



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Mariana Pereira Franco

# Um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias em Dinâmica Populacional

Recife-PE  
Dezembro de 2019

# Um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias em Dinâmica Populacional

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho**

Recife-PE  
Dezembro de 2019

Mariana Pereira Franco

# Um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias em Dinâmica Populacional

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho (Orientador)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco -(UFRPE)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Yane Lísley Ramos Araújo  
Universidade Federal Rural de Pernambuco -(UFRPE)

---

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo  
Universidade Federal da Paraíba - (UFPB)

Recife-PE  
Dezembro de 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

F825e

Franco, Mariana Pereira

Um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias em Dinâmica Populacional / Mariana Pereira Franco. - 2019.  
76 f. : il.

Orientador: Gilson Mamede de Carvalho.  
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em  
Matemática, Recife, 2021.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Modelo Predador-Presa de Volterra. 3. Dinâmica Populacional. I. Carvalho,  
Gilson Mamede de, orient. II. Título

CDD 510

---

À minha família

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por sua fonte inesgotável de amor e por ser meu sustento em todos os momentos.

A minha família como um todo por toda proteção e compreensão, compartilhando comigo alegrias e tristezas, em especial minhas mães Maria José e Maria de Fátima pela inestimável contribuição para a formação de quem eu sou. Ao meu pai Jackson Franco, aos meus irmãos Marcela Gabriela e Vinícius Meireles e aos meus primos por compreenderem minha ausência e me incentivarem, em especial, Matheus e Juninho.

Ao grupo de amigos e de estudos mais holístico, também conhecido por *Zapp Burguesia* (Jhoicy, Marcílio, Marciano e William), cujos integrantes tiveram papel ímpar nesse período, ainda que na ausência de fala ou de encontros me deram todo apoio para continuar. Aos amigos que (re)surgiram ao longo da escrita desse trabalho e contribuíram imensamente para sua finalização: Isabela Vieira, Samara França e Nilton Xavier. Aos amigos cujos nomes não foram citados mas sempre terão minha gratidão.

A todos meus amigos da graduação que me acompanharam durante esses quatro anos, principalmente Thays Nunes, Elizabeth Bispo, Ewellyn Carolaine e Daniel César. Agradeço especificamente ao *Grupo do Tancredo*, Gabriel Lucena, Jhonata Avelar, Laryssa Desirée, Lucas Wanderley e Hugo Henryque, pelas melhores aventuras e cujo apoio foi crucial na reta final da graduação.

Agradeço a todos professores pela enorme contribuição para a minha formação. Particularmente agradeço aos professores Williams Braga, Eduardo Vasconcelos e Albérica Maria cujo papel foi decisivo na minha escolha pela Licenciatura em Matemática. Agradeço também aos professores da graduação Karla Arruda, Antonio Ferreira e Yane Lísley por suas contribuições e por despertarem o anseio de conhecer mais a Matemática; a Wagner Costa por destacar os contentamentos e desafios da atividade docente juntamente a importância de aprimorá-la de forma recorrente.

Ao professor Reginaldo Jr. do IFPB pelos auxílios na utilização do LaTeX.

Ao meu orientador e professor Dr Gilson Mamede de Carvalho por todo apoio, confiança, incentivo, orientação, compreensão e dedicação ao longo desses quatro anos, ora em sala de aula, ora durante a iniciação científica e na elaboração desse trabalho.

A banca pela dedicação na leitura do trabalho e pelas diversas contribuições para aprimorá-lo.

# Resumo

Neste trabalho daremos ênfase a uma modelagem matemática por meio de equações diferenciais para a dinâmica entre duas populações em uma relação de predação, a qual é conhecida na literatura por Modelo Predador-Presa de Volterra, sendo realizada previamente uma abordagem das ferramentas matemáticas necessárias para uma análise adequada do problema, a saber, um estudo dos métodos de solução para algumas equações diferenciais ordinárias, os resultados que os fundamentam e algumas aplicações; e noções de estabilidade de singularidades de sistemas autônomos.

**Palavras-Chave:** Equações Diferenciais Ordinárias; Modelo Predador-Presa de Volterra; Dinâmica Populacional.

# Abstract

In this work we will emphasize a modeling by differential equations for the dynamics between two populations in a predation relation, which is known in the literature as Volterra's Predator-Prey Model. With this purpose, we will present necessary mathematical tools for a proper problem analysis: a brief study of the solution methods for some ordinary differential equations, the results that underlie them and some applications; and notions of stability of singularities of autonomous systems.

**KeyWords:** Ordinary differential equations; Volterra's Predator-Prey Model; Population Dynamics.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	8
<b>Introdução</b>	10
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	12
1.1 Teorema Fundamental do Cálculo	12
1.2 Teorema do Ponto Fixo de Banach	14
1.3 Forma Canônica de Jordan	15
<b>2 Equações Diferenciais Ordinárias</b>	18
2.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	19
2.1.1 Teorema de Picard	20
2.1.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	21
2.1.3 Equações Separáveis	23
2.1.4 Equações Exatas	29
2.1.5 Aplicação: Dinâmica de uma população	31
2.2 Equações Diferenciais de segunda ordem	35
2.2.1 Equações Lineares de Segunda Ordem	35
2.2.2 Métodos de Solução	42
2.2.3 Aplicação: Oscilador Harmônico	47
<b>3 Sistemas Autônomos no Plano</b>	52
3.1 Pontos de equilíbrio	54
3.2 Sistema Autônomo linear	56
3.3 Sistema Autônomo não-linear	66
<b>4 Modelo Predador-Presa de Volterra</b>	69
<b>Referências Bibliográficas</b>	77

# Lista de Figuras

2.1	Gráfico da dinâmica populacional segundo o modelo Verhulst	34
2.2	Gráfico de $x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$	48
2.3	Gráfico de $x(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$	48
2.4	Gráfico de $x(t)$ quando a função tem um ponto de máximo	50
2.5	Gráfico de $x(t)$ quando a função tem ponto de mínimo	50
2.6	Gráfico de $x(t)$ quando a função não tem ponto crítico	50
2.7	Gráfico de $x(t) = Ae^{-vt} \cos(lt - \phi)$	51
3.1	Esboço de uma órbita com auto-interseção	53
3.2	Soluções da forma $x(t) = x_0(1 - tx_0)^{-1}$	55
3.3	Gráfico de $y = c^{\frac{\mu}{\lambda}}x$ com $\mu/\lambda < 0$ no plano $(x, y)$	59
3.4	Gráfico de $y = c^{\frac{\mu}{\lambda}}x$ com $0 < \mu/\lambda < 1$ no plano $(x, y)$	59
3.5	Gráfico de $y = c^{\frac{\mu}{\lambda}}x$ com $\mu/\lambda > 1$ no plano $(x, y)$	59
3.6	Nó estável ( $\lambda < \mu < 0$ )	60
3.7	Nó estável ( $\mu < \lambda < 0$ )	60
3.8	Nó instável ( $\lambda > \mu > 0$ )	60
3.9	Nó instável ( $\mu > \lambda > 0$ )	60
3.10	Ponto de sela ( $\lambda < 0 < \mu$ )	61
3.11	$\mu/\lambda = 1$	61
3.12	Esboço de um ponto nodal estável ( $\lambda = \mu < 0$ )	62
3.13	Esboço de um ponto nodal estável ( $\lambda = \mu < 0$ )	62
3.14	Esboço de um nó estável ( $\lambda < 0$ )	63
3.15	Esboço de um nó instável ( $\lambda > 0$ )	63
3.16	Centro ( $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ )	65
3.17	Esboço de ponto não-atrator com espiral logarítmica dextrógira ( $\alpha < 0, \beta > 0$ )	65
3.18	Esboço de ponto atrator com espiral logarítmica sinistrógira ( $\alpha < 0, \beta < 0$ )	65
3.19	Esboço de ponto não-atrator com espiral logarítmica dextrógira ( $\alpha > 0, \beta < 0$ )	65

---

3.20 Esboço de ponto não-atrator com espiral logarítmica sinistrógiara ( $\alpha >$ $0, \beta > 0$ ) . . . . .	65
3.21 Comportamento das órbitas no plano $(x, y)$ . . . . .	68
4.1 Gráfico de $z$ no plano $(y, z)$ . . . . .	72
4.2 Gráfico de $w$ no plano $(x, w)$ . . . . .	72
4.3 Construção gráfica de Volterra . . . . .	73
4.4 Esboço das órbitas no plano $(x, y)$ . . . . .	74

# Introdução

A compreensão da necessidade do estudo das Equações Diferenciais não apenas por seu importante caráter nas modelagens e suas diversas aplicações, mas também por sua teoria rebuscada, ocorreu juntamente ao desenvolvimento do Cálculo, por meados do século XVII. Durante esse período diversos matemáticos e cientistas debruçaram-se sobre o estudo de tais equações numa perspectiva inicial de obtenção de soluções para as modelagens motivadas por problemas físicos, como foi o caso de Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Leibniz(1646-1716) e a família Bernoulli.

Diante da compreensão de que poucas equações poderiam ter suas soluções dadas de forma explícita, o estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias voltou-se também para a abordagem qualitativa de soluções, dando ênfase às informações que poderiam ser obtidas no problema ainda que sua solução não pudesse ser explicitada na forma elementar, sendo dado destaque às contribuições dos matemáticos Charles Émile Picard (1856-1941) e Aleksandr Lyapunov(1857-1918).

Neste trabalho, daremos ênfase a uma modelagem por meio de Equações Diferenciais para um problema advindo da Biologia, o qual é conhecido na literatura por Modelo Predador-Presa de Volterra ou Modelo Lotka-Volterra. Tal modelagem, desenvolvida simultaneamente por Alfred J. Lotka(1880-1949) e Vito Volterra(1860-1940), surgiu da necessidade de apresentar respostas ao estudo de Umberto D’Ancona que evidenciou o aumento da aparição de peixes predadores na pesca no mar Adriático após a Primeira Guerra e até os dias atuais apresenta-se como um dos principais modelos para a dinâmica entre populações.

Dessa forma, apresentaremos uma modelagem simples do problema em que não consideraremos fatores particulares de cada indivíduo e espécie como taxa de reprodutibilidade, taxa de mortalidade e taxa de natalidade; a distribuição demográfica dos indivíduos e, mais ainda, das populações e dos recursos. Tais fatores, quando considerados, tornam a modelagem mais próxima da realidade e produzem diferentes análises, como é evidenciado em [1].

Tendo por objetivo destacar a importância da análise qualitativa advinda da modelagem para a compreensão do problema modelado, apresentaremos ainda o método gráfico devido a Volterra além de ser realizada nos três primeiros capítulos uma abordagem das ferramentas matemáticas necessárias para uma análise adequada do problema.

O primeiro capítulo deste trabalho objetiva a apresentação de conceitos e resultados que, embora não estejam estritamente associados a problemática em questão, são importantes ferramentas para uma boa interpretação do trabalho, sendo estes: Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema do Ponto Fixo de Banach e Forma Canônica de Jordan.

No Capítulo 2, faz-se um breve estudo sobre Equações Diferenciais ordinárias dando ênfase aos métodos de obtenção de soluções e as propriedades e resultados matemáticos que os fundamentam a partir da divisão em duas subseções: Equações Diferenciais Ordinárias Primeira Ordem e Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem. Destaca-se também a apresentação de aplicações que, embora tenham natureza distinta, contribui para a análise da modelagem central do trabalho, sendo elas: crescimento exponencial, em especial, o processo de datação por carbono; dinâmica de uma população a partir dos modelos Malthusiano e Verhulst; e Oscilador Harmônico, em especial, os casos simples e amortecido.

Já no Capítulo 3, abordamos um sucinto estudo sobre sistemas autônomos e noções de estabilidade de modo a estudar o comportamento local das soluções em torno de suas singularidades. Para isto, são utilizadas propriedades advindas da Álgebra Linear no intuito de estabelecer relações entre a solução geral do sistema, o comportamento local das órbitas e os coeficientes do caso linear, além de evidenciar como tal estudo pode ser estendido, com os devidos ajustes, para o caso não-linear.

O Capítulo 4 aborda a análise do Modelo Predador-Presa, evidenciando inicialmente como é obtida a modelagem para a dinâmica entre uma população de predadores e uma população de presas por meio do sistema autônomo

$$\begin{cases} x' = (a - by) \cdot x \\ y' = (-c + dx) \cdot y \end{cases},$$

sendo feita uma abordagem, a partir de um estudo teórico sobre as soluções constantes, das contribuições desse estudo para a interpretação do problema.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados que, embora não sejam o foco deste trabalho, serão cruciais para o seu desenvolvimento.

### 1.1 Teorema Fundamental do Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral tem como seus principais interesses a busca pela determinação da derivada e da integral de funções. Embora esses conceitos tenham aplicações de natureza distinta e sua interpretação geométrica induza que esses conceitos são muito distintos, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que tais conceitos estão na verdade intimamente ligados, fato que é crucial no estudo sobre equações diferenciais.

Nesse sentido, seguiremos a apresentação feita por [7] de modo a evidenciar a estrita relação entre as implicações deste resultado e a busca por soluções de certos problemas, que no próximo capítulo associaremos às equações diferenciais ordinárias, ainda que uma apresentação clássica deste teorema bem como sua demonstração estejam disponíveis em [8].

**Teorema 1.1** (Teorema Fundamental do Cálculo-Parte I). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. A função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (1.1)$$

*é diferenciável e  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ .*

Dessa forma a função  $F$  definida em (1.1) satisfaz a relação

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1.2)$$

ou ainda,  $F$  é uma solução para a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

com  $F(a) = 0$ .

**Afirmção 1.2.**  $F$  é a única solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) \\ F(a) = 0 \end{cases}.$$

**Solução:** Suponha que exista uma outra solução  $G$ . Então, por  $F' = G' = f$ , teríamos que  $F - G$  seria constante. Mas para  $x = a$ ,  $F(x) = G(x)$ , isto é,  $(F - G)(a) = 0$  o que garante que a função  $F - G$  é identicamente nula e, portanto,  $F$  é a única solução.  $\square$

Além da afirmação anterior, outra afirmação que utilizaremos constantemente decorre da percepção a partir dos conhecimentos de derivada que garantem que se  $F$  é solução então  $F + c$ , em que  $c \in \mathbb{R}$ , ainda será solução de (1.2).

**Afirmção 1.3.** A expressão

$$y(x) = F(x) + c \tag{1.3}$$

com  $c \in \mathbb{R}$  engloba todas as soluções de (1.2).

**Solução:** Seja  $G(x)$  uma outra solução de (1.2). Então, pela afirmação anterior e pela propriedade de derivada,  $z(x) = F(x) - G(x) + G(a)$  é a única solução de

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 0 \\ z(a) = 0 \end{cases}.$$

Mas por

$$\int 0 dx = 0,$$

o Teorema Fundamental do Cálculo garante que  $w(x) = 0$  é uma solução para  $\frac{dz}{dx} = 0$  que também vale  $w(a) = 0$ , portanto,  $z(x) = w(x) = 0$ . Logo,

$$G(x) = F(x) + G(a).$$

$\square$

O resultado anterior garante que a equação (1.2) tem como conjunto de solução a família  $F(x) + c$  em que  $F$  é uma primitiva de  $f$  e  $c \in \mathbb{R}$ , nos permitindo voltar a nossa atenção para a determinação de uma primitiva em particular. É de grande importância no sentido da caracterização de uma primitiva particular a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 1.4** (Teorema Fundamental do Cálculo-Parte II). *Dadas uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e uma de suas primitivas  $G$ , então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \quad (1.4)$$

## 1.2 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Na seção anterior, a partir do Teorema Fundamental do Cálculo, garantimos a existência e unicidade de uma solução para um problema de valor inicial específico. No intuito de generalizar este resultado, é fundamental apresentarmos alguns conceitos relacionados à Teoria de Espaços Métricos de modo a compreender o enunciado do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

**Definição 1** (Métrica). Uma *métrica* num conjunto  $M$  não-vazio é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a *distância* de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y \in M$ :

- Se  $x = y$  então  $d(x, y) = 0$ ;
- (*Positividade*) Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;
- (*Simetria*)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (*Desigualdade triangular*)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**Definição 2** (Espaço Métrico). Um *Espaço Métrico* é um par  $(M, d)$  em que  $M$  é um conjunto não-vazio e  $d$  é uma métrica em  $M$ .

**Definição 3** (Sequência). Uma *sequência* num conjunto  $M$  é uma aplicação  $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

**Definição 4** (Sequência convergente). Diz-se que a sequência de pontos  $x_n \in M$  é *convergente em  $M$*  se existe  $a \in M$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente pode-se obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_0$  então  $d(x_n, a) < \epsilon$ .

**Definição 5** (Sequência de Cauchy). Uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$  chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

**Definição 6** (Espaço Métrico Completo). Seja  $(M, d_M)$  um Espaço Métrico. Diremos que  $(M, d_M)$  é um *Espaço Métrico completo* se toda sequência de Cauchy em  $(M, d_M)$  é convergente em  $(M, d_M)$ .



**Exemplo 1.** O conjunto das aplicações contínuas de domínio  $I$  e contra-domínio  $J$ , denotado por  $\mathcal{C}(I; J)$ , munido com a métrica da convergência uniforme, isto é,  $d(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ , é um espaço métrico completo. A demonstração deste resultado encontra-se no Corolário 2, página 186, do livro [9].

**Definição 7** (Ponto fixo). Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação e  $x_0 \in X$ . Diremos que  $x_0$  é um *ponto fixo* de  $f$  quando  $f(x_0) = x_0$ .

Nem sempre é tão simples garantir a existência e identificar pontos fixos de aplicações, mas para aplicações específicas que definiremos abaixo é possível, no contexto de Espaços Métricos Completos, estabelecer um resultado crucial para esta finalidade: o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

**Definição 8** (Contração). Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  chama-se uma *contração* quando existe uma constante  $c \in [0, 1)$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$  para todo  $x, y \in M$ .

**Teorema 1.5** (Teorema do ponto fixo de Banach). *Se  $M$  é um espaço métrico completo, então toda contração  $f : M \rightarrow M$  possui um único ponto fixo em  $M$ .*

A demonstração do resultado acima, que encontra-se detalhadamente em [9], consiste na obtenção de um ponto fixo a partir da convergência de uma sequência recursiva, chamada de aproximações sucessivas, garantida por esta ser de Cauchy em um Espaço Métrico Completo e na verificação que este ponto fixo é único.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é crucial para a determinação de propriedades envolvendo soluções de equações diferenciais e integrais e será fundamental para garantir o principal resultado presente neste trabalho: o Teorema de Picard.

### 1.3 Forma Canônica de Jordan

Um aspecto importante que nos valeremos no Capítulo 3 trata da representação matricial de um sistema e como a partir de uma representação mais simples semelhante à matriz inicial, podemos ainda obter informações que garantam uma boa interpretação das propriedades do sistema. Uma vez que os conceitos aqui abordados são característicos de um curso de Álgebra Linear, não pretendemos nos debruçar sobre eles, mas as demonstrações dos resultados aqui abordados podem ser consultadas em [10]. De modo a fornecer apenas os conceitos cruciais para compreender (ou melhor, relembrar) a Forma Canônica de Jordan, são centrais os dois conceitos a seguir:

**Definição 9** (Autovalor). Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . O número real  $\lambda$  é chamado *autovalor* de  $A$  se existe um vetor não nulo  $v$  tal que  $Av = \lambda v$ .

**Definição 10** (Autovetor). Qualquer vetor não-nulo satisfazendo a relação  $Av = \lambda v$  é chamado *autovetor* de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Definição 11** (Polinômio característico). Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . A matriz  $M = A - \tau I_n$ , em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$  e  $\tau$  é uma variável, é obtida subtraindo  $\tau$  da diagonal principal e seu determinante é um polinômio em  $t$  de grau  $n$  chamado *polinômio característico* de  $A$  e denotado por  $p(\tau)$ .

**Teorema 1.6** (Cayley-Hamilton). *Toda matriz  $A$  é raiz de seu polinômio característico.*

O teorema abaixo será crucial no terceiro capítulo em que reescreveremos uma matriz na forma canônica de Jordan com autovalores complexos a partir de uma matriz semelhante cujas entradas são as partes reais do número complexo.

**Teorema 1.7.** *Matrizes semelhantes tem o mesmo polinômio característico.*

O teorema a seguir estabelece um aspecto prático para determinar autovalores de uma matriz.

**Teorema 1.8.** *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) Um escalar  $\lambda$  é autovalor de  $A$ ;*
- ii) A matriz  $M = A - \lambda I$  é singular;*
- iii) O escalar  $\lambda$  é uma raiz do polinômio característico  $p(\tau)$  de  $A$ .*

Os três conceitos abaixo são cruciais para compreender propriedades associadas a autovalores.

**Definição 12** (Multiplicidade algébrica). Se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz  $A$ , então a *multiplicidade algébrica* de  $\lambda$  é a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $A$ .

**Definição 13** (Multiplicidade geométrica). A *multiplicidade geométrica* do autovalor  $\lambda$  de  $A$  é a dimensão do auto-espço associado.

**Definição 14** (Polinômio mínimo). Denote por  $J(A)$  a coleção de todos polinômios  $f(t)$  tais que  $f(A) = 0$ . O polinômio mônico de menor grau em  $J(A)$  é chamado de *polinômio mínimo* da matriz  $A$  e denotado por  $m(\tau)$ .

**Teorema 1.9.** *Uma matriz  $A$  é semelhante a uma matriz diagonal se, e somente se, seu polinômio mínimo é o produto de polinômios lineares distintos.*

O resultado anterior nos fornece um método para identificar matrizes que possam ser escritas como uma matriz diagonal porém tal artifício nem sempre é válido. Nesse sentido, uma vez que por trabalharmos com os escalares no corpo  $K = \mathbb{C}$  que é algebricamente fechado, para toda matriz  $A$ , os polinômios  $p(\tau)$  e  $m(\tau)$  de  $A$  podem ser decompostos em polinômios lineares e, portanto, a matriz  $A$  tem uma forma canônica de Jordan associada, a qual é determinada a partir do Teorema abaixo.

**Teorema 1.10** (Forma Canônica de Jordan). *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  com polinômio característico e polinômio mínimo, respectivamente,*

$$p(\tau) = (\tau - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\tau - \lambda_r)^{n_r} \quad \text{e} \quad m(\tau) = (\tau - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\tau - \lambda_r)^{m_r}$$

em que  $\lambda_i$  são escalares distintos. Então,  $T$  tem uma representação matricial  $J$  diagonal em blocos em que cada entrada diagonal é um bloco de Jordan  $J_{ij} = J(\lambda_i)$ . Para cada  $\lambda_{ij}$ , o bloco  $J_{ij}$  correspondente tem as seguintes propriedades:

- i) Existe ao menos um bloco  $J_{ij}$  de ordem  $m_i$  e os demais blocos são de ordem menor ou igual a  $m_i$ .
- ii) A soma das ordens de  $J_{ij}$  é  $n_i$ .
- iii) O número de blocos de Jordan associados a  $\lambda_i$  é igual à multiplicidade geométrica de  $\lambda_i$ .
- iv) O número de blocos  $J_{ij}$  de cada possível ordem é unicamente determinado por  $T$ .

**Exemplo 2.** Seja  $A$  uma matriz cujo polinômio característico é  $p(\tau) = (\tau - 2)^2(\tau - 3)$ .

Então temos duas possibilidades para o polinômio mínimo de  $A$ :  $m(\tau) = (\tau - 2)^2(\tau - 3)$  ou  $m(\tau) = (\tau - 2)(\tau - 3)$ .

- i) Se  $m(\tau) = (\tau - 2)(\tau - 3)$ , pelo Teorema 1.9,  $A$  é semelhante à matriz diagonal

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- ii) Se  $m(\tau) = (\tau - 2)^2(\tau - 3)$ , então para o autovalor  $\lambda_1 = 2$ ,  $m_1 = n_1$  então existe um único bloco  $J_1$ , que tem ordem 2. Já o autovalor  $\lambda_2 = 3$  tem um único bloco de Jordan  $J_2$  associado, o qual tem ordem 1. Assim, a matriz  $A$  é semelhante à matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Capítulo 2

# Equações Diferenciais Ordinárias

Expressões que representam variações estão presentes em estudos dos mais variados contextos na natureza, especialmente na Mecânica Clássica, que é um dos ramos em que mais destacam-se tais modelagens. Embora formalmente esta variação seja representada a partir da derivada e tais expressões sejam Equações Diferenciais, atualmente o contato com essa noção de variação precede um estudo aprofundado sobre tais equações como por exemplo, o contato no Ensino Médio com a perspectiva de que a velocidade trata-se da variação da posição.

Sob a perspectiva matemática, existem certas classificações que norteiam o estudo desse tipo de equações, a primeira classificação que deve-se destacar trata do tipo de variação que estamos trabalhando, isto é, o domínio de definição da função ao qual calculamos a derivada, se está definida na reta, tratando-se de derivadas simples, ou no espaço, tratando-se de derivadas parciais. Abordaremos nesse trabalho as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), que podem formalmente ser definidas por expressões em que a função desconhecida depende de uma única variável independente.

**Exemplo 3.** A equação que descreve a segunda lei de Newton, isto é, que a força resultante equivale ao produto entre a massa e aceleração, pode ser escrita por

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.1)$$

em que  $x = x(t)$  descreve a posição em função do tempo, é uma Equação Diferencial Ordinária.

**Exemplo 4.** A expressão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

em que  $u = y(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $\alpha$  é uma constante, conhecida como *equação do calor*, não é uma Equação Diferencial Ordinária.

Além dessa, outras caracterizações fragmentam e norteiam o estudo dessas equações em estudos mais específicos, sendo uma delas a classificação a partir da ordem.

**Definição 15** (Ordem). A *ordem* de uma EDO é a ordem da derivada de maior ordem da equação.

**Exemplo 5.** A Equação (2.1) é uma EDO de segunda ordem.

As classificações citadas anteriormente não são as únicas caracterizações sobre uma EDO mas são cruciais para nortear um estudo inicial sobre as propriedades de tais equações, uma vez que embora muitas delas não possuam soluções na forma fechada, estudar o comportamento de sua solução pode, por exemplo, trazer importantes contribuições para a compreensão de um fenômeno modelado através dela.

## 2.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Abordaremos a seguir um tipo específico de Equações Diferenciais Ordinárias, as quais são fundamentais para a modelagem de situações como: o resfriamento de um corpo, diluição de soluções e estudo da velocidade de escape, conforme abordado em [2] e [7]. Utilizando o conceito de ordem definido anteriormente, introduzimos as seguintes definições.

**Definição 16.** A *forma explícita geral* de uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem é

$$y' = f(x, y) \quad (2.2)$$

em que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real definida num aberto  $\Omega$  do plano  $(x, y)$ .

**Definição 17** (Solução). Uma *solução* para a Equação (2.2) é uma função diferenciável  $y = \phi(x)$  definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  e tal que

$$(x, \phi(x)) \in \Omega, \quad \text{para todo } x \in I$$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Como citado na introdução do capítulo, na maioria dos casos não é possível escrever as soluções de equações na forma fechada, sendo ainda mais raro os casos em que se pode obter um método para tais soluções. Nesse sentido, nosso intuito é abordar casos específicos nos quais é possível estabelecer métodos para obtenção das soluções. Abordaremos o método e os resultados matemáticos que o fundamentam além de apresentar aplicações de cada tipo de equação.

### 2.1.1 Teorema de Picard

Um dos principais objetos de estudo sobre as Equações Diferenciais aborda a análise qualitativa de soluções, isto é, a determinação de propriedades sobre as soluções de equações ainda que estas não sejam dadas de forma explícita. Nesse sentido, o Teorema de Picard apresenta-se como um importante resultado da Teoria das EDOs de primeira ordem, uma vez que garante a existência e unicidade de soluções, ainda que localmente, para um sistema chamado de Problema de Valor Inicial, sendo apresentado como uma aplicação direta do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

**Teorema 2.1. (Teorema de Picard)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida num aberto  $\Omega$  do plano  $(x, y)$ , cumprindo a condição de Lipschitz  $|f(x, y) - f(x, z)| \leq c \cdot |y - z|$  em que  $c$  não depende de  $(x, y), (x, z) \in \Omega$ . Então, para cada  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existem um intervalo aberto  $I$  contendo  $x_0$  e uma única função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ , para todo  $x \in I$ , que é solução do Problema de Valor Inicial (P.V.I.)*

$$\begin{cases} y' = & f(x, y) \\ y(x_0) = & y_0 \end{cases}$$

*Demonstração.* Inicialmente, notemos que as condições  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  e  $\varphi(x_0) = y_0$  podem ser reduzidas, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, à condição

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds.$$

A fim de satisfazer as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach consideramos o intervalo  $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  e o intervalo fechado  $J = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$  em  $\mathbb{R}$ , em que  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  cumprem: 1.  $I \times J \subset \Omega$ ; 2.  $|f(x, y)| \leq M$  para todo  $(x, y) \in I \times J$ ; 3.  $\alpha \cdot M \leq \beta$  e  $\alpha \cdot c < 1$ . Em seguida, consideramos o espaço métrico  $C(I; J)$ , formado pelas aplicações contínuas  $\varphi : I \rightarrow J$ , com a métrica da convergência uniforme, e definimos a aplicação  $F : C(I; J) \rightarrow C(I; J)$ , pondo:

$$[F(\varphi)](x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

para toda  $\varphi \in C(I; J)$  e todo  $x \in I$ . Resta-nos verificar que  $F$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Inicialmente, notemos que  $[F(\varphi)](x) \in J$  para toda  $\varphi \in C(I; J)$  e todo  $x \in I$ . De fato,

$$\|[F(\varphi)](x) - y_0\| = \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq |x - x_0| \cdot M \leq \alpha \cdot M \leq \beta$$

Além disso, dados  $x, x_1 \in I$  quaisquer, vale

$$|[F(\varphi)](x) - [F(\varphi)](x_1)| = \left| \int_x^{x_1} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq |x - x_1| \cdot M$$

o que implica que  $F(\varphi)$  é lipschitziana e, em particular,  $F(\varphi) \in C(I; J)$  para toda  $\varphi \in C(I; J)$ . Por fim, sendo  $k = \alpha.c$ , temos que  $0 < k < 1$  e que, para  $\varphi, \Phi \in C(I; J)$  quaisquer, vale

$$\begin{aligned} \|F(\varphi) - F(\Phi)\| &= \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) - f(s, \Phi(s)) ds \right| \\ &\leq \alpha \cdot \sup_{x \in I} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \Phi(s))| \\ &\leq \alpha.c \cdot \sup_{x \in I} |\varphi(s) - \Phi(s)| \\ &\leq \alpha.c \cdot \|\varphi - \Phi\| = k \cdot \|\varphi - \Phi\| \end{aligned}$$

Logo,  $F$  é contração do espaço métrico completo  $C(I; J)$  em si mesmo e existe, portanto, uma única aplicação contínua  $\varphi : I \rightarrow J$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ , o que garante o resultado.  $\square$

Além de nos valermos ao longo deste capítulo da aplicação direta do teorema acima associado aos comentários advindos do Teorema Fundamental do Cálculo para determinar uma solução local para uma EDO, outras decorrências do resultado serão crucias na abordagem inicial da análise qualitativa realizada no capítulo 2. Tais aplicações de natureza distinta demonstram a variedade e importância deste resultado que, com os devidos ajustes, pode ser generalizado para o caso de EDOs de ordem superior mas não pode ser garantido para o caso de Equações Diferenciais parciais, isto é, para expressões envolvendo uma função desconhecida que depende de várias variáveis independentes e as derivadas parciais desta função, como é o caso do Exemplo 4.

### 2.1.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A possibilidade de expressar um método de solução e a forma explícita da solução geral para Equações Diferenciais está intimamente relacionada a sua simplicidade. Nessa seção, abordaremos um dos tipos mais simples de EDO, que podem formalmente ser definidas por:

**Definição 18** (EDO linear de primeira ordem). A forma geral das *Equações Diferenciais Ordinárias lineares de primeira ordem* é dada por

$$x' = p(t)x + q(t) \tag{2.3}$$

em que  $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais contínuas definidas no aberto  $(a, b)$ .

**Definição 19** (Solução de EDO linear de primeira ordem). Uma função  $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da Equação (2.3) se  $x$  é uma função diferenciável e satisfizer a equação para todo  $t \in (a, b)$ .

O estudo de Equações Lineares volta-se geralmente para a abordagem da solução geral, isto é, uma expressão que englobe todas as soluções para o problema; e do estudo da solução para o *Problema de Valor Inicial (P.V.I)*

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

em que  $t_0 \in (a, b)$  e  $x_0$  são os dados iniciais.

Mostraremos nessa seção um método para obter a solução geral para a Equação (2.3) nos casos em que  $q(t) = 0$ , isto é, para Equações Lineares Homogêneas. Inicialmente, no caso em que  $p(t)$  é constante, isto é, (2.3) é uma equação do tipo

$$x' = kx \quad (2.5)$$

em que  $k$  é constante, a sua solução é facilmente determinada pela função  $x(t) = e^{kt}$ . A equação (2.5) é também conhecida como a equação do crescimento exponencial, uma modelagem que abordaremos melhor posteriormente, e tem também como solução as funções  $x_c(t) = ce^{kt}$  em que  $c \in \mathbb{R}$ .

**Afirmção 2.2.** A solução geral da EDO, isto é, qualquer solução de (2.5) é da forma  $x(t) = ce^{kt}$ .

**Solução:** De fato, seja  $x(t)$  uma solução qualquer para (2.5). Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)e^{-kt}) &= x'(t)e^{-kt} - kx(t)e^{-kt} \\ &= kx(t)e^{-kt} - kx(t)e^{-kt} = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $x(t)e^{-kt} = c$  e, portanto,  $x(t) = ce^{kt}$ . □

Pelo Teorema de Picard, sabemos que a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' &= kx \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

é única na vizinhança de  $(t_0, x_0)$ , o que nos permite determinar a constante  $c$  da solução geral da equação em termos dos dados iniciais. De fato, uma vez que  $x(t_0) = ce^{kt_0} = x_0$  então  $c = x_0e^{-kt_0}$ . Assim, a solução  $x(t)$  do problema é dada por

$$x(t) = x_0e^{k(t-t_0)}.$$



A apresentação feita acima por meio de Equações Diferenciais é também garantida por meio do seguinte resultado advindo da Análise na Reta:

**Teorema 2.3.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável no intervalo  $I$ , com  $f'(x) = k \cdot f(x)$ . Se, para um certo  $x_0 \in I$ , tem-se  $f(x_0) = c$ , então  $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$  para todo  $x \in I$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(x) = f(x) \cdot e^{-k(x-x_0)}$ . Pela Regra da Cadeia, temos que  $\varphi'(x) = f'(x)e^{-k(x-x_0)} - kf(x)e^{-k(x-x_0)}$  que implica que  $\varphi'(x) = 0$  pois  $f'(x) = kf(x)$  e, portanto,  $\varphi$  é constante. E como  $\varphi(x_0) = c$ , então  $\varphi(x) = c$  para todo  $x \in I$ . Logo,  $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$ .  $\square$

Dessa forma, utilizando um argumento semelhante ao dado na demonstração do teorema anterior e fundamentando-se no Teorema Fundamental do Cálculo, a solução do P.V.I. com equação linear homogênea de primeira ordem

$$\begin{cases} x'(t) = p(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Uma abordagem a partir de Equações Diferenciais para este resultado será dado utilizando o método de solução para equações separáveis, apresentado na seção a seguir.

### 2.1.3 Equações Separáveis

**Definição 20** (Equações separáveis). Equações Diferenciais da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0 \tag{2.6}$$

em que  $y' = \frac{dy}{dx}$  denota a derivada da função  $y$  com respeito à variável independente  $x$ , e  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais contínuas, são chamadas *equações separáveis*.

Supondo que  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis em intervalos abertos  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos reescrever a Equação (2.6) na forma

$$g(y)y' = f(x) \tag{2.7}$$

em que justifica-se sua nomenclatura a partir da reescrita da equação (2.7) em termos das formas diferenciais  $dx, dy$  na expressão  $g(y)dy = f(x)dx$ .

**Definição 21** (Solução de equação separável). Uma função  $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é uma *solução* de (2.6) se  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ ,  $y(\alpha, \beta) \subset (c, d)$ ,  $g(y(x)) \neq 0$  e satisfaz (2.6) para todo  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Se  $y(x)$  é uma solução e  $G$  é uma primitiva de  $g$ , utilizando a regra da cadeia e (2.7) temos:

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = f(x)$$

e então

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (2.8)$$

em que  $F$  é uma primitiva de  $f$ . Assim, dado  $(x_0, y_0)$  satisfazendo (2.8), por  $G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$ , o Teorema das Funções Implícitas assegura que existe um intervalo aberto  $(\alpha, \beta)$  contendo  $x_0$  e uma função  $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  que satisfaz a relação (2.8).

O argumento anterior nos permite apresentar um método prático para obtenção desta solução, que consiste no fato de que por  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $y(x_0) = y_0$  ainda satisfaz a expressão (2.8) e podemos determinar a constante  $C$  da forma  $C = G(y(x_0)) - F(x_0)$ . Assim, a expressão (2.8) pode ser escrita na forma

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

que pelo Teorema Fundamental do Cálculo equivale a

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)dy = \int_{x_0}^x f(x)dx. \quad (2.9)$$

## Formas diferenciais

A fim de solucionar a Equação (2.6) nos deparamos com uma escrita de  $y'$  que, no aspecto prático, induz que estejamos lidando com  $dy$  e  $dx$  como numerador e denominador de uma fração. Embora essa ideia inicial de fração seja muito prática na técnica de obtenção de soluções, estamos na verdade reescrevendo  $y'$  em termos das funções  $dx$  e  $dy$  que fazem parte de uma classe específica de funções, chamadas formas diferenciais. Com o propósito de justificar tal escolha de funções, é crucial a apresentação do conceito de forma linear:

**Definição 22** (Forma linear). Uma *forma linear* em  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$l(a\alpha + b\beta) = al(\alpha) + bl(\beta) \quad (2.10)$$

em que  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ .

Uma vez que um vetor  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  pode ser escrito como

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad (2.11)$$

em que  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Das expressões (2.10) e (2.11), podemos reescrever uma forma linear  $l$  a partir dos valores que assume em  $e_1$  e  $e_2$  da forma

$$l(\alpha) = \alpha_1 l(e_1) + \alpha_2 l(e_2) \quad (2.12)$$

Em particular, podemos definir duas formas lineares  $e^1$  e  $e^2$  pelas relações  $e^1(e_1) = 1$ ,  $e^2(e_1) = 0$ ,  $e^1(e_2) = 0$ ,  $e^2(e_2) = 1$ . Donde temos

$$\begin{aligned} e^1(\alpha) &= \alpha_1 \\ e^2(\alpha) &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Assim, dados  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1 e^1 + a_2 e^2$  define a forma linear

$$(a_1 e^1 + a_2 e^2)(\alpha) = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2. \quad (2.13)$$

Por outro lado, qualquer forma linear  $l$  pode ser escrita na forma (2.13) para  $a_1 = l(e_1)$  e  $a_2 = l(e_2)$ . Então  $e^1$  e  $e^2$  formam uma base para o espaço vetorial das formas lineares chamado *espaço dual* de  $\mathbb{R}^2$  e denotado por  $(\mathbb{R}^2)^*$ .

**Definição 23** (Forma diferencial). Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Uma *forma diferencial* é uma função  $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ . Podemos então escrever

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) e^1 + \omega_2(x, y) e^2. \quad (2.14)$$

em que as funções  $w_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são as componentes da forma  $\omega$ . Dado  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ , podemos escrever (2.14) como

$$[\omega(x, y)]\alpha = \omega_1(x, y)\alpha_1 + \omega_2(x, y)\alpha_2$$

**Exemplo 6.** *Forma constante* é aquela em que as componentes são constantes.

**Exemplo 7.**  $dx : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  é a forma constante cujas componentes  $w_1$  e  $w_2$  são 1 e 0, respectivamente. Assim, se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  é um vetor de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(dx)(\alpha) = \alpha_1$

**Exemplo 8.**  $dy : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  é a forma constante cujas componentes  $w_1$  e  $w_2$  são 0 e 1, respectivamente. Assim, se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  é um vetor de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(dy)(\alpha) = \alpha_2$

Dos exemplos acima e de (2.14), é possível escrever qualquer forma diferencial  $\omega$

em termos de  $dx$  e  $dy$  na forma

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy. \quad (2.15)$$

Embora a equação (2.15) nos garanta uma relação importante entre uma forma diferencial qualquer e as formas  $dx$  e  $dy$ , esta não é suficiente para justificar a implementação dos termos  $dx$  e  $dy$  no método de solução de equações separáveis, sendo o conceito de *diferencial* apresentado abaixo fundamental para este propósito.

**Definição 24** (Diferencial de uma função). Dada uma função diferenciável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  define-se sua *diferencial*  $df : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  como sendo a forma diferencial cujas componentes são  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Assim, a diferencial de  $f$  que é dada por

$$(df)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \quad (2.16)$$

ou compactamente

$$df = f_x dx + f_y dy$$

é uma forma diferencial que permite relacionar as derivadas parciais da função e as formas diferenciais  $dx$  e  $dy$ , satisfazendo as propriedades:

1.  $d(f + g) = df + dg$
2.  $d(fg) = f dg + g df$
3.  $d(c) = 0$ , em que  $c$  é constante.
4. Se  $\Omega$  é conexo e  $df = 0$ , então  $f$  é constante.

As propriedades 1. e 3. decorrem imediatamente das propriedades de derivada parcial e da definição de diferencial.

A propriedade 2. pode ser mostrada usando a regra da cadeia na forma:

$$d(fg) = (fg)_x dx + (fg)_y dy$$

e aplicando a regra do produto,

$$\begin{aligned} d(fg) &= (f_x g + f g_x) dx + (f_y g + f g_y) dy \\ &= f(g_x dx + g_y dy) + g(f_x dx + f_y dy) = f dg + g df. \end{aligned}$$

De modo análogo ao feito para dedução do método, supomos que  $G(y(x))$  e  $F(x)$  são primitivas de  $g$  e  $f$ . Assim, definimos a função  $H(x, y) = G(y(x)) - F(x) + c$ , cuja

diferenciabilidade decorre da diferenciabilidade de  $F$  e  $G$  e por (2.8)  $H(x, y) = 0$ . Dessa forma, como

$$d(H(x, y)) = G'(y)dy - F'(x)dx$$

temos da propriedade anterior a garantia que  $d(0) = 0$ ,  $g(y)dy = f(x)dx$ .

A fim de justificar a outra parte do método, que intuitivamente nos permite integrar com relação a variáveis distintas e ainda manter a igualdade, faremos uso dos conceitos e resultado a seguir.

**Definição 25** (Forma exata). Uma forma diferencial  $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  é *exata* se existir  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega = df$ .

**Definição 26** (Forma fechada). Uma forma diferencial é *fechada* se  $\partial\omega_1/\partial y = \partial\omega_2/\partial x$ .

Assim, dos conhecimentos de cálculo, temos que

**Proposição 2.4.** *Se  $\Omega$  for simplesmente conexo, uma forma diferencial  $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  é exata se e só se ela for fechada.*

De posse dos resultados acima, podemos justificar o método prático para obtenção das soluções a partir da garantia que  $f(x)dx - g(y)dy$  é uma forma exata. Isto é, consideremos  $F(x, y) = \int f(x)dx - g(y)dy$ , então  $dF = f(x)dx - g(y)dy = 0$ . Logo, pelas propriedades de formas diferenciais, as soluções  $y(x)$  são dadas por

$$F(x, y(x)) = c.$$

## Aplicação: Crescimento Exponencial

Em um contato inicial com o cálculo diferencial, especialmente no que diz respeito ao estudo de funções diferenciáveis e as técnicas de derivação, é natural o espanto quanto a não alteração da função exponencial após o processo de derivação. Tal propriedade inicialmente intrigante vai se tornando cada vez mais interessante ao nos depararmos, por exemplo, com o resultado apresentado na seção sobre Equações Diferenciais Lineares que garante que esta de fato é a única função que possui tal propriedade.

Nesse sentido, é natural supormos que diversas outras propriedades interessantes podem ser obtidas desta função, cuja variação ao longo do tempo coincide com ela mesma, destacando-se a modelagem de problemas conhecida como *crescimento exponencial*.

Dizemos que  $y = y(t)$  tem modelo de crescimento exponencial se ela cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da quantidade presente, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{2.17}$$

em que  $k > 0$  é chamada constante de crescimento.

Intuitivamente é possível notar a relação da expressão (2.17) com o comportamento da função exponencial, conforme citado e utilizado no início do capítulo ao abordar soluções para Equações Lineares Homogêneas. Mas utilizando as técnicas de resolução para uma equação separável temos que a expressão (2.17) pode ser vista por

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

cuja solução é  $\ln(y) = kt + c_1$  o que implica que  $y = ce^{kt}$  em que  $c = e^{c_1}$ . Dessa forma, fornecemos outro método de verificar que situações que seguem o modelo de crescimento exponencial são de fato representadas por uma função exponencial.

A modelagem via crescimento exponencial é utilizada em diversos contextos: no Modelo Malthusiano para a dinâmica de uma população, que será melhor abordado no tópico seguinte; na Física, na quebra de átomos em uma fissão nuclear em que a quebra de um átomo de urânio 235 acarreta na liberação de 3 nêutrons, os quais quebram mais 3 átomos; mas é na química que nos deparamos com uma famosa aplicação conhecida como o processo de datação por Carbono.

A fim de darmos um exemplo específico apresentado por [1] sobre esse teste, também conhecido por teste de radiocarbono, faz-se necessário destacar uma importante propriedade sobre elementos radioativos, a partir da qual é possível relacionar o tempo de meia-vida do elemento, isto é, o tempo necessário para que o elemento atinja metade de seu "valor" inicial à constante de decaimento. Os elementos radioativos se desintegram espontaneamente em uma taxa que é proporcional à quantidade de elemento presente e uma vez conhecida a meia-vida  $T$  do elemento, a equação (2.17) é dada por

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T} \ln(2)y \quad (2.18)$$

Dessa forma, uma vez que o Carbono-14 ( $^{14}\text{C}$ ) é um raro isótopo radioativo cujo tempo de meia-vida é em torno de 5.730 anos, como apresentado por [6], supondo que no instante  $t = 0$  a quantidade presente de Carbono-14 em uma amostra é  $y_0$ , a partir de (2.18) temos que a quantidade do elemento presente depois de  $t$  anos será dada pela solução da equação

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{5730} \ln(2)y \quad (2.19)$$

que, a partir do uso das técnicas de resolução para uma EDO separável, é

$$y(t) = y_0 e^{-0,000121t}. \quad (2.20)$$

O processo de datação por carbono teve como motivação a análise que enquanto vivos, os seres a partir de sua respiração estão em um constante processo de absorção do

$^{14}\text{C}$  porém a partir de sua morte a quantidade de  $^{14}\text{C}$  vai gradualmente caindo, então a técnica desenvolvida em 1947 pelo pesquisador americano Willard F. Libby possibilita estabelecer uma relação entre a quantidade desse elemento no corpo e a idade dos vestígios.

**Exemplo 9.** Um caso de grande destaque envolvendo o teste de radiocarbono trata da datação do Sudário de Turim, o qual acreditava-se ser o sudário de Jesus de Nazaré. Para validar tal suposição, em 1988 os laboratórios de Zuric, de Oxford e da Universidade do Arizona realizaram testes de Carbono-14, e registros do Museu Britânico mostraram que as fibras originais continham entre 92 e 93% do Carbono-14 original.

Dessa forma, pela expressão (2.20), a fim de determinar  $t$ , tomamos o logaritmo natural em ambos os lados da expressão e temos

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{-0,000121t} \quad (2.21)$$

O que implica que

$$t = \frac{-1}{0,000121} \ln \left( \frac{y(t)}{y_0} \right) \quad (2.22)$$

Assim, como a variação do carbono é entre 0,92 e 0,93, temos que

$$t_1 = \frac{-1}{0,000121} \ln(0,92) \approx 600 \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{-1}{0,000121} \ln(0,93) \approx 689$$

Dessa forma, estimou-se que o sudário teve origem entre 1299 e 1388 dC., comprovando que a partir do teste de Carbono-14 a datação do sudário não condiz com o sudário que foi utilizado por Jesus de Nazaré, gerando controvérsias até a atualidade sobre tal fenômeno.

## 2.1.4 Equações Exatas

**Definição 27** (Equações Exatas). Equações Diferenciais na forma

$$N(x, y)y' + M(x, y) = 0 \quad (2.23)$$

em que  $M, N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções definidas em um aberto conexo  $\Omega$  do plano  $(x, y)$  e o campo vetorial  $(M, N)$  deriva de um potencial  $V(x, y)$  são chamadas *equações exatas*.

Note que no caso em que  $N(x, y) \neq 0$  na equação (2.23), podemos reescrevê-la como  $y' = f(x, y)$ , para a qual o Teorema de Existência e Unicidade de soluções para problemas de valor inicial é válido.

Além disso, a fim de obter soluções para a expressão (2.23), uma vez que o campo  $(M, N)$  deriva do potencial  $V(x, y)$ , isto é,  $V_x = M, V_y = N$ , podemos reescrever a expressão como

$$V_y(x, y)y' + V_x(x, y) = 0 \quad (2.24)$$

e portanto, se  $y(x)$  é uma solução para (2.23),

$$\frac{d}{dx}V(x, y) = 0,$$

e  $y(x)$  também será solução para a equação algébrica  $V(x, y(x)) = c$  em que  $c = V(x_0, y_0)$ .

Determinar a existência e encontrar funções potenciais geralmente não se trata de um processo simples, contudo um método prático para identificar se a expressão (2.23) é de fato exata consiste em verificar se  $M, N \in C^1$  e se

$$M_y = N_x \quad (2.25)$$

pois assim é possível determinar  $V \in C^2$  satisfazendo (2.24), como ilustraremos no exemplo abaixo.

**Exemplo 10.** Encontremos a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' + 2xy - x^2 = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

**Solução:** Note que neste caso, as funções  $N(x, y)$  e  $M(x, y)$  são dadas por

$$M(x, y) = 2xy - x^2$$

$$N(x, y) = x^2 + 1.$$

Assim, uma vez que  $M, N \in C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , que é simplesmente conexo, e

$$N_x = 2x = M_y,$$

a equação é exata e existe uma função potencial  $V(x, y)$  tal que

$$V_x = M(x, y) = 2xy - x^2 \quad V_y = N(x, y) = x^2 + 1.$$

Integrando as expressões acima com relação a  $x$  e  $y$  respectivamente, temos

$$V = x^2y - \frac{x^3}{3} + g(y) \quad (2.26)$$

$$V = x^2y + y + f(x). \quad (2.27)$$

Dessa forma, obtemos  $f(x) = -\frac{x^3}{3}$  e  $g(y) = y$ , isto é

$$V(x, y) = -\frac{x^3}{3} + x^2y + y + c \quad (2.28)$$



é um potencial para o campo  $(M, N)$  com  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto, se  $y(x)$  é solução para  $(x^2 + 1)y' + 2xy - x^2 = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} V(x, y(x)) &= k \Rightarrow \\ y(x) \cdot (x^2 + 1) &= (k - c) + \frac{x^3}{3} \Rightarrow \\ y(x) &= \frac{x^3 + 3C}{3 \cdot (x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Utilizando a condição inicial  $y(0) = 0$ , podemos determinar a constante  $C = k - c$  de modo a obter a única solução na vizinhança da origem, a qual é dada por

$$y(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 3}$$

pois  $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{3c}{3} = 0 \Rightarrow C = 0$ . □

### 2.1.5 Aplicação: Dinâmica de uma população

A dinâmica da vida e, em particular, o crescimento populacional é cercado por diversos fenômenos, dentre eles fatores bióticos como a presença de outros organismos e disponibilidade de nutrientes; e fatores abióticos como a temperatura. Nesse sentido, utilizaremos o estudo feito até então sobre Equações Diferenciais de primeira ordem para a determinação e análise de modelos que descrevem o comportamento de uma população em que o número de indivíduos é descrito a partir do tempo.

A fim de obter uma modelagem matemática para esse fenômeno, de modo a compreendê-lo e entender algumas de suas propriedades é crucial desconsiderar alguns dos fatores envolvidos, de modo a simplificar o processo e, conseqüentemente, sua análise. A escolha dos fatores de sobrevivência a serem considerados, por outro lado, não pode ser feita de modo arbitrário mas tendo em vista a análise que propõe-se fazer da situação, sendo esta escolha a responsável pela determinação do modelo que mais se adequa aos propósitos. Neste tópico, abordaremos especificamente os Modelos *Malthusiano* e *Verhulst* que tratam de modelagens mais simples mas que ainda preservam características que nos permitem compreender a natureza e certas propriedades sobre a dinâmica de uma população.

#### Modelo Malthusiano

Um modelo simples utilizado para descrever a população de organismos que se reproduzem por mitose<sup>1</sup>, por exemplo, é o Modelo Malthusiano que supõe que a taxa de crescimento é constante igual a  $\lambda$ , podendo o crescimento populacional ser expressado a

<sup>1</sup>Processo de reprodução em que uma célula origina duas.

partir de

$$p' = \lambda p. \quad (2.29)$$

Este modelo ganhou destaque devido a observação feita por Thomas Robert Malthus (1766–1834) sobre a taxa de crescimento da população humana ter dobrado entre 1785 e 1790, o que o induziu a inferir teorias sobre limitações impostas para este crescimento.<sup>2</sup> Tais teorias condizem com a natureza da modelagem uma vez que esta tem êxito ao modelar situações em intervalos delimitados pois a solução para (2.29) é dada por

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)} \quad (2.30)$$

que apresenta um crescimento exponencial se  $\lambda > 0$ , impossível de ser mantido para sempre.

Cabe ainda destacar a limitação desse modelo ao desconsiderar fatores limitadores do crescimento como, por exemplo, a superpopulação inferir diretamente no funcionamento fisiológico de certas espécies mudando seus hábitos sexuais e o comportamento coletivo.

### Modelo Verhulst

A constante  $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$ , em que  $\lambda_n$  representa a taxa de natalidade e  $\lambda_m$  representa a taxa de mortalidade, apresentada na Equação (2.29), é chamada de *taxa de crescimento da população*. Embora no modelo anterior tal taxa tenha sido considerada constante, situações como o caso dos fenômenos em superpopulações conduzem ao modelo em que a taxa de crescimento decresce linearmente de acordo com a população, isto é,  $\lambda = a - bp$  em que  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Nesse sentido, o *Modelo Verhulst* é escrito como

$$p' = (a - bp)p. \quad (2.31)$$

Tal modelo, cuja equação é conhecida como equação logística ou equação de Verhulst-Pearl, foi considerada por Pierre François Verhulst (1804-1849) para estudar populações da França e da Bélgica e por Raymond Pearl (1879-1940) e Lowell Reed (1886-1966) no estudo da população dos Estados Unidos da América. Embora tal modelo refine as hipóteses assumidas para o caso Malthusiano ter sucesso, é importante destacar sua funcionalidade no contexto citado acima ainda que tal modelo não considere que a taxa de produção de novos membros da espécie depende da idade dos pais, isto é, que os novos membros não contribuem de imediato para o aumento da espécie.

Ao analisar a equação (2.31), é natural notar que  $p(t) = 0$  é uma solução para a

---

<sup>2</sup>Em sua obra *An Essay on the Principle of Population*, publicada em 1798, Malthus afirma que o crescimento da população humana seguia regime geométrico enquanto os recursos seguiam regime aritmético o que geraria uma crise e, conseqüentemente, o crescimento populacional deveria ser estagnado a partir de fatores como a fome e pragas biológicas.

equação uma vez que descreve a situação na qual não há indivíduos, além disso, o caso em que a população mantém o número de indivíduos independente do tempo também é solução para a equação no caso em que  $p(t) = \frac{a}{b} = p_\infty$ . A fim de obter soluções que descrevem populações não constantes, resolvemos a expressão

$$\frac{1}{p(a-bp)} dp = dt \quad (2.32)$$

e utilizando

$$\frac{1}{p(a-bp)} = \frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)}$$

encontrar soluções para (2.31) equivale a encontrar soluções para

$$\left( \frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)} \right) dp = dt.$$

Utilizando a técnica para obtenção de solução mostrada na seção sobre equações separáveis, temos que

$$\frac{1}{a} \ln |p| - \frac{1}{a} \ln |a-bp| = t + C.$$

Daí,

$$\ln |p| - \ln |a-bp| = at + aC \Rightarrow \ln \left| \frac{p}{a-bp} \right| = at + aC \Rightarrow |p| = |a-bp| e^{at} \cdot e^{aC}$$

Em particular, conhecida a população inicial  $p(t_0) = p_0$  a constante  $C$  é dada a partir da expressão

$$|p_0| = |a-bp_0| e^{at_0} \cdot e^{aC}. \quad (2.33)$$

Além disso, se  $p_0 \neq 0$  e  $p_0 \neq \frac{a}{b}$ , então

$$\left| \frac{p}{p_0} \right| = \left| \frac{a-bp}{a-bp_0} \right| e^{a(t-t_0)} \quad (2.34)$$

mais ainda, uma vez conhecida a população inicial, estamos de fato buscando soluções para um problema de valor inicial, cuja existência e unicidade é garantida pelo Teorema de Picard, o que permite expressar a solução de (2.31) da forma

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a-bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \quad (2.35)$$

Ao falar das soluções constantes da equação (2.31), nos deparamos com o caso em que a população não tinha indivíduos e o caso em que o número de indivíduos era  $\frac{a}{b}$ , a qual denotamos por  $p_\infty$ . Tal notação não se deu de forma arbitrária, mas devido ao seguinte

fato:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}{ap_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{a} + \frac{(a - bp_0)}{ap_0 e^{a(t-t_0)}}.$$

De onde concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p(t)} = \frac{b}{a}.$$

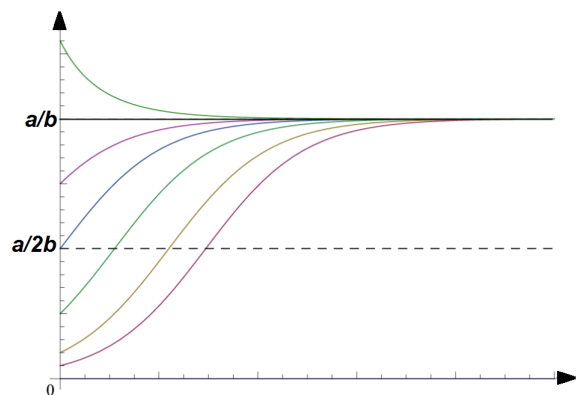
O limite anterior estabelece que  $p(t) \rightarrow p_\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o que significa que qualquer que seja a população inicial  $p_0$  (não nula) o crescimento da população ainda será limitado por  $p_\infty$ , a qual é chamada população limite. Dizemos ainda que a solução  $p_\infty$  é o valor assintótico da população, aspecto que será melhor abordado no Capítulo 3 a partir de resultados e conceitos que ajudarão a compreender tal comportamento. Tal noção de população limite remete à percepção que uma população não crescerá indiscriminadamente em um espaço limitado, evidenciando ainda mais o fato de tal modelagem ser mais próxima da realidade que a modelagem Malthusiana.

Podemos ainda analisar as implicações geométricas desse fenômeno da seguinte forma:

- i) Se a população inicial  $p_0$  é maior que  $p_\infty$ , a população  $p(t)$  tem decréscimo exponencial que tende para  $p_\infty$ .
- ii) Se a população inicial  $p_0$  é menor que  $p_\infty$ , a população cresce tendendo a  $p_\infty$  e seu gráfico que está entre as retas  $p = 0$  e  $p = p_\infty$  tem a forma de um  $S$ . Esta curva, chamada de curva logística, tem um ponto de inflexão em  $p(t) = \frac{a}{2b}$ .

De posse dessa análise podemos apresentar a imagem, adaptada de [12], que representa a dinâmica populacional segundo este modelo.

Figura 2.1: Gráfico da dinâmica populacional segundo o modelo Verhulst



Fonte: Adaptado de [12]

## 2.2 Equações Diferenciais de segunda ordem

No estudo realizado na seção anterior, a utilização do Teorema Fundamental do Cálculo e do Teorema de Picard foram cruciais para a obtenção de uma solução geral para certos tipos de EDOs, fornecendo a partir dos métodos dados um aspecto prático para compreensão de todas soluções da equação. É natural então o questionamento sobre a possibilidade de generalizar tais resultados para as EDOs de segunda ordem, isto é, expressões na forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (2.36)$$

em que  $f$  é uma função dada.

Destacamos então a importância da rebuscada teoria envolvendo as Equações Lineares para responder esse questionamento, as quais estão presentes nas modelagens de clássicos problemas físicos como, por exemplo, mecânica de fluidos, condução do calor e o estudo da dinâmica de uma partícula.

### 2.2.1 Equações Lineares de Segunda Ordem

A definição das equações que serão o foco do nosso estudo nessa seção, como é de se esperar, em muito se assemelha à definição de Equações Lineares de Primeira Ordem apresentada anteriormente e é dada por:

**Definição 28** (EDO linear de segunda ordem). Sejam  $p, q, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas definidas num intervalo aberto  $(a, b)$ . A equação

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (2.37)$$

ou

$$x'' + px' + qx = f \quad (2.38)$$

é chamada de *Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem*.

**Exemplo 11.** A equação

$$t^2x'' + tx' + bx = f(x)$$

em que  $a, b \in \mathbb{R}$  é uma EDO linear de segunda ordem conhecida como *equação Euler-Cauchy*.

O resultado apresentado a seguir pode ser entendido como uma generalização do Teorema de Picard para EDOs de segunda ordem, uma vez que também garante a existência e unicidade local de solução para um P.V.I. além de fornecer a garantia que esta é duas vezes diferenciável.

**Teorema 2.5.** *Se  $p, q$  e  $f$  são funções contínuas em  $(a, b)$ , então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (2.39)$$

*tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo  $(a, b)$ .*

*Demonstração.* Considere a mudança de variáveis  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = x'(t)$ . Então reescrevemos a Equação (2.37) como o sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -qx_1 - px_2 + f \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Dessa forma, pelo Teorema de Picard, o P.V.I.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_1(0) = x_0 \end{cases}$$

tem solução única na vizinhança de  $x_0$ . Então faz sentido considerarmos o P.V.I.

$$\begin{cases} x_2' = -qx_1 - px_2 + f \\ x_2(0) = v_0 \end{cases}$$

que, novamente pelo Teorema de Picard, tem solução única.  $\square$

O Teorema de Existência e Unicidade embora seja válido para qualquer equação linear, será crucial para o estudo teórico que faremos a seguir envolvendo equações na forma

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (2.41)$$

chamadas *equações homogêneas*, do qual nos valeremos fortemente ao longo do capítulo para justificar a suficiência da busca por soluções particulares que satisfaçam uma determinada propriedade ser suficiente para a obtenção de soluções gerais para as equações.

Outro resultado muito importante e que decorre diretamente da linearidade da equação (2.41), é conhecido como Princípio da Superposição e está enunciado abaixo, garante que a combinação linear de soluções para a equação ainda é uma solução.

**Teorema 2.6** (Princípio da Superposição). *Sejam  $\Phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$*

soluções de (2.41). Então qualquer função da forma

$$\Phi(t) = \alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t)$$

em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes arbitrárias, é solução da EDO.

*Demonstração.* De fato, pelas propriedades de derivada, se  $\Phi(t) = \alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t)$  com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes, então

$$\Phi'(t) = \alpha_1 \Phi_1'(t) + \alpha_2 \Phi_2'(t) \text{ e } \Phi''(t) = \alpha_1 \Phi_1''(t) + \alpha_2 \Phi_2''(t).$$

E uma vez que  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são soluções de (2.41), temos

$$\begin{aligned} \Phi'' + p\Phi' + q\Phi &= (\alpha_1 \Phi_1'' + \alpha_2 \Phi_2'') + p(\alpha_1 \Phi_1' + \alpha_2 \Phi_2') + q(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2) \\ &= \alpha_1 (\Phi_1'' + p\Phi_1' + q\Phi_1) + \alpha_2 (\Phi_2'' + p\Phi_2' + q\Phi_2) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\Phi$  é solução da EDO linear homogênea de segunda ordem (2.41).  $\square$

Inicialmente notemos que pelo Teorema de Existência e Unicidade, faz sentido definirmos as funções  $\phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como as soluções de

$$\begin{cases} x'' + px' + qx = 0 \\ x(t_0) = 1 \\ x'(t_0) = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x'' + px' + qx = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

respectivamente. E, além disso, pelo Princípio da Superposição qualquer combinação linear dessas soluções ainda será uma solução para a equação homogênea.

Na Matemática é recorrente a busca por equivalências que evidenciem um certo aspecto desejável, sendo este muitas vezes associado a obtenção de aspectos práticos associados a um certo conceito. No nosso caso, tal praticidade é representada pela obtenção de uma solução geral a partir de soluções particulares, ou ainda, a recíproca do Princípio da Superposição, a qual é garantida para as  $\phi_1$  e  $\phi_2$  escolhidas adequadamente acima.

**Teorema 2.7.** *Sejam  $\phi_1$  e  $\phi_2$  as soluções definidas a partir de (2.42). Então qualquer solução de*

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

é da forma

$$\Phi(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t)$$

para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  escolhidos adequadamente.

*Demonstração.* Seja  $\Phi$  uma solução de (2.41), e tome  $\alpha_1 = \phi(t_0)$  e  $\alpha_2 = \Phi'(t_0)$ . A

função  $\psi(t) = \Phi(t) - \alpha_1\phi_1(t) - \alpha_2\phi_2(t)$  é solução de (2.41). De fato, por

$$\psi'(t) = \Phi'(t) - \alpha_1\phi_1'(t) - \alpha_2\phi_2'(t) \quad \text{e} \quad \psi''(t) = \Phi''(t) - \alpha_1\phi_1''(t) - \alpha_2\phi_2''(t)$$

segue que

$$\begin{aligned} \psi''(t) + p(t)\psi'(t) + q(t)\psi(t) &= (\Phi''(t) + p(t)\Phi'(t) + q(t)\Phi(t)) - \alpha_1(\phi_1''(t) + p(t)\phi_1'(t) \\ &\quad + q(t)\phi_1(t)) - \alpha_2(\phi_2''(t) + p(t)\phi_2'(t) + q(t)\phi_2(t)) \\ &= \Phi(t_0)(\phi_1''(t) + p(t)\phi_1'(t) + q(t)\phi_1(t)) \\ &\quad - \Phi'(t_0)(\phi_2''(t) + p(t)\phi_2'(t) + q(t)\phi_2(t)) \\ &= \Phi(t_0) \cdot 0 - \Phi'(t_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\psi(t_0) = \Phi(t_0) - \alpha_1\phi_1(t_0) - \alpha_2\phi_2(t_0) = 0$$

e de forma análoga  $\psi'(t_0) = 0$ . Portanto, pelo Teorema (2.6),  $\psi(t)$  é identicamente nula e o resultado segue.  $\square$

O resultado anterior nos garante que a busca por soluções de uma equação homogênea reduz-se então à busca por duas soluções particulares, as quais são obtidas a partir dos problemas de valor inicial (2.42) e o exemplo abaixo nos mostra que a praticidade deste resultado está intimamente ligada à simplicidade do P.V.I.

**Exemplo 12.** Determinemos a solução geral da equação

$$x'' - x = 0 \tag{2.43}$$

a partir das funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Notemos que a equação acima nos garante que a segunda derivada da função coincide com a própria função, remetendo ao argumento que utilizamos no capítulo anterior para determinar a solução da equação linear homogênea como a função exponencial. As funções  $x_1(t) = e^t$  e  $x_2(t) = e^{-t}$  são soluções da Equação (2.43). Daí, é natural supor que uma delas satisfará as condições iniciais impostas sobre  $\phi_1$  ou  $\phi_2$ . Para determinar  $\phi_1$ , precisaríamos que  $x_1(t_0) = 0$  ou  $x_2(t_0) = 0$ , o que é um absurdo pois a função exponencial é não-nula em todo ponto. De modo análogo, para determinar  $\phi_2$  a partir de  $x_1$  e  $x_2$ , precisaríamos que  $e^t = 0$  ou  $-e^{-t} = 0$ , o que também é um absurdo.

O Teorema de Existência e Unicidade nos garante que existem as funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , mas como determiná-las? Podemos utilizar as funções  $x_1$  e  $x_2$  para isso?

As respostas para estes questionamentos assim como as justificativas formais para o êxito que obteremos no que faremos a seguir serão dadas ao longo dessa seção. Inicialmente do Princípio de Superposição sabemos que a combinação linear de  $x_1$  e  $x_2$  ainda é uma solução para a equação então tentemos determinar constantes adequadas  $c_1$  e  $c_2$  de modo



que as funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sejam da forma  $x(t) = c_1x_1 + c_2x_2$ . Para determinar  $\phi_1$  com as condições iniciais definidas em  $t = t_0$ , uma vez que  $x'(t_0) = c_1e^{t_0} - c_2e^{-t_0}$  e  $x(t_0) = c_1e^{t_0} + c_2e^{-t_0}$ , as constantes seriam determinadas pela solução do sistema

$$\begin{cases} c_1e^{t_0} - c_2e^{-t_0} = 1 \\ c_1e^{t_0} + c_2e^{-t_0} = 0 \end{cases}$$

que são  $c_1 = \frac{e^{-t_0}}{2}$  e  $c_2 = -\frac{e^{t_0}}{2}$ . Então  $\phi_1(t) = \frac{e^{(t-t_0)}}{2} - \frac{e^{-(t-t_0)}}{2}$ . Procedendo de forma análoga, obtemos  $\phi_2(t) = \frac{e^{(t-t_0)}}{2} + \frac{e^{-(t-t_0)}}{2}$ . Logo, qualquer solução de  $x'' - x = 0$  é da forma

$$\Phi(t) = \alpha_1 \left( \frac{e^{(t-t_0)} - e^{-(t-t_0)}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \frac{e^{(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)}}{2} \right).$$

Note que no exemplo acima precisamos supor soluções quaisquer conhecidas e verificar se com certos ajustes poderíamos obter  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Supor soluções particulares de uma equação diferencial de segunda ordem geralmente não é uma tarefa fácil e ainda que devido a natureza conhecida da equação anterior tenhamos diretamente encontrado soluções particulares, estabelecer uma relação entre tais soluções e as funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  ainda exigiu um certo trabalho. De modo a superar a necessidade de determinar tais soluções específicas, remetendo ao papel crucial da linearidade no princípio da superposição recorreremos a um conjunto maior de soluções cuja determinação é dada a partir da definição abaixo.

**Definição 29** (Soluções *l.d.* e *l.i.*). Duas funções  $\Phi_1, \Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são *linearmente dependentes* (*l.d.*) se existe uma constante  $k$  tal que  $\Phi_2(t) = k\Phi_1(t)$ , para todo  $t \in (a, b)$ . De modo análogo,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são *linearmente independentes* (*l.i.*) se

$$\alpha_1\Phi_1(t) + \alpha_2\Phi_2(t) = 0, \text{ para todo } t \in (a, b) \tag{2.44}$$

implicar que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

**Exemplo 13.** As funções  $t^3$  e  $t^2$  são linearmente independentes.

**Exemplo 14.** As funções  $\sin x$  e  $\cos x$  são l.i.

**Exemplo 15.** As funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  definidas anteriormente são linearmente independentes.

Note que não é imediata a verificação da independência linear das funções dos dois últimos exemplos, justificando a validação da apresentação do *Wronskiano* de duas funções.

**Definição 30** (Wronskiano). Dadas duas funções diferenciáveis  $\Phi_1, \Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , o determinante

$$W[\Phi_1, \Phi_2](t) = \begin{vmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) \\ \Phi_1'(t) & \Phi_2'(t) \end{vmatrix} \tag{2.45}$$

é chamado o *Wronskiano* das funções  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ .

De posse desse conceito, podemos apresentar o resultado que nos fornece uma condição suficiente para que funções sejam linearmente independentes em termos de suas definições e suas derivadas.

**Proposição 2.8.** *Sejam  $\Phi_1, \Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis, cujo Wronskiano é diferente de zero em um ponto  $t_0 \in (a, b)$ . Então,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são l.i. .*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são l.d., isto é, existem constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tais que pelo menos uma constante é não-nula e

$$\alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t) = 0, \forall t \in (a, b).$$

Por derivação, obtemos

$$\alpha_1 \Phi_1'(t) + \alpha_2 \Phi_2'(t) = 0, \forall t \in (a, b).$$

Como as duas igualdades são válidas para todo  $t$  pertencente ao intervalo  $(a, b)$ , em particular para  $t = t_0$  temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \Phi_1(t_0) + \alpha_2 \Phi_2(t_0) = 0 \\ \alpha_1 \Phi_1'(t_0) + \alpha_2 \Phi_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

cujo determinante coincide com  $W[\Phi_1, \Phi_2](t_0) \neq 0$ . Logo,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , o que é uma contradição e, portanto,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são linearmente independentes.  $\square$

**Exemplo 16.** Se  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável tal que  $u(t) \neq c_1 e^{(c-1)t}$  com  $c_1, c \in \mathbb{R}$  então as funções  $x_1(t) = e^{ct}$  e  $x_2(t) = u(t)e^{ct}$  são linearmente independentes. De fato, por

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ce^{ct} = ce^{ct} x_2'(t) \\ &= e^{ct}(u'(t) + cu(t)) \end{aligned}$$

temos que

$$W[x_1, x_2](t) = \begin{vmatrix} e^{ct} & u(t)e^{ct} \\ ce^{ct} & e^{ct}(u'(t) + cu(t)) \end{vmatrix} = e^{2ct}(u'(t) - (c-1)u(t)).$$

Suponha então que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $W[x_1, x_2](t) = 0$ . Por  $e^{2ct} \neq 0$ , teríamos então que

$$u' = (c-1)u$$

que é uma equação da forma (2.5) com  $k = c - 1$ . Então, pelo estudo feito sobre Equações Lineares de Primeira Ordem, teríamos

$$u(t) = c_2 e^{(c-1)t}$$

o que contradiz nossa hipótese.

Logo, existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $W[x_1, x_2](t_0) \neq 0$  e, portanto,  $x_1$  e  $x_2$  são linearmente independentes.

No caso das Equações Lineares Homogêneas podemos garantir ainda a equivalência entre o conceito de independência linear e a não-nulidade do Wronskiano a partir do seguinte resultado:

**Teorema 2.9.** *Sejam  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  soluções de (2.41) Então, elas são l.i. se, e somente se, seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto  $t_0 \in (a, b)$ . Além disso, se o Wronskiano for diferente de zero em um ponto  $t_0$ , então ele é diferente de zero em todos os demais pontos de  $(a, b)$ .*

*Demonstração.* Pela proposição anterior, resta-nos mostrar que se  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são l.i. então seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto  $t_0 \in (a, b)$ . Mais ainda, mostraremos que tal relação é válida para todo ponto de  $(a, b)$ . De fato, seja  $t_0 \in (a, b)$  e suponha por contradição que  $W[\Phi_1, \Phi_2](t_0) = 0$ . Então o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t) = 0 \\ \alpha_1 \Phi_1'(t) + \alpha_2 \Phi_2'(t) = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

tem solução  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ . Considerando  $\Phi(t) = \alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t)$ , o sistema (2.46) equivale a

$$\begin{cases} \Phi(t_0) = 0 \\ \Phi'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Picard  $\Phi(t) = 0, \forall t \in (a, b)$ . Supondo, sem perda de generalidade, que  $\alpha_2 \neq 0$ , vale  $\Phi_2(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Phi_1(t)$ . Assim,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são soluções l.d., o que é uma contradição.

Supondo que o Wronskiano de  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  é não nulo em um ponto  $t_0 \in (a, b)$ , a Proposição 2.8 garante que  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são linearmente independentes. Logo, pelo que acabamos de mostrar,  $W[\Phi_1, \Phi_2](t) \neq 0$  para todo  $t \in (a, b)$ .  $\square$

A partir de tal equivalência podemos então garantir a recíproca do Princípio da Superposição para o caso de equações homogêneas a partir de soluções l.i.

**Teorema 2.10.** *Sejam  $\psi_1, \psi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  duas soluções l.i. de (2.41). Então, qualquer solução de (2.41) é da forma*

$$\Phi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \quad (2.47)$$

com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  escolhidos adequadamente.

*Demonstração.* Seja  $\Phi$  uma solução qualquer de (2.41), mostremos que existem, e são únicas, constantes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\Phi(t) = \alpha_1 \psi_1(t) + \alpha_2 \psi_2(t).$$

Fixado um ponto arbitrário  $t_0 \in (a, b)$ , existem constantes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\Phi(t_0) = \alpha_1 \psi_1(t_0) + \alpha_2 \psi_2(t_0)$$

o que implica que

$$\Phi'(t_0) = \alpha_1 \psi_1'(t_0) + \alpha_2 \psi_2'(t_0).$$

Note então que o determinante do sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \psi_1(t) + \alpha_2 \psi_2(t) = \Phi(t_0) \\ \alpha_1 \psi_1'(t) + \alpha_2 \psi_2'(t) = \Phi'(t_0) \end{cases}.$$

é  $W[\psi_1, \psi_2](t)$  o qual pela independência linear das soluções é não nulo. Assim, as constantes  $\alpha_1, \alpha_2$  estão unicamente determinadas.

Além disso, a função  $\rho : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\rho(t) = \alpha_1 \psi_1(t) + \alpha_2 \psi_2(t)$  é uma solução de (2.41) pelo princípio da superposição. Logo, por  $\rho(t_0) = \Phi(t_0)$  e  $\rho'(t_0) = \Phi'(t_0)$ , o Teorema de Existência e Unicidade garante que  $\rho = \Phi$ .  $\square$

## 2.2.2 Métodos de Solução

Embora tenhamos demonstrado resultados que garantem propriedades qualitativas sobre soluções de Equações Lineares de uma forma geral, apresentaremos nas subseções abaixo uma abordagem sobre a solução geral das Equações Lineares Homogêneas fundamentando-se no Teorema 2.10, o qual garante que para obter uma solução geral para uma equação homogênea é necessário e suficiente determinar duas soluções linearmente independentes da equação.

### Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

A partir do Teorema 2.5 é possível associar a continuidade das funções coeficientes da EDO de segunda ordem à existência e unicidade de solução para um problema de valor inicial. Dessa forma, um estudo natural advindo desse teorema é a busca por métodos de solução para equações homogêneas cujos coeficientes são funções constantes, isto é, soluções para a equação

$$x'' + px' + qx = 0 \tag{2.48}$$

com  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Na seção 2.1.2 observamos que Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem com coeficientes constantes representavam um problema de crescimento ou decrescimento exponencial. De modo análogo, para Equações Lineares de segunda Ordem com coeficientes constantes buscamos determinar soluções na forma

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (2.49)$$

em que  $\lambda$  é um parâmetro a determinar. Nesse sentido, ao substituírmos  $x(t) = e^{\lambda t}$  na expressão (2.48), obtemos

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0$$

e como  $e^{\lambda t} \neq 0$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , as soluções são determinadas pela expressão

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (2.50)$$

a qual é chamada de *equação característica* da Equação (2.48). Desta forma, determinar soluções para a expressão (2.48) equivale a determinar as raízes da equação característica associada, sendo a natureza destas soluções determinadas pelo sinal do discriminante  $\Delta = p^2 - 4q$ , conforme os casos abaixo:

**Caso I:**  $p^2 - 4q > 0$ . Neste caso, a equação característica (2.50) tem duas raízes reais e distintas, que são dadas por:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ e } \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Dessa forma, as soluções de (2.48) associadas às raízes são, respectivamente,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \text{ e } x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

cujos Wronskiano é

$$W[x_1, x_2](t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Ou seja,  $W[x_1, x_2](t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto  $x_1$  e  $x_2$  são soluções l.i. da Equação (2.48) e pelo Teorema 2.10, a solução geral da EDO pode ser escrita por

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.51)$$

com  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

**Caso II:**  $p^2 - 4q = 0$ . O número  $\lambda = -\frac{p}{2}$  é a única raiz da equação característica

donde obtemos apenas a solução

$$x_1(t) = e^{-pt/2}.$$

Para o nosso intuito de expressar a solução geral de (2.48) é suficiente a afirmação que apresentaremos a seguir, ainda que a explicação da obtenção de uma segunda solução seja abordada de fato no próximo tópico a partir do método de redução de ordem.

**Afirmção 2.11.** Seja  $x_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x_2(t) = te^{-\frac{pt}{2}}$ . Então  $x_1$  e  $x_2$  são soluções l.i. de (2.48).

**Solução:** Pelo Exemplo 16,  $x_1$  e  $x_2$  são funções linearmente independentes. Mostremos que  $x_2$  é solução de (2.48). De fato, temos que

$$x_2'(t) = e^{-pt/2} \left(1 - \frac{pt}{2}\right) \text{ e } x_2''(t) = -\frac{p}{2}e^{-pt/2} \left(2 - \frac{pt}{2}\right)$$

e como  $4q = p^2$  temos que

$$\begin{aligned} x_2'' + px_2' + x_2 &= e^{-\frac{pt}{2}} \left[ -\frac{p}{2} \left(2 - \frac{pt}{2}\right) + p \left(1 - \frac{pt}{2}\right) + qt \right] \\ &= e^{-\frac{pt}{2}} \left( \frac{p^2t}{4} - \frac{p^2t}{2} + \frac{p^2t}{4} \right) = 0. \end{aligned}$$

□

Logo, a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-pt/2}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \tag{2.52}$$

com  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

**Caso III:**  $p^2 - 4q < 0$ . No caso em que a equação característica tem raízes complexas conjugadas

$$\lambda_1 = -\mu + iv \text{ e } \lambda_2 = -\mu - iv$$

em que  $\mu = p/2$  e  $v = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$ , devemos ter cautela na análise das soluções pois estas, diferentemente de todas as soluções abordadas até então neste trabalho, tratam-se de soluções complexas.

Note que embora não tenhamos nos referido à possibilidade de obtermos soluções complexas, a validação de uma solução complexa  $\phi$  para (2.48) decorre do fato que como a função  $\phi$  é diferenciável se, e somente se, sua parte real  $\phi_R$  e sua parte imaginária  $\phi_I$  o são, ela será solução se, e só se,  $\phi_R$  e  $\phi_I$  o forem. Desta forma,

$$x_1(t) = e^{-\mu t} e^{ivt} \text{ e } x_2(t) = e^{-\mu t} e^{-ivt}$$

são soluções l.i. de (2.48) pois  $W[x_1, x_2](t) = 2ive^{-2\mu t} \neq 0$ .

Utilizando a Fórmula de Euler para números complexos, isto é, que  $ei^\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $x_1$  e  $x_2$  podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\mu t} e^{i(vt)} = e^{-\mu t} (\cos(vt) + i \sin(vt)) \\ x_2(t) &= e^{-\mu t} e^{i(-vt)} = e^{-\mu t} (\cos(-vt) + i \sin(-vt)) = e^{-\mu t} (\cos(vt) - i \sin(vt)) \end{aligned}$$

Daí, pelo princípio da superposição,

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{2} [x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\mu t} \cos(vt) \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{2i} [x_1(t) - x_2(t)] = e^{-\mu t} \sin(vt) \end{aligned}$$

são também soluções da equação (2.48) e por

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = \begin{vmatrix} e^{-\mu t} \cos(vt) & e^{-\mu t} \sin(vt) \\ -e^{-\mu t} (\mu \cos(vt) + \sin(vt)) & e^{-\mu t} (\cos(vt) - \mu \sin(vt)) \end{vmatrix} = e^{-\mu t}.$$

temos que  $W[\phi_1(t), \phi_2(t)] \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Portanto, a solução geral da equação é

$$x(t) = e^{-\mu t} (\alpha_1 \cos(vt) + \alpha_2 \sin(vt)). \quad (2.53)$$

### Método de redução de ordem da equação diferencial

No tópico anterior, nos deparamos com o caso em que utilizando apenas o método sugerido só era possível determinar uma solução para a EDO, sendo necessário utilizar outros procedimentos para obter a solução geral do problema.

No intuito de solucionar esses tipos de problemas em que apenas uma solução é conhecida, o método da redução de ordem nos induz a obter uma solução  $\Phi_2$  a partir de uma solução  $\Phi_1$  já conhecida.

Mais formalmente, dada uma solução  $\Phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  da equação diferencial

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (2.54)$$

em que  $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e  $\Phi \neq 0$ , o método da redução da ordem consiste em buscar uma segunda solução na forma

$$\phi_2(t) = u(t)\phi_1(t) \quad (2.55)$$

em que  $u(t)$  é uma função a determinar. Por  $\phi_2$  ser solução de (2.54), obtemos

$$\begin{aligned} \phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2 = 0 &\Rightarrow u''\phi_1 + 2u'\phi_1' + u\phi_1'' + p(u'\phi_1 + u\phi_1') + qu\phi_1 = 0 \\ &\Rightarrow u''(\phi_1) + u'(2\phi_1' + p\phi_1) + u(\phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1) = 0. \end{aligned}$$

Então, considerando  $v = u'$  e por  $\phi_1$  ser solução de (2.54), o problema se reduz a estudar a equação

$$v' + v \left( p + 2 \frac{\phi_1'}{\phi_1} \right) = 0 \quad (2.56)$$

a qual trata-se de uma equação linear homogênea de primeira ordem, cuja solução é dada por

$$v(t) = \frac{c}{\phi_1^2} e^{-P(t)} \quad (2.57)$$

em que  $c$  é uma constante e  $P(t)$  é uma primitiva de  $p(t)$ .

Dessa forma, para voltarmos à expressão na forma (2.55) por

$$u(t) = c \int \frac{1}{\phi_1^2} e^{-P(t)} dt$$

temos

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{c}{\phi_1^2} e^{-P(t)}. \quad (2.58)$$

**Exemplo 17.** Considere a equação linear com coeficientes constantes

$$x'' + px' + qx = 0 \quad (2.59)$$

em que  $p^2 = 4q$ . Pelo método estudado anteriormente, conhecemos uma solução para esta equação que é

$$x_1(t) = e^{-\frac{pt}{2}}$$

Daí, pelo que acabamos de mostrar, para determinar uma solução  $x_2(t)$  resolvamos a equação

$$u(t) = c \int \frac{e^{-P(t)}}{e^{pt}} dt \quad (2.60)$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  e  $P(t)$  é uma primitiva de  $p$ . Uma vez que

$$\int p dt = pt + k$$

em que  $k \in \mathbb{R}$ , se considerarmos as constantes  $c = 1$ ,  $k = 0$ , por (2.60) temos que

$$u(t) = \int \frac{e^{-pt}}{e^{pt}} dt = t + K$$

Assim,

$$x_2(t) = (t + K)e^{-\frac{pt}{2}} \quad (2.61)$$

com  $K \in \mathbb{R}$  é solução da equação.

Em particular, para  $K = 0$ , obtemos a solução apresentada na Afirmação 2.11.



### 2.2.3 Aplicação: Oscilador Harmônico

No início da seção ressaltamos que além do aspecto teórico envolvendo as Equações Lineares, elas também se destacam por serem intrínsecas a problemas clássicos da Física. Nesse sentido apresentaremos dois problemas relacionados a movimentos oscilatórios: Oscilador Harmônico Simples e Oscilador Harmônico Amortecido.

#### Oscilador Harmônico Simples

A modelagem do Oscilador Harmônico Simples destaca-se pela possibilidade da análise das propriedades do movimento de uma partícula, uma vez que estabelece condições que descrevem o problema de uma forma mais simples matematicamente mas que ainda permitem compreender propriedades de oscilações encontradas na natureza.

Tal modelagem refere-se ao movimento de uma partícula de massa  $m$  sob a ação de uma força atratora para a origem com magnitude igual a um múltiplo  $k$  da distância para a origem, que pode ser descrita matematicamente pela equação

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad (2.62)$$

em que  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

A fim de determinar a solução para esse problema, notamos que a equação característica associada a Equação (2.62) é dada por

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

cujo determinante  $\Delta = \sqrt{-4\omega^2} < 0$ . Então, utilizando a fórmula de Euler, podemos explicitar a solução geral da EDO por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (2.63)$$

A fim de determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , consideramos a posição inicial  $x(0) = x_0$  e a velocidade inicial  $x'(0) = v_0$  da partícula. Daí,  $c_1 = x_0$  e  $\frac{v_0}{\omega} = c_2$ . Portanto,

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.64)$$

No intuito de realizar um estudo sobre o comportamento de  $x(t)$ , considerando

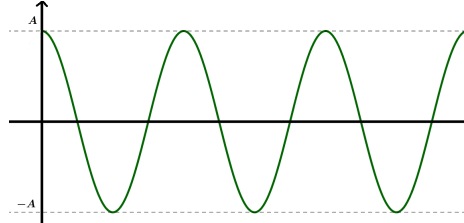
$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \cos \phi = \frac{x_0}{A} \text{ e } \sin \phi = \frac{v_0}{\omega}$$

onde  $0 < \phi < 2\pi$ , obtemos

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi). \quad (2.65)$$

Dessa forma, tem-se que o movimento da partícula é oscilatório em torno da posição central, com afastamento máximo, *amplitude*,  $A$ . Além disso, pelas propriedades da função cosseno, o *período* do movimento, isto é, o tempo necessário para uma oscilação completa é  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , o que indica que o número de oscilações por segundo é  $f = \omega/2\pi$ , que é chamado de *frequência*.

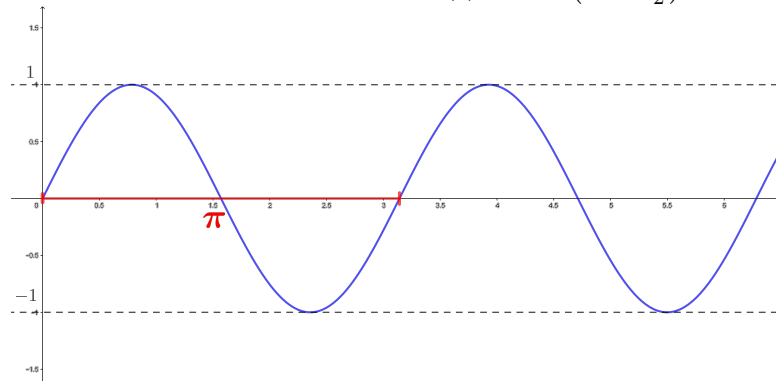
Figura 2.2: Gráfico de  $x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$



Fonte: Produzido pelo autor.

**Exemplo 18.** Uma partícula de 1kg está sob a ação de uma força atratora para origem com magnitude proporcional ao quádruplo de sua distância para a origem, em uma superfície sem atrito. Se a partícula parte da origem com velocidade inicial de 2 m/s, então o gráfico da posição da partícula é

Figura 2.3: Gráfico de  $x(t) = \cos(2t - \frac{\pi}{2})$



Fonte: Produzido pelo autor.

De fato, de acordo com a segunda lei de Newton, temos que se  $x(t)$  descreve a posição da partícula no tempo  $t$ , então

$$x''(t) = -4x(t) \Rightarrow x''(t) + (2)^2x(t) = 0$$

cuja solução geral é dada pela Equação (2.63) com  $\omega = 2$ . Além disso, uma vez que a partícula parte do repouso, temos as condições iniciais  $x(t_0) = 0$  e  $v(t_0) = 2$ .

Assim, a mudança de variáveis que consideraremos será dada por

$$A = \sqrt{1} = 1, \cos \phi = 0 \text{ e } \sin \phi = 1$$

o que nos garante que o ângulo central é  $\phi = \frac{\pi}{2}$  e a amplitude é 1.

Logo, a posição da partícula é de fato a função

$$x(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.66)$$

### Oscilador Harmônico Amortecido

A modelagem de situações a partir do uso de Equações Diferenciais Ordinárias mostra-se também interessante em modelo semelhantes aos do caso do oscilador harmônico simples mas quando atua sobre a partícula uma força resistiva proporcional à sua velocidade. Tal situação que está presente em balanças, fluxo de correntes em circuitos elétricos e vibrações mecânicas dá-se por meio do estudo de soluções para a equação

$$x'' + 2vx' + \omega^2 x = 0 \quad (2.67)$$

em que  $2v = \frac{\mu}{m}$  e  $\omega = \frac{k}{m}$ .

Procederemos de modo análogo ao caso simples para obter a equação da posição da partícula uma vez que o problema também é modelado a partir de uma equação linear homogênea de segunda ordem.

Note então que a equação característica do problema é dada por  $\lambda^2 + 2v\lambda + \omega^2 = 0$  e, portanto, nosso estudo reduz-se a estudar o comportamento das soluções de acordo com o sinal do discriminante

$$\Delta = 4v^2 - 4\omega^2 = \frac{\mu^2 - 4km}{m^2}$$

- **Amortecimento forte** ( $\Delta > 0$ )

Se  $\mu^2 > 4km$ , a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-vt}[c_1 e^{lt} + c_2 e^{-lt}]; \quad l = \sqrt{v^2 - \omega^2}$$

em que  $c_1, c_2$  podem ser determinadas a partir da velocidade e da posição inicial. Além disso, por  $v > l$ ,

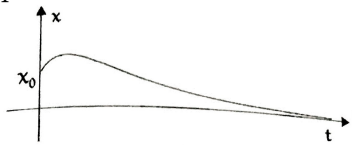
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

e como  $v(t) = e^{-vt}[c_1(l-v)e^{lt} - c_2(l+v)e^{-lt}]$ , a velocidade se anula, no máximo, em

$$e^{2lt} = \frac{c_2(l+v)}{c_1(l-v)}$$

Dessa forma, o movimento da partícula é aperiódico e é expresso por um dos gráficos:

Figura 2.4: Gráfico de  $x(t)$  quando a função tem um ponto de máximo



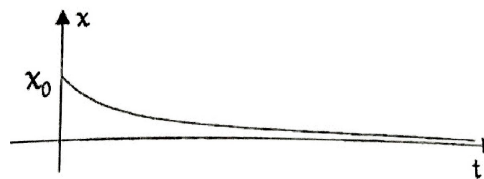
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 2.5: Gráfico de  $x(t)$  quando a função tem ponto de mínimo



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 2.6: Gráfico de  $x(t)$  quando a função não tem ponto crítico



Fonte: Produzido pelo autor.

- **Amortecimento crítico** ( $\Delta = 0$ )

Se  $\mu^2 = 4km$ , a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-vt}(c_1 + c_2t)$$

em que  $c_1 = x_0$  e  $c_2 = v_0 + vx_0$ . Além disso,  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $x(t)$  se anula, no máximo, em  $t = \frac{c_1}{c_2}$ . Daí, como

$$v(t) = e^{-vt}[(-vc_1 + c_2) - vtc_2]$$

a velocidade se anula, em no máximo, um ponto e portanto os gráficos que descrevem a posição da partícula se assemelha aos gráficos do caso forte.

- **Amortecimento oscilatório** ( $\Delta < 0$ )

Se  $\mu^2 < 4km$ , a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-vt}[c_1 \cos lt + c_2 \sin lt]; \quad l = \sqrt{\omega^2 - v^2}$$

se considerarmos  $A$  e  $\phi$  como

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \cos \phi = \frac{c_1}{A} \quad \text{e} \quad \sin \phi = \frac{c_2}{A}$$

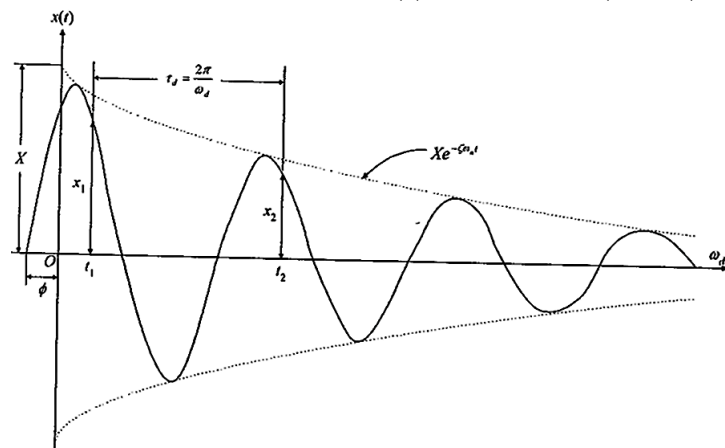
onde  $0 < \phi < 2\pi$ , temos que

$$x(t) = Ae^{-vt} \cos (lt - \phi)$$

em que  $A$  e  $\phi$  podem ser obtidos a partir da posição inicial  $x_0$  e da velocidade inicial  $v_0$ .

Além disso  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e embora este movimento seja oscilatório, o termo  $e^{-vt}$  implica que a amplitude da oscilação não é constante mas decresce exponencialmente, o que pode ser percebido a partir do gráfico abaixo, obtido de [3].

Figura 2.7: Gráfico de  $x(t) = Ae^{-vt} \cos(\omega_d t - \phi)$



Fonte: [3]

## Capítulo 3

# Sistemas Autônomos no Plano

No capítulo anterior, o estudo sobre Equações Diferenciais estava estritamente associado à exibição de suas soluções, contudo, o êxito na busca de métodos para obter soluções e na tentativa de explicitá-las em termos de funções elementares restringe-se a um pequeno número de Equações Diferenciais. Apresentaremos agora uma abordagem qualitativa sobre Equações Diferenciais que permite compreender, ainda que localmente, o comportamento das soluções de sistemas autônomos no plano de fases, segundo a noção de estabilidade. Apresentamos inicialmente as ferramentas matemáticas necessárias para investigar tal comportamento em torno das singularidades.

**Definição 31** (Sistemas Autônomos). Sistemas na forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

em que as funções  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  não dependem explicitamente da variável (tempo)  $t$  são denominados *sistemas autônomos*.

**Definição 32** (Órbita). As soluções  $(x(t), y(t))$  do sistema autônomo são curvas parametrizadas no plano de fases  $(x, y)$  denominadas *órbitas*.

Uma vez definido o que seriam soluções para o sistema autônomo, apresentaremos alguns resultados que nos permitem compreender o aspecto do plano de fases  $(x, y)$  em termos dessas soluções. Um resultado interessante que abordaremos a seguir, advindo do Teorema de Existência e Unicidade, nos garante que se trasladarmos uma solução do sistema (3.1) paralelamente ao eixo  $t$ , obtemos ainda uma solução para o sistema.

**Proposição 3.1.** *Considere o sistema autônomo (3.1) e  $t_1$  um número fixado. Então, se  $(x(t), y(t))$  é uma solução para o sistema,  $(x_1(t), y_1(t)) = (x(t - t_1), y(t - t_1))$  também será solução para (3.1).*

*Demonstração.* De fato, como  $x'_1(t) = x'(t - t_1)$  e por hipótese  $(x(t), y(t))$  é solução para (3.1), temos que

$$x'_1(t) = x'(t - t_1) = f(x(t - t_1), y(t - t_1)) = f(x_1(t), y_1(t))$$

e, de modo análogo,

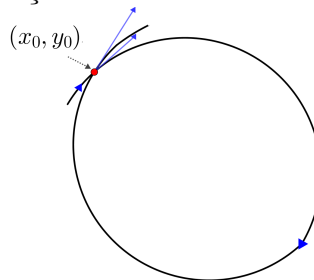
$$y'_1(t) = y'(t - t_1) = f(x(t - t_1), y(t - t_1)) = f(x_1(t), y_1(t)).$$

Portanto,  $(x_1(t), y_1(t))$  é solução para o sistema autônomo (3.1).  $\square$

O resultado anterior nos garante ainda que uma reparametrização de  $(x(t), y(t))$  conduz à mesma órbita no plano de fases  $(x, y)$ , nos permitindo sempre considerar as condições iniciais na forma  $(x(t_0), y(t_0))$  em que  $t_0 = 0$ , um artifício que nos valeremos ao longo do capítulo.

Podemos ainda garantir que uma órbita não se auto-intersecciona transversalmente, isto é, não existem pontos duplos  $(x_0, y_0)$  da forma:

Figura 3.1: Esboço de uma órbita com auto-interseção



Fonte: Produzido pelo autor

De fato, caso existissem  $t_0, t_1$  distintos tais que  $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1)) \equiv (x_0, y_0)$ , as tangentes à curva em  $t_0$  e  $t_1$  seriam ambas dadas pelo campo  $(f(x, y), g(x, y))$  calculado no ponto  $(x_0, y_0)$ , o que seria um absurdo pois  $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$  assumiria dois valores distintos.

Além disso, o resultado a seguir generaliza esse fato entre órbitas quaisquer no plano de fases:

**Proposição 3.2.** *Órbitas não se interseccionam no plano de fases.*

*Demonstração.* Suponha que existam duas órbitas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$  tais que  $(x_1(\hat{t}), y_1(\hat{t})) = (x_2(\tilde{t}), y_2(\tilde{t}))$  para  $\hat{t}, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ . Pela proposição anterior, podemos reparametrizar  $(x_1(t), y_1(t))$  da forma

$$(x(t), y(t)) = (x_1(t + \hat{t} - \tilde{t}), y_1(t + \hat{t} - \tilde{t}))$$

de modo que  $(x(t), y(t))$  ainda seja uma solução de (3.1). Além disso,

$$(x(\tilde{t}), y(\tilde{t})) = (x_1(\tilde{t}), y_1(\tilde{t})) = (x_2(\tilde{t}), y_2(\tilde{t})),$$

isto é, as órbitas  $(x(t), y(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$  são soluções de (3.1) com a mesma condição inicial para  $\tilde{t}$ . Então pelo Teorema de Picard  $(x(t), y(t)) = (x_2(t), y_2(t))$  e, portanto,  $(x_2(t), y_2(t))$  é uma reparametrização de  $(x_1(t), y_1(t))$ .  $\square$

Desse modo, tendo como principal fundamento o Teorema da Existência e Unicidade, os resultados mostrados até então nos garantem que o plano de fases  $(x, y)$  está coberto por órbitas que não se interseccionam. Vale destacar então que devido às limitações do software utilizado para gerar os gráficos, ainda que em certos casos as órbitas pareçam se intersectar em um ponto, trata-se de fato de uma região aberta.

### 3.1 Pontos de equilíbrio

Abordamos até então o aspecto geral do plano de fases  $(x, y)$  ao qual as órbitas fazem parte e como estas estavam relacionadas. A fim de compreender o comportamento local das órbitas ainda que não saibamos como são tais soluções, recorreremos aos conceitos de estabilidade introduzidos pelo matemático Aleksandr Lyapunov (1857-1918) em sua tese intitulada *The general problem of the stability of motion* (O problema geral de estabilidade do movimento), a partir do qual a atenção é voltada para as propriedades das órbitas em termos de uma singularidade.

**Definição 33** (Singularidade). As soluções constantes  $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$  do sistema (3.1), isto é, os zeros do sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

são chamados de *pontos de equilíbrio* ou *singularidades*.

Devido aos propósitos deste trabalho, apresentaremos de forma breve os conceitos de estabilidade a partir da noção de Lyapunov, tendo ênfase no seu caráter intuitivo mas não obstante do conceito matemático, sendo fundamentais os conceitos de singularidade estável e singularidade assintoticamente instável.

**Definição 34** (Singularidade estável). Um ponto de equilíbrio (ou singularidade)  $(x_0, y_0)$  é *estável* se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para qualquer órbita  $(x(t), y(t))$  com

$$\text{dist}((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \delta,$$



tenhamos

$$\text{dist}((x(t), y(t)), (x_0, y_0)) < \epsilon,$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Definição 35** (Singularidade assintoticamente estável). Um ponto de equilíbrio (ou singularidade)  $(x_0, y_0)$  é *assintoticamente estável* se ele for *estável* e se existir um  $\eta > 0$  tal que toda órbita  $(x(t), y(t))$  com

$$\text{dist}((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \eta$$

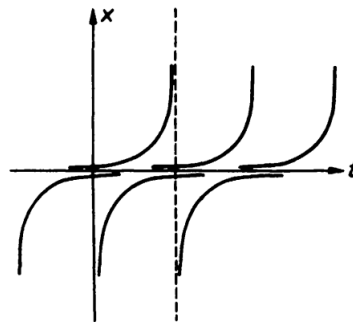
então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0).$$

Intuitivamente, estas definições garantem que: para condições iniciais suficientemente próximas da singularidade estável, as soluções ainda se mantêm próximas da singularidade; e, para condições iniciais suficientemente próximas de uma singularidade assintoticamente estável, as soluções convergem para a singularidade a medida que o tempo cresce.

**Exemplo 19.** A solução  $x_1(t) = 0$  da equação  $\frac{dx}{dt} = x^2$ , em que  $x \in \mathbb{R}$ , não é estável. De fato, pelo método de solução para equações separáveis, toda solução de  $\frac{dx}{dt} = x^2$  é da forma  $x(t) = -(t + c)^{-1}$  para  $c \in \mathbb{R}$ . Em particular, pelo Teorema de Picard, uma solução  $x(t)$  é unicamente determinada por  $x(t) = -(t - x_0)^{-1} = x_0(1 - tx_0)^{-1}$  em que  $x_0 = x(0) \neq 0$ . Assim, notemos que  $x(t)$  não existe para  $t = x_0^{-1}$  então  $\text{dist}(x(t), x_1) = |x(t)| > \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , conforme ilustrado abaixo.

Figura 3.2: Soluções da forma  $x(t) = x_0(1 - tx_0)^{-1}$



Fonte: Produzido pelo autor

Embora os conceitos de singularidade estável e singularidade assintoticamente estável estejam relacionados à noção de que as soluções se mantêm próximas da singularidade, e que toda singularidade assintoticamente estável, em particular, é estável, tais conceitos não são equivalentes, como é enfatizado no exemplo abaixo:

**Exemplo 20.** Toda solução da equação  $x' = 0$  é estável mas não é assintoticamente estável. Sabemos que as soluções para EDO  $x' = 0$  são constantes, isto é, são da forma  $x(t) = c$  em que  $c \in \mathbb{R}$ . Assim, considere uma solução para a EDO na forma  $x(t) = x_0$ . Dado  $\epsilon > 0$ , basta considerar  $\delta = \epsilon > 0$  e temos que se  $x(t)$  é uma solução para  $x' = 0$  tal que

$$\text{dist}(x(0), x_0) = |x(0) - x_0| < \delta$$

então uma vez que  $x(t)$  é constante,

$$\text{dist}(x(t), x_0) = |x(t) - x_0| = |x(0) - x_0| < \delta = \epsilon.$$

Portanto, toda solução é estável. No entanto, para todo  $\eta > 0$ , se  $\text{dist}(x(0), x_0) = |x(0) - x_0| < \eta$ , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(0) = x(0) \neq x_0.$$

Logo, nenhuma solução é assintoticamente estável.

**Exemplo 21.** A população limite  $p(t) = \frac{a}{b} = p_\infty$  apresentada no modelo Verhulst no capítulo 2 é uma solução assintoticamente estável para a equação  $p' = (a - bp)p$ .

A partir de agora, o nosso estudo se voltará para a análise e interpretação da geometria das órbitas em torno da vizinhança da origem  $(0, 0)$ , a qual denotaremos por *singularidade isolada*. Desse modo, a análise de uma singularidade qualquer  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  se dará como um caso particular do estudo da singularidade isolada a partir da mudança de variáveis  $(x, y) \rightarrow (x - x_0, y - y_0)$ , cuja validade é dada pela Proposição 3.1. Dessa forma, podemos utilizar a Fórmula de Taylor de modo a correlacionar as funções  $f$  e  $g$  e a singularidade isolada, de modo que

$$\begin{cases} f(x, y) = f_x(0, 0) + f_y(0, 0) + F(x, y) \\ g(x, y) = g_x(0, 0) + g_y(0, 0) + G(x, y) \end{cases}, \quad (3.2)$$

em que  $F$  e  $G$  são  $o(|x| + |y|)$ , isto é,  $\frac{F(|x|+|y|)}{|x|+|y|} \rightarrow 0$  e  $\frac{G(|x|+|y|)}{|x|+|y|} \rightarrow 0$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

## 3.2 Sistema Autônomo linear

Embora no tópico anterior tenhamos obtido uma representação para o sistema (3.1) a partir das derivadas parciais das funções  $f$  e  $g$  na origem e das funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$ , abordaremos inicialmente um caso particular, em que a origem é uma singularidade para o sistema linear:

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by \\ y'(t) = cx + dy \end{cases}. \quad (3.3)$$

De tal forma, considerando o vetor  $X$  e a matriz  $A$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

o sistema (3.3) é escrito como

$$X' = AX. \quad (3.4)$$

É natural notar a semelhança da expressão anterior com a equação separável  $x' = ax$  estudada no capítulo 2, cuja solução geral é dada por

$$x(t) = ce^{at}. \quad (3.5)$$

Nesse sentido, buscaremos soluções para (3.3) na forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\tau t} \\ y(t) = c_2 e^{\tau t} \end{cases}, \quad (3.6)$$

ou equivalentemente,  $X(t) = Ce^{\tau t}$ . Utilizando as informações do sistema (3.6) no sistema linear (3.3), temos

$$\begin{cases} \tau c_1 e^{\tau t} = ac_1 e^{\tau t} + bc_2 e^{\tau t} \\ \tau c_2 e^{\tau t} = cc_1 e^{\tau t} + dc_2 e^{\tau t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - \tau)c_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + (d - \tau)c_2 = 0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Uma vez que estamos interessados em soluções não triviais, isto é,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , o determinante do sistema é dado por

$$\begin{vmatrix} a - \tau & b \\ c & d - \tau \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \tau^2 - (a + d)\tau + (ad - bc) = 0. \quad (3.8)$$

Desse modo, buscamos pelos auto-valores da matriz  $A$ , podendo utilizar então os resultados de Álgebra Linear de modo que seja possível retornar ao sistema inicial e determinar as constantes. Pela forma canônica de Jordan, podemos escrever as possíveis matrizes de acordo com os auto-valores da matriz  $A$ , cujo estudo é regido pelas raízes do discriminante

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc \quad (3.9)$$

da seguinte forma:

1. Se  $\Delta > 0$ , existem dois autovalores reais distintos  $\lambda, \mu$  para  $A$ , de modo que sua representação na forma canônica é dada por

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

2. Se  $\Delta = 0$ , existe um único autovalor real  $\lambda$  para  $A$ .

(a) Caso a matriz  $A$  seja diagonalizável, temos que

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(b) Se a matriz  $A$  não é diagonalizável, o polinômio característico o polinômio mínimo da matriz coincidem, então

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

3. Se  $\Delta < 0$ ,  $A$  possui dois autovalores complexos conjugados na forma  $\alpha + i\beta$  e sua representação de Jordan é

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Com base nas representações obtidas para  $A$  a partir da forma canônica de Jordan, abordaremos para cada caso apresentado acima as implicações dessa representação na obtenção das soluções para o sistema (3.3) e o que podemos inferir sobre o comportamento local dessas soluções.

### 1. A matriz $A$ possui dois auto-valores reais

No caso em que  $\Delta > 0$ , o sistema associado à matriz  $B$  em termos dos auto-valores  $\lambda, \mu$  é dado por

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Portanto, as soluções do sistema (3.3) equivalem às soluções do sistema (3.10) que são dadas explicitamente por

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\mu t} \end{cases} \quad (3.11)$$

em que as constantes  $c_1, c_2$  podem ser determinadas a partir de condições iniciais. A fim de analisar localmente o comportamento das soluções, podemos supor que  $c_1, c_2 > 0$  e considerar

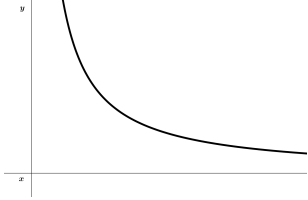
$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= c_1^\mu e^{\lambda\mu t} \\ y^\lambda(t) &= c_2^\lambda e^{\mu\lambda t} \end{aligned}$$

de modo que determinamos implicitamente a solução apresentada no sistema (3.11) por

$$c_1^{-\mu} x^\mu = c_2^{-\lambda} y^\lambda \Rightarrow y = c^{\frac{\mu}{\lambda}} x, \quad x > 0. \quad (3.12)$$

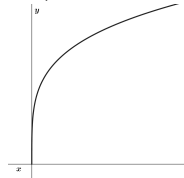
Assim, no plano  $(x, y)$  o gráfico da solução depende do quociente  $\mu/\lambda$  conforme ilustrado nos gráficos abaixo:

Figura 3.3: Gráfico de  $y = c^{\frac{\mu}{\lambda}}x$  com  $\mu/\lambda < 0$  no plano  $(x, y)$



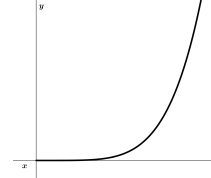
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.4: Gráfico de  $y = c^{\frac{\mu}{\lambda}}x$  com  $0 < \mu/\lambda < 1$  no plano  $(x, y)$



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.5: Gráfico de  $y = c^{\frac{\mu}{\lambda}}x$  com  $\mu/\lambda > 1$  no plano  $(x, y)$



Fonte: Produzido pelo autor.

Para além do comportamento de cada solução, nosso intuito é analisar o comportamento das órbitas com respeito a sua estabilidade. Nesse sentido, estudemos o comportamento de  $x$  e  $y$  a partir de sua representação paramétrica dada no sistema (3.11), sendo crucial a associação dos sinais dos autovalores ao polinômio característico, que é dado por

$$p(\tau) = (\tau - \lambda) \cdot (\tau - \mu) \Rightarrow \tau^2 - (a + d)\tau + (ad - bc) = \tau^2 - (\lambda + \mu)\tau + \mu\lambda. \quad (3.13)$$

- Se  $\mu, \lambda < 0$ , então  $\mu + \lambda < 0$  e  $\mu\lambda > 0$  então por (3.13), isto equivale a estudar o caso em que  $a + d < 0$  e  $ad - bc > 0$ . Note que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} c_1 e^{\lambda t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1}{e^{-\lambda t}} = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} c_2 e^{\mu t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_2}{e^{-\mu t}} = 0.$$

Ou seja, se  $\mu, \lambda < 0$ , as órbitas tendem para a origem quando  $t \rightarrow +\infty$  e nesse caso dizemos que  $(0, 0)$  é um *ponto atrator*. Podemos representar tal situação como abaixo em que as setas indicam a direção da curva a medida que o tempo cresce e, neste caso, dizemos que a singularidade é um *nó estável*.

- Se  $\mu, \lambda > 0$ , então com um argumento análogo ao que fizemos no item anterior, o estudo que faremos equivale ao caso em que  $ad - bc > 0$  e  $a + d > 0$ . Dessa forma, note que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} c_1 e^{\lambda t} = +\infty$$

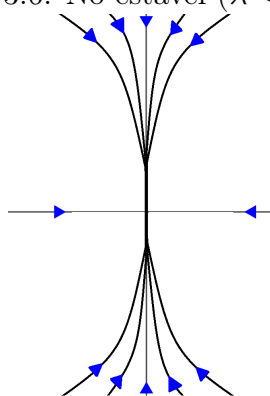
e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} c_2 e^{\mu t} = +\infty.$$

Por outro lado,

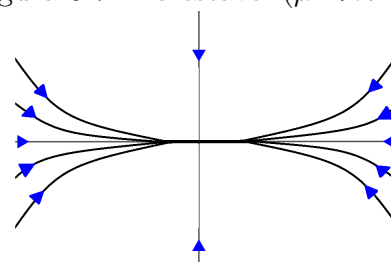
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{\lambda t} = 0$$

Figura 3.6: Nó estável ( $\lambda < \mu < 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.7: Nó estável ( $\mu < \lambda < 0$ )



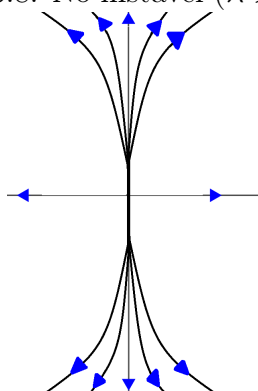
Fonte: Produzido pelo autor.

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} c_2 e^{\mu t} = 0.$$

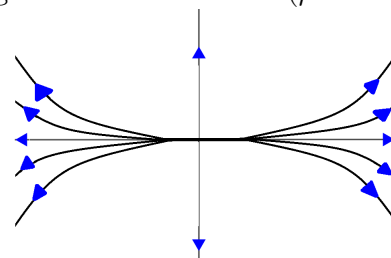
Neste caso, dizemos que a origem é um *nó instável* e representamos o comportamento das órbitas na forma:

Figura 3.8: Nó instável ( $\lambda > \mu > 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.9: Nó instável ( $\mu > \lambda > 0$ )

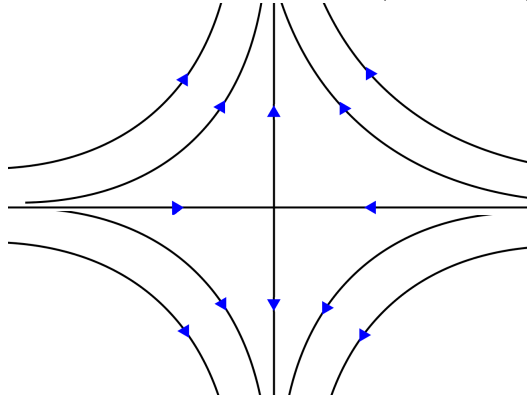


Fonte: Produzido pelo autor.

- Se  $\lambda$  e  $\mu$  têm sinais distintos, por exemplo:  $\lambda < 0 < \mu$ , isto equivale a dizer que  $ad - bc < 0$  e procedendo de modo análogo aos casos anteriores temos que  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow +\infty$  e  $y \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

Dizemos então que  $(0, 0)$  é um *ponto de sela* e as órbitas localmente tem o aspecto:

Figura 3.10: Ponto de sela ( $\lambda < 0 < \mu$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

**2.a) A matriz A possui um auto-valor real e é diagonalizável**

Neste caso, o sistema associado à matriz diagonal B em termos do auto-valor  $\lambda$  é dado por

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

cuja solução é dada por

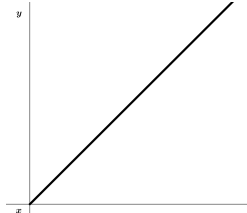
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Disto, temos a solução na forma implícita

$$y = cx$$

e a partir dela as curvas soluções são como na figura abaixo:

Figura 3.11:  $\mu/\lambda = 1$



Fonte: Produzido pelo autor.

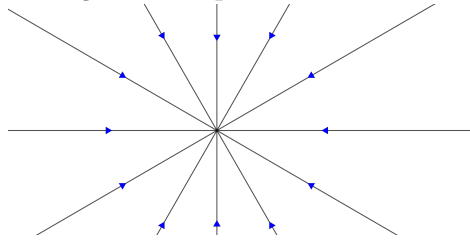
Por outro lado, o polinômio característico neste caso é dado por:

$$p(\tau) = (\tau - \lambda)^2 \Rightarrow \tau^2 - (a + d)\tau + (ad - bc) = \tau^2 - (2\lambda)\tau + \lambda^2. \quad (3.14)$$

- Se  $\lambda < 0$ , então  $2\lambda < 0$  e portanto, estudamos o caso em que  $a + d < 0$ . Temos então que  $x(t) \rightarrow 0$  e  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Assim, a origem é um ponto nodal

estável e o espaço das configurações tem a forma

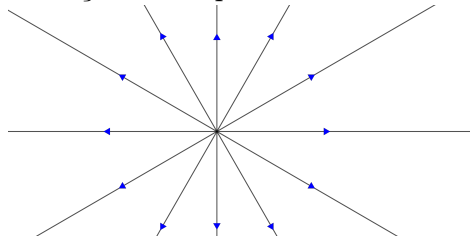
Figura 3.12: Esboço de um ponto nodal estável ( $\lambda = \mu < 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

- Se  $\lambda > 0$ , estudamos o caso em que  $a+d > 0$  e temos que  $x(t) \rightarrow 0$  e  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Assim, a origem é um ponto nodal instável e o espaço das configurações tem o aspecto da figura abaixo:

Figura 3.13: Esboço de um ponto nodal estável ( $\lambda = \mu < 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

## 2. b) A matriz $A$ possui um auto-valor real, o polinômio mínimo e o polinômio característico de $A$ coincidem

Quando  $\Delta = 0$ , o sistema associado a matriz  $B$  é dado por

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

cuja solução na forma paramétrica é dada por

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

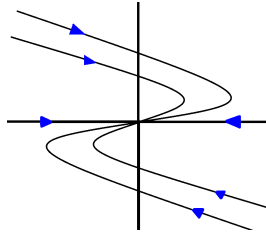
Diferentemente dos casos anteriores, a análise do comportamento de tais soluções não se dá de forma tão direta, uma vez que não conseguimos expressar as soluções de forma implícita, dependendo também das constantes  $c_1, c_2$ .

É possível notar inicialmente que se  $c_2 = 0$ , então  $y = 0$  e os semi-eixos  $x > 0$  e  $x < 0$  são curvas solução cuja orientação depende ainda do sinal de  $\lambda$ . Então de modo a simplificar a análise, suporemos que  $c_2 > 0$ .



- Se  $\lambda < 0$ , estudamos o caso em que  $a + d < 0$ . Então, uma vez que a função exponencial apresenta crescimento maior que a função linear, temos que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ;  $x(t) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Além disso, como a função exponencial é não-nula em todo ponto  $x(t)$  intersecciona o eixo  $y$  quando  $t = -\frac{c_1}{c_2}$ .

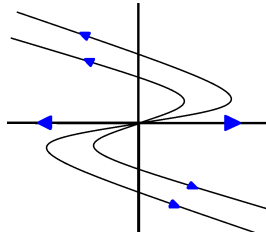
Figura 3.14: Esboço de um nó estável ( $\lambda < 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

- Se  $\lambda > 0$ , estudamos o caso em que  $a + d > 0$ . Então,  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ ;  $x(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $x(t)$  também intersecciona o eixo  $y$  quando  $t = -\frac{c_1}{c_2}$ .

Figura 3.15: Esboço de um nó instável ( $\lambda > 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

### 3. A matriz $A$ possui dois auto-valores complexos conjugados

Neste caso,  $\Delta < 0$  e a matriz  $B$  representa o sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y. \end{cases} \quad (3.15)$$

Diferentemente dos casos até então abordados, no caso em que a matriz  $A$  tem dois auto-valores complexos, não é trivial a obtenção de soluções na forma paramétrica ou na forma implícita a partir do sistema. Dessa forma, recorreremos a escrita do sistema em termos de coordenadas polares, isto é, a partir da mudança de variáveis

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

em que  $r$  é a distância entre  $P = (x, y)$  e a origem  $O = (0, 0)$  e  $\theta$  é o ângulo entre a semirreta de origem  $O$  passando por  $x$  e a reta  $OP$ . Então, com o propósito de escrever

o sistema em termos das derivadas de  $r(t)$  e  $\theta(t)$ , notemos que pela Regra da Cadeia

$$x' = r' \cos \theta - r \sin(\theta)\theta' \quad \text{e} \quad y' = r' \sin \theta + r \cos(\theta)\theta'$$

A fim de isolarmos  $\theta'$  e  $r'$ , recorreremos à identidade  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  e a partir das expressões anteriores para  $x'$  e  $y'$  obtemos:

$$\begin{aligned} y' \cos \theta - x' \sin \theta &= r'(\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta) + r\theta'(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad \text{e} \\ y' \sin \theta + x' \cos \theta &= r'(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r\theta'(\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

De onde concluímos que  $\theta' = \frac{y' \cos \theta - x' \sin \theta}{r}$  e  $r' = x' \cos \theta + y' \sin \theta$ . Uma vez que

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y = r(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) \quad \text{e} \\ y' &= \beta x - \alpha y = r(\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta). \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{y' \cos \theta - x' \sin \theta}{r} = \frac{r \cos \theta (\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta) - r \sin \theta (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta)}{r} \\ &= \beta(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \beta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r' &= x' \cos \theta + y' \sin \theta = r[\cos \theta (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) + \sin \theta (\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta)] \\ &= \alpha r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \alpha r. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções para (3.15) equivalem às soluções em coordenadas polares para o sistema

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ \theta' = \beta \end{cases}$$

que são escritas na forma paramétrica por

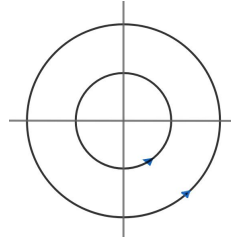
$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0 \end{cases},$$

em que  $(r_0, \theta_0)$  é o ponto em que as órbitas passam em  $t = 0$ . Novamente recorreremos ao estudo dos sinais dos auto-valores de modo a determinar a natureza da singularidade, sabendo que neste caso o polinômio característico é dado por

$$p(\tau) = (\tau - (\alpha - \beta i)) \cdot (\tau + (\alpha - \beta i)) = \tau^2 - (2\alpha)\tau + \beta^2$$

- Se  $\alpha = 0$ , então  $a + d = 0$ . Além disso, uma vez que o raio é constante, as órbitas são círculos no plano  $(x, y)$  e a singularidade é um *centro* como ilustrado abaixo:
- Se  $\alpha < 0$ , então  $a + d < 0$  e  $r(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , isto é, a origem é um ponto

Figura 3.16: Centro ( $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ )

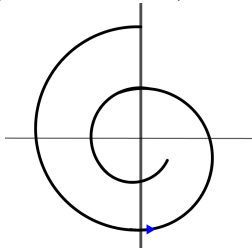


Fonte: Produzido pelo autor.

*ponto espiral atrator.*

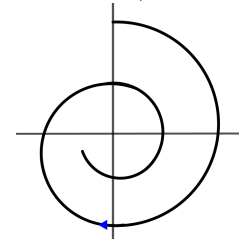
- Por outro lado, se  $\beta > 0$ ,  $\theta \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , o que indica que a espiral se volta para esquerda, isto é, a órbita é uma espiral logarítmica sinistrógira.
- Já se  $\beta < 0$ ,  $\theta \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , o que indica que a espiral se volta para direita e a órbita é uma espiral logarítmica dextrógira.

Figura 3.17: Esboço de ponto não-atrator com espiral logarítmica dextrógira ( $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

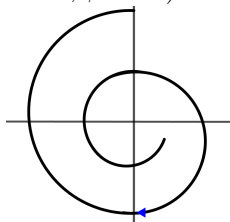
Figura 3.18: Esboço de ponto atrator com espiral logarítmica sinistrógira ( $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

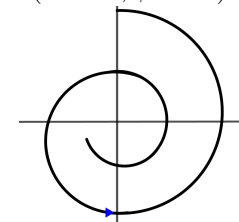
- Se  $\alpha > 0$ , então  $a+d > 0$  e  $r(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , isto é, a órbita se afasta da origem a medida que o tempo cresce. De modo análogo ao caso anterior, obtemos que se  $\beta < 0$ , a espiral logarítmica é dextrógira e se  $\beta > 0$ , a espiral logarítmica é sinistrógira, como ilustrado abaixo.

Figura 3.19: Esboço de ponto não-atrator com espiral logarítmica dextrógira ( $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.20: Esboço de ponto não-atrator com espiral logarítmica sinistrógira ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ )



Fonte: Produzido pelo autor.

No estudo realizado até então, associamos propriedades advindas da escrita da matriz que corresponde ao sistema (3.3) na forma canônica de Jordan à geometria das órbitas, tendo como ponto crucial o estudo dos auto-valores. Podemos, então, sucintamente organizar as informações obtidas nos tópicos anteriores em termos dos coeficientes do sistema autônomo linear, como dado na tabela abaixo, de modo que ao nos deparar com um sistema linear, a partir das constantes  $a, b, c, d$  já saibamos a natureza da singularidade isolada.

Tabela 3.1: Classificação das singularidades

$\Delta$	$ad - bc$	$a + d$	Tipo de singularidade
$> 0$	$< 0$		sela
$> 0$	$> 0$	$< 0$	nó estável
$> 0$	$> 0$	$> 0$	nó instável
$< 0$		$= 0$	centro
$< 0$		$< 0$	ponto espiral estável
$< 0$		$> 0$	ponto espiral instável
$= 0$		$< 0$	nó estável
$= 0$		$> 0$	nó instável

Fonte: [7]

Além disto, vale ressaltar que ao estudarmos o sistema representado pela matriz  $B$ , estávamos na verdade estudando o comportamento em termos de novas variáveis  $u$  e  $v$  e mantivemos as variáveis  $x$  e  $y$  de modo a simplificar a notação. Embora tenhamos estudado o aspecto geométrico em termos de  $(u, v)$ , os gráficos apresentados por [4], garantem que o aspecto geométrico é preservado a menos de pequenas distorções nas figuras.

### 3.3 Sistema Autônomo não-linear

No fim da seção 3.1 obtivemos uma representação para o sistema (3.1) a partir da reescrita das funções  $f$  e  $g$  por meio do polinômio de Taylor, enquanto na seção anterior fizemos um estudo sobre o sistema linear em termos das constantes  $a, b, c, d$ . Consideraremos nessa seção sistemas que embora sejam não lineares podem ser vistos como localmente lineares em torno das singularidades. Dessa forma, considerando  $a = f_x(0, 0)$ ,  $b = f_y(0, 0)$ ,  $c = g_x(0, 0)$ ,  $d = g_y(0, 0)$ , o sistema autônomo se escreve como

$$\begin{cases} x' = ax + by + F(x, y) \\ y' = cx + dy + G(x, y). \end{cases} \quad (3.16)$$

O sistema (3.16) pode ser visto como uma perturbação não linear do sistema (3.3) e vamos supor que a origem ainda é uma singularidade isolada para este sistema. É natural então o questionamento sobre a possibilidade de generalizar o estudo feito na seção anterior

para o caso não linear. Tal generalização tem êxito nos casos que são regidos por uma desigualdade, isto é, o aspecto da órbita em uma região suficientemente próxima da origem é preservado, o que não é garantido nos casos regidos por igualdade, conforme resumimos abaixo.

1. Se a origem for um atrator para o sistema linear, então também será para o sistema não linear.
2. Se a origem for um ponto espiral para o sistema linear, então também o será para o sistema não linear.
3. Se a origem for um ponto de sela para o sistema linear (3.16), então também o será para o sistema não linear.
4. Se a origem for um centro para o sistema linear, então, a origem pode ser um centro ou um ponto espiral para o sistema não linear.
5. Se a origem for um ponto nodal para o sistema linear então a origem pode ser um nó ou um ponto espiral para o sistema não linear.

As afirmações apresentadas anteriormente, cujas demonstrações serão omitidas devido aos propósitos do trabalho são apresentadas em [5], estabelecem relações entre o sistema linear e o sistema não linear, exemplificando a importância do estudo realizado anteriormente e também serão de extrema importância no capítulo seguinte na modelagem devida à Lotka-Volterra, especificamente a Afirmação 4, apresentada anteriormente que também é destaque no exemplo a seguir.

**Exemplo 22.** Considere o sistema

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\y' &= x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Então, usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned}\theta' &= \frac{y' \cos \theta - x' \sin \theta}{r} = \frac{1}{r} \left( x \cos \theta + r^2 y \cos \theta \sin \frac{\pi}{r} + y \sin \theta - r^2 x \sin \theta \sin \frac{\pi}{r} \right) \\&= \frac{1}{r} \left( r \cos^2 \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{\pi}{r} + r \sin^2 \theta - r^3 \cos \theta \sin \theta \sin \frac{\pi}{r} \right) \\&= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 r' = x' \cos \theta + y' \sin \theta &= x \sin \theta + r^2 y \sin \theta \sin \frac{\pi}{r} - y \cos \theta + r^2 x \cos \theta \sin \frac{\pi}{r} \\
 &= r \cos \theta \sin \theta + r^3 \sin^2 \theta \sin \frac{\pi}{r} - r \cos \theta \sin \theta + r^3 \cos^2 \theta \sin \frac{\pi}{r} \\
 &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r^3 \sin \frac{\pi}{r} = r^3 \sin \frac{\pi}{r}
 \end{aligned}$$

Portanto, estudemos o sistema

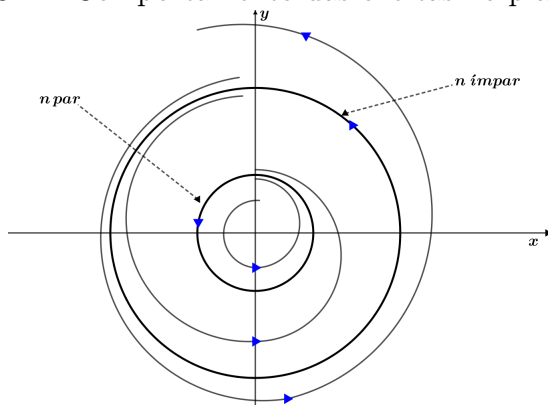
$$\begin{cases} \theta' = 1 \\ r' = r^3 \sin \frac{\pi}{r} \end{cases}. \tag{3.17}$$

Notemos inicialmente que  $r' = 0$  quando  $\sin \frac{\pi}{r} = 0$ , ou seja, para  $r = \frac{1}{n}$  com  $n = 1, 2, \dots$ . Neste caso, os círculos  $r = 1/n$  são órbitas fechadas. Além disso,

- Se  $r > 1$ , então  $r' > 0$  (pois  $\sin t > 0$  para  $t \in (0, \pi)$ ).
- Se  $\frac{1}{2m} < r < \frac{1}{2m-1}$  para  $m \in \mathbb{N}$  então  $r' < 0$  (pois  $\sin t < 0$  para  $t \in (m\pi, (m+1)\pi)$ ).
- Se  $\frac{1}{2m+1} < r < \frac{1}{2m}$  para  $m \in \mathbb{N}$  então  $r' > 0$  (pois  $\sin t > 0$  para  $t \in (2m\pi, 2m+1\pi)$ ).

A análise acerca do sinal de  $r'$  feita acima nos garante que  $r(t)$  é estritamente monotônica nas regiões anulares  $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$ . Dessa forma, as órbitas não são fechadas e sim espirrais, cujo comportamento se dá conforme a monotonicidade de  $r$  obtida anteriormente, estando estritamente relacionado à paridade de  $n$ . Destaca-se, portanto, que a origem ainda é um centro para o sistema não-linear.

Figura 3.21: Comportamento das órbitas no plano  $(x, y)$



Fonte: Produzido pelo autor.

## Capítulo 4

# Modelo Predador-Presa de Volterra

Vimos como aplicação do Capítulo 1 duas modelagens para a dinâmica de uma população motivadas pela necessidade de compreender a forma de crescimento (ou decréscimo) de uma população e os principais fatores que o influenciam a partir de certos fenômenos biológicos. Não obstante disso, o modelo predador-presa de Volterra surge da necessidade de compreender o comportamento de populações que se relacionam por meio de competição, tendo como motivação o estudo feito por Umberto D’Ancona que evidenciou o aumento da aparição de peixes predadores na pesca no mar Adriático após a primeira guerra.

A escolha adequada dos fatores biológicos a serem considerados é crucial para o êxito da modelagem, sendo esse o princípio da diferenciação entre as modelagens Malthusiana e Verhulst apresentadas no capítulo 1. Afim de estudarmos o modelo apresentado por Volterra para responder a indagação proposta por D’Ancona sobre o aumento da população de predadores e os fatores que influenciam tal aumento, consideremos  $x(t)$  e  $y(t)$  as populações de presas e predadores, respectivamente, de acordo com o tempo  $t$ .

Supondo que os recursos das presas são ilimitados e que o único fator inibidor do seu crescimento é a presença dos predadores, temos que se não existissem predadores, a população das presas seria regida pelo crescimento exponencial, isto é, se  $a$  é a constante de crescimento, então  $x'(t) = ax(t)$ . Mas supondo que os predadores se alimentam exclusivamente das presas, na ausência de presas  $y$  teria decréscimo exponencial, isto é,  $y'(t) = -ct$ , com  $c > 0$ .

Notemos ainda que a presença de uma população influencia no crescimento da outra da seguinte forma:

- Em cada encontro com os predadores, a população de presas diminui. Suponhamos que esta redução seja constante igual a  $\beta_1$  indivíduos a cada  $n$  encontros. Uma vez que o número de encontros em um intervalo unitário de tempo é proporcional ao produto do tamanho das populações, se este número for  $\alpha xy$ , a população de presas sofrerá uma redução de  $\frac{\beta_1}{n} \alpha xy = bxy$  indivíduos por unidade de tempo.

- Em cada encontro com as presas, a população de predadores aumenta. Supondo que este aumento seja constante igual a  $\beta_2$  indivíduos a cada  $n$  encontros, a população de presas sofrerá um aumento de  $\frac{\beta_2}{n} \alpha xy = dxy$  indivíduos por unidade de tempo.

Supondo que os meios de subsistência para as presas sejam ilimitados e que os predadores alimentam-se exclusivamente dessas presas, temos que as equações

$$x'(t) = (a - b \cdot y(t)) \cdot x(t) \quad (4.1)$$

e

$$y'(t) = (-c + d \cdot x(t)) \cdot y(t) \quad (4.2)$$

representam a taxa de crescimento das populações de acordo com a lei de crescimento exponencial e a interação entre as duas populações.

### Estabilidade das singularidades

O nosso objetivo inicial é compreender o comportamento local das órbitas em termos das singularidades do sistema

$$\begin{cases} x' = (a - by) \cdot x \\ y' = (-c + dx) \cdot y \end{cases}, \quad (4.3)$$

isto é, estudar a estabilidade das singularidades  $(0, 0)$  e  $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ .

Note que a singularidade  $(0, 0)$  representa a situação que não há predadores e não há presas, o que induz que não há interação e, portanto, a análise desta singularidade não é interessante para a compreensão da dinâmica entre as populações.

No caso da singularidade  $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ , não é possível reduzirmos diretamente nosso estudo ao caso linear, mas ao considerar a reparametrização

$$u = x - \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad v = y - \frac{a}{b} \quad (4.4)$$

tal singularidade se tratará, de fato, de uma singularidade isolada no plano  $(u, v)$  para o sistema não-linear

$$\begin{cases} u' = -b(u + \frac{c}{d})v \\ v' = d(v + \frac{a}{b})u \end{cases}. \quad (4.5)$$

Assim, uma vez que o sistema linear associado é

$$\begin{cases} u' = -\frac{bc}{d}v \\ v' = \frac{da}{b}u \end{cases} \quad (4.6)$$

que equivale ao caso que tínhamos  $a + d = 0$  no sistema (3.3), pela tabela (3.2), a singularidade isolada é um centro para o caso linear. Como destacado na seção 3.3 não



é possível afirmar diretamente se a singularidade é um centro ou ponto espiral para o sistema (4.5). Porém, notemos que das informações do sistema

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{da}{b}\right) \cdot u$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{bc}{d}\right) \cdot v$$

então pela Regra da Cadeia

$$\frac{dv}{du} = -\frac{d^2 \cdot a \cdot u}{b^2 \cdot c \cdot v}.$$

Daí utilizando o método de resolução para EDOs separáveis, obtemos a expressão

$$ad^2u^2 + b^2cv^2 = k^2$$

em que  $C = k^2$  é a constante de integração. Podemos ainda reescrever a expressão na forma

$$\frac{u^2}{\frac{k^2}{d^2 \cdot a}} + \frac{v^2}{\frac{k^2}{b^2 \cdot c}} = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\left(\frac{k}{d \cdot \sqrt{a}}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{k}{b \cdot \sqrt{c}}\right)^2} = 1$$

Portanto, as órbitas são elipses centradas na origem do plano  $uv$ , isto é, no ponto  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ . Dessa forma,  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  é um centro e, em uma primeira aproximação, as órbitas do sistema (4.3) tem aspecto de elipses em torno da singularidade  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

Com o propósito de esboçar tais órbitas usando que  $y' = \frac{dy}{dt}$ ,  $x' = \frac{dx}{dt}$ , reescrevemos o sistema

$$\begin{cases} x' = (a - by) \cdot x \\ y' = (-c + dx) \cdot y \end{cases}$$

como a equação separável

$$\frac{a - by}{y} y' = -\frac{c - dx}{x} \quad (4.7)$$

e, por integração, obtemos

$$y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx} \quad (4.8)$$

em que a constante de integração  $K$  é obtida a partir das populações iniciais  $x_0, y_0$  da forma

$$K = y_0^a x_0^c e^{-by_0} e^{-dx_0}.$$

Na expressão anterior, notemos que a presença da função exponencial que depende de  $x$  no lado direito da igualdade, da função exponencial que depende de  $y$  no lado esquerdo da igualdade e dos termos  $y^a$  e  $x^{-c}$  nos impedem de expressar a solução na forma  $y = f(x)$  em que  $f$  é uma função elementar, diferentemente das soluções obtidas em outras modelagens, sendo um exemplo da observação feita anteriormente sobre equações cuja solução não é dada na forma fechada.

Desse modo, a fim de determinar uma expressão gráfica para a solução desse problema, utilizaremos o método gráfico devido a Volterra, sendo para isso necessário definirmos funções auxiliares  $z(y)$  e  $w(x)$ , que reduzem nosso estudo às funções de uma variável

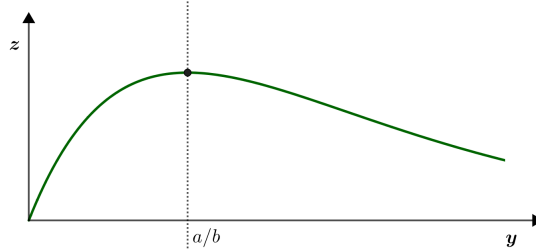
$$z(y) = y^a e^{-by} \tag{4.9}$$

$$w(x) = Kx^{-c} e^{dx} \tag{4.10}$$

Nesse sentido, faremos inicialmente um estudo sobre o comportamento das funções  $z$  e  $w$ , tendo base nos conhecimentos de Cálculo sobre otimização.

1. Notamos que a função  $z$  tem máximo no ponto  $y = \frac{a}{b}$ , isto é,  $z_{max} = (\frac{a}{be})^a$ . Assim, o gráfico de  $z$  no plano  $(y, z)$  pode ser esboçado como na figura abaixo

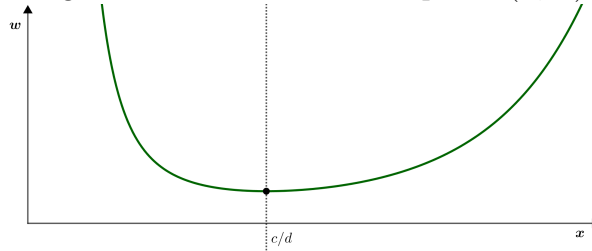
Figura 4.1: Gráfico de  $z$  no plano  $(y, z)$



Fonte: Produzido pelo autor.

2. Já a função  $w$  tem um mínimo no ponto  $x = \frac{c}{d}$  e  $w_{min} = K(\frac{de}{c})^c$ , assim o gráfico de  $w$  é dado por:

Figura 4.2: Gráfico de  $w$  no plano  $(x, w)$



Fonte: Produzido pelo autor.

3. Por outro lado, por (4.8)  $w(x_0) = Kx_0^{-c} e^{-dx_0} = y^a e^{-by_0} = z(y_0)$  então

$$w_{min} \leq w(x_0) = z(y_0) \leq z_{max}$$

sendo uma das desigualdades estrita se a órbita não é a solução de equilíbrio.

Dessa forma, a fim de obter a representação das soluções no plano  $(x, y)$  e como estamos interessados nos casos em que  $z(y) = w(x)$  e obtivemos representações nos planos

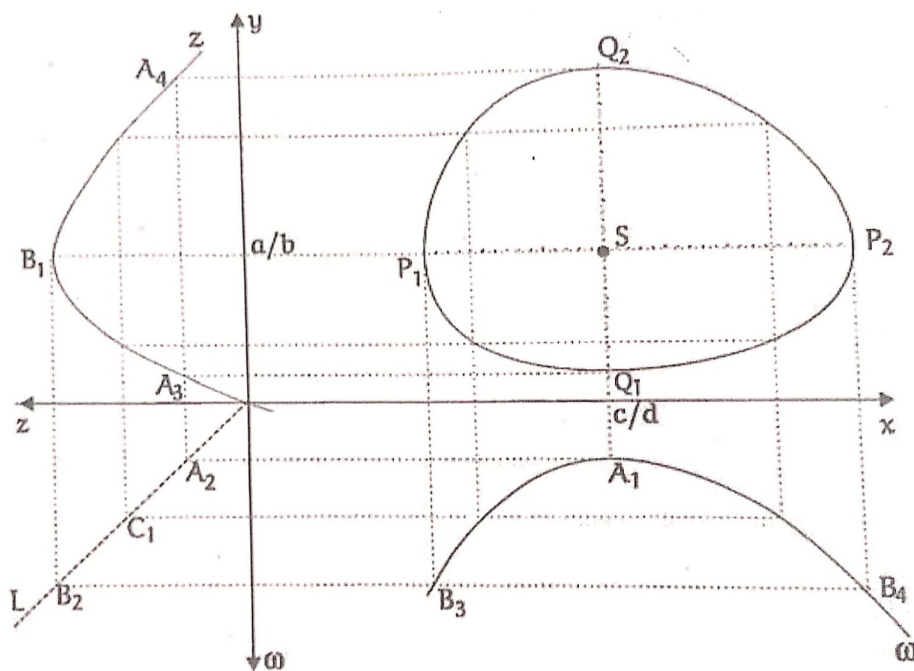
$(y, z)$  e  $(x, w)$ , geometricamente projetamos os pontos da curva  $W = w(x)$  a partir da reta  $L$  dada por  $z = w$  no plano  $(z, w)$  na curva  $Z = z(y)$  e fazendo o processo análogo para a curva  $Z$  obtemos o gráfico da órbita.

Mais formalmente, dado um ponto  $A_1 = (x_1, w_1)$  de  $W$  ao traçar a reta  $w = w_1$ , a interseção desta reta com a reta  $L$  é dada pelo ponto  $A_2 = (w_1, w_1)$  no plano  $(z, w)$ . Dessa forma, ao traçar a reta  $z = w_1$ , obtemos dois pontos na interseção com a curva  $Z$  no plano  $(y, z)$  que são os pontos  $A_3 = (y_1, w_1)$  e  $A_4 = (y_2, w_1)$ . Portanto, a projeção do ponto  $A_1$  no plano  $(x, y)$  a partir da reta  $L$  e da curva  $Z$  é dada pelos pontos  $Q_1 = (x_1, y_1)$  e  $Q_2 = (x_1, y_2)$ . Em particular, se o ponto  $A_1$  é o ponto de mínimo de  $w$ , os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  representam os extremos com relação a coordenada  $y$  da órbita.

De forma análoga, dado um ponto  $B_1 = (y_3, z_1)$  de  $Z$  sua projeção sobre a reta  $L$  é dada pelo ponto  $B_2 = (z_1, z_1)$ , então a interseção da reta  $w = z_1$  e da curva  $W$  são os pontos  $B_3 = (x_2, z_1)$  e  $B_4 = (x_3, z_1)$  e assim obtemos os pontos  $P_1 = (x_2, y_3)$  e  $P_2 = (x_3, y_3)$ . Em particular também, se o ponto  $B_1$  é o ponto de máximo de  $z$ , os pontos  $P_1$  e  $P_2$  representam os extremos com relação a coordenada  $x$  da órbita.

Dessa forma, tal construção gráfica é dada como na figura apresentada por [7].

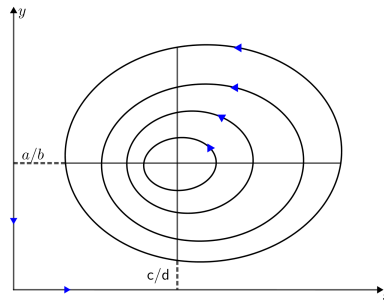
Figura 4.3: Construção gráfica de Volterra



Fonte: [7]

A partir do estudo do comportamento das funções nos quadrantes  $(y, z)$ ,  $(x, w)$ , obtemos o gráfico que induz a oscilação periódica das populações de predadores e de presas.

Figura 4.4: Esboço das órbitas no plano  $(x, y)$



Fonte: Produzido pelo autor.

### Lei do isocronismo das pequenas flutuações

Para pequenas flutuações em torno do ponto  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ , a partir do sistema (4.6), reduzimos nosso estudo às expressões

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{bc}{d}v' \Rightarrow u'' = -acu \text{ e} \\ v'' &= \frac{ad}{b}u' \Rightarrow v'' = -acv \end{aligned}$$

que são equações do tipo Oscilador Harmônico Simples apresentadas no primeiro capítulo, cuja solução é da forma (2.63) em que  $\omega^2 = ac$ . Portanto, da reescrita da solução do sistema (4.6) temos que além das órbitas serem centros em torno de  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ , as soluções são periódicas com período

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \tag{4.11}$$

chamado *lei do isocronismo das pequenas flutuações* que indica que tal periodicidade não depende da interação entre as espécies mas das taxas de crescimento de cada uma.

Podemos ainda relacionar este período aos dados de meia-vida de cada espécie da seguinte forma: Uma vez que supomos que as populações na ausência de interação seguissem regime exponencial, ao escrever a equação do número de indivíduos destas populações em termos das populações iniciais na forma

$$x(t) = x_0e^{at} \text{ e } y(t) = y_0e^{-ct}$$

os tempos de meia-vida  $t_1$  da população de presas e  $t_2$  da população de predadores são dados por

$$t_1 = \frac{\ln 2}{a} \text{ e } t_2 = \frac{\ln 2}{c}$$

o que induz que  $ac = \frac{\ln^2(2)}{t_1 t_2}$  e, portanto,

$$T = \frac{2\pi\sqrt{t_1 t_2}}{\ln 2} \cong 9,06\sqrt{t_1 t_2}$$

Tal identificação de que as oscilações das órbitas tem mesma duração para pequenas amplitudes é de grande relevância uma vez que nos próprios escritos de Malthus o matemático destaca que para a dinâmica de uma população não é possível determinar de forma simples a periodicidade das soluções ainda que tal oscilação seja de fácil percepção.

### Populações médias

Uma vez conhecida a natureza das órbitas em torno da singularidade e sua periodicidade, outro aspecto relevante na interpretação da dinâmica das populações está intimamente relacionado ao conceito de população média. As populações médias  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  dos predadores e das presas em um intervalo de tempo  $T$  são dadas por

$$\alpha(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (4.12)$$

e

$$\beta(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (4.13)$$

A fim de estudar as populações médias no modelo predador-presa, reescrevemos o sistema na forma

$$\frac{d}{dt}(\ln x) = a - by \quad \frac{d}{dt}(\ln y) = -c + dx$$

e obtemos

$$\alpha(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}$$

$$\beta(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d}$$

o que indica que mantidos constantes os coeficientes  $a, b, c, d$  do sistema (4.3), as populações médias permanecem constantes, ou ainda, a *lei de conservação das populações médias* garante a manutenção das espécies considerado o mesmo intervalo de tempo. Tal fato vai diretamente de encontro com os resultados apresentados por D'Ancona, uma vez que em comparação aos intervalo de tempo precedente à guerra, a população média de peixes predadores havia aumentado.

Nesse sentido, a resposta apresentada por Volterra para o questionamento encontra-se associada à *perturbação das populações médias*, que induz que se os coeficientes da interação entre as populações  $b, d$  são mantidos, a destruição uniforme de predadores e presas beneficiaria as presas, uma vez que a diminuição de predadores implica no aumento da população de presas. Especificamente no problema proposto por D'Ancona, a pesca representa tal perturbação, responsável por manter a população de presas em vantagem quantitativa em relação à população de predadores.

Portanto, a solução apresentada por Volterra indica que na ausência de perturbação, ou ainda, devido a diminuição da pesca no período da guerra, as populações médias

tendem a seguir a lei de conservação das populações médias, que em comparação aos dados pré-guerra representam um aumento considerável no número de peixes predadores uma vez que a população média dos predadores crescerá mais rapidamente que a população média das presas.

## Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo* - 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [2] BOYCE, W.E; DIPRIMA, R.C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley & Sons, New York, 1997.
- [3] CASTRO, D.; JULIANO, I. J.; GÓMEZ, M. C. *Oscilador Harmônico Amortecido*. 2015. Disponível em: <[www.ime.unicamp.br/~rmiranda/wordpress/wp-content/uploads/2015/12/Oscilador.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/wordpress/wp-content/uploads/2015/12/Oscilador.pdf)>. Acesso em: 25 maio 2019.
- [4] CESARI, L. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Nova Iorque: McGraw-Hill Book Company, 1955.
- [5] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1959.
- [6] FRANCISCO, J. A. S.; LIMA, A. A.; ARÇARI, D. P. *Datação por Carbono-14*. Disponível em: <[http://portal.unisepe.com.br/unifia/wp-content/uploads/sites/10001/2018/06/1gestao\\_foco\\_Carbono14.pdf](http://portal.unisepe.com.br/unifia/wp-content/uploads/sites/10001/2018/06/1gestao_foco_Carbono14.pdf)>. Acesso em: 15 nov. 2019.
- [7] FIGUEIREDO, D. F.; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Ordinárias Aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Coleção matemática universitária).
- [8] LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Coleção matemática universitária).
- [9] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Coleção Projeto Euclides).
- [10] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L.. *Álgebra Linear*: 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- [11] PAULEK, I. *Dinâmica Populacional e o Modelo Predador-Presa*. 2013. 71f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Florianópolis, 2013.
- [12] SALISBURY, A. *Mathematical models in population dynamics*. 2011. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/141995076.pdf>>. Acesso: 20 de nov. 2019.