UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA - CEGEN

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Números Algébricos e Transcendentes

Jamerson Silva Lira

RECIFE - PE
22 de Julho 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA - CEGEN

Jamerson Silva Lira

Números Algébricos e Transcendentes

Trabalho apresentado a coordenação do curso de LICENCIATURA EM MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE como requisito parcial para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: *DR. GABRIEL ARAÚJO GUEDES*

RECIFE - PE
22 de Julho 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L768n Lira, Jamerson Silva
Números Algébricos e Transcendentes / Jamerson Silva Lira. - 2021.
67 f.

Orientador: Gabriel Araujo Guedes.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Números algébricos. 2. Números transcendentes. 3. Números de Liouville. 4. Função zeta de Riemann. 5. Hipótese de Riemann. I. Guedes, Gabriel Araujo, orient. II. Título

CDD 510

Números Algébricos e Transcendentes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes

Aprovado em: _____ / _____ / _____

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes – UFRPE

Prof. Dr. Maria Eulalia de Moraes Melo – UFRPE

Prof. Dr. Thamires Santos Cruz – UFRPE

Esta monografia é dedicada a todos que acreditaram em mim e estiveram ao meu lado.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por todo apoio e carinho durante minha vida e toda minha formação, se cheguei de alguma forma até aqui foi graças a eles. Agradeço também a minha namorada Maria Eduarda que sempre me incentiva, motiva, acredita no meu potencial e me faz querer ser uma melhor versão de mim a cada dia. Agradeço também a todos os amigos e colegas que conheci durante a minha estadia no curso, vocês me proporcionaram muitos momentos incríveis que nunca vou esquecer .

Agradeço ao professor Gabriel Araújo Guedes pelas ótimas orientações e ter ajudado a tornar essa monografia possível, ao professor Danilo da Nóbrega Santos por me apresentar esse assunto e ter desenvolvido alguns trabalhos comigo e a todos os professores e funcionários do CEGEN, pois sinto que fui bem acolhido e que escolhi o lugar certo.

"Ninguém pode entrar duas vezes no mesmo rio, pois quando nele se entra novamente, não se encontra as mesmas águas, e o próprio ser já se modificou."

—HERÁCLITO DE ÉFESO

Resumo

Esta monografia abordará os números algébricos e os números transcendentes, e tem o intuito de despertar o interesse do leitor a respeito desses números tão singulares. Além disso, busca servir como um estudo de aprofundamento sobre o assunto, abordando definições, resultados importantes e alguns fatos de interesse. Em um primeiro momento, são apresentados conceitos introdutórios dos números algébricos e transcendentes, e exemplos. Em seguida, adentramos em resultados e temas indispensáveis quando se estuda os números transcendentes, como enumerabilidade, transcendência do número de Euler, aproximações por racionais, números de Liouville e a função zeta de Riemann. Esta última, está entre as funções mais importantes da matemática, pois se relaciona à hipótese de Riemann, que é considerada por alguns como um problema de grande relevância para a área.

Palavras-chave: Números algébricos. Números transcendentes. Números de Liouville. Função zeta de Riemann. Hipótese de Riemann.

Abstract

The present monography addresses the algebraic numbers and transcendental numbers, and aims to arouse the interest of the interlocutor about these singular numbers. Furthermore, it seeks to serve as an in-depth study of the subject, stating definitions, important results and some interesting facts. In a first moment, introductory concepts of algebraic and transcendental numbers along with examples are brought forward. Then, we get into results and indispensable themes when it comes to studying transcendental numbers, such as enumerability, the transcendental nature of Euler's number, rational approximation, Liouville numbers and Riemann zeta function. This last one is among the most important functions of mathematics because it is related to Riemann hypothesis, which is considered by some to be one of the most relevant problems in math.

Keywords: Algebraic numbers. Transcendental numbers. Liouville numbers. Riemann zeta function. Riemann hypothesis.

Sumário

Introdução

Acredita-se que a nomenclatura de "número transcendente" tenha sido criada por Leonard Euler e durante muito tempo esses números foram um grande mistério, muitos se perguntavam se realmente eles existiam pois mesmo que Euler tenha dado nome não exibiu nenhum exemplo, foi somente em 1851, que uma chama acendeu em meio a escuridão e incerteza, quando Joseph Liouville mostrou o primeiro número transcendente.

Começaremos abordando conceitos preliminares como a definições de números algébricos e números transcendentes, além de alguns exemplos, depois serão tratados conceitos de enumerabilidade que são necessários para mostrar a enumerabilidade dos números algébricos e como consequência teremos a existência e não enumerabilidade dos números transcendentes, além disso, falaremos de alguns resultados interessantes e da transcendência de e.

Em seguida, teremos conceitos de aproximação por racionais que são necessários para compreendermos os números de Liouville, também demonstraremos que todo número de Liouville é transcendente, exibiremos a constante de Liouville e alguns resultados importantes, como por exemplo, que qualquer número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.

Por fim, trataremos a respeito da função zeta de Riemman que é um dos elementos mais intrigantes e importantes da matemática, pois está intimamente ligada a um dos problemas do Prêmio Millennium Clay Mathematics Institute, citamos o problema da Basileia, apresentamos diferentes formas de demonstrar a irracionalidade de $\zeta(2)$, citamos o caso $\zeta(2)$ e falamos a respeito dos argumentos ímpares dessa função.

CAPÍTULO 1
Conceitos Preliminares

No início deste capítulo serão apresentadas as definições e exemplos de números algébricos e transcendentes. Esse termo "números transcendentes"surgiu da ideia de que tais números não podem ser zerados através de operações algébricas envolvendo números inteiros, ou seja, eles transcendiam as operações usuais e acredita-se que essa nomenclatura tenha sido criada por Leonard Euler.

Definição 1.1. Dizemos que um número complexo é algébrico quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, ou seja, $\alpha \in \mathbb{C}$ é número algébrico quando existem $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0.$$

Denotamos o conjunto dos números algébricos como $\overline{\mathbb{Q}}$.

Exemplo 1.1. Todo número racional é algébrico. Seja $\alpha \in \mathbb{Q}$, então α pode ser escrito como $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Portanto, perceba que α é raiz do polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = qx - p.$$

Definição 1.2. Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é denominado transcendente quando não é algébrico. Ou seja, $f(\alpha) \neq 0$ para qualquer polinômio não constante de $\mathbb{Z}[x]$. Vamos denotar o conjunto dos números transcendentes por $\mathbb{T}$.

Alguns exemplos importantes e famosos de números transcendentes são e, π, constante de Champernowne, que neste caso é concatenização dos números naturais e a constante de Liouville. A respeito da transcendência de π, essa descoberta feita em 1882 por Ferdinand Lindemann, está intimamente ligada à quadratura do círculo, um problema que durante muitos séculos desafiou os matemáticos, o qual ele consistia em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo utilizando somente uma régua não graduada e um compasso em um número finito de etapas, como π é transcendente não existe polinômio com coeficientes inteiros ou racionais no qual π é raiz, ou seja, não é possível escrever π utilizando um número finito de números inteiros, de frações racionais ou suas raízes. Para mais informações sobre esse problema recomendo a leitura de [1] pág: 109 e [21].

Uma dúvida que pode surgir é se todo número irracional é transcendente, e a resposta é nem todos.

Exemplo 1.2. i e $\sqrt{2}$ por exemplo são algébricos, pois são raízes respectivamente dos polinômios x^2+1 e x^2-2. Além desses exemplos o número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ também é algébrico, pois é raiz da equação $x^2-x-1=0$, de fato

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4}\right) - \frac{4}{4} = 0.$$

É perceptível a facilidade de encontrar exemplos de números algébricos e até conjuntos formados totalmente por eles, como por exemplo os números racionais e por consequência os inteiros e naturais. Porém, veremos mais adiante que fazer o mesmo para os transcendentes não é uma tarefa tão simples e durante muito tempo a existência desses números foi uma incógnita, até o ano de 1844, quando Joseph Liouville exibiu os primeiros exemplos de números transcendentes. Até hoje alguns números não se sabe se são algébricos ou transcendentes como por exemplo $e+\pi$, e^e, π^e, π^π, $ln(\pi)$, $\zeta(3)$.

1.1 Existência dos números transcendentes

Agora veremos a existência do conjunto dos números transcendentes, além disso, a sua não-enumerabilidade, mas antes se faz necessário algumas definições e resultados a respeito de enumerabilidade.

Definição 1.3. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$I_n = \{a \in \mathbb{N} : a \leq n\}.$$

Um conjunto é finito se é vazio ou se existir uma bijeção entre o conjunto e I_n.

Definição 1.4. Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$. Dizemos que um conjunto infinito não é enumerável quando não existe uma bijeção com os naturais para determinado conjunto.

Exemplo 1.3. O conjunto dos números naturais é enumerável. Para verificar isso basta escolher a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ com a lei de formação $f(n) = n$.

Exemplo 1.4. O conjunto dos números primos é enumerável. Considere P o conjunto dos números primos de forma que P esteja ordenado de forma crescente, ou seja, $P = \{P_1, P_2, ..., P_n, ...\}$ no qual P_1 é o menor primo, assim podemos relacionar o conjunto P e números naturais na função $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$ no qual,

$$f(1) = P_1, f(2) = P_2, ..., f(n) = P_n, ...$$

Perceba que esta função é injetora, pois para todo a e $b \in \mathbb{N}$ tal que $a \neq b$ teremos $f(a) = P_a \neq f(b) = P_b$. A função também é sobrejetora, pois para todo $P_j \in P$ com $j = 1,2,3,...$ vai existir um $j \in \mathbb{N}$ tal que $f(j) = P_j$.

Portanto, P é enumerável, pois existe uma bijeção entre P e $\mathbb{N}$. Esse é um caso particular do Teorema seguinte.

Teorema 1.1. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração.

Se X é finito, nada há para demonstrar, pois todo conjunto finito é enumerável. Se X não é finito, temos que definir uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Vamos definir f da seguinte forma, $f(1) = m_1$ no qual m_1 é o menor elemento de X, $f(2) = m_2$ no qual m_2 é o menor elemento de $X - \{m_1\}$, $f(3) = m_3$ no qual m_3 é o menor elemento de $X - \{m_1, m_2\}$, continuando com essa construção teremos $f(n) = m_n$ no qual m_n é o menor elemento de $X - \{m_1, m_2, m_3, ..., m_{n-1}\}$, ou seja, $m_1 < m_2 < m_3 < ... < m_n < ...$ e perceba que o conjunto $X - \{m_1, m_2, m_3, ..., m_{n-1}\}$ não é vazio, porque X é infinito.

Agora vamos provar que essa função é bijetora, podemos verificar facilmente que essa função é injetora pois dados $a < b \in X$ vamos ter $f(a) < f(b)$, então f é injetiva, pois $a \neq b$ e $f(a) \neq f(b)$. Agora suponha por absurdo que $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ não é sobrejetora, ou seja, existe algum elemento $j \in X$ tal que $j \notin Im(f)$, no qual $Im(f) = \{m_1, m_2, m_3, ..., m_{n-1}, ...\}$, então $j \neq m_i \ \forall \ i \in \mathbb{N}$, portanto, $m_i < j \ \forall \ i \in \mathbb{N}$, sendo assim, $Im(f) \subset I_j = \{1, ..., j\}$ o que é um absurdo, pois I_j é um subconjunto finito e não é possível um conjunto finito possuir um conjunto infinito, logo f é sobrejetora e por consequência bijetora. Portanto, o conjunto X é enumerável. $\square$

Teorema 1.2. *Todo subconjunto não-vazio de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração.

Seja X um conjunto enumerável. Se X for finito, como todo subconjunto de um conjunto finito é finito [2] todo subconjunto de X será enumerável, pois por definição todo conjunto finito é enumerável. Se X for infinito, como X é enumerável, existe uma função $\phi : X \longrightarrow \mathbb{N}$ bijetora, de modo que $\phi(x_1) = n_1, \phi(x_2) = n_2, ..., \phi(x_i) = n_i, \ldots$. Agora tomaremos o conjunto não-vazio $A \subset X$ no qual $A = X - \{x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$ e $Y \subset \mathbb{N}$ de modo que $Y = \mathbb{N} - \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$. Portanto teremos $\psi : A \longrightarrow Y$ é bijeção, como $Y \subset \mathbb{N}$, segue pelo **Teorema 1.1** que Y é enumerável , então existe uma função, $\gamma : Y \longrightarrow \mathbb{N}$ bijetora. Logo tomando $(\gamma \circ \psi) : A \longrightarrow \mathbb{N}$, como $(\gamma \circ \psi)$ é composição de funções bijetora ela é bijetora e A é enumerável. $\square$

Corolário 1.1. *Se Y é enumerável e $\psi : X \longrightarrow Y$ é injetiva, então X é enumerável.*

Demonstração.

Seja Y enumerável. Como ψ é injetiva se tomarmos o conjunto não-vazio $A \subset Y$ tal que $A = Im(\psi)$, a função $g : X \longrightarrow A$ será bijetora, como Y é enumerável, pelo **Teorema 1.2**, $A \subset Y$ é enumerável. Portanto, existe uma função bijetora $\phi : A \longrightarrow \mathbb{N}$, assim $(\phi \circ g) : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é bijetora e X é enumerável. $\square$

Corolário 1.2. *Se X é enumerável e $g : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva, então Y é enumerável.*

Demonstração.

Para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = f(y) \in X$ tal que $g(x) = y$. Isto define uma função $f : Y \longrightarrow X$ tal que $g(f(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Portanto, f é injetiva e pelo **Corolário 1.1** Y é enumerável. □

Teorema 1.3. *O produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração.

Sejam X, Y conjuntos enumeráveis, ou seja, existem $\psi : X \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\gamma : Y \longrightarrow \mathbb{N}$ injetivas, portanto a função $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no qual $f(x,y) = (\psi(x), \gamma(y))$ é injetiva, se mostrarmos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, $X \times Y$ também será enumerável segundo o **Corolário 1.1**. Então definimos a função $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ no qual $g(m,n) = 2^m 3^n$, pela unicidade da decomposição de fatores primos a função g é injetiva, pois dados $(x,y) \neq (z,w)$ teremos $g(x,y) \neq g(z,w)$, como $\mathbb{N}$ é enumerável e g é injetiva, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável e por consequência $X \times Y$ é enumerável. □

Teorema 1.4. *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração.

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ enumeráveis, então para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $f_m : \mathbb{N} \longrightarrow X_m$ sobrejetora. Seja $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ e definindo $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ tal que $f(m,n) = f_m(n)$, se $y \in X$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in X_m$, então haverá um $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = f_m(n)$ pois f_m é sobrejetora. Então existe um $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $y = f_m(n)$, portanto f é sobrejetora, como $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ é enumerável e f sobrejetiva pelo **Corolário 1.2**, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável. □

Corolário 1.3. *A união enumerável de conjuntos finitos é enumerável.*

Demonstração.

Pelo teorema anterior a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, como por definição todo conjunto finito é enumerável o corolário fica demonstrado. □

Teorema 1.5. *O intervalo $(0,1)$ dos números reais é não enumerável.*

Demonstração.

Suponha que o intervalo $(0,1)$ seja enumerável, então existe uma função $h : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$ bijeção, ou seja, podemos listar todos os números entre 0 e 1 de modo que $h(i) = x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, como podemos ver a seguir:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}... \\
x_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}... \\
x_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}... \\
&. \\
&. \\
&. \\
x_j &= 0, x_{j1}x_{j2}x_{j3}... \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
$$

Agora, tomaremos um $j \in (0,1)$ com $j = 0, j_1 j_2 j_3...$, ainda mais, vamos impor que $j_1 \neq x_{11},\ j_2 \neq x_{22},\ ...,\ j_k \neq x_{kk},\ ...$, ou seja, $j_i \neq x_{ii}\ \forall i \in \mathbb{N}$. Assim temos que $j \in (0,1)$, mas $j \neq x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, portanto existe um número no intervalo $(0,1)$ que não está listado por h, ou seja, temos uma contradição e o intervalo $(0,1)$ não é enumerável.

□

Teorema 1.6. *O conjunto dos números reais é não enumerável.*

Demonstração.

Suponha que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é enumerável, pelo **Teorema 1.2** todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Mas, pelo **Teorema 1.5** o intervalo $(0,1)$ é não enumerável, o que é uma contradição. Portanto, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. □

1.1.1 Enumerabilidade dos números algébricos, existência e não-enumerabilidade dos números transcendentes

Antes de começarmos precisaremos de um resultado importante que é o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 1.7. *Todo polinômio não constante de grau n, com coeficientes complexos, tem n raízes complexas.*

Demonstração. Ver em [13] pág: 27-33. □

Agora temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar um resultado que foi demonstrado pela primeira vez por Georg Cantor em 1874.

Teorema 1.8. *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração.

Considere $P_n(\mathbb{Q})$ o conjunto dos polinômios não constantes com coeficientes racionais e de grau n. Seja, $\psi : \underbrace{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}^*}_{n+1} \longrightarrow P_n(\mathbb{Q})$ dada por

$$\psi(a_0,a_1,...,a_n) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Perceba que ψ é injetiva, pois dados $x_1 \neq x_2$ tais que $x_1 = (a_0,a_1,...,a_n)$ e $x_2 = (b_0,b_1,...,b_n)$ temos, $a_i \neq b_i$ para algum $i = 0,\ldots,n$.

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \neq b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

ou seja, $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$.

Perceba também que ψ é sobrejetiva, pois para todo $y \in P_n(\mathbb{Q})$ existe $x \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times \ldots \times \mathbb{Q}^*$ tal que $\psi(x) = y$. Portanto, ψ é bijeção.

Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times \ldots \times \mathbb{Q}^*$ também é enumerável. Então $P_n(\mathbb{Q})$ é enumerável, pois podemos fazer uma bijeção entre $P_n(\mathbb{Q})$ e $\mathbb{N}$ através de uma composição de funções. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma quantidade enumerável de polinômios com coeficientes racionais com grau n.

Seja $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ um polinômio não constante de coeficientes racionais, pelo **Teorema Fundamental da Álgebra** esse polinômio tem n raízes complexas, podendo elas serem reais ou não. Vamos denotar como R_F o conjunto das raízes de $F(x)$.

Vamos chamar de A_n a união dos conjuntos das raízes de todos os polinômios de grau n e coeficientes racionais, isto é

$$A_n = \bigcup_{F\in P_n(\mathbb{Q})} R_F$$

Perceba que A_n é enumerável, pois pelo **Corolário 1.3**, a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável. Perceba que podemos definir

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Logo $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, pois pelo **Teorema 1.4**, a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. □

Teorema 1.9. *Existe o conjunto dos números transcendentes não-vazio e ele não é enumerável.*

Demonstração.

Suponha por contradição que todos os números reais sejam algébricos, ou seja, $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$, então $\mathbb{R}$ é enumerável, segundo o teorema anterior, mas isso é uma contradição, uma vez que $\mathbb{R}$ não é enumerável. Logo, existe o conjunto não-vazio $\mathbb{R}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ não enumerável, pois podemos escrever o conjunto dos números reais como $\mathbb{R} = (\mathbb{R}\backslash\overline{\mathbb{Q}}) \cup \overline{\mathbb{Q}}$, então, se $\mathbb{R}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ fosse enumerável pelo **Teorema 1.4**, $\mathbb{R}$ seria enumerável. Portanto, o conjunto dos números reais que não são algébricos, ou seja, o conjunto dos números transcendentes não é enumerável. □

Aqui chegamos a uma conclusão intrigante, com a enumerabilidade do conjunto dos algébricos e a não enumerabilidade dos transcendentes, temos que existem mais números transcendentes do que algébricos, mesmo assim, demonstrar que um número é transcendente não é algo simples.

1.2 Alguns resultados sobre os números algébricos e transcendentes

Agora veremos alguns resultados que nos ajudarão a demonstrar uma proposição, no qual é possível caracterizar o conjunto dos números algébricos como um corpo e como consequência disso chegamos a alguns resultados interessantes referentes aos números transcendentes.

Teorema 1.10. *Se x e a são números reais e n um número inteiro positivo*

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^n x^0.$$

Demonstração e mais detalhes em [17].

Lema 1.1. *Se α é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros de grau n, então α^j é combinação linear com coeficientes racionais de α^{n-1}, α^{n-2}, $\ldots$, α, 1. Para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq n$.*

Demonstração.

Seja α raiz de um polinômio de coeficientes inteiros e de grau n. Então existem inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que a equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

é satisfeita por α. Dividindo a equação anterior por a_n teremos,

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

no qual $b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Tomando $x = \alpha$,

$$\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^n = -b_{n-1}\alpha^{n-1} - ... - b_2\alpha^2 - b_1\alpha - b_0.$$

Portanto, conseguimos escrever α^n como combinação linear de coeficientes racionais de $\alpha^{n-1}, ..., \alpha^1, \alpha^0$. Utilizaremos indução para comprovar que isso é válido para todo $j \geq n$. Suponha que α^k seja escrito como combinação linear dos coeficientes de $\alpha^{n-1}, ...\alpha^1, \alpha^0$.

$$\alpha^k = b_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0$$

.

com $b_{n-1}, ..., b_1, b_0 \in \mathbb{Q}$ e $k \in \mathbb{N}$. Então para $k+1$ teremos,

$$\alpha^{k+1} = \alpha\alpha^k,$$

por hipótese de indução temos $\alpha^k = b_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0$, então

$$\alpha^{k+1} = \alpha(b_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0) \Rightarrow$$

$$\alpha^{k+1} = b_{n-1}\alpha^n + ... + b_2\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_0\alpha.$$

Portanto, para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq n$ o lema é valido.

□

Definição 1.5. Dizemos que X é uma forma linear com coeficientes racionais se pode expresso da forma

$$X = q_1x_1 + ... + q_nx_n.$$

Com $q_1, ..., q_n \in \mathbb{Q}$. Chamamos também $x_1, ..., x_n$ de indeterminadas.

Definição 1.6. Dizemos que um conjunto de formas lineares com coeficientes racionais $J = X_1, X_2, ..., X_n$ é linearmente dependente sobre os racionais quando existem $r_1, r_2, .., r_n \in \mathbb{Q}$, com ao menos um $r_i \neq 0$, tais que

$$r_1X_1 + r_2X_2 + \ldots + r_nX_n = 0$$

Lema 1.2. *Sejam $n+1$ formas lineares com coeficientes racionais e com indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$. O conjunto formado pelas $n+1$ formas lineares é linearmente dependente sobre os racionais.*

Demonstração.

Tome $n+1$ formas lineares com n indeterminadas tais que,

$$\begin{aligned} X_1 &= q_{11}x_1 + \cdots + q_{1n}x_n, \\ X_2 &= q_{21}x_1 + \cdots + q_{2n}x_n \\ &\vdots \\ X_{n+1} &= q_{n+1,1}x_1 + \cdots + q_{n+1,n}x_n. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que existem $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r_1X_1 + r_2X_2 + \ldots + r_nX_n + r_{n+1}X_{n+1} = 0 \tag{1.1}$$

com pelo menos um r_i diferente de zero. Substituindo os $X_1,\ldots,X_{n+1}$ na equação (1.1),

$$r_1(q_{11}x_1+\ldots+q_{1n}x_n)+r_2(q_{21}x_1+\ldots+q_{2n}x_n)+\ldots+r_{n+1}(q_{n+1,1}x_1+\ldots+q_{n+1,n}x_n)=0 \Rightarrow (q_{11}r_1+q_{21}r_2+\ldots+$$

Com isso podemos montar um sistema de equações,

$$\begin{cases} q_{11}r_1 + q_{21}r_2 + \ldots + q_{n+1,1}r_{n+1} = 0, \\ \vdots \\ q_{1n}r_1 + q_{2n}r_2 + \ldots + q_{n+1,n}r_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Caso a matriz dos coeficientes do sistema linear contenha uma matriz N de ordem n cujo determinante é diferente de zero, tomamos sem perda de generalidade, $r_{n+1} = 1$ (ou um número racional qualquer diferente de zero ao invés de um), com r_{n+1} sendo a variável que não possui seus respectivos coeficientes presentes na matriz N. Obtemos,

$$\begin{cases} q_{11}r_1 + q_{21}r_2 + \ldots + q_{n1}r_n = -q_{n+1,1} \\ \vdots \\ q_{1n}r_1 + q_{2n}r_2 + \ldots + q_{nn}r_n = -q_{n+1,n}. \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito matricialmente como $Nr = b$,

$$\begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & \ldots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{n+1,1} \\ \vdots \\ -q_{n+1,n} \end{bmatrix}.$$

Como N tem determinante diferente de zero ela é inversível, e teremos solução única para o sistema e teremos somente racionais como solução, pois os números racionais são fechados nas operações utilizadas em matrizes. Se a matriz dos coeficientes não possuir uma matriz de ordem n com determinante diferente de zero, vamos tomar uma matriz M de ordem m no qual $m < n$ e $det(M) \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha

$$M = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1m} & \cdots & q_{mm} \end{bmatrix}$$

com $r_{m+1} = 1$ e $r_{m+2} = r_{m+3} = ... = r_{n+1} = 0$. Encontramos a solução desse sistema de forma semelhante ao que foi feito anteriormente. Porém, temos que garantir que a solução satisfaça também o seguinte sistema

$$\begin{cases} q_{1,m+1}r_1 + q_{2,m+1}r_2 + ... + q_{m,m+1}r_m = -q_{m+1,m+1} \\ \vdots \\ q_{1n}r_1 + q_{2n}r_2 + ... + q_{mn}r_m = -q_{m+1,n}. \end{cases}$$

Suponha, por contradição, que exista uma equação da forma $q_{1j}r_1 + q_{2j}r_2 + ... + q_{mj}r_m = -q_{m+1,j}$ que não é satisfeita para algum j, com $j \in \mathbb{N}$ tal que $m+1 \leq j \leq n$. Então,

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{m1} & q_{m+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{1m} & \cdots & q_{mm} & q_{m+1,m} \\ q_{1j} & \cdots & q_{mj} & q_{m+1,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{m1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{1m} & \cdots & q_{mm} & 0 \\ q_{1j} & \cdots & q_{mj} & A \end{vmatrix} \neq 0.$$

O que é uma contradição, pois por hipótese a maior matriz quadrada presente na matriz dos coeficientes e com determinante diferente de zero era M. Portanto, as soluções do sistema satisfazem todas as equações restantes, então, segundo os dois casos $n+1$ formas lineares com n indeterminadas são linearmente dependentes sobre os racionais.

□

Proposição 1.1. *Seja $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto dos números algébricos. Dados $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, temos:*

(i) $\alpha \pm \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$

(ii) $\alpha \cdot \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$

(iii) $-\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$

(iv) Se $\alpha \neq 0$ *então* $\alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$

Demonstração.

Sejam α e $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ e seja as equações

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

$$b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0 \quad (2)$$

com $a_n, a_{n-1}, ..., a_0, b_m, ..., b_1, b_0 \in \mathbb{Z}$, no qual α satisfaz (1) e β satisfaz (2).

Começando pelo caso (i), tome os $mn+1$ números

$$1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, ..., (\alpha+\beta)^{mn}$$

pelo **Teorema 1.10** podemos escrever todos esses números como combinação linear com coeficientes racionais de $\alpha^j\beta^k$, com $0 \leq j \leq mn$ e $0 \leq k \leq mn$. Mas vamos considerar $0 \leq j < n-1$ e $0 \leq k < m-1$, pois utilizando o **Lema 1.1** podemos trocar $\alpha^j\beta^k$ pela combinação linear com coeficientes racionais quando $j \geq n$ ou $k \geq m$. Logo, temos nm configurações diferentes para $\alpha^j\beta^k$ e $mn+1$ números. Assim, pelo **Lema 1.2** , existem $r_0, r_1, ..., r_{nm} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$r_0 + r_1(\alpha+\beta) + ... + r_{nm}(\alpha+\beta)^{nm} = 0,$$

com pelo menos um $r_i \neq 0$. Como na igualdade anterior os coeficientes de $1, (\alpha+\beta), ..., (\alpha+\beta)^{nm}$ são números racionais, podemos escrever eles na forma de fração de inteiros. Multiplicando ambos os lados da igualdade pelo produtório de todos os denominadores desses racionais, teremos que $(\alpha+\beta)$ satisfaz uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Portanto, $(\alpha+\beta)$ é algébrico. Então, se somarmos ou subtrairmos números algébricos o resultado também será um algébrico.

Para o item (ii) tome os seguintes $mn+1$ números,

$$1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, ..., (\alpha\beta)^{mn}.$$

Podemos reescrever todos estes números como combinação linear com coeficientes racionais de $\alpha^j\beta^k$, com $0 \leq j \leq n-1$ e $0 \leq k \leq m-1$. Pelo **Lema 1.2**, existem $r_0, r_1, ..., r_{nm} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$r_0 + r_1\alpha\beta + ... + (\alpha\beta)^{nm} = 0$$

com ao menos um $r_i \neq 0$. Como os coeficientes de $1, \alpha\beta, ..., (\alpha\beta)^{nm}$ são números racionais, podemos expressá-los como frações de inteiros e de forma análoga ao item (i) conseguiremos uma equação com coeficientes inteiros que é satisfeita por $\alpha\beta$. Portanto, $\alpha\beta$ é algébrico. Podemos tomar como exemplo os números i e $\sqrt[3]{2}$ ambos são algébricos e seu produto também é algébrico, pois $(i \cdot \sqrt[3]{2})$ é raiz do polinômio x^6+4. Pois

$$\left(i \cdot \sqrt[3]{2}\right)^6 + 4 = -4 + 4 = 0.$$

No caso (iii), perceba que como α satisfaz a equação (1), então $-\alpha$ satisfaz,

$$(-1)^n a_n x^n + ... + (-1)^2 a_2 x^2 + (-1) a_1 x + a_0 = 0,$$

pois,

$$(-1)^n a_n (-\alpha)^n + ... + (-1) a_1 (-\alpha) + a_0 = a_n \alpha^n + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Então, $-\alpha$ é algébrico.

O caso do item (iv) é um pouco semelhante ao anterior, tome α com $\alpha \neq 0$. Como α satisfaz a equação (1) temos que α^{-1} satisfaz a

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$$

pois,

$$a_0(\alpha^{-1})^n + a_1(\alpha^{-1})^{n-1} + ... + a_{n-1}(\alpha^{-1}) + a_n, \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha^n}{\alpha^n}\left[a_0(\alpha^{-1})^n + a_1(\alpha^{-1})^{n-1} + ... + a_{n-1}(\alpha^{-1}) + a_n\right], \Rightarrow$$

$$\frac{a_0 + a_1\alpha^1 + ... + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n}{\alpha^n} = \frac{0}{\alpha^n} = 0.$$

Portanto, $\alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$. $\square$

Teorema 1.11. *Seja $\mathbb{T}$ o conjunto dos números transcendentes e $t \in \mathbb{T}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, então $\frac{pt}{q} \in \mathbb{T}$.*

Demonstração.

Sejam $t \in \mathbb{T}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$. Suponha por contradição que $\frac{pt}{q} \in \overline{\mathbb{Q}}$, então pela **Proposição 1.1** teremos $\frac{pt}{q}.\frac{q}{p} \in \overline{\mathbb{Q}}$, uma vez que todo número racional é algébrico. Mas isso é uma contradição, uma vez que

$$\frac{pt}{q}.\frac{q}{p} = t \text{ e } t \in \mathbb{T}.$$

$\square$

Teorema 1.12. *Se t_1, $t_2 \in \mathbb{T}$, então $(t_1 + t_2) \in \mathbb{T}$ ou $(t_1 - t_2) \in \mathbb{T}$.*

Demonstração.

Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$. Suponha por contradição que $(t_1 + t_2)$ e $(t_1 - t_2)$ é algébrico, então pela **Proposição 2.1** teremos $(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Porém isso é um absurdo, uma vez que

$$(t_1+t_2)+(t_1-t_2)=2t_1$$

e pelo **Teorema 1.11** $2t_1 \in \mathbb{T}$. Portanto $(t_1+t_2) \in \mathbb{T}$ ou $(t_1-t_2) \in \mathbb{T}$. $\square$

Com isso um dos problemas em aberto a respeito dos números transcendentes pode ser verdadeiro, uma vez que, π e o número de Euler são transcendentes mas não sabemos se $e+\pi$ é transcendente ou não.

Teorema 1.13. *Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{N}^*$ então $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com q sendo um natural não nulo. Note que, como α é algébrico teremos que α^p também é algébrico pela **Proposição 1.1**, então vai existir um polinômio de grau m com coeficientes inteiros, tal que α^p é raiz, ou seja, existe $J(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $J(\alpha^p)=0$. Agora vamos tomar $G(x)$ o polinômio com os mesmos coeficientes de $J(x)$, só que com o grau de todos os x multiplicados por p. Então,

$$\begin{aligned}
G(\sqrt[q]{\alpha^p}) &= a_0(\sqrt[q]{\alpha^p})^{qm}+a_1(\sqrt[q]{\alpha^p})^{q(m-1)}+\cdots+a_m(\sqrt[q]{\alpha^p})^0 \\
&= a_0(\alpha^p)^m+a_1(\alpha^p)^{m-1}+\cdots+a_m \\
&= J(\alpha^p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt[q]{\alpha^p}=\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ pois é raiz de $G(x)$. $\square$

Teorema 1.14. *Se $t_1,t_2 \in \mathbb{T}$, então pelo menos um dos números (t_1+t_2) e $t_1 \cdot t_2$ é transcendente.*

Demonstração.

Vamos supor por contradição que (t_1+t_2) e $(t_1 \cdot t_2) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Note, pela **Proposição 1.1** temos que $(t_1+t_2)^2$ e $(-2t_1t_2) \in \overline{\mathbb{Q}}$, sendo assim, $(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=t_1^2+t_2^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Como $(t_1-t_2)^2=t_1^2+t_2^2-2t_1t_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$, então teremos que $t_1-t_2=(t_1^2+t_2^2-2t_1t_2)^{\frac{1}{2}} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Portanto, pelo teorema anterior, (t_1+t_2) e $(t_1-t_2) \in \overline{\mathbb{Q}}$, que é uma contradição, pois segundo o **Teorema 1.12** (t_1+t_2) ou $(t_1-t_2) \in \mathbb{T}$. Então, (t_1+t_2) ou $t_1 \cdot t_2 \in \mathbb{T}$.

$\square$

Teorema 1.15. *Se $t \in \mathbb{T}$, então pelo menos um dos números t^t e t^{t+1} é transcendente.*

Demonstração.

Seja $t \in \mathbb{T}$. Suponha por contradição que t^t, t^{t+1} são algébricos, pela **Proposição 1.1** temos que $(t^t)^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$, então $(t^{t+1}).(t^t)^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Mas $(t^{t+1}).(t^t)^{-1}=t$, o que é uma contradição pois por hipótese $t \in \mathbb{T}$. $\square$

Com o teorema acima é possível mais uma vez pensar na possibilidade que alguns dos problemas em abertos sobre os números transcendentes sejam verdadeiros, no caso se e^e, π^π são transcendentes ou não.

1.3 Transcendência do Número de Euler

Um número recente se comparado ao π, porém equivalentemente importante e interessante, provavelmente sua primeira aparição foi no século XVII durante a investigação de problemas de juros compostos, aparece em diversas áreas da matemática e é elemento de uma das identidades mais belas da matemática $e^{i\pi}+1$. Sua transcendência foi descoberta por Charles Hermite em 1873.

Antes de demonstrar a transcendência do número de Euler precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 1.3. *Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja p um número primo e i um número inteiro positivo qualquer menor que o grau de $f(x)$. Então para $i \geq p$,*

$$\tfrac{d^i}{dx^i}\left(\frac{f(x)}{(p-1)!}\right)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Demonstração.

Como a derivada é um operador linear é suficiente mostrar que

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros e divisível por p.

Perceba que se $i > j$ a derivada será igual a zero, pois a ordem da derivada será superior ao grau da função. Se $i \leq j$ teremos

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right) = \frac{j(j-1)(j-2)\ldots(j-i-1)}{(p-1)!}x^{j-i},$$

multiplicando por $\frac{i!(j-i)!}{i!(j-i)!}$

$$\begin{aligned}\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right) &= \frac{i!j(j-1)(j-2)\ldots(j-i-1)(j-i)!}{i!(j-i)!(p-1)!}x^{j-i}\\ &= \frac{i!j!}{i!(j-i)!(p-1)!}x^{j-i},\end{aligned}$$

perceba que $\frac{j!}{i!(j-i)!} = \binom{j}{i}$, ou seja, pelo Teorema 1.14 é um dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^j$, então é um número inteiro vamos chamar ele de m. Como $i \geq p$,

$$\frac{j!i!}{i!(j-i)!(p-1)!} = \frac{m.i.(i-1).\cdots.p.(p-1)!}{(p-1)!} = m.i.(i-1).\cdots.p$$

Portanto,

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{f(x)}{(p-1)!}\right)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

□

Lema 1.4. *Considere a sequência a_p definida por,*

$$a_p = \frac{e^n n^p (M)^p}{(p-1)!}$$

no qual M é uma constante, então

$$\lim_{p\to\infty} a_p = 0.$$

Demonstração.

Para demonstrar esse teorema basta mostrar, que $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p$ é convergente. Pois, o termo geral de uma série convergente tem limite zero. [2] pág: 39.

Perceba,

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^n n^p (M)^p}{(p-1)!} \Rightarrow$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p = e^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nM)^{p+1}}{p!} = e_n \sum_{p=0}^{\infty} d_p,$$

vamos verificar pelo teste da razão que $\sum\limits_{p=1}^{\infty} d_p$ é convergente, ou seja, mostrar que

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{d_{p+1}}{d_p}\right| < 1.$$

Calculando o limite,

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{d_{p+1}}{d_p}\right| = \lim_{p\to\infty}\left|\frac{(nM)^{p+2}}{(p+1)!}\cdot\frac{p!}{(nM)^{p+1}}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{d_{p+1}}{d_p}\right| = \lim_{p\to\infty}\left|\frac{nM}{p+1}\right| = 0 < 1.$$

Portanto, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p$ é convergente e $\lim\limits_{x\to\infty} a_p = 0$.

□

Teorema 1.16. *O número de Euler é transcendente sobre* $\mathbb{R}$.

Demonstração.

Considere $g(x)$ um polinômio com coeficientes reais e de grau r. Seja,

$$F(x) = g(x) + g'(x) + g''(x) + \cdots + g^{(r)}(x)$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) &= -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) \Rightarrow \\ &= -e^{-x}(g(x) + g'(x) + \cdots + g^{(r)}(x)) + e^{-x}(g'(x) + \cdots + g^{(r+1)}(x)) \Rightarrow \\ &= -e^{-x}g(x).\end{aligned}$$

Como $e^{-x}F(x)$ é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, podemos usar o teorema do valor médio em $e^{-x}F(x)$ no intervalo $[0,k]$ com $k > 0$. Então vai existir um $k\theta_k$ com $0 \leq \theta_k \leq 1$ tal que,

$$\begin{aligned}-e^{-k\theta_k}g(k\theta_k) &= \frac{e^{-k}F(k) - e^{0}F(0)}{k-0} \Rightarrow \\ -ke^{k(1-\theta_k)}g(k\theta_k) &= F(k) - e^{k}F(0) = \varepsilon_k.\end{aligned}$$

Suponha por contradição que e seja algébrico, então existem $c_0, c_1, \ldots, c_n$ inteiros com $c_0 > 0$ tal que,

$$c_0 + c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n = 0.$$

Note que,

$$c_1\varepsilon_1 = c_1F(1) - c_1eF(0), c_2\varepsilon_2 = c_2F(2) - c_2e^2F(0), \dots, c_n\varepsilon_n = c_nF(n) - c_ne^nF(0).$$

Somando todas essas igualdades teremos,

$$c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n = c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) - F(0)(c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n).$$

Tomando $c_0 = -(c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n)$,

$$c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n). \tag{1.2}$$

Considere

$$g(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(1-x)(2-x)\dots(n-x)]^p \tag{1.3}$$

no qual p é primo, $p > n$ e $p > c_0$.

Podemos escrever

$$(1-x)(2-x)\dots(n-x) = (n!) + \sum_{i=1}^{n} d_ix^i. \tag{1.4}$$

Logo, substituindo (1.4) em (1.3)

$$g(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\left[(n!) + \sum_{i=1}^{n} d_ix^i\right]^p \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{x^{p-1}(n!)^p}{(p-1)!} + \frac{\sum\limits_{i=p}^{p(n+1)-1} d_ix^i}{(p-1)!}.$$

Note que $x = 1, 2, \dots, n$ são raízes de multiplicidade p de $g(x)$. Daí, temos que para $x = 1, 2, \dots, n$.

$$g(x) = g'(x) = g''(x) = \cdots = g^{(p-1)}(x) = 0.$$

Então, pelo **Lema 1.3** para $i \geq p$ os coeficientes das derivadas $g^{(i)}(x)$ assumem valores múltiplos de p, logo $F(x)$ é múltiplo de p para $x = 1, 2, \dots, n$. Portanto,

$$c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n)$$

é múltiplo de p.

Vamos olhar agora para $F(0)$, observe que $x = 0$ é raiz de multiplicidade $(p-1)$ de $g(x)$, então

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(p-2)}(0) = 0.$$

para $i \geq p$ temos que $g^{(i)}(0)$ é múltiplo de p pelo **Lema 1.3**. Mas temos que $g^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ como $p > n$ e p é primo então p não divide $(n!)^p$. Portanto, $g^{(p-1)}(0)$ não é múltiplo de p.

Então $F(0)$ não é múltiplo de p, pois $F(0)$ é igual a uma soma de números inteiros no qual um deles não é múltiplo de p e como $p > c_0$, c_0 não é divisível por p.

Daí,

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) \tag{1.5}$$

é um número inteiro não divisível por p. Pois, é uma soma em que todos os termos exceto um são divisíveis por p.

Agora vamos recordar que $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}g(k\theta_k)$ e vamos substituir nessa equação o $g(x)$ que definimos em (1.3) teremos,

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}\frac{(k\theta_k)^{p-1}}{(p-1)!}[(1-k\theta_k)(2-k\theta_k)\ldots(n-k\theta_k)]^p.$$

Aplicando o módulo em ε_k,

$$|\varepsilon_k| = |-ke^{k(1-\theta_k)}\frac{(k\theta_k)^{p-1}}{(p-1)!}[(1-k\theta_k)(2-k\theta_k)\ldots(n-k\theta_k)]^p| \Rightarrow$$
$$|\varepsilon_k| = k^pe^{k(1-\theta_k)}\frac{(\theta_k)^{p-1}}{(p-1)!}[|1-k\theta_k||2-k\theta_k|\ldots|n-k\theta_k|]^p.$$

Como $0 \leq k \leq n, 0 < \theta_k < 1$, para todo $0 \leq i \leq n$ a seguinte relação é válida

$$|i-k\theta_k| \leq |i| + |k\theta_k| \leq 2n.$$

Logo,

$$[|1-k\theta_k||2-k\theta_k|\ldots|n-k\theta_k|]^p \leq (2^nn^n)^p = (M)^p$$

no qual $M = 2^nn^n$ é uma constante.

Como $k \leq n$ e $0 < \theta_k < 1$, segue que

(i) $k(1-\theta_k) \leq n(1-\theta_k)$;

(ii) $k^p \leq n^p$;

(iii) $\theta_k^{p-1} < 1^{p-1} = 1$.

A partir dessas desigualdades podemos escrever,

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{n^p e^{n(1-\theta_k)} (M)^p}{(p-1)!}$$

para $k \leq n$.

Como o conjunto dos números primos é infinito, pelo **Lema 1.4** podermos fazer o lado direito da desigualdade acima muito próximo de zero, para p suficientemente grande. Então, os ε_k podem ser bem próximos de zero.

Daí,

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n| < 1 \tag{1.6}$$

para p suficientemente grande.

Por (1.2) e (1.5), o lado esquerdo da desigualdade anterior é um número inteiro, logo,

$$c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n = 0$$

Então,

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) = 0.$$

Concluímos então que $c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n)$ é divisível por p. Mas isso é um absurdo, uma vez que na equação (1.5) chegamos que não era divisível por p. Portanto, o número e é transcendente.

□

CAPÍTULO 2

Números de Liouville

A ideia de Liouville para encontrar uma família de números transcendentes foi perceber uma propriedade que seja satisfeita por todos os números reais algébricos e depois, construir um número real que não satisfizesse esta propriedade. Essa propriedade é chamada de Teorema de Liouville e pode ser utilizada para encontrar diversos números transcendentes. Mas antes de falarmos sobre o Teorema de Liouville é necessário tratar sobre aproximação de irracionais por racionais.

2.1 Aproximação de Irracionais por Racionais

Entender esse tipo de aproximação é muito importante uma vez que os transcendentes são irracionais e os números de Liouville estão intimamente ligados à ideia de aproximação por racionais.

Teorema 2.1. *Para todo número irracional α, existe um inteiro m de modo que*

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

Demonstração.

Seja α um número irracional, escolhemos um m inteiro mais próximo de α, podendo ele ser imediatamente maior ou menor que α, perceba que a distância entre α e m é menor que $\frac{1}{2}$, pois caso contrário m não seria o inteiro mais próximo de α ou α estaria no meio de dois números inteiros consecutivos e seria da forma $\frac{j}{2}$ com $j \in \mathbb{Z}$, o que é um absurdo. Portanto,

$$|\alpha - m| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

□

No teorema anterior já temos uma aproximação interessante, mas veremos a seguir que é possível aproximações melhores e como elas estão ligadas a idea de Liouville.

Teorema 2.2. *Seja α um número irracional qualquer e r racional diferente de zero, então a adição, subtração, produto e divisão de r e α resultam em um irracional.*

Demonstração.

Sejam α um irracional e r um racional. Suponha por contradição que $\alpha+r$, $\alpha-r$, $\alpha\cdot r$, $\frac{r}{\alpha}$ e $\frac{\alpha}{r}$ sejam racionais, ou seja,

$$\alpha+r=r_1,\ \alpha-r=r_2,\ \alpha.r=r_3,\ \frac{r}{\alpha}=r_4,\ \frac{\alpha}{r}=r_5$$

com $r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$ e $r_5 \in \mathbb{Q}$. Daí,

$$\alpha=r_1-r,\ \alpha=r_2+r,\ \alpha=\frac{r_3}{r},\ \alpha=\frac{r}{r_4},\ \alpha=r_5\cdot r.$$

como a soma, subtração e produto de racionais é um racional, α é um racional, o que é um absurdo porque α é irracional.

□

Teorema 2.3. *Sejam β um número irracional qualquer e n um inteiro positivo não nulo qualquer, então existe um número racional de denominador n, tal que*

$$\left|\beta-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{2n}.$$

Demonstração.

Seja β un número irracional e n um número inteiro positivo não nulo. Pelo teorema anterior $n\beta$ é irracional, seja m o número inteiro mais próximo de $n\beta$, pelo **Teorema 2.1**

$$-\frac{1}{2}<n\beta-m<\frac{1}{2}.$$

Daí,

$$-\frac{1}{2n}<\beta-\frac{m}{n}<\frac{1}{2n}\Rightarrow$$
$$\left|\beta-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{2n}.$$

□

Teorema 2.4. *Dado um número irracional α e um inteiro positivo não nulo k, existe um racional $\frac{m}{n}$, onde n não excede k, de modo que*

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nk}.$$

Demonstração.

Seja α irracional e k inteiro positivo não nulo. Então, $n\alpha$, com n variando de 1 até k, pode ser escrito como

$$n\alpha = x_n + y_n$$

onde os x_n são as partes inteiras e y_n são as partes decimais dos $n\alpha$.

Daí, teremos

$$n\alpha - x_n = y_n$$

onde $n\alpha - x_n$ é irracional, segundo o **Teorema 2.2** e pode assumir valores entre (0,1), pois é igual a y_n.

Agora dividiremos o intervalo (0,1) em k partes, com cada parte com $\frac{1}{k}$ de comprimento, onde o intervalo I_1 contém os números entre 0 e $\frac{1}{k}$, o I_2 contém os números entre $\frac{1}{k}$ e $\frac{2}{k}$ e assim por diante. Como os y_n's são irracionais eles não são iguais a

$$0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \frac{k}{k}.$$

Temos que analisar alguns casos.

Caso 1: O intervalo I_1 contém um ou mais y_n's

Portanto, existe um y_n em I_1 e como $y_n = n\alpha - x_n$ e como I_1 é o intervalo de 0 a $\frac{1}{k}$

$$0 < n\alpha - x_n < \frac{1}{k}, \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k} < n\alpha - x_n < \frac{1}{k},$$

dividindo por n, obtemos

$$-\frac{1}{nk} < \alpha - \frac{x_n}{n} < \frac{1}{nk},$$

Caso 2: O intervalo I_1 não contém nenhum dos y_n's.

Sendo assim os k números estão nos $k-1$ intervalos restantes $I_2,\ I_3,\ \ldots,\ I_k$

Utilizando o princípio da casa dos pombos, terá que existir pelo menos um intervalo com dois ou mais y_n's. Suponha que y_j e y_d estejam no mesmo intervalo onde j e d são números distintos e estão dentre $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ k$ com $j > d$ onde $j - d$ é inteiro positivo menor que k. Logo,

$$-\frac{1}{k} < y_j - y_d < \frac{1}{k},$$

pois y_j e y_d estão no mesmo intervalo então sua diferença está entre $-\frac{1}{k}$ e $\frac{1}{k}$. Como $y_j = j\alpha - x_j$ e $y_d = d\alpha - x_d$,

$$-\frac{1}{k} < (j\alpha - x_j) - (d\alpha - x_d) < \frac{1}{k}, \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k} < (j-d)\alpha - (x_j - x_d) < \frac{1}{k}.$$

Chamado $(j-d)$ de n e $(x_j - x_d)$ de m

$$-\frac{1}{k} < n\alpha - m < \frac{1}{k},$$

Como n é um inteiro positivo vamos dividir os termos da desigualdade por n,

$$-\frac{1}{nk} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{nk}.$$

□

Definição 2.1. Um número real α é aproximável na ordem n por racionais, se existirem uma constante $C > 0$ e uma sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j\geq 1}$ de racionais distintos, com $q_j \geq 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tais que,

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{C}{q_j^n}$$

para todo $j \geq 1$.

De maneira geral, se um número α é aproximável por ordem n, então ele é aproximável em ordem k, com $k < n$, pois $\frac{1}{q_j^n} \leq \frac{1}{q_n^k}$.

Agora que temos alguma noção a respeito de aproximação de irracionais por racionais podemos desenvolver os conceitos referentes aos Números de Liouville.

Teorema 2.5. ***(Liouville)*** *Seja α uma raiz real de um polinômio irredutível $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grau $n \geq 2$. Então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n} \tag{2.1}$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Demonstração.

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ polinômio minimal de α. Como todo polinômio não-nulo tem uma quantidade finita de raízes, então o conjunto de raízes de $f(x)$ é discreto. Então, $\exists\ \delta > 0$ tal que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap R_f = \{\alpha\}$, onde $R_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$. Como queremos provar que o teorema é válido para todo racional teremos dois casos, além disso podemos supor que $q \geq 1$ e $mdc(p,q) = 1$.

Caso 1: Dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

Vamos ter $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta$, pois como $\frac{p}{q}$ não está no intervalo, a distância entre a fração e α será maior que δ. Então, como $q \geq 1$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta \geq \frac{\delta}{q^n}.$$

Caso 2: $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

Como f é contínua e infinitamente derivável no intervalo com extremos α e $\frac{p}{q}$, pelo Teorema do Valor Médio existe um c entre α e $\frac{p}{q}$ tal que

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(c)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$$

Como α é raíz de $f(x)$, então

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(c)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$$

Aplicando o modulo,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(c)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

Como f' é contínua e limitada no intervalos de extremos α e $\frac{p}{q}$, ela possui um máximo. Então, $|f'(x)| \leq M$, para todo x entre α e $\frac{p}{q}$. Daí,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(c)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Por outro lado, como $\frac{p}{q}$ não é raiz pois no intervalo a única raiz é o α, teremos

$$0 \neq f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1\frac{p}{q} + ... + a_n\frac{p^n}{q^n}$$

aplicando o modulo

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_0 + a_1\frac{p}{q} + ... + a_n\frac{p^n}{q^n}\right| \Rightarrow$$
$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{\left|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_np^n\right|}{q^n}.$$

Como $\left|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_np^n\right| \in \mathbb{Z}$ e é maior que zero, o menor número que ele pode assumir é 1. Daí,

$$0 \neq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{\left|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_np^n\right|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}$$

E teremos o seguinte,

$$M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n} \Rightarrow$$

$$M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n} \Rightarrow$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n} \Rightarrow$$

Tomando $c(\alpha) = min\{\delta, \frac{1}{M}\}$, o teorema fica demonstrado.

□

Ou seja, uma vez que como o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, todo número real pode ser aproximado por racionais. E dizemos que um número real é bem aproximado por racionais se é aproximável na ordem n. Então se observarmos bem o teorema e compararmos com a **Definição 2.1**, o que chegamos é que os números algébricos não são bem aproximados por racionais. Então pensando nisso Liouville construiu uma classe de números que hoje são conhecidos como números de Liouville, onde esses números são transcendentes.

Definição 2.2. Um número real α é chamado de número de Liouville se existir uma sequência $(\frac{p}{q})_{j\geq 1}$, de racionais distintos com $q_j > 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j},$$

para todo $j \geq 1$. Vamos denotar o conjunto dos números de Liouville por $\mathbb{L}$.

Proposição 2.1. *A sequência $(q_j) > 1$ da definição anterior é ilimitada.*

Demonstração.

Suponha por contradição que (q_j) é limitada, então existe um $M > 0$, tal que $(q_j) \leq M$. Além disso, pela definição anterior e pelo fato que $q_j > 1$ temos,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < 1.$$

Multiplicando a desigualdade acima por q_j teremos,

$$\left|\alpha q_j - p_j\right| < q_j \leq M,$$

utilizando o fato que $|a-b| \geq |a| - |b|$, teremos

$$|p_j| - |\alpha q_j| \leq M \Rightarrow$$

$$|p_j| \leq M + |\alpha q_j| \leq M + |\alpha| M = (1 + |\alpha|)M,$$

ou seja, (p_j) é limitado, então a sequência $\frac{p_j}{q_j}$ é finita, o que é um absurdo pois a sequência é infinita. Portanto (q_j) é ilimitada. □

Teorema 2.6. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração.

Seja α um número de Liouville. Suponha por absurdo que α é racional, ou seja, $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. Assim, existe uma sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j\geq 1}$ tal que,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{pq_j - p_j q}{qq_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$$

Como $pq_j - p_j q \in \mathbb{Z}$, então $|pq_j - p_j q| \geq 1$,

$$\frac{1}{|qq_j|} \leq \left|\frac{pq_j - p_j q}{qq_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|qq_j|} < \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow$$

$$|qq_j| > q_j^j.$$

Como $q_j > 1$,

$$|q|q_j > q_j^j \Rightarrow$$

$$|q| > q_j^{j-1}.$$

O que é um absurdo uma vez que a sequência (q_j) é ilimitada. Portanto todo número de Liouville é irracional. $\square$

Teorema 2.7. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração.

Vamos supor que g é número de Liouville e algébrico de grau n, ou seja, é um número que é solução de uma equação de grau n com coeficientes inteiros e de nenhuma de grau inferior. Então existe $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ tal que,

$$\left|g - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \qquad \forall j \geq 1$$

Pelo teorema de Liouville,

$$\frac{A}{q_j^n} < \left|g - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$$

onde A é uma constante positiva. Então,

$$\frac{A}{q_j^n} < \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{A} > q_j^{j-n}$$

o que é um absurdo, pois se $j \geq n+1$, então,

$$q_j \leq q_j^{j-n} < \frac{1}{A}.$$

E $(q_j)_{j\geq 1}$ seria limitada, porém como já provamos é ilimitada.

$\square$

Exemplo 2.1. O número

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

é transcendente. De fato, vamos mostrar que l é um número de Liouville e por consequência ele será trasncendente pelo **Teorema 2.7**.

Sejam,

$$p_j = \sum_{n=1}^{j} 10^{j!-n!} \;\; e \;\; q_j = 10^{j!}$$

onde $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ e $j \geq n$.

Então,

$$\frac{p_j}{q_j} = \sum_{n=1}^{j} 10^{-n!}.$$

Assim,

$$\left| l - \frac{p_j}{q_j} \right| = \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \ldots \Rightarrow$$
$$\sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \ldots \right).$$

Agora note que $(j+k)!-(j+1)! \geq k-1$ para $k \geq 2$, pois colocando $(j+1)!$ em evidência do lado esquerdo da desigualdade teremos

$$(j+1)!\big[(j+k)...(j+2)-1\big]$$

como $j \geq 1$, somente a parcela $(j+k)(j+2)-1$ ja é maior que $k-1$, então,

$$(j+1)!\big[(j+k)...(j+2)-1\big] \geq k-1.$$

Ou seja, $(j+2)!-(j+1)! \geq 2-1=1$, $(j+3)!-(j+1)! \geq 3-1=2$ e assim por diante.

Então,

$$\left|l-\frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1+\frac{1}{10}\frac{1}{10^2}+...\right),$$

Como $\left(1+\frac{1}{10^2}+...\right)$ é uma série geométrica

$$\left|l-\frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{10}{9.10^{(j+1)!}} \Rightarrow,$$

$$\left|l-\frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{(j+1)!-1}}.$$

Como queremos provar que $\frac{1}{10^{(j+1)!-1}} < \frac{1}{q_j^j} = \frac{1}{10^{j!j}}$, então basta mostrar que $j!j < (j+1)!-1$ para que assim l seja número de Liouville e consequentemente transcendente. Daí,

$$j!j < (j+1)!-1 \iff$$
$$j!j < (j+1)j!-1 \iff$$
$$j!j < jj!+j!-1.$$

Portanto,

$$\left|l-\frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$$

e o número

$$l=\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

é transcendente. Esse número é chamado constante de Liouville e foi o primeiro número transcendente conhecido.

2.2 Alguns Resultados Sobre os Números de Liouville

Nessa seção veremos alguns resultados interessantes a respeito dos números de Liouville, sendo um deles um teorema demonstrado por P.Erdős, em 1962, que diz que todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville, que de certa forma, é um resultado impressionante tendo em vista que quase todos os números transcendentes reais não são números de Liouville. [1] pág:67 e 86.

Teorema 2.8. *L é um número de Liouville se, e somente se, para todo $j \in \mathbb{N}^*$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. de modo que*

$$\left|L - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}, \ \ \forall n \geq 1.$$

Demonstração.

Seja L número de Liouville, então existe uma sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j\geq 1}$ racionais distintos e irredutíveis tal que,

$$\left|L - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \ \ \forall j \geq 1.$$

Fazendo $j = n$ e $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$ teremos

$$\left|L - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Por outro lado, se L é tal que $\forall n > 0$ existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left|L - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n},$$

considere a sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j\geq 1}$ de elementos distintos, de forma que os elementos dessa sequência satisfazem a desigualdade anterior, então

$$\left|L - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Portanto, L é número de Liouville.

$\square$

Teorema 2.9. *Sejam $\alpha \in \mathbb{Q}$ e L um número de Liouville. Então $\alpha + L$ é um número de Liouville.*

Demonstração.

Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, onde $mdc(a,b) = 1$ e L um número de Liouville. Logo, existe uma sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j \geq 1}$ tal que,

$$\begin{aligned}
\left| L - \frac{p_j}{q_j} \right| &< \frac{1}{q_j^j}, \ \forall j \geq 1 \Rightarrow \\
\left| -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + L - \frac{p_j}{q_j} \right| &< \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow \\
\left| \left(L - \frac{a}{b} \right) - \left(\frac{p_j}{q_j} + \frac{a}{b} \right) \right| &< \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow \\
\left| \left(L - \frac{a}{b} \right) - \left(\frac{bp_j + aq_j}{bq_j} \right) \right| &< \frac{1}{q_j^j}.
\end{aligned}$$

Sabemos que (q_j) é ilimitada, pois L é número de Liouville. Dado $n \in \mathbb{N}$, escolhendo $j > n$, tal que

$$(bq_j)^n = b^n q^n < q_j^j$$

então,

$$b^n < q_j^{j-n}$$

Chamando $p = bp_j + aq_j$ e $q = bq_j$ teremos,

$$\left| \left(L + \frac{a_1}{b} \right) - \left(\frac{bp_j + aq_j}{bq_j} \right) \right| < \frac{1}{q_j^j}$$

onde $a_1 = -a$como

$$\begin{aligned}
b^n q_j^n &< q_j^j \Rightarrow \\
\frac{1}{b^n q_j^n} &> \frac{1}{q_j^j}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\left|\left(L+\frac{a_1}{b}\right)-\left(\frac{p}{q}\right)\right|<\frac{1}{b^n q_j^n}\Rightarrow$$
$$\left|\left(L+\frac{a_1}{b}\right)-\left(\frac{p}{q}\right)\right|<\frac{1}{(bq_j)^n}\Rightarrow$$
$$\left|\left(L+\frac{a_1}{b}\right)-\left(\frac{p}{q}\right)\right|<\frac{1}{q^n}.$$

Portanto, pelo **Teorema 2.8** temos que $L+\frac{a_1}{b}$ é um número de Liouville.

□

Teorema 2.10. ***(Erdös)*** *Qualquer número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville.*

Demonstração.

Seja $r\in\mathbb{R}$, então temos duas possibilidades r é racional ou é irracional. Se r for racional, dado $l_1\in\mathbb{L}$ pelo **Teorema 2.9** $l_2=r+l_1$ onde $l_2\in\mathbb{L}$, então $r=l_1-l_2$. Caso r seja irracional, assumindo sem perda de generalidade que $0<r<1$. Daí,

$$r=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n 2^{-n},$$

com $\varepsilon_n\in\{0,1\}$.

Suponha que

$$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}a_n 2^{-n},$$

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}b_n 2^{-n},$$

onde para $n!\leq k<(n+1)!$ temos,

$$a_k=\varepsilon_k \text{ e } b_k=0 \text{ se } n=1,3,5,..., \text{ ou seja, se } n \text{ for ímpar,}$$

$$a_k=0 \text{ e } b_k=\varepsilon_k \text{ se } n=2,4,6,..., \text{ ou seja, se } n \text{ for par.}$$

Ou seja, $r=\alpha+\mu$. Agora falta provar que α, μ são números de Liouville. Vamos começar por α, dado $n\geq 1$ qualquer definimos $p_n=q_n(a_1 2^{-1}+...+a_{(2n)!-1}2^{-(2n)!+1})$ e $q_n=2^{(2n)!-1}$. Portanto,

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^{(2n)!-1} a_i 2^{-i} = \sum_{i=(2n)!}^{\infty} a_i 2^{-i}$$

como estamos trabalhando com α, sabemos que para $(2n)! \leq i < (2n+1)!$ temos $a_n = 0$, então

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\sum_{i=(2n+1)!}^{\infty} a_i 2^{-i}\right| \leq \sum_{i=(2n+1)!}^{\infty} 2^{-i}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=(2n+1)!}^{\infty} 2^{-i} &= 2^{-(2n+1)!} + 2^{-((2n+1)!+1)} + 2^{-((2n+1)!+2)} + \ldots \Rightarrow \\
&= 2^{-(2n+1)!}(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots) \Rightarrow \\
&= 2^{-(2n+1)!}2 \\
&= 2^{-(2n+1)!+1} < 2^{-n((2n)!-1)} = \frac{1}{q_n^n} \Rightarrow
\end{aligned}$$

portanto, α é número de Liouville, pois $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}$.

Para μ, dado $n \in \mathbb{N}^*$ seja $q_n = 2^{(2n)!}$ e $p_n = q_n(b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \ldots + b_n 2^{-(2n)!})$. Então

$$\mu - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^{(2n)!} b_i 2^{-i} = \sum_{i=(2n)!+1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

como estamos utilizando μ sabemos que para $(2n+1)! \leq i < (2n+2)!$ $b_k = 0$, daí,

$$\left|\mu - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{i=(2n+2)!}^{\infty} b_i 2^{-i} \leq \sum_{i=(2n!+2)!}^{\infty} 2^{-i}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=(2n+2)!}^{\infty} 2^{-i} &= 2^{-(2n+2)!}(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots) \Rightarrow \\
&= 2^{-(2n+2)!}2 \Rightarrow \\
&= 2^{-(2n+2)!+1} < 2^{-n(2n)!} = \frac{1}{q_n^n}.
\end{aligned}$$

Portanto, μ é número de Louville.

□

Teorema 2.11. *O conjunto dos números de Liouville $\mathbb{L}$ é não enumerável.*

Demonstração.

Suponha por absurdo que o conjunto dos números de Liouville $\mathbb{L}$ é enumerável. Pelo **Teorema 1.3** segue que $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ é enumerável.

Pelo **Teorema 2.10** é possível associar o conjunto dos reais e $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$, a partir da função injetora $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L} \times \mathbb{L}$, onde dado $(x+y) = r \in \mathbb{R}$ teremos $h(r) = (x,y) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L}$.

Portanto, pelo **Corolário 1.1** teríamos que $\mathbb{R}$ é enumerável, o que é um absurdo. Portanto, o conjunto dos números de Liouville não é enumerável. □

CAPÍTULO 3

A Função Zeta de Riemann $\zeta(n)$

A função Zeta de Riemann é uma função de uma variável complexa que pode ser expressa por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

onde s pode ser qualquer número complexo diferente de 1, e cujos valores também são complexos.

É uma função de extrema importância na Teoria dos Números e vem chamando a atenção de matemáticos no mundo todo, uma vez que, ela está intimamente ligada ao estudo dos números primos e a Hipótese de Riemann que é um dos sete problemas do Prémio Millennium e considerado um dos problemas não resolvidos mais importante da matemática.

Essa função é igual a zero para inteiros negativos pares e esses zeros são chamados de zeros triviais, mas existem outros valores para os quais essa função seja igual a zero, que são os zeros não-triviais, a Hipótese de Riemann afirma que a parte real de todo zero não trivial da função zeta de Riemann é igual a $\frac{1}{2}$. Alguns resultados conhecidos a respeito da função $\zeta(n)$ são a irracionalidade de $\zeta(3)$ demonstrado pelo matemático Roger Apéry em 1977 e o valor de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, que mesmo com um equívoco, foi demonstrado por Euler em 1735.

3.1 O Problema da Basileia

Em 1644 o matemático italiano Pietro Mengoli propôs um problema matemático que consistia em encontrar o resultado da seguinte soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$$

Muitos matemáticos famosos daquela época tentaram resolver esse problema como por exemplo Jakob Bernoulli, mas não obtiveram sucesso, no máximo um fato conhecido era a convergência dessa série. Porém, em 1735 aos 28 anos, Leonhard Euler conseguiu demonstrar que essa série era igual a $\frac{\pi^2}{6}$, o problema ficou conhecido como "Problema da Basileia" pois Euler nasceu e se formou nesta cidade. Em 1859, as ideias de Euler foram retomadas em um artigo publicado por Bernhard Riemann onde ele definiu a função zeta $\zeta(n)$ e demonstrou as suas propriedades básicas.

Hoje em dia existem demonstrações mais rigorosas do que a apresentada por Euler, a respeito do "Problema da Basileia", que hoje conhecemos como $\zeta(2)$, uma vez que, mesmo com o resultado correto, Euler cometeu um equívoco ao não considerar que séries de potências não são polinômios, então não compartilham todas as suas propriedades. Vamos ver duas demonstrações diferentes para $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, uma envolvendo integrais duplas e a outra utilizando série de Fourier.

3.1.1 Encontrando o valor de $\zeta(2)$ através de integrais duplas.

Vamos considerar a seguinte integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dxdy,$$

só que podemos reescrever a integral acima utilizando o seguinte fato, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$$

é uma serie geométrica infinita, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1}{1-xy}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy \Rightarrow \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x=0}^{x=1} dy \Rightarrow \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}\,dy \Rightarrow \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).
\end{aligned}$$

Ou seja, resolvendo essa integral chegaremos no valor de $\zeta(2)$.

Então vamos começar fazendo uma mudança de variável em

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dxdy$$

Onde o domínio de integração que é um quadrado irá girar em torno de seu eixo em um ângulo de $\frac{\pi}{4}$, além disso $u = \frac{x+y}{2}$ e $v = \frac{y-x}{2}$, então $x = u - v$ e $y = u + v$.

$$\text{J}= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Daí,

$$\iint_V \frac{1}{1-xy}\,dA = 2\iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2}\,dS.$$

Como o quadrado é simétrico podemos separar em duas regiões

$$2\iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2}\,dS = 4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u \frac{dudv}{1-u^2+v^2} + 4\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^u \frac{dudv}{1-u^2+v^2}$$

reescrevendo $1-u^2+v^2$ como $\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2+v^2$ e integrando em relação a dv teremos

$$\underbrace{4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)}\,du}_{I_1} + \underbrace{4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)}\,du}_{I_2} = I_1 + I_2$$

Calculando primeiro I_1,

$$4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)}\,du.$$

Chamando $u = sen(\theta)$ teremos que $du = cos(\theta)d\theta$.

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{arctg\left(\frac{sen(\theta)}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}}\right)}{\left(\sqrt{1-sen^2(\theta)}\right)} cos(\theta)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{arctg\left(\frac{sen(\theta)}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}}\right)}{\left(\sqrt{cos^2(\theta)}\right)} cos(\theta)d\theta$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctg\left(\frac{sen(\theta)}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}}\right)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctg\left(\frac{sen(\theta)}{\sqrt{cos^2(\theta)}}\right)d\theta$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctg\big(tg(\theta)\big)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}.$$

Portanto, $I_1 = \frac{\pi^2}{18}$.

Agora calculando I_2.

Chame $u = cos(2\theta)$ então, $du = -2sen(2\theta)d\theta$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)} du = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{arctg\left(\frac{1-cos(2\theta)}{\sqrt{1-cos^2(2\theta)}}\right)}{\left(\sqrt{1-cos^2(2\theta)}\right)} 2sen(2\theta)d\theta$$

como $sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$ e $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctg\left(\sqrt{\frac{1-cos(2\theta)}{1+cos(2\theta)}}\right)d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctg\left(\sqrt{\frac{2sen^2(\theta)}{2cos^2(\theta)}}\right)d\theta$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctg(tg(\theta))d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Agora somando I_1 e I_2

$$\frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^2}{18} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.1.2 Encontrando o valor de $\zeta(2)$ através de série de Fourier.

No livro “Théorie Analytique de la Chaleur”, escrito em 1822, onde a partir do aprofundamento nos estudos relacionados a Séries Trigonométricas, o matemático Joseph Fourier desenvolveu o que conhecemos hoje como Séries de Fourier, que são utilizadas em diversas áreas das ciências. E uma das formas de encontrar valor de $\zeta(2)$ utilizando série de Fourier.

Definição 3.1. A série de Fourier é uma função da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$$

com $n \in \mathbf{N}$ onde

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx.
\end{aligned}$$

Para encontrar $\zeta(2)$ considere $f(x) = x^2$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Primeiro vamos determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n, começando por a_0

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx, \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Para a_n teremos,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos(nx)\, dx,
\end{aligned}$$

fazendo integral por partes. Seja $u = x^2$ e $dv = cos(nx)dx$, então $du = 2xdx$ e $v = \frac{sen(nx)}{n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{sen(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{sen(nx)}{n}\, dx \right].$$

Fazendo novamente a integral por partes, dessa vez chamando $u = 2x$ e $dv = \frac{sen(nx)}{n}$, teremos $du = 2dx$ $v = \frac{-cos(nx)}{n^2}$. Daí

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{sen(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2x cos(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{cos(nx)}{n^2}\, dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{sen(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2xcos(nx)}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2sen(nx)}{n^3}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right].$$

Como n é natural, temos que para $sen(n\pi) = 0$ e $cos(n\pi) = (-1)^n$, então

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n.$$

Para calcular b_n, perceba que não é necessário calcular a integral,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\,dx,$$

pois $f(x)\cdot sen(x)$ é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico, portanto

$$b_n = 0.$$

Agora que temos todos os coeficientes podemos proseguir com a série de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$$

$$x^2 = \frac{2\pi^2}{3.2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{4}{n^2}(-1)^n.cos(nx)\big).$$

utilizando a igualdade acima e tomando $x = \pi$,

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n.cos(n\pi)\right)\\
\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(-1)^n.(-1)^n\right)\\
\frac{3\pi^2-\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
\frac{2\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
\frac{2\pi^2}{3}\frac{1}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

De forma mais geral o valor de $\zeta(n)$ para argumentos pares é conhecida,

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}$$

onde $(B_k)_k$ é a sequência dos números de Bernoulli, que é definida como os coeficientes da série

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_0^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

E um fato interessante que vale ser ressaltado, $\zeta(2n)$ é transcendente para todo n natural, se B_{2n} for um algébrico não nulo, mais ainda, é possível provar que $B_{2n} \in \mathbb{Q}^*$ para todo $n \geq 0$. [1] pág: 110.

Outro resultado que vale ser citado a respeito da função zeta de Riemann, é a irracionalidade de $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, que foi demonstrada pelo matemático francês Roger Apéry, e por isso hoje é conhecida como Constante de Apéry, muitos se referem a demonstração feita por Apéry como miraculosa, por possui muita tecnicalidade, porém um ano depois F.Beukers exibiu uma demonstração mais simples.

Existem diversas formas de representar $\zeta(3)$, por integrais, uma das formas mais simples de representá-la é como uma integral tripla, para isso tomamos o fato que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xyz)^n = \frac{1}{1-xyz}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz} dxdydz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xyz)^n dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} y^n z^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x=0}^{x=1} dydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n z^n}{n+1} dydz \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2} dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).
\end{aligned}$$

Mas ainda existem muitas dúvidas acerca dessa função, principalmente sobre seus argumentos ímpares, se são irracionais ou não, até hoje somente o $\zeta(3)$ teve sua irracionalidade demonstrada, porém o matemático T. Rivoal (2000) demonstrou que existem infinitos números irracionais para os argumentos ímpares da função $\zeta(n)$ e o matemático W. Zudilin (2001) demonstrou que pelo um desses números $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ é irracional. A priori como todo número transcendente é irracional, então é importante saber se esses números são ou não irracionais, uma vez que, até agora não se sabe por exemplo se $\zeta(3)$ é transcendente ou algébrico.

Considerações Finais

Essa monografia abordou pontos importantes a respeito dos números transcendentes, sendo um ponto de partida interessante para a continuação e aprofundamento desta teoria. Daqui em diante diversos tópicos podem ser explorados, como por exemplo, a classificação de Mahler que é uma generalização da construção de Liouville de números transcendentes ou o teorema de Lindemann–Weierstrass que é uma ferramenta interessante para estabelecer números transcendentes, enfim, as possibilidades são diversas.

Espero que esse trabalho sirva de inspiração e que seja a porta de entrada para outros estudantes terem contato com a teoria dos números transcendentes, pois realmente é uma área muito interessante e com muitos mistérios para serem descobertos.

Referências Bibliográficas

[1] MARQUES, D. **Teoria dos Números Transcendentes**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] LIMA, E. L. **Análise Real**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[3] NIVEN, I. M. **Números: Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

[4] MUELLER, R. E. **Números de Liouville**. Monografia - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina. Blumenau, 2018.

[5] RAMALHO, A. F. A; DIAS, M. L. **Uma Conversa Sobre Números Transcendentes**.

[6] SULLIVAN, W. R. **Numerous Proofs of** $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Dísponivel em: <https://www.math.cmu.edu/ bwsulliv/MathGradTalkZeta2.pdf> Acesso em: Maio, 2021.

[7] GAYO, J.; WILHELM, R. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 342–355.

[8] LATEFÁ, C. A.; SILVA, E.; LELIS, J. Teoria dos Números Transcendentes: do teorema de Liouville à conjectura de Schanuel. **Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 1. p. 01-32. 2016.

[9] OLIVEIRA, D. **Números Transcendentes: Números de Liouville e a Constante de Chapernowne**. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal de São João del Rei - Campus Alto Paraopeba, 2015.

[10] APOSTOL, T. M. A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way. **The Mathematical Intelligencer**. v. 5, n. 3, p. 59-60, 1983.

[11] FARIA, N. A. **Um Estudo Sobre Números Irracionais e Transcendentes**. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal de Viçosa. Florestal, 2019.

[12] AMARANTE, E. M. D. S. **Uma Abordagem Sobre os Números de Liouville.**. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal da Bahia. Bahia, 2017.

[13] SALVADO, C. D. **Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio.**. Tese de Doutorado. Dissertação (Trabalho de Graduação (TCC))—IMPA, 2016.

[14] ERDŐS, P. **Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers**. 1961.

[15] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Monografia - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina. Blumenau, 2018.

[16] SODRÉ, U. **Séries de Fourier**. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/sfourier.pdf>. Acesso em: Maio, 2021.

[17] MORGADO, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[18] WADIM, Z. **Zeta values on the Web**. Disponível em: <https://wain.mi.ras.ru/zw/>. Acesso em: Maio, 2021.

[19] VIEIRA, L. et al. Introdução aos números transcendentes e aos números de Liouville. **PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE**, v. 7, p. 77-94, 2019.

[20] MARQUES, D. **Números Algébricos e Transcendentes (09/11/2012)**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FARHTitcd5A&t=2142s>. Acesso em: Maio, 2021.

[21] SANTOS, J. C. **Quadratura do círculo**. Disponível em: <https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/quadratura.html>. Acesso em: Maio, 2021.