao nosso estudo do Problema (4) demonstrando que a solução branda proveniente do Teorema 2.1 tem uma única continuação para um intervalo maior de existência.

Definição 2.2. Seja $u : [0, \tau] \to \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ uma solução branda do problema (4). Se $T > 0$ e

$v : [0, \tau + T] \to \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ é uma solução branda do problema (4), então dizemos que v é uma continuação de u em $[0, \tau + T]$.

Teorema 2.3. *Sob as condições do Teorema 2.1, seja* τ_0 *e* $u : [0, \tau_0] \to \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ *a solução branda do problema* (4). *Então existe* $T > 0$ *e uma única continuação* u^* *de* u *em* $[0, \tau_0 + T]$.

Demonstração. Para $\mu > 0$ fixado, consideremos $T > 0$ tal que para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$

$$\|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau_0 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\left\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0 - s)A)) \tilde{F}(u)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\left\| \int_0^{\tau_0} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0 - s)A)) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{5}, \text{ [3]}$$

$$\frac{4\tilde{M}}{1-3\alpha} \left(c\mu^2 + 2c\mu \|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|\tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \right) (t - \tau_0)^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\tilde{M} k t^{\gamma + \frac{1}{2}(1-\alpha)} \int_{\frac{\tau_0}{t}}^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} s^\gamma ds \leq \frac{\mu}{5}.$$

Seja K o conjunto de todas as funções $w \in C\Big([0, \tau_0 + T]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\Big)$ tais que $w(t) = u(t)$ para todo $t \in [0, \tau_0]$ e

$$\|w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \mu, \quad \forall\, t \in [\tau_0, \tau_0 + T].$$

Defina o operador Λ sobre K por

$$\Lambda w(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A) \tilde{F}(w)(s) ds - \int_0^t E_\alpha((t-s)A) Ph(s) ds,$$

em que $\tilde{F}(w) = -(-A)^{\frac{1}{4}} P(w \cdot \nabla) w$. Mostraremos que $\Lambda : K \to K$ está bem definido e

[3] Podemos considerar $T > 0$ com essa propriedade porque $\{E_\alpha(tA)\}_{\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ e sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}$, e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{t \to \tau_0^+} \left\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0 - s)A)) \tilde{F}(u)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

e,

$$\lim_{t \to \tau_0^+} \left\| \int_0^{\tau_0} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0 - s)A)) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

que é uma contração.

Se $w \in K$, então para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= \|E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(w)(s)ds \\
&\quad + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds \\
&\quad - E_\alpha(\tau_0 A)u_0 - \int_0^{\tau_0} E_\alpha((\tau_0 - s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
&\quad - \int_0^{\tau_0} E_\alpha((\tau_0 - s)A)Ph(s)ds\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau_0 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \Bigg\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
&\quad + \int_{\tau_0}^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(w)(s)ds \\
&\quad + \int_0^{\tau_0} E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds + \int_{\tau_0}^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds \\
&\quad - \int_0^{\tau_0} E_\alpha((\tau_0 - s)A)\tilde{F}(u)(s)ds - \int_0^{\tau_0} E_\alpha((\tau_0 - s)A)Ph(s)ds \Bigg\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau_0 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} \left(E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0 - s)A)\right) \tilde{F}(u)(s)ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_0^{\tau_0} \left(E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0 - s)A)\right) Ph(s)ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_{\tau_0}^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(w)(s)ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_{\tau_0}^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{\mu}{5} + \frac{\mu}{5} + \frac{\mu}{5} + \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} \|\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad \tilde{M}k \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} s^\gamma ds \\
&= \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} (\|\tilde{F}(w)(s) - \tilde{F}(u)(\tau_0) + \tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad + \frac{3}{\mu} + \tilde{M}kt^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} \int_{\tau_0}^t t^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} \Big(1 - \frac{s}{t}\Big)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} \Big(\frac{s}{t}\Big)^\gamma ds
\end{aligned}
$$

Fazendo $\frac{s}{t} = x$ na última integral, temos $ds = tdx$, quanto aos limites de integração, quando $s = \tau_0 \Rightarrow x = \frac{\tau_0}{t}$ e quando $s = t \Rightarrow x = 1$, daí;

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}} &\leq \tilde{M}\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}(\|\tilde{F}(w)(s) - \tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}} + \|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}})ds \\
&+\frac{3}{5}\mu + \tilde{M}kt^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}t^{\gamma}t\int_{\frac{\tau_0}{t}}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}x^{\gamma}dx \\
&\leq \tilde{M}\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}c(\|w(s)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}} + \|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}})\|w(s) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}}ds \\
&+\tilde{M}\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}ds + \frac{4}{5}\mu
\end{aligned}
$$

Fazendo $t-s=x$ na segunda integral, temos $ds=-dx$, quanto aos limites de integração, quando $s=t_0 \Rightarrow x=t-\tau_0$ e quando $s=t \Rightarrow x=0$, daí;

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}} &\leq \tilde{M}c\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}(\|w(s) + u(\tau_0) + u(\tau_0) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}})\mu ds \\
&+\tilde{M}\|\tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}\left(-\int_{t-\tau_0}^{0}x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx\right) + \frac{4}{5}\mu \\
&= \tilde{M}c\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}(\|w(s) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}} + 2\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}})\mu ds \\
&+\tilde{M}\|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}\int_{0}^{t-\tau_0}x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx + \frac{4}{5}\mu \\
&\leq \tilde{M}c\mu(\mu + 2\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}})\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}ds \\
&+\tilde{M}\|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}\int_{0}^{t-\tau_0}s^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}ds + \frac{4}{5}\mu
\end{aligned}
$$

Fazendo a mesma substituição da segunda integral na primeira integral tem-se;

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}} &\leq \tilde{M}c\mu(\mu + 2\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}})\left(-\int_{t-\tau_0}^{0}x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx\right) \\
&+\tilde{M}\|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}\int_{0}^{t-\tau_0}x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}dx + \frac{4}{5}\mu \\
&= \frac{4\tilde{M}}{1-3\alpha}\Big(c\mu^2 + 2c\mu\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma}} + \|\tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}\Big)(t-\tau_0)^{\frac{1-3\alpha}{4}} + \frac{4\mu}{5} \\
&\leq \mu.
\end{aligned}
$$

Além disso, $\Lambda w \in C([0,\tau_0+T];\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\sigma})$. De fato, seja $\tau \in [\tau_0,\tau_0+T)$ e considere

$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [\tau, \tau_0 + T]$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \tau$, então

$$\begin{aligned}
\|\Lambda w(t_n) - \Lambda w(\tau)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= \|E_\alpha(t_n A)u_0 + \int_0^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t_n - s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
&\quad - \int_0^{t_n} E_\alpha((t_n - s)A)Ph(s)ds - E_\alpha(\tau A)u_0 \\
&\quad - \int_0^{\tau} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau - s)A)\tilde{F}(w)(s)ds \\
&\quad + \int_0^{\tau} E_\alpha((\tau - s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \|E_\alpha(t_n A)u_0 - E_\alpha(\tau A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_0^{\tau} (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A))\tilde{F}(w)(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_0^{\tau} (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A))Ph(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_\tau^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t_n - s)A)\tilde{F}(w)(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_\tau^{t_n} E_\alpha((t_n - s)A)Ph(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&:= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n).
\end{aligned}$$

Analisaremos cada termo $I_i(n)$ separadamente.

- $I_1(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$.
- Para $I_2(n)$, note que

$$\begin{aligned}
&\|(-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A))\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \Big(\|E_\alpha((t_n - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}} + \|E_\alpha((\tau - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}\Big)\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
&\leq \tilde{M}\Big((t_n - s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} + (\tau - s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\Big)c\|w(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \tilde{M}c\Big((t_n - s)^{\frac{-3(1+\alpha)}{4}} + (\tau - s)^{\frac{-3(1+\alpha)}{4}}\Big) \sup_{0\leq s\leq\tau} \|w(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}
&\|(-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A)\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&= \|E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}}\|\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

e $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}$, concluímos pelo Teorema da Convergência

Dominada de Lebesgue que $I_2(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $I_3(n)$, note que

$$
\begin{aligned}
&\|(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \left(\|E_\alpha((t_n - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|E_\alpha((\tau - s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\right)\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
&\leq \tilde{M}k(t_n - s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}s^\gamma + \tilde{M}k(\tau - s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}s^\gamma.
\end{aligned}
$$

Logo $I_3(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

• Para $I_4(n)$,

$$
\begin{aligned}
I_4(n) &\leq \int_\tau^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t_n - s)A)\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \int_\tau^{t_n} \tilde{M}(t_n - s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c\int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}\|w(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M}c \sup_{0\leq s\leq \tau_0+T} \|w(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} ds
\end{aligned}
$$

Fazendo $t_n - s = x$, na integral, temos

$$
\begin{aligned}
I_4(n) &\leq \tilde{M}c \sup_{0\leq s\leq \tau_0+T} \|w(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \int_0^{t_n-\tau} x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} ds \\
&= \tilde{M}c \sup_{0\leq s\leq \tau_0+T} \|w(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{1-3\alpha}(t_n - \tau)^{\frac{1-3\alpha}{4}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $I_4(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $I_5(n)$,

$$
\begin{aligned}
I_5(n) &\leq \int_\tau^{t_n} \|E_\alpha((t_n - s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \int_\tau^{t_n} \tilde{M}(t_n - s)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}k\int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{\frac{-(1+\alpha)}{2}} s^\gamma ds \\
&= \tilde{M}k\int_\tau^{t_n} t_n^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}(1 - \frac{s}{t_n})^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} t_n^\gamma (\frac{s}{t_n})^\gamma ds
\end{aligned}
$$

Fazendo $\frac{s}{t_n} = x$, temos,

$$I_5(n) \leq \tilde{M}kt_n^{\frac{1-\alpha}{2}+\gamma} \int_{\frac{\tau}{t_n}}^{1} (1-x)\frac{-(1+\alpha)}{2} x^{\gamma}.$$

Logo, $I_5(n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|\Lambda w(t_n) - \Lambda w(\tau)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Um argumento similar prova o caso $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + T]$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [\tau_0, \tau]$. Por conseguinte, $\Lambda w \in K$ se $w \in K$.

Por fim, mostraremos que Λ é uma contração sobre K. De fato, se $v, w \in K$, então

$$\|\Lambda v(t) - \Lambda w(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{se} \quad t \in [0, \tau_0],$$

e

$$\begin{aligned}
\|\Lambda v(t) - \Lambda w(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= \|E_\alpha(tA)u_0 \\
&\quad + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(v)(s)ds \\
&\quad - \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds - E_\alpha(tA)u_0 \\
&\quad - \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(w)(s)ds \\
&\quad + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&= \| \int_0^{t_0} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(v)(s) \\
&\quad - \int_0^{t_0} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(w)(s) \\
&\quad \int_{t_0}^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(v) - \tilde{w}(s))ds\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \int_{\tau_0}^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(v)(s) - \tilde{F}(w)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} \|\tilde{F}(w)(s) - \tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} (\|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \|w(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{M}c\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}(\|w(s)-u(\tau_0)+u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad +\|v(s)-u(\tau_0)+u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})\|w(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds\\
&\le \tilde{M}c\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}(\|w(s)-u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}+\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad +\|v(s)-u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}+\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})\|w(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds\\
&\le \tilde{M}c2(\mu+\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}ds\sup_{\tau_0\le s\le\tau_0+T}\|w(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{8\tilde{M}c}{1-3\alpha}(\mu+\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})(t-\tau_0)^{\frac{1-3\alpha}{4}}\sup_{\tau_0\le s\le\tau_0+T}\|w(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\\
&\le \frac{2}{5}\sup_{\tau_0\le s\le\tau_0+T}\|w(s)-v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Portanto Λ é uma contração sobre K e isto conclui a demonstração. □

Definição 2.4. Seja $u : [0,\tau_{max}) \to \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ uma solução branda do problema (4). Dizemos que τ_{max} é o tempo maximal de existência de u, se $\tau_{max} = +\infty$, ou se não existir uma continuação de u para um intervalo $[0,\tau_{max}]$.

O próximo teorema, é o resultado sobre existência global ou a explosão da solução em tempo finito. Necessariamente, temos o seguinte:

Teorema 2.5. *Sob as condições do Teorema 2.1, se u é a solução branda do Problema (4) com um tempo maximal de existência $\tau_{\max} < +\infty$, então*

$$\limsup_{t\to\tau_{\max}^-}\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = \infty.$$

Demonstração. Suponha que existe $R > 0$ tal que $\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \le R$ para todo $t \in [0,\tau_{\max})$. Considere $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $t_j \to \tau_{\max}$ quando $j \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ tome $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \ge N$

$$\|E_\alpha(t_mA)u_0 - E_\alpha(t_nA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} < \frac{\varepsilon}{5},$$ [4]

$$\int_0^{t_n}\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_{\max}-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \le \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\int_0^{t_n}\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((\tau_{\max}-s)A)-E_\alpha((t_n-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \le \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\int_0^{t_n}\|(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_{\max}-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \le \frac{\varepsilon}{10},$$

[4] Podemos tomar N dessa forma porque $E_\alpha(tA)$ é uma família fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$.

$$\int_0^{t_n} \|(E_\alpha((\tau_{\max}-s)A)-E_\alpha((t_m-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \leq \frac{\varepsilon}{10},^{5}$$

$$\tilde{M}cR^2\int_0^{t_m-t_n} s^{\frac{-3(1+\alpha)}{4}} ds \leq \frac{\varepsilon}{5},$$

$$\tilde{M}k\tau_{\max}^{\gamma+\frac{1-\alpha}{2}}\int_{\frac{t_n}{t_m}}^1 (1-s)^{\frac{-(1+\alpha)}{2}} s^\gamma ds \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

Nas desigualdades acima nós supomos, sem perda de generalidade, $t_n < t_m$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u(t_n)-u(t_m)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &= E_\alpha(t_nA)u_0 + \int_0^{t_n}(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t_n-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
&\quad + \int_0^{t_n} E_\alpha((t_n-s)A)Ph(s)ds - E_\alpha(t_mA)u_0 \\
&\quad - \int_0^{t_m}(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t_m-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds \\
&\quad - \int_0^{t_m} E_\alpha((t_m-s)A)Ph(s)ds\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \|E_\alpha(t_nA)u_0 - E_\alpha(t_mA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_0^{t_n}(-A)^{\frac{1}{4}}\big(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((t_m-s)A)\big)\tilde{F}(u)(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_0^{t_n}\big(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((t_m-s)A)\big)Ph(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_{t_n}^{t_m}(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t_m-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\|\int_{t_n}^{t_m}E_\alpha((t_m-s)A)Ph(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \int_0^{t_n}\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_{\max}-s)A) \\
&\quad + E_\alpha((\tau_{\max}-s)A)-E_\alpha((t_m-s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \\
&\quad + \int_0^{t_n}\|(E_\alpha(t_n-s)A)-E_\alpha((\tau_{\max}-s)A) \\
&\quad + E_\alpha((\tau_{\max}-s)A)-E_\alpha((t_m-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}ds \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_m}\|E_\alpha((t_m-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma}ds \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_m}\|E_\alpha((t_m-s)A)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5}
\end{aligned}$$

[5]Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, os quatro últimos termos tendem para zero quando $n, m \to \infty$, por isso podemos escolher N desta forma.

$$
\begin{aligned}
& + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((t_m-s)A))\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((t_m-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_{t_n}^{t_m} \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t_m-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_{t_n}^{t_m} \|E_\alpha((t_m-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
\leq \; & \frac{\varepsilon}{5} + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_{\max}-s)A))\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((\tau_{\max}-s)A) - E_\alpha((t_m-s)A))\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_{\max}-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((\tau_{\max}-s)A) - E_\alpha((t_m-s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \tilde{M}c \int_{t_n}^{t_m} (t_m-s)^{\frac{-3(1+\alpha)}{4}} \|u(s)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
& + \tilde{M}k \int_{t_n}^{t_m} (t_m-s)^{\frac{-(1+\alpha)}{2}} s^\gamma ds \\
\leq \; & \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \tilde{M}c \int_{t_n}^{t_m} (t_m-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} R^2 \\
& + \tilde{M}k \int_{t_n}^{t_m} (t_m-s)^{\frac{-(1+\alpha)}{2}} s^\gamma ds \\
= \; & \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \tilde{M}c \int_{t_n}^{t_m} (t_m-s)^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} R^2 \\
& + \tilde{M}k t_m^{\gamma - \frac{(1+\alpha)}{2}} \int_{t_n}^{t_m} \big(1 - \frac{s}{t_m}\big)^{\frac{-(1+\alpha}{2}} \big(\frac{s}{t_m}\big)^\gamma
\end{aligned}
$$

fazendo $t_m - s = x$ na primeira integral da desigualdade acima, e $\frac{s}{t_m} = x$ na segunda integral, temos

$$
\begin{aligned}
\|E_\alpha(t_m A)u_0 - E_\alpha(t_n A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \; & \leq \; \frac{3\varepsilon}{5} + \tilde{M}cR^2 \int_0^{t_m - t_n} x^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)} dx \\
& \quad + \tilde{M}k t_m^{\gamma + \frac{1-\alpha}{2}} \int_{\frac{t_n}{t_m}}^1 (1-x)^{-\frac{(1+\alpha)}{2}} x^\gamma dx \\
& \leq \; \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \tilde{M}k \tau_{\max}^{\gamma + \frac{1-\alpha}{2}} \int_{\frac{t_n}{t_m}}^1 (1-x)^{-\frac{(1+\alpha)}{2}} x^\gamma dx \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

Portanto, $\{u(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto existe $\tilde{u} \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ tal que

$\lim_{n\to\infty} u(t_n) = \tilde{u}$. Sendo assim, podemos estender u sobre $[0, \tau_{\max}]$ obtendo a equação

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds,$$

para todo $t \in [0, \tau_{\max}]$. Porém, pelo Teorema 2.3, podemos estender a solução para um intervalo maior, e isto é uma contradição. $\square$

Conclusão

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de solução branda para um problema do campo velocidade de um fluído viscoelástico, homogêneo, isotrópico, incompressível tridimensional.

Num primeiro momento, escrevemos o problema como uma equação integral utilizando uma projeção ortogonal em um espaço de Hilbert adequado, podendo assim aplicar a transformada de Laplace formalmente para resolver a equação e aplicar a transformada inversa, encontrando uma possível solução.

Num segundo momento, estudamos o comportamento da família de resolvente associada ao operador de Stokes, garantindo inicialmente que potências de um elemento que está no resolvente também estão no resolvente, logo após provando que existe uma função que limita a família no espaço em questão, seguindo com a garantia da continuídade uniforme da família e consequentemente a convergência uniforme em intervalos limitados.

Por fim, abordamos o problema com as garantias necessárias para garantir a existência e unicidade de solução branda. Além disso conseguimos determinar a única continuação da solução e o comportamento explosivo para soluções com tempo maximal de existência finito.

Capítulo 3

APÊNDICE A

3.1 Operadores setoriais e analiticidade

Iniciaremos esta seção definindo semigrupos fortemente contínuos e seus geradores.

Definição 3.1. Dizemos que uma família de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo, se

(i) $T(0) = I$ (operador identidade); e,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall\, t, s \geq 0.$

Se, além disso

(iii) $\|T(t)x - x\| \to 0$ quando $t \to 0^+$, $\forall\, x \in X$, dizemos que o semigrupo é *fortemente contínuo* (ou que é um C_0-semigrupo).

Definição 3.2. Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Chamaremos de gerador infinitesimal o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ } existe \right\}.$$

Definição 3.3. Dizemos que Ha é um *caminho de Hankel*, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que, $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, em que os caminhos Ha_i são dados por

$$Ha_1 := \{te^{i\theta}; t \in [r, \infty)\};$$

$$Ha_2 := \{re^{it}; t \in [-\theta, \theta)\};$$

$$Ha_3 := \{te^{-i\theta}; t \in [r, \infty)\}.$$

Também escrevemos $Ha = Ha(r, \theta)$ para mostrar da dependência do ângulo e do raio (ver Figura 3.1).

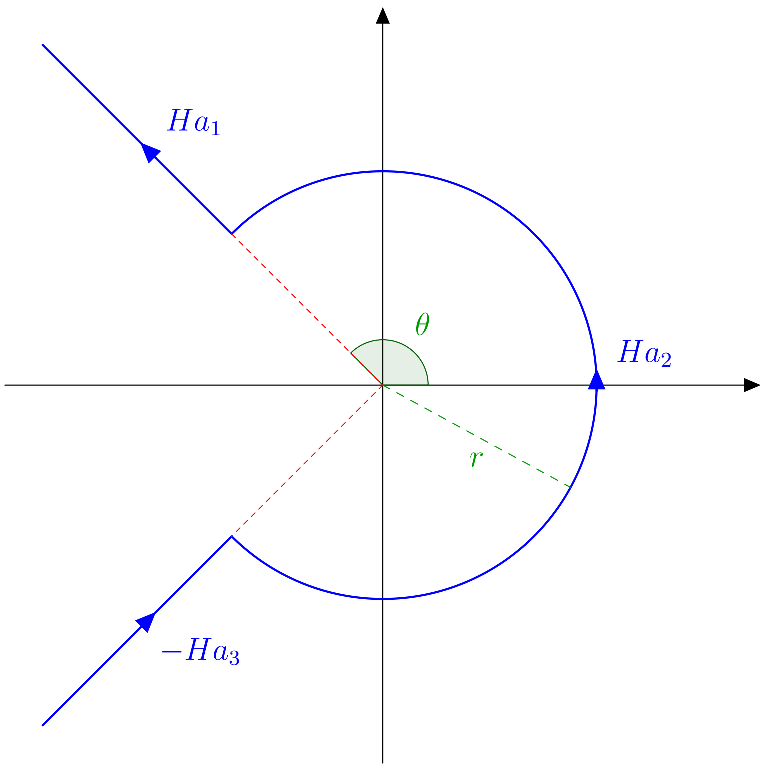


Figura 3.1: Caminho de Hankel $Ha = Ha(r, \theta)$

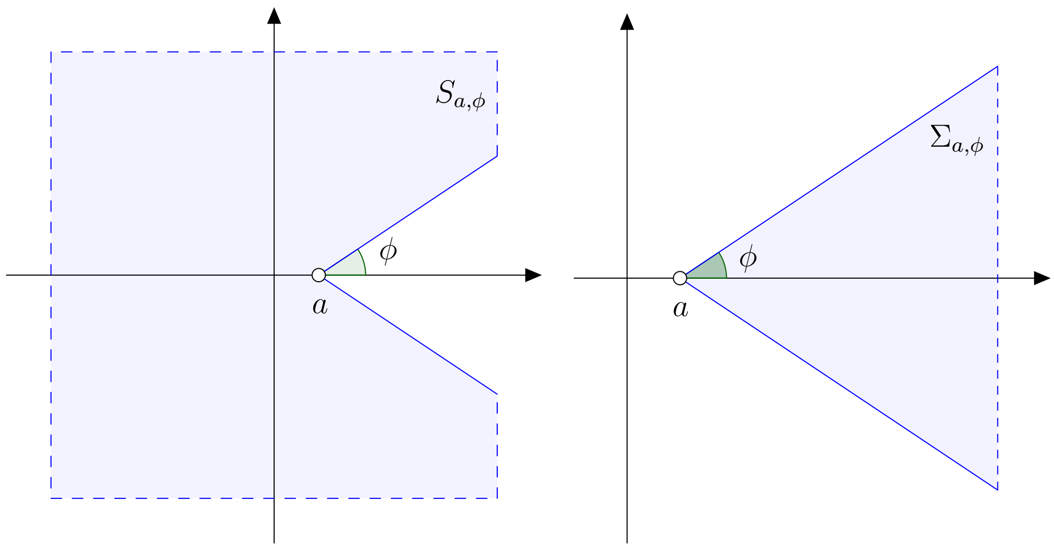
Considere $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \pi)$. Definimos então os seguintes subconjuntos do plano complexo,

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \ \lambda \neq a\}; \tag{3.1}$$

$$\Sigma_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg(\lambda - a)| \leq \phi, \ \lambda \neq a\}. \tag{3.2}$$

A Figura 3.2 ilustra os "setores" $S_{a,\phi}$ e $\Sigma_{a,\phi}$, com $a > 0$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Observe que $-S_{a,\phi} = \Sigma_{-a,\pi-\phi}$.

Nós agora iremos considerar a possibilidade de estender o domínio do parâmetro de um semigrupo para certos setores no plano complexo que incluem o eixo real não negativo. É claro que, a fim de preservar a estrutura de semigrupo, o domínio no qual o parâmetro complexo variar deve ser um semigrupo aditivo de números complexos.



(a) Setor $S_{a,\phi}$ (b) Setor $\Sigma_{a,\phi}$

Figura 3.2: Setores $S_{a,\phi}$ e $\Sigma_{a,\phi}$

Definição 3.4. Seja $\Sigma^{\circ}_{0,\phi}$ o interior do conjunto $\Sigma_{0,\phi}$. Dizemos que uma família de operadores lineares limitados $\{T(t); t \in \Sigma^{\circ}_{0,\phi} \cup \{0\}\}$ é um *semigrupo analítico*, se:

(i) A função $\Sigma^{\circ}_{0,\phi} \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é analítica;

(ii) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para quaisquer $t, s \in \Sigma_{0,\phi} \cup \{0\}$; e

(iii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$, para todo $x \in X$ (observe que $t \to 0$ por pontos de $\Sigma^{\circ}_{0,\phi}$).

Usaremos a notação de Nagel (ENGEL; NAGEL, 2000) para definir operadores setoriais (ver (ENGEL; NAGEL, 2000, Definição II.4.1)).

Definição 3.5. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é um *operador setorial*, se existem $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que, $\Sigma_{\mu,\pi/2+\theta} \subset \rho(A)$ [1] e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \Sigma_{\mu,\pi/2+\theta}.$$

Neste caso, dizemos que A é μ-setorial de ângulo θ.

Teorema 3.6. *Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ seja um operador setorial; isto é, que existem constantes $C \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que, $\Sigma_{a,\phi} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \textit{para todo} \quad \lambda \in \Sigma_{a,\phi}.$$

[1] $\Sigma_{a,\phi}$ é definido em (3.2).

Então, A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(X)$ com

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+Ha} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \ t > 0,$$

em que $a + Ha = a + Ha(r, \phi)$ é o deslocamento do caminho de Hankel (ver Definição 3.3), com r pequeno. Além disso, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\Sigma^o_{0,\phi-\frac{\pi}{2}}$ em $\mathcal{B}(X)$ (ou a complexificação de X, se X é um espaço de Banach real) e para algum $K > 0$,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Ke^{at}, \quad e \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Kt^{-1}e^{at}, \quad \textit{para todo} \ \ t > 0.$$

Por fim,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ e $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é contínua.

Definição 3.7. Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\text{Re}\sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

em que $(T(t))_{t \geq 0}$ é o C_0-semigrupo gerado por $-A$ (ver Teorema 3.6) e Γ denota a função Gama.[2]

Teorema 3.8. *Se $-A$ é um operador setorial sobre X com $Re\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado e injetivo sobre X. Além disso, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$,*

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Definição 3.9. Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\text{Re}\sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}, \ \ \text{com} \ \ D(A^\alpha) := Im(A^{-\alpha}).$$

Além disso, definimos $A^0 := I$ (operador identidade sobre X).

[2] Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}z > 0$, então a função Gama é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Teorema 3.10. *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $Re\sigma(A) > 0$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $\alpha > 0$, então A^α é fechado e densamente definido.

(ii) Se $\alpha \geq \beta$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.

(iii) $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ sobre $D(A^\gamma)$, em que $\gamma = max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

(iv) $A^\alpha T(t) = T(t)A^\alpha$ sobre $D(A^\alpha)$, para $t > 0$, em que $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Teorema 3.11 (Desigualdade do Momento)**.** *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $Re\sigma(A) > 0$. Se $0 \leq \alpha \leq 1$, então existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de A tal que,*

$$\|A^\alpha x\|_X \leq C\|Ax\|_X^\alpha \|x\|_X^{1-\alpha}, \quad \forall x \in D(A).$$

Definição 3.12. Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $\text{Re}\sigma(A) > 0$. Para cada $\alpha \geq 0$, definimos o espaço

$$X^\alpha := D(A^\alpha), \quad \text{munido com a norma} \quad \|x\|_\alpha := \|A^\alpha x\|_X.$$

Teorema 3.13. *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $Re\sigma(A) > 0$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Para cada $\alpha \geq 0$, X^α munido com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ é um espaço de Banach.

(ii) $X^0 = X$ e $X^1 = D(A)$.

(iii) Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^α é um subespaço denso de X^β e a inclusão $i : X^\alpha \to X^\beta$ é contínua.

(iv) Se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta sempre que $\alpha \geq \beta \geq 0$.

Proposição 3.14. *Seja A um operador setorial sobre X com $Re\sigma(-A) > 0$, $\Sigma_{0,\phi} \subset \rho(A)$ para algum $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M|\lambda|^{-1}, \quad \textit{para todo} \;\; \lambda \in \Sigma_{0,\phi}.$$

Então, existe uma constante k tal que,

$$\|(-A)^{\beta}(\lambda - A)^{-1}x\|_X \leq k|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_X,$$

para $0 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$ e $x \in X$.

3.2 Miscelânea de resultados utilizados

Teorema 3.15 (Princípio de Contração de Banach)**.** *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \to M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Teorema 3.16 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam as funções $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Λ-mensuráveis tais que $f_n \to f$ q.t.p.. Se existe uma função integrável $g : \Omega \to [0, +\infty)$ tal que $g \geq |f_n|$ q.t.p., então as funções f_n e f são integráveis e $I(f_n) \to I(f)$.*

Lema 3.17 (Desigualdade Singular de Gronwall)**.** *Suponha que $b \geq 0$ e $a(t)$ é uma função não negativa, integravél localmente no intervalo $[0, T)$ para algum $T \in \mathbb{R}_+^*$, e suponha que $u(t)$ é não negativa e integravel no intervalo $[0, T)$ com*

$$u(t) \leq a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds$$

neste intervalo; Então

$$u(t) \leq a(t) + \theta \int_0^t E'_\beta(\theta(t-s)) a(s) ds, \qquad 0 \leq t < T,$$

em que

$$\theta = (b\Gamma((\beta))^{\frac{1}{\beta}},\ E_\beta(z) = \sum_n = 0^\infty \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)},\ E'_\beta(z) = \frac{d}{dz}E_\beta(z),$$

$$E'(z) \simeq \frac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \text{ quando } z \to 0^+,\ E'_\beta \simeq \frac{1}{\beta}e^z \text{ quando } z \to +\infty$$

$$(e\ E_\beta(z) \simeq \frac{1}{\beta}e^z \text{ quando } z \to ++\infty). \text{ Se } a(t) \equiv a, \text{ constante, então } u(t) \leq aE_\beta(\theta t).$$

Teorema 3.18 (Teorema de Cauchy)**.** *Seja f uma função analítica em um aberto $A \subset \mathbb{C}$ e seja σ um ciclo suave por partes em A. Se σ é homólogo a zero em A, então*

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \ \forall z \in A \setminus |\sigma|$$

Referências

ANDRADE, B. d.; VIANA, A.; SILVA, C. l^q-solvability for an equation of viscoelasticity in power type material. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Springer, v. 72, n. 10, 2021.

ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* New York: Springer Verlag, 2000.

FUJITA, H.; KATO, T. On the navier-stokes initial value problem. i. *Archive for rational mechanics and analysis*, v. 16, n. 4, p. 269–315, 1964.

GIGA, Y. Analyticity of the semigroup generated by the stokes operator in l^r spaces. *Mathematische Zeitschrift*, v. 178, n. 3, p. 297–329, 1981.

PRÜSS, J. *Evolutionary integral equations and applications.* [S.l.]: Birkhäuser, 2013. v. 87.

SILVA, C. *Análise assintótica e qualitativa de equações de evolução e aplicações a modelos físicos.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Brasil, 2015.

WAHL, W. V. *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* [S.l.]: Springer, 1985.