Universidade Federal Rural De Pernambuco - UFRPE
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA- CEGEN
Departamento de matemática

Licenciatura em Matemática

Espaços de Chu: Um Modelo Para Logica Linear Multiplicativa

JHONATA AVELAR DOS SANTOS

Trabalho de Graduação

RECIFE - PE
Data de aprovação 29/07/2021

Universidade Federal Rural De Pernambuco - UFRPE
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA- CEGEN
Departamento de matemática

JHONATA AVELAR DOS SANTOS

Espaços de Chu: Um Modelo Para Logica Linear Multiplicativa

Trabalho apresentado ao Programa de Licenciatura em Matemática do Departamento de matemática da Universidade Federal Rural De Pernambuco - UFRPE como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: *DR. THIAGO DIAS*

RECIFE - PE
Data de aprovação 29/07/2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237e SANTOS, JHONATA
Espaços de Chu: Um Modelo Para Logica Linear Multiplicativa / JHONATA SANTOS. - 2021.
37 f. : il.

Orientador: JHONATA AVELAR DOS SANTOS.
Coorientador: Dr Thiago Dias.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Categorias. 2. Espaços de Chu. 3. Logica linear multiplicativa. I. SANTOS, JHONATA AVELAR DOS, orient. II. Dias, Dr Thiago, coorient. III. Título

CDD 510

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA MONOGRAFIA

1. IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO

Nome: Jhonata Avelar dos Santos

N.º de matrícula: 200693658

2. TÍTULO DA MONOGRAFIA

Espaços de Chu: um modelo para lógica linear multiplicativa

3. ORIENTAÇÃO

Orientador: Prof.º Doutor Thiago Dias Oliveira Silva

4. BANCA EXAMINADORA

1º Prof.º Doutor Thiago Dias Oliveira Silva (Presidente)

2º Prof.º Doutor Wilson Rodrigues de Oliveira

3º Prof.º Doutor Maigan Stefanne da Silva Alcântara

4. PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO DA MONOGRAFIA

Comissão Examinadora	Domínio do Assunto	Apresentação e redação	Defesa	Média por examinador(a)
Prof.º Doutor Thiago Dias Oliveira Silva				
Prof.º Doutor Wilson Rodrigues de Oliveira				
Prof.º Doutor Maigan Stefanne d Silva Alcântara				
Média Final				

5. MÉDIA FINAL ____________(____)

Recife, 29 de julho de 2021.

______________________ ______________________ ______________________

Presidente 2º Membro 3º Membro

<Dedico este trabalho a todos com historias semelhantes a minha mas que não tiveram a oportunidade de conquistar seus sonhos.>

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha mãe e meu pai, Elibiane e Joselito, que me deram suporte para que pudesse chegar até o fim do curso.

Ao meu orientador Thiago Dias, que me deu a oportunidade e todo apoio que pode, me ajudou o quanto pode me guiando na construção deste trabalho.

As moças, Tatiana, Karolyne e Gabriela, gostaria de agradecer por toda paciência(muita paciência) e cumplicidade durante todo o tempo que passamos juntos, para mais além gostaria de agradecer todos os momentos, festas e historias engraçadas que tivemos. Essas cidadãs, são pessoas que me ouviram quando eu precisei(e quando eu não precisei), mulheres que me ensinaram muito mais coisas do que elas podem imaginar, elas são para mim neste momento o verdadeiro significado de amizade.

Aos Membros do Grupo do Tancredo, Laryssa, Hugo, Lucas, Mariana e Gabriel, tenho que desejar pra eles a maior felicidade do mundo, pois é isso que eles me propiciam a cada momento que eu sei que eles são meus amigos, Gostaria de agradecer por tornar os momentos na faculdade e na volta pra casa mais leves, e por todas as conversas.

Não poderia esquecer de alguns professores que foram marcantes e fundamentais na minha vida acadêmica, do Departamento de Letras Mari Noeli Kiehl, do Departamento de Educação Anna Paula, Mônica Maria Lins e por ultimo mas não menos importantes os professores do Departamento de Matemática Clessius Silva, Rodrigo Clemente, Barbara costa, Fabiano Barbosa, Gilson Mamede, Thiago Tanaka, Renato Teixeira.

Gostaria de agradecer a todos aqueles que passaram por minha vida e me trouxeram até aqui, e gostaria de me descupar com aqueles que não foram citados mas que igualmente mereciam.

Só não chora, quem não tem coração

—DIAS, T.

Resumo

Neste trabalho, discutiremos sobre as propriedades de algumas estruturas, sendo elas: Teoria das categorias; espaços de Chu; Logica Linear Multiplicativa(MLL Sigla em inglês), mais especificamente iremos percorrer brevemente as propriedades sobre essas estruturas, como definições e algumas construções derivadas, afim de exibir a Categoria dos espaços de Chu e todas as suas operações e partindo desses conhecimento modelar a MLL utilizando alguns sistemas de axiomas apropriados.

Palavras-chave: Categorias, Espaços de Chu, Logica linear multiplicativa.

Abstract

In this work, we will discuss about the properties of some structures, being them: Category theory; Chu spaces; Multiplicative Linear Logic (MLL), more specifically we will briefly go through the properties about these structures, such as definitions and some derived constructions, in order to build the Category of Chu spaces and all its operations and from this knowledge model MLL using some appropriate axiom systems.

Keywords: Categories, Chu spaces, Multiplicative linear logic.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Este trabalho irá relacionar 3 campos da matemática: Espaços de Chu e Logica, que serão apresentados.

Po-Hsiang Chu, foi aluno de um grande matemático, Michael Barr, em seu livro que trata sobre algumas estruturas algébricas Barr publicou no apêndice a tese do seu aluno Chu, nesta porção do livro, forneceu uma construção. Esta construção sobre uma categoria simétrica monoidal fechada originando o que chamamos de espaços de Chu . Estes objetos construídos são compostos por uma tripla e definidos sobre um conjunto. Outro modo de representa-los é uma matriz retangular. Esta "simplicidade" nos fornece uma representação de estruturas matemáticas de maneira bem definida e pratica.

A logica linear trás consigo a solução de alguns problemas que não poderiam ser modelados pela logica proposicional usual. Inicialmente proposta pelo matemático francês Jean Ives-Girard, em seu artigo fala sobre o fato da logica não ser uma logica alternativa e sim uma extensão da Logica proposicional conhecida, ela traz novos conectivos e consegue modelar problemas da física quântica.

Muito embora estes temas pareçam distantes ou até disjuntos, suas construções e modo como são definidos possibilitam relaciona-los de maneira que podemos construir modelos para logica linear, partindo de espaços de Chu, ou ainda, poderia se construir uma categoria dos espaços de Chu. Agora com alguns exemplos fica mais fácil acreditar na relação desses temas, tendo em vista isso, este trabalho busca caminhar entre estas relações. No capitulo **??** introduziremos Teoria de categorias, onde definiremos o que é uma categoria, algumas substruturas, operações e propriedades. No capitulo 2, serão percorrido as definições de espaços de Chu e de algumas estruturas que poderão ser usados em modelos no capítulos seguintes. Nos Capítulos, 3 e 4 pretendemos apresentar a logica linear e consequentemente a logica linear multiplicativa, para então, modela las através da construção da categoria dos espaços de Chu, e de alguns sistemas de axiomas devidamente adequados.

CAPÍTULO 2

Espaços de Chu

Como podemos encontrar conceitos universais fazendo uso de alguma ferramentas matemática, espaços de Chu fazem justamente isso. Estes espaços tem o potencial de modelar qualquer estrutura matemática transformável, alguns poucos exemplos são: espaços de Hilbert e espaços Métricos.

Passando a representar como matrizes retangulares estes e outros objetos que serão definidos a partir das suas propriedades. Construiremos os espaços de Chu e operações desses espaços que serão usadas na lógica linear. Todos assuntos vistos neste capitulo podem ser encontrados nas referencias [3] e [5]

2.1 Construção dos espaços de Chu

Definição 2.1. Um espaço de Chu $\mathbb{A} = (A, r, X)$ sobre um conjunto K, consiste em um conjunto A de pontos, um conjunto X de estados, e uma função $r : A \times X \to K$ que constitui uma matriz.

Sabendo então que espaços de Chu são representáveis como matrizes retangulares é interessante observar de um modo mais eficaz suas linhas e colunas. Para tanto, definimos

$$\begin{gathered} \hat{r} : A \to (X \to K) \\ \hat{r}(a)(x) = r(a,x) \end{gathered}$$

,

e a função $r(a) : X \to K$ será chamada de a linha a de A. Por outro lado definimos

$$\begin{gathered} \check{r} : X \to (A \to K) \\ \check{r}(x)(a) = r(a,x) \end{gathered}$$

,

e chamamos a função $\check{r}(x) : A \to K$ como a coluna x de A.

Exemplo 2.2. $A = X = K = \{0,1\}$ e a função r sera a métrica do espaço zero e um, assim o espaço de Chu ficara definido como, e a matriz gerada será: $\mathbb{A} = (\{0,1\}, r, \{0,1\})$.

r	0	1
0	0	1
1	1	0

Exemplo 2.3. Definiremos os seguintes conjuntos $A = \{0,1,2,3\}$, $X = \{0.3\}$, $K = \{0,1\}$. A função r sera definida da seguinte forma:

$$r : A \times X \to K$$

$$r(a,x) \mapsto \{ \ 1 \ \ se \ \ a \neq x \ \ \ e \ \ 0 \ \ se \ \ a = x$$

assim o espaço de Chu ficara definido como $\mathbb{B} = (A, r, X)$, e a matriz gerada será:

r	0	3
0	0	1
1	1	1
2	1	1
3	1	0

Apresentaremos algumas classes de espaços de Chu, que são definidos a partir de interações com a função r

- Quando a função $\hat{r}$ é injetora, isto é, todas suas linhas são distintas será dito que o espaço de Chu é **separável**.
- Quando a função $\check{r}$ é injetora, isto é, todas suas colunas são distintas será dito que o espaço de Chu é **extensional**.
- Quando um espaço de Chu é separável e extensional esse sera chamado de **biextensional**

Espelhando-se agora nas restrições de domínio e contradomínio que podem ser feitas para tornar funções que originalmente não eram em injetoras e sobrejetoras, em espaços de Chu definiremos uma construção semelhante chamada de **colapso biextensional**

Definição 2.4. Seja $\mathbb{A} = (A, r, X)$ seu **colapso biextensional** é o espaço de Chu $(\hat{r}(A), r', \check{r}(X))$ onde $r'(\hat{r}(a), \check{r}(x)) = r(a, x)$.

O exemplo 32 do tópico de espaços de chu é biextensional, por outro lado, o exemplo 33 é extensional mas não separável.

Sendo assim o colapso biextensional do exemplo 1 é ele mesmo, mas o colapso biextensional do exemplo dois vai ser o seguinte:

$\hat{r}(A) = \{01, 11, 10\}$, $\check{r}(X) = \{0111, 1110\}$, e a função r' sera a descrita como na definição, sua matriz é:

r	0111	1110
01	0	1
11	1	1
10	1	0

2.2 Operações em Chu

Nesta seção apresentaremos as operações de espaços de Chu que usaremos nos processos da Logica Linear.

Definição 2.5. Definimos o **dual** $\mathbb{A}^{\perp}$ de $\mathbb{A} = (A, r, X)$ como sendo $\mathbb{A}^{\perp} = (X, \check{r}, A)$, onde $\check{r}(x, a) = r(a, x)$.

Exemplo 2.6. Tome o seguinte espaço de Chu $\mathbb{B} = (A, r, X)$ onde
$A = \{0, 1, 2, 3\}, \; x = \{0, 3\}, \; K = \{0, 1\}$

r	0	3
0	0	1
1	1	1
2	1	1
3	1	0

Seu dual será $\mathbb{B}^{\perp} = (X, \check{r}, A)$ e sua matriz

r	0	1	2	3
0	0	1	1	1
3	1	1	1	0

Definição 2.7. Definiremos **Tensor** da seguinte forma, o produto tensorial entre $\mathbb{A} = (A, r, X)$ e $\mathbb{B} = (B, s, Y)$ como sendo o espaço de Chu da forma $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = (A \times B, t, \mathfrak{F})$ onde:

- $\mathfrak{F} \subset Y^A \times X^B$ é o conjunto de todos os pares (f, g) de funções $f : A \to Y \quad e \quad g : B \to X$ tais que $s(b, f(a)) = r(a, (g(b))$, para todo $a \in A, b \in B$

- $t : (A \times B) \times \mathfrak{F} \to K$ que é dado por $t((a, b), (f, g)) = s(b, f(a)) = r(a, g(b))$.

Exemplo 2.8. Para a construção deste exemplo é preciso de dois espaços de Chu, neste caso serão:

Espaço 1 : Espaço 2

$A = (\{0, 1\}, r, \{0, 1\}) \quad B = (\{0, 1\}, s, \{0, 1\})$

r	0	1
0	1	0
1	0	1

s	0	1
0	0	1
1	1	0

Uma vez definidos os espaços, observemos todos os possíveis pares (f, g) e a partir disso façamos a matriz dos espaço $A \otimes B$

1

	$s(b, f_1(a))$	$r(a, g_1(b))$
(0,0)	1	0
(0,1)	0	0
(1,0)	1	1
(1,1)	0	1

2

	$s(b, f_1(a))$	$r(a, g_2(b))$
(0,0)	1	1
(0,1)	0	1
(1,0)	1	0
(1,1)	0	0

3

	$s(b, f_1(a))$	$r(a, g_3(b))$
(0,0)	1	0
(0,1)	0	1
(1,0)	1	0
(1,1)	0	1

4

	$s(b, f_1(a))$	$r(a, g_4(b))$
(0,0)	1	1
(0,1)	0	0
(1,0)	1	1
(1,1)	0	0

5

	$s(b, f_2(a))$	$r(a, g_1(b))$
(0,0)	0	0
(0,1)	1	0
(1,0)	0	1
(1,1)	1	1

6

	$s(b, f_2(a))$	$r(a, g_2(b))$
(0,0)	0	1
(0,1)	1	1
(1,0)	0	0
(1,1)	1	0

7

	$s(b, f_2(a))$	$r(a, g_3(b))$
(0,0)	0	0
(0,1)	1	1
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

8

	$s(b, f_2(a))$	$r(a, g_4(b))$
(0,0)	0	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	1
(1,1)	1	0

9

	$s(b, f_3(a))$	$r(a, g_1(b))$
(0,0)	1	0
(0,1)	0	0
(1,0)	1	1
(1,1)	0	1

10

	$s(b, f_3(a))$	$r(a, g_1(b))$
(0,0)	1	1
(0,1)	0	1
(1,0)	1	0
(1,1)	0	0

11

	$s(b, f_3(a))$	$r(a, g_3(b))$
(0,0)	1	0
(0,1)	0	1
(1,0)	1	0
(1,1)	0	1

12

	$s(b, f_3(a))$	$r(a, g_4(b))$
(0,0)	1	1
(0,1)	0	0
(1,0)	1	1
(1,1)	0	0

13

	$s(b,f_4(a))$	$r(a,g_1(b))$
(0,0)	0	0
(0,1)	1	0
(1,0)	0	1
(1,1)	1	1

14

	$s(b,f_4(a))$	$r(a,g_2(b))$
(0,0)	0	1
(0,1)	1	1
(1,0)	0	0
(1,1)	1	0

15

	$s(b,f_4(a))$	$r(a,g_3(b))$
(0,0)	0	0
(0,1)	1	1
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

16

	$s(b,f_4(a))$	$r(a,g_4(b))$
(0,0)	0	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	1
(1,1)	1	0

Uma vez que foi visto todos pares (f,g) que satisfazem a condição do produto tensorial, temos que o produto tensorial entre A e B será

$$A \otimes B = (\{O,1\} \times \{0,1\}, t, \{O,1\} \times \{0,1\})$$

t	(f_1,g_4)	(f_2,g_3)	(f_3,g_4)	$(f_4.g_3)$
(0,0)	1	0	1	0
(0,1)	0	1	0	1
(1,0)	1	0	1	0
(1,1)	0	1	0	1

Definição 2.9. A operação **Soma** é representada pelo conectivo $\oplus$ com unidade 0.Para sua formalização tome $\mathbb{A} = (A,r,X)$ e $\mathbb{B} = (B,s,Y)$ então $A \oplus B = (A+B,t,X \times Y)$.

- $A+B$ é a união disjunta de A e B
- A função t que relaciona os objetos e os estados é dada da seguinte forma $t(c,(x,y)) = r(c,x)$ se $c \in A$ e $t(c,(x,y)) = r(c,y)$ se $c \in B$
- 0 como sendo o espaço vazio discreto, que não possui pontos e somente um estado.

Exemplo 2.10. Tome os espaços de Chu $\mathbb{A} = (A,s,X)$ e $\mathbb{B} = (B,r,Y)$ Sobre $K = \{0,1,2,3,4\}$, onde $A = B = Y = \{0,1\}$ e $X = \{0,1,2\}$ e com $s(a,x) = a+x$ e $r(b,y) = b+y$. Aplicando a definição temos que $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B} = (A+B,t,A \times B)$

- $A+B = \{0_A, 1_A, 0_B, 1_B\}$
- $X \times Y = \{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2)\}$
- As imagens de t são

$(c,(a,b))$	$t(c,(a,b)$	$(c,(a,b))$	$t(c,(a,b)$
$(0_A,(0,0))$	0	$(1_A,(0,0))$	0
$(0_A,(0,1))$	0	$(1_A,(0,1))$	0
$(0_A,(0.2))$	0	$(1_A,(0,2))$	0
$(0_A,(1,0))$	1	$(1_A,(1,0))$	2
$(0_A,(1,1))$	1	$(1_A,(1,1))$	2
$(0_A,(1,2))$	1	$(1_A,(1,2))$	2
$(0_B,(0,0))$	0	$(1_B,(0,0))$	1
$(0_B,(0,1))$	1	$(1_B,(0,1))$	2
$(0_B,(0.2))$	2	$(1_B,(0,2))$	3
$(0_B,(1,0))$	0	$(1_B,(1,0))$	1
$(0_B,(1,1))$	1	$(1_B,(1,1))$	2
$(0_B,(1,2))$	2	$(1_B,(1,2))$	3

conhecendo todos os elementos que compõem o espaço $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ temos então que

$\mathbb{A} \oplus \mathbb{B} =$

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
0_A	0	0	0	1	1	1
1_A	1	1	1	2	2	2
0_B	0	1	2	0	1	2
1_B	1	2	3	1	2	3

CAPÍTULO 3

Lógica

A logica é uma das áreas da matemática que tem por objetivo estudar sistemas de dedução. Neste capitulo definiremos conceitos que embasam a lógica linear e um dos modos mais comum de apresentar suas regras: o calculo de sequentes. Definiremos todo o conjunto de regras do sistema dedutivo da lógica linear.

3.1 Logica proposicional

Como o nome já sugere a logica proposicional tem como objetos de estudo proposições que são afirmações podem possuir apenas dois valores lógicos, verdadeiro ou falso, sendo estes valores sendo relacionados através de alguns conectivos.

Exemplo 3.1. Sendo alguns exemplos de proposição:

1. 2+2=4, verdadeiro
2. todos os carros do mundo são azuis, falso

3.1.1 Conectivos

Os conectivos são parte fundamental da linguagem logica e é por meio destes conectivos que iremos relacionar proposições, que nada mais são que afirmações que queremos estudar seus valores lógico.

1.Implicação Proposicional: Este conectivo é representado pelo simbolo " $\Rightarrow$ " que tem como sentido *"se... então..."*, sendo assim a expressão "$P \Rightarrow Q$" pode ser reescrita como *"Se P então Q"*. $P \Rightarrow Q$ tem valor logico falso, quando a proposição P é verdadeira e Q é falsa.

2.Conjunção: Este conectivo é representado pelo simbolo " $\wedge$ " que tem como sentido "Tanto... Quanto..."ou "e", sendo assim a expressão "$P \wedge Q$" pode ser reescrita como *P e Q*. $P \wedge Q$ tem valor logico verdadeiro, quando ambas as proposições P e Q são verdadeiras.

3.Disjunção: Este conectivo é representado pelo simbolo " $\vee$ " que tem como sentido "ou", logo a expressão "$P \vee Q$" tem sentido *P ou Q*. A expressão "$P \vee Q$" tem valor logico verdadeiro, quando pelo menos uma das proposições P e Q são verdadeiras.

4.Negação: Este conectivo tem como função inverter o sentido logico de uma determinada proposição "A" e pode ser representada pelos símbolos " $\sim$ " e "$\neg$", logo se "A" é verdadeira então " $\sim A$" é falsa.

3.2 Lógica linear

Sendo o proposito deste trabalho definir as estruturas da lógica linear se embasando nos conceitos de espaços de Chu, faz sentido que antes de qualquer avanço significativo deve-se conhecer bem do que se trata a lógica linear, sendo assim, neste capitulo pretendemos além de apresentar a construção da lógica linear iremos, quando possível, construir um paralelo com a logica proposicional. como referencia usaremos [4]

3.2.1 Conectivos

Na lógica proposicional trabalhamos com verdades consolidadas, o que matematicamente falando é muito útil, pois observe a seguinte expressão

$$\frac{A,\ \ A\to B,\ \ A\to C}{B\wedge C}$$

Note que a proposição A continua valendo, independente de ter sido usada em para provar as implicações lógicas $A \to B$ e $A \to C$, contudo no mundo real esta expressão não se comporta de maneira, pois suponha que você entra em uma lanchonete e deseja compra um sanduíche B e um refrigerante C, ambos custando 3 reais, sabendo que a proposição $A =$você possui três reais é verdadeira a seguinte expressão não se comporta de maneira adequada

$$\frac{A,\ \ A\to B,\ \ A\to C}{B\wedge C}$$

pois só é verdade que você possui 2 reais, logo podendo comprar apenas um dos dois itens, logo para modelar este cenário e outros cenários iremos introduzir os conectivos, para este são as exponenciais que são definidas pelos os símbolos ”!” e ”?” , que tem por missão reiterar proposições um número qualquer de vezes

Definição 3.2 (Exponenciais).
! ou ***Of-course***: Pode reiterar uma proposição qualquer e tem por ideia gerar "oferta infinita"desta proposição, além disto este conectivo é útil quando queremos contrair ou enfraquecer um sequencia logica.

? ou ***Why not***:Assim como o ”!” o *"why not"* reitera uma proposição, contudo seu sentido é diferente, algo como "Enquanto houver demanda", assim como o "of-course"este conectivo também funciona para contrair ou enfraquecer um sequencia logica.

usando o simbolo $\multimap$ (*implicação linear*), podemos reescrever a segunda equação em termos da logica linear da seguinte forma.

$$\frac{!A,\ \ A\multimap B,\ \ A\multimap C}{B\wedge C}$$

Note que a diferença da implicação linear para a implicação proposicional é simplesmente o fato de "usarmos"a proposição a esquerda da implicação.

Negação

Na lógica linear a negação tem um papel muito importante, por ser o único conectivo com esta função. Mas esta funciona de forma diferente da logica proposicional

$(\cdot)^{\perp}$ ou ***nill***: Este conectivo traz uma caráter de "negação", contudo ele funciona como a transposição da álgebra linear, trazendo assim uma característica de dualidade, logo transformando por exemplo pergunta em resposta e demanda em oferta.

Conjunção e Disjunção

Assim como na logica proposicional, na lógica linear na logica linear temos conectivos com intuito de mostrar que duas ações acontecem simultaneamente, contudo no caso da lógica linear esses são divididos em dois conectivos, sendo eles:

$\bigotimes$ ou ***Times***:Neste caso existe a dependência entre duas proposições e ambas irão ocorrer, por exemplo se possuímos dois reais podemos comprar um lanche de um real e um refrigerante de um real.

$$A \multimap B \otimes C$$

& ou ***with***: Assim como no caso anterior existe a dependência entre duas proposições, contudo apenas uma ira ocorrer e poderemos escolher qual das duas gostaríamos que ocorresse, por exemplo com um real podemos comprar um lanche e como um real podemos comprar um refrigerante, mas nunca os dois, logo teremos algo como.

$$A \multimap B \& C$$

É natural pensar que se assim como na logica proposicional temos uma disjunção também teremos na logica linear, e assim como na logica linear exitem dois conectivos para representar conjunção, teremos dois conectivos que são duais duas conjunções da logica linear, sendo eles:

$\oplus$ ou **Plus** sendo este o dual do &, sendo assim ele também trás a uma relação entre duas proposições possíveis, contudo você não decide qual das duas proposições ira ocorrer, um bom exemplo seriam maquinas de brindes, nas quais você coloca uma moeda de um real e recebe um premio no valor de um real dentre os possíveis que você não escolheu.

$\parr$ ou **par** este conectivo é o dua do plus, e seu significado é um pouco complexo, sendo assim ele tem como é mais fácil interpretar $A \parr B$ como sendo $A^{\perp} \multimap B$

3.2.2 Calculo sequente

Uma vez que definimos os conectivos que serão usados devemos focar nossa atenção para outro fator muito importante, assim como Gentzen fez em 1934 vamos introduzir o calculo sequente como um ferramenta nos estudos das leis da logicas . Este calculo faz uso das sequentes isto é expressões do tipo $\Gamma \vdash \Delta$ onde $\Gamma = (A_1, \ldots, A_n)$ e $\Delta = (B_1, \ldots, B_m)$ são sequências finitas de formulas. Onde $\Gamma \vdash \Delta$

$$A_1 \text{ e } A_2 \ldots \text{ e } A_n \text{ implica } B_1 \text{ ou } B_2 \ldots \text{ ou } B_m$$

.

Observe que como tratamos de logica linear devemos olha com cuidado para esta expressão, tendo em vista que estes conceitos foram construídos para o estudo da logica proposicional, logo iremos modificar algumas regras, remover outras e adicionar algumas novas, com intuito de modelar um calculo sequente linear. Mais Informações ser vistas na referencia [4]

Linguagem logica

$$\begin{array}{cc}
1^{\perp} := \perp & \perp^{\perp} = 1 \\
0^{\perp} := \top & \top^{\perp} = 0 \\
(p)^{\perp} := p^{\perp} & (p^{\perp})^{\perp} = p \\
(A \otimes B)^{\perp} := (A^{\perp} \parr B^{\perp}) & (A \parr B)^{\perp} := (A \perp \otimes B^{\perp}) \\
(A \& B)^{\perp} := (A^{\perp} \oplus B^{\perp}) & (A \oplus B)^{\perp} := (A^{\perp} \& B^{\perp}) \\
(!A)^{\perp} := (?B^{\perp}) & (?B)^{\perp} := (!A)^{\perp} \\
(\forall x A)^{\perp} = \exists x A^{\perp} & (\exists x A)^{\perp} := (\forall x A^{\perp})
\end{array}$$

$$A \multimap B := A^{\perp} \parr B$$

Agora usando todos os conectivos que conhecemos e o calculo sequente iremos definir as regras logicas, estruturais que modelam o que chamamos de logica linear ou LL.

Antes de definirmos as regras, saiba que todas serão colocados ao lado direito da dedução, ou seja $\vdash \Delta$, pois qualquer sequente da forma $\Gamma \vdash \Delta$ de maneira geral pode ser copiado da forma $\vdash \Gamma^{\perp}, \Delta$, uma vez que este fato é conhecido iremos apresentar o conceito de identidade e regra do corte.

Identidade\ Negação

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\textit{(Identidade)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Delta, \Gamma}\textit{(Cut)}$$

Quando o assunto são regras estruturais, conhecemos 3 delas advindas da logica proposicional, que são elas *weakining, contratcion e enchange*. Como estas regras no caso da MLL lidam com as implicações lineares devemos tomar cuidado, pois nos casos de weakining e contratcion podemos cair em alguns erros lógicos, considerando o conceito de "gasto"das proposições. Dito isto a única regra estrutural que teremos é *enchange*, pois esta regra não altera o sentido logico das expressões lineares, tendo em vista que se trata de um permutação dos sequentes.

Estruturais

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma'}\textit{(Enchange, } \Gamma' \textit{ é uma permutação de } \Gamma)$$

Por fim, definiremos as regras logicas, estas são as que normalmente estão presentes nas demonstrações e na logica proposicional alguns de seus representantes são, modos ponens, modos tolens e mais alguns outros.

Regras Lógicas

$$\frac{}{\vdash 1}\textit{(um)} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \top}\textit{(falso)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}\textit{(Produto)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\textit{(par)}$$

$$\frac{}{\vdash, \top}\textit{(Verdade)} \qquad \textit{(Não existe regra para o "0")}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \vdash \ \ \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}\textit{(with)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma A \otimes B} \quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma A \otimes B}\textit{(Soma esquerda e direita)}$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\textit{(of course)} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\textit{(weakening)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\textit{(dereliction)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\textit{(contracion)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma \forall x A}\textit{(para todo: x não é livre em }\Gamma) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x A}\textit{(there is)}$$

Sendo assim temos um sistema logico bem definido e bem estruturado, onde podemos produzir demonstrações com rigor matemático adequado e a devida clareza.

Definição 3.3. (**Logica Linear Multiplicativa**) Utilizando o cálculo de sequentes, agora definiremos as regras para MLL, que é o fragmento da lógica linear contendo apenas os conectivos multiplicativos.

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\textit{(Identidade)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Delta, \Gamma}\textit{(Cut)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}\otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\parr$$

CAPÍTULO 4

Relações construidas

Usando a referencia [5], iremos interligar todos os conceitos construídos até este momento, para que então possamos justificar o titulo deste trabalho modelando a logica linear, multiplicativa usando a categoria dos espaços de Chu.

definidas certas operações da logica linear, sendo assim, definiremos as operações $\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$, $\mathbb{A}\&\mathbb{B}$ e $\mathbb{A} \parr \mathbb{B}$ sobre os espaços de Chu.

Definição 4.1. Para definição das operações $\mathbb{A}\&\mathbb{B}$ e $\mathbb{A} \parr \mathbb{B}$ utilizaremos os duais das operações já conhecidas, sendo assim

- **With**: $(\mathbb{A}\&\mathbb{B}) = (\mathbb{A}^{\perp} \oplus \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$, onde sua unidade é $\top$.
- **Par**:$(\mathbb{A} \parr \mathbb{B}) = (\mathbb{A}^{\perp} \otimes \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$, onde sua unidade é $\perp$.

Definição 4.2. Para definição da **implicação linear**, utilizaremos uma relação equivalente partindo da operação **Par**, sendo da forma:

- **Implicação linear**: $\mathbb{A} \multimap \mathbb{B} = \mathbb{A}^{\perp} \parr \mathbb{B}$

4.1 Modelando a Logica Linear Multiplicativa

Querendo modelar a MLL utilizando a categoria Chu_k precisamos de uma estrutura axiomática, semântica e uma linguagem apropriada. Observe que já conseguimos definir sobre os espaços de Chu todos os conectivos da logica linear, o que garante uma linguagem apropriada. Mas mesmo tendo uma linguagem apropriada para trabalhar com a logica linear é sua axiomatização que sera dada pelo sistema $S1$ descrito abaixo

4.1.1 Sistema S_1

Sistema S_1

T	$(p_1 \parr p_1^{\perp}) \otimes \ldots \otimes (p_n \parr p_n^{\perp})\ \ n \geq 1$
A_1	$A \otimes (B \otimes C) \vdash (A \otimes B) \otimes C$
A_2	$A \parr (B \parr C) \vdash (A \parr B) \parr C$
C_1	$(A \otimes B) \vdash (B \otimes A)$
C_2	$(A \parr B) \vdash (B \parr A)$
D	$(A \parr B) \otimes C \vdash A \parr (B \otimes C)$
E_1	$(A \otimes B) \vdash (A' \otimes B')$
E_2	$(A \parr B) \vdash (A' \parr B')$

Observe que nesta axiomatização da MLL possuíamos um esquema de com regras de associatividade, comutatividade e distributividade linear. Para mais além este sistema é livre da regra do corte pois todas as regras possuem uma única premissa. Ele também garante que todos os teoremas da logica linear apresentados no do capitulo 3 são satisfeitos através de T. Podemos então tratar como uma relação binária as fórmulas, sendo definidas como o fechamento transitivo reflexivo da relação binária cujos pares são todos de substituição instâncias das regras acima.

Cada uma das Regras do Sistema S_1 possui um motivo para integra-lo, sendo:

- AI e A2 responsáveis por expressar associatividade;
- Cl e C2 responsáveis por expressar expressam sua simetria (comutatividade);
- D é distributividade linear;
- El e E2 expressam funtorialidade.

Definição 4.3. Um teorema na MLL é uma formula B que pode ser deduzida através de uma formula A da forma do axioma T

Exemplo 4.4. Seja B a formula $X \otimes Y \multimap Y \otimes X$, mostraremos que B pode ser deduzida por A da forma $(X \parr X^{\perp}) \otimes (Y \perp Y^{\top})$. Primeiramente reescrevendo B como sendo $(X \otimes Y)^{\perp} \parr (Y \otimes X)$, sendo esse o objeto que devemos deduzir, agora:

$$\begin{aligned}(X^{\perp} \parr X) \otimes (Y^{\perp} \parr Y) &\vdash X^{\perp} \parr (X \otimes (Y^{\perp} \parr Y)) \\ &\vdash X^{\perp} \parr ((Y^{\perp} \parr Y) \otimes X) \\ &\vdash X^{\perp} \parr (Y^{\perp} \parr (Y \otimes X)) \\ &\vdash (X^{\perp} \parr Y^{\perp}) \parr (Y \otimes X) \\ &\vdash (X \otimes Y)^{\perp} \parr (X \otimes Y).\end{aligned}$$

As derivações na logica linear multiplicativa em S_1 não são entidades sintáticas em essência, como acontece na lógica proposicional, elas admitem que podem ser entendidas como abstração da semântica subjacente de MLL, constituindo assim sua prova abstrata. E como estes sistemas são livre de corte, temos que S_1 é um sistema livre de cortes.

Definição 4.5. Um **link** L de uma fórmula A é uma combinação de pares ou *links* complementares P, $P^{\perp}$ de ocorrências. Chame esse par (A, L) de estrutura de prova livre de cortes.

Danos e Regnier demonstraram que existem caracterizações sintáticas e semânticas equivalentes de teoremas em termos de *links*.

Logo para representação sintática, para cada derivação na Logica linear multiplicativa do Teorema A, uma estrutura de prova é determinada. A estrutura da prova é determinada por uma instância de T que corresponde $P_I^{\perp}$ e P_I em cada conjunto. Uma vez que a regra não exclui ou cria sub-fórmulas, mas apenas move, as identidades dos átomos $P_I^{\perp}$ e P_I são preservadas, então preservando seu *link*. Portanto, as regras podem ser entendidas como transformando não apenas fórmulas, mas estruturas de prova.

Definição 4.6. Definiremos uma Estrutura de prova como uma rede de prova, quando ela puder ser derivada de um ou mais axiomas de S_1.

Teorema 4.7 (Danos-Reigner). *Uma estrutura de prova é uma rede de prova se ela é valida.*

Para demonstração mais informações do teorema acima observar a referencia [**?**]

Definição 4.8. Defina **switching** σ de uma fórmula A como sendo uma escolha dentre a operação $\parr$, isto em cada disjunção de A

Note que uma vez que ocorrem em pares de links e há n deles, então temos 2^n *switchings* em uma formula A. Note que o *link* L de A e o *switching* σ em L juntos determinam um grafo não direcionado.

A fronteira entre sintaxe e semântica não é nítida, e as informações semânticas frequentemente podem ser codificados sintaticamente. Por exemplo, as atribuições satisfatórias de uma fórmula Boleana podem ser representada sintaticamente, colocando a fórmula disjuntiva em forma normal, com cada disjunção (conjunção de literais), denotando aqueles que satisfazem atribuições para as quais os literais positivos na disjunção são atribuídos verdadeiros e o negativo falso.

Quando todos os átomos que ocorrem em uma fórmula ocorrem em todas as disjunções, positiva ou negativamente, os disjuntos estão em bijeção com as atribuições satisfatórias. As noções semânticas do *link* e *switching* também podem ser incorporadas nas Fórmulas MLL. Começamos com o *link*, a ideia chave para a qual é rotular cada átomo com o nome do *link* ao qual pertence.

Em geral, uma fórmula A pode ter muitos *links* ou nenhum *link*. Mas para uma fórmula binária, uma tal que cada átomo que ocorre em A o faz uma vez positivamente e uma vez negativamente (por exemplo, quando todos os P_i de T são distintos), existe uma ligação única. Inversamente, uma ligação de uma fórmula arbitrária A determina uma fórmula binária A' obtida de A atribuindo nomes distintos aos *links* e subscrevendo cada átomo com o nome do *link* ao qual pertence. Conclui-se que as noções de uma estrutura de prova e uma fórmula binária pode ser usada alternadamente. Deve-se ter em mente que o questão de teorema para uma fórmula é em geral mais difícil do que para uma estrutura de prova ou uma fórmula binária.

Uma vez que estaremos lidando apenas com estruturas de prova (A,L) nesta seção, podemos para o restante desta seção, assumir que todas as fórmulas são binárias. Os *links* ainda existem, mas eles agora são determinados exclusivamente por A, tendo sido absorvidos pela linguagem. A formula torna-se apenas $G(A,\sigma)$, e em vez de dizer que o *link* L de A é teia de prova ou válido, podemos simplesmente dizer que a fórmula binária A é demonstrável ou válida, respectivamente. O teorema de Danos-Regnier então diz mais simplesmente que uma fórmula binária A é demonstrável se e somente se for válida.A mudança de semântica é motivada na medida em que serve como um ponto importante para todas as provas completas conhecidas de outras semânticas da MLL.

Uma motivação mais intrínseca é baseado na noção de fluxo de informações nas provas. Na Interpretação dos espaços de Chu, esse fluxo é realizado pelas transformações que vimos no inicio desta seção e na seção 3.

4.1.2 Sistema S_2

Ao observar $\parr$ nas duas direções possíveis nos permite reconciliar a comutatividade de S_1 com nossa Interpretação de cálculo do axioma e regras do sistema S_2(a. A direção normal do fluxo para atribuir referências a uma expressões é para cima em uma árvore, a extensão da expressão flui das folhas às raízes. Considere o teorema $(P \otimes (P \multimap Q) \multimap Q$ Há uma direção natural de início do fluxo de prova de P para $P \multimap Q$ e terminando em Q. Observe fluxo em $P \multimap Q$ parece ir da folha P até a $\multimap$ e daí até a folha Q.Agora, note que o teorema acima é apenas a abreviatura de $(P^\perp \parr (P \parr Q^\perp) \parr Q)$, cuja conexão podem ser reassociadas e permutadas de modo a produzir outros Teoremas com fluxos distintos.

Exemplo 4.9. Tome o teorema $(P^\perp \parr (P \parr Q^\perp) \parr Q)$. Permutando seus conectivos temos da forma que ele assuma a forma $(P^\perp \parr (Q \parr (P \otimes Q^\perp))$. Observe que ele pode assumir agora a forma $(P \multimap (Q^\perp \multimap (P \otimes Q^\perp))$. assim como foi dito o sentido do fluxo deste Teorema foi modificado.

Agora podemos observar o seguinte, dentro do sistema S_1 somente trabalhamos com as operações $\parr$ e $\otimes$, e sem uso de negações. Para evitar a introdução do conceito de negação ao S_1 com efeito colateral de tratar $A \parr B$ como uma função. Para evitar isso usaremos o conectivo $\multimap$ ao invés de usarmos $\parr$. Isto funciona muito bem, exceto no caso C_2, onde ao representarmos a comutatividade de $\parr$. Neste caso deveríamos trocar o teorema $A \multimap B$ derivaria-se $B^\perp \multimap A^\perp$. Mas para evitar o uso de negações desnecessárias escreveremos essa expressão como $A \multimapinv B$.

E por essa razão iremos introduzir a linguagem de bi-implicação para modelar MLL. As formulas nesta linguagem serão modeladas por $\otimes$, $\multimap$ e $\multimapinv$. Para a axiomatização de MLL utilizando esta linguagem utilizaremos como base o sistema S_1, somente reescrevendo os axiomas que usam o conectivo $\parr$.

Definição 4.10. O conectivo "$\multimapboth$", traz consigo a possibilidade de escolha entre "$\multimap$"e "$\multimapinv$", por exemplo $P \multimapboth P$, pode ser reescrito como sendo $P \multimapinv P$ e $P \multimap P$

Sistema S_2

T	$(p_1 \multimapboth p_1^\perp) \otimes \ldots \otimes (p_n \multimapboth p_n^\perp)\ \ n \geq 1$
A_1	$A \otimes (B \otimes C) \vdash (A \otimes B) \otimes C$
A_2	$(A \otimes B) \multimap C \vdash (A \multimap B) \multimap C$
A_2'	$(A \multimap B) \multimapinv C \vdash A \multimap (B \multimapinv C)$
A_2''	$(A \multimapinv B) \multimapinv C \vdash A \multimapinv (B \otimes C)$
C_1	$(A \otimes B) \vdash (B \otimes A)$
C_2	$A \multimap B \vdash B \multimapinv A$
C_2'	$A \multimapinv B \vdash B \multimap A$
D	$(A \multimap B) \otimes C \vdash A \multimap (B \otimes C)$
D'	$(A \multimapinv B) \otimes C \vdash A \multimapinv (B \multimapinv C)$
E_1	$(A \otimes B) \vdash (A' \otimes B')$
E_2	$(A' \multimap B) \vdash (A \multimap B')$
E_3	$(A \multimapinv B') \vdash (A' \multimapinv B)$

Teorema 4.11. *Todos os teoremas binários de S_2 estão em bijeção com os pares (A,σ), onde A é um Teorema de S_1.*

Demonstração. Para construirmos esta demonstração exibiremos um mapa em cada direção e provaremos que eles se compõem em qualquer ordem gerando a respectiva identidade. Nenhum dos mapas por si só requer indução no comprimento das provas para especificar o mapa, mas exige isso a fim de provar o teorema do resultado.

Primeiramente reescrevemos, como já foi dito, os axiomas de S_2 como formulas de S_1 utilizando a bi-implicação. Desta forma teremos $A \multimap B$ sendo escrito como $A^{\perp} \parr B$ e $A \circ\!\!- B$ sendo escrito como $A \parr B^{\perp}$, e consequentemente sempre que possível trazemos as negações para os conectivos. Aplicar esta modificações a S_2 converte em S_I. Continuando indutivamente, no comprimento de provas de que todo teorema de S_2 se pode ser escrito como um teorema de S_1.

Por outro lado, seja A um teorema binário de S_1 em par com *switching* e disso queremos escreve-lo como um teorema de S2. Utilizando o teorema de Danos-Regnier, podemos especificar uma fórmula, sem usar indução sobre a extensão das provas.O *switching* determina um grafo $G(A,\sigma)$, orientado como na descrição acima dos *switching* essenciais.

Reescreva cada disjunção para baixo $B = C \parr D$ como $(C^{\perp} \otimes D^{\perp})^{\perp}$. Daí note que esta reescrita ignora a direção do *switching* em $\parr$. Por outro lado reescreva a disjunção acima, $B = C \parr D$ utilizando os conectivos $\multimap$ e $\circ\!\!-$, teremos $C \circ\!\!- D^{\perp}$ ou $C^{\perp} \multimap D$ de acordo com C ou D, respectivamente, é a disjunção pontuada. Por último, reescreva cada conjunção descendente $B \otimes C$ como $(B^{\perp} \circ\!\!- C)^{\perp}$— ou $(B \multimap C^{\perp})^{\perp}$ daí o caminho de $B \otimes C$ vai para B ou C, respectivamente. Portanto cancelando qualquer negação de negação desses processos teremos uma reescrita σ de A.

Nós agora afirmamos que a rescrita σ de um teorema binário de S_1 é uma fórmula na linguagem de $S2$. Agora afirmaremos que esta fórmula é um teorema de S_2. Para isso, prossiga por indução sobre comprimento das provas em S_1. Para o caso básico, iremos utilizar uma instância de T em S_1 Reescrevendo a i-ésima disjunções em uma das seguintes opções $P \multimap P$, $P \circ\!\!- P$, $P^{\perp} \multimap P^{\perp}$ ou $P^{\perp} \circ\!\!- P^{\perp}$ dependendo do sinal de P_i no teorema S_1 e a direção determinada por σ para $\parr$ na reescrita σ. Para o passo qualquer da indução, todas as maneiras de reescrever os conectivos $\parr_s$ à esquerda de uma regra de S_1 como $\multimap$ ou $\circ\!\!-$ é representado à esquerda de alguma regra de S_2. Portanto, cada etapa de uma derivação em S_1 pode ser reproduzida por uma etapa S_2, preservando a bijeção reivindicada. Assim demonstramos o que queríamos. Agora deve ficar claro que as duas traduções são mutuamente inversas, estabelecendo a bijeção reivindicada pelo teorema. □

O que mostramos propriamente foi que, como existe uma bijeção entre S_1 e S_2 ambos são axiomatizações equivalentes da Logica Linear Multiplicativa, com diferentes linguagens e as informações adicionais em S2 sobre *switching*. Do teorema de Danos-Regnier, temos que cada teorema binário A de S_1 em MLL monótono corresponde a um conjunto de teoremas de S_2 em bi-implicacional MLL, um para cada troca essencial de A.

Referências Bibliográficas

[1] AWODEY. S. **, Category Theory. [S.l.]: Oxford University press**. 2010.

[2] COECKE, B. **New Structures for Physics. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg**. 2011.

[3] ALCANTARA. M. **Espaço de Chu como modelo para Mecânica Quântica.** .2016. 87f. Mestrado Biometria e Estatística Aplicada UFRPE, Recife.

[4] GIRARD. J.-Y. **Linear logic : its syntax and semantics** .Laboratoire de Mathématiques Discrètes UPR 9016 – CNRS 163, Avenue de Luminy, Case 930 F-13288 Marseille Cedex 09.

[5] V. Pratt. **Chu spaces as a semantic bridge between linear logic and mathematics.** Theoretical Computer Science, Vol. 294, pp. 439-471, 2003.