Universidade Federal Rural de Pernambuco
Licenciatura plena em matemática

Hugo Henryque Coelho e Silva

Um estudo sobre completude e compacidade em espaços métricos

Recife - PE
Dezembro de 2019

Um estudo sobre completude e compacidade em espaços métricos

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Profª. Drª. Yane Lísley Ramos Araújo

Recife - PE
Dezembro de 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H525e Silva, Hugo Henryque Coelho e Silva
Um estudo sobre completude e compacidade em espaços métricos / Hugo Henryque Coelho e Silva Silva. - 2019.
81 f.

Orientadora: Yane Lisley Ramos .
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2020.

1. Espaços métricos . 2. Completude. 3. Compacidade. I. , Yane Lisley Ramos, orient. II. Título

CDD 510

Hugo Henryque Coelho e Silva

Um estudo sobre completude e compacidade em espaços métricos

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Aprovado em: 18/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Yane Lísley Ramos Araújo (Orientadora)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Recife - PE
Dezembro de 2019

Agradecimentos

Agradeço a deus por toda força concedida durante todos os momentos da graduação que foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

A toda minha familia, em especial, aos meus pais Sandra e Sigefredo Jr. e aos meus avós Maria Cortêz e Paulo por todo apoio emocional e financeiro que permitiu que eu não tivesse nenhuma atividade além das acadêmicas.

A minha orientadora Yane Lísley por todo apoio durante a graduação e por sempre acreditar em mim, até nos momentos inacreditáveis.

Ao professor Reginaldo Jr. do IFPB por todas as contribuições na utilização da plataforma Overleaf.

Aos meus amigos do grupo HLR/HRL que foram boas companhias em momentos fora da faculdade, em especial, a Júlia Aguiar, Rijkaard e a Jonathan Alves.

Aos meus amigos de graduação, que me ajudaram a trilhar o caminho árduo da matemática e tanto contribuíram em meus estudos. Destes, destaco: Elizabeth, Thays Nunes, Ewellyn, Vonaldo e Daniel pelas parcerias de estudos.

Aos meus amigos da UFRPE que partilharam bons momentos comigo, dentre eles, Hugo Nascimento, Guilherme Martins, João Pedro, Danilo Feijó e Alexandre Siqueira.

À Mariana Franco e Jhonata Avelar por todo apoio nos bons e maus momentos e por toda força e conquistas que partilhamos ao longo desses anos.

Aos meus amigos do grupo do tancredo Lucas Wanderley, Laryssa e Gabriel Lucena pelas companhias na volta para casa.

Novamente a Laryssa e a Hellen por todas as companhias nas aulas da noite e por, na maioria das vezes emprestar o cartão.

A Bruno Apolinário por deixar esse fim de curso mais leve.

A todos os professores do departamento de matemática da UFRPE que contribuíram de forma direta ou indireta na minha formação, em especial, aos professores Gilson Carvalho, Daniel Cassimiro, Bárbara Costa, Tarciana Santos e Thamires Cruz. E aos professores do departamento de educação Eveline Vieira e Severino Barros, e do departamento de Letras Mari Noeli.

A todos os membros da banca pelas valiosas contribuições para a versão final desta monografia.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre a teoria dos espaços métricos completos e compactos. Inicialmente, abordaremos alguns conceitos básicos relativos à teoria dos espaços métricos, continuidade e sequências em espaços métricos. Em seguida, elencaremos uma motivação para o estudo da teoria dos espaços métricos completos, algumas de suas propriedades e resultados válidos nesses espaços, tais como o teorema de Baire e o teorema do ponto fixo de Banach bem como algumas de suas aplicações. Por fim, apresentaremos um estudo sobre a teoria dos espaços métricos compactos, abordando suas propriedades gerais e alguns resultados importantes da análise matemática que são válidos nestes espaços, como podemos citar o teorema de Riesz e o teorema de Ascoli-Arzelá.

Palavras-Chave: Espaços métricos; Completude; Compacidade.

Abstract

In this work we will present a study about the theory of complete and compact metric spaces. Initially, we will cover some basic concepts related to the theory of metric spaces, continuity and sequences in metric spaces. Next, we will list a motivation for the study of the theory of complete metric spaces, some of their properties and valid results in these spaces, such as Baire's theorem and Banach's fixed point theorem as well as some of its applications. Finally, we will present a study about the theory of compact metric spaces, addressing its general properties and some important results of the mathematical analysis that are valid in these spaces, as we can mention Riesz theorem and Ascoli-Arzelá theorem.

KeyWords: Metric Space; Complete; Compact.

Sumário

Lista de Siglas e Abreviaturas

$\mathcal{C}(M, N)$ - Conjunto das aplicações contínuas $f : M \to N$.

$\mathcal{F}(M, N)$ - Conjunto de todas as aplicações $f : M \to N$.

diam(X) - $\mathrm{diam(X) = sup\{d(x, y)\ ;\ x, y \in X\}}$.

inf(X) - Ínfimo de um conjunto X

$\sup(X)$ - Supremo de um conjunto X

$|\ |$ - Valor absoluto em $\mathbb{R}$.

$d(a, X)$ - Distância de um ponto a ao conjunto X.

$d_{\ell^2}(x, a)$ - Métrica no espaço completo ℓ^2.

$f(X)$ - Imagem do conjunto X por uma aplicação f.

$G(f)$ - Gráfico de uma aplicação $f : M \to N$.

Lista de Figuras

Introdução

Os matemáticos italianos Ascoli e Pincheler fizeram uso das idéias de Cantor para o estudo de espaços mais gerais, onde um ponto poderia ser uma curva ou uma função. Em meados do século XX, em sua tese intitulada "Sur quelques points du calcul fonctionnel", o matemático Mauricie Frechét deu sua importante e decisiva contribuição ao desenvolvimento desta nova teoria. Em seu trabalho, Frechét formulou alguns conceitos como o de limite, continuidade e derivada para espaços de funções e sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância, sendo este o ponto de partida da teoria que veio a ser denominada Espaços Métricos.

Intuitivamente, um espaço métrico é um conjunto não-vazio, cuja distância entre quaisquer dois pontos está bem definida. Nestes espaços a noção de sequências e o estudo de convergência tem um papel primordial uma vez que algumas propriedades válidas na reta não valem em todos os espaços métricos. Particularmente, na reta temos que uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy. No entanto, isto não ocorre de maneira geral. Os espaços onde essa propriedade é preservada são denominados *espaços métricos completos.*

Um dos principais objetivos deste trabalho é o estudo dos espaços métricos completos. Estes podem ser vistos, de maneira intuitiva, como espaços nos quais não há "pontos faltando". A completude do espaço nos garante alguns resultados interessantes na análise matemática tais como o teorema do ponto fixo de Banach e o Teorema de Baire. O primeiro garante sob quais condições uma determinada aplicação, definida em um espaço métrico completo, admite pontos fixos. Este resultado possui como consequência a garantia de existência e unicidade de solução para determinados tipos de equações. Já o segundo garante sob quais condições um conjunto magro possui interior vazio e, como consequência, obtemos três teoremas importantes da Análise Funcional, ramo da matemática que estuda o espaço das funções, que são eles o teorema de Banach-Steinhaus, o teorema da aplicação aberta e o teorema do gráfico fechado.

A fim de generalizar a noção de finitude e limitação, propriedades estas presentes em alguns subconjuntos da reta, no final do século XIX os matemáticos Émile Borel e Henri Lebesgue, deram uma contribuição propondo uma nova extensão deste conceito para os espaços métricos mais gerais, o qual chamamos de *espaços métricos compactos.* Estes espaços possuem propriedades interessantes e dentre os resultados que usam o conceito de compacidade podemos citar o teorema de Weierstrass, o teorema de Riesz e o teorema de Ascoli-Arzelá. Este último possui como uma de suas consequências a garantia de existência e unicidade de solução para um Problema de Valor Inicial (PVI).

Para uma boa compreensão dos temas citados, elencaremos no primeiro capítulo os principais conceitos da teoria dos espaços métricos, continuidade em espaços métricos, sequências e os conceitos básicos da topologia. No segundo capítulo, abordaremos o conceito dos espaços métricos completos bem como algumas de suas propriedades principais e resultados importantes dessa teoria. E, no terceiro capítulo, apresentaremos um estudo sobre os espaços métricos compactos, apresentando uma revisão sobre compacidade na reta e a importância de uma definição mais geral e abstrata desse conceito. Na sequência, apresentaremos algumas propriedades e exemplos dessa teoria, finalizando com alguns resultados matemáticos importantes nestes espaços.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Ao longo deste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para a compreensão dos capítulos subsequentes. Nesta primeira seção abordaremos o conceito central do nosso trabalho bem como alguns exemplos e resultados importantes da teoria dos espaços métricos. A demonstração dos resultados presentes neste capítulo podem ser encontradas em [5].

1.1 Espaços métricos

Definição 1.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in \mathrm{M}$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in \mathrm{M}$:

1. Se $x = y$ então $d(x, y) = 0$;
2. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$; (Positividade)
3. $d(x, y) = d(y, x)$; (Simetria)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Desigualdade triangular)

Definição 1.2. Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em M.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de espaços métricos:

Exemplo 1.3. O conjunto dos números reais $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico, onde $d(x, y) = |x - y|$.

Exemplo 1.4 (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $n \in \mathbb{N}$. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$. Seus elementos, portanto, são as listas de n termos reais $x = (x_1, \ldots, x_i, \cdots, x_n)$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, o termo x_i

chama-se a i-ésima coordenada de x. O espaço euclidiano, é um espaço métrico a partir das seguintes métricas:

1. *Métrica Euclidiana:* $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$;

2. *Métrica da Soma:* $d'(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$;

3 *Métrica do Máximo:* $d''(x,y) = máx\,\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$.

Exemplo 1.5 (Produto cartesiano finito de espaços métricos)**.** Dados os espaços métricos $M_1, \cdots, M_n$, cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo d, o produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é o conjunto das listas $x = (x_1, \cdots, x_n)$, onde $x_i \in M_i \; \forall \; i \in \{1, \cdots, n\}$. Tornamos M um espaço métrico munindo-o com qualquer uma das métricas abaixo:

1. $d(x,y) = \sqrt{d(x_1,y_1)^2 + \cdots + d(x_n,y_n)^2}$

2. $d'(x,y) = d(x_1,y_1) + \cdots + d(x_n,y_n)$

3. $d''(x,y) = máx\,\{d(x_1,y_1), \cdots, d(x_n,y_n)\}$

Exemplo 1.6. Seja X um conjunto arbitrário, $N = (N, d_N)$ um espaço métrico e $f : X \to N$ uma aplicação limitada, isto é, para quaisquer $x, y \in X$ tem-se que existe $k > 0$ tal que $d_N(f(x), f(y)) \leq k$. Definiremos $\mathcal{B}(X,N) = \{f : X \to N \;;\; f \text{ é limitada}\}$. O par $(\mathcal{B}(X,N), d)$ é um espaço métrico, onde $d(f,g) = \sup_{x \in X} d_N(f(x), g(x))$, esta métrica é conhecida como *métrica da convergência uniforme*.

Exemplo 1.7 (Métrica do produto)**.** Dada uma família infinita enumerável de espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$, seu produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é o conjunto de todos os pontos $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ onde $x_i \in M_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ é chamado i-ésima coordenada. Suponha que para cada $i \in \mathbb{N}$ exista uma constante $c_i > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty$ e $d(x_i, y_i) \leq c_i$ para quaisquer $x_i, y_i \in M_i$. Podemos definir então a métrica do produto em $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, y_i) = d_M(x,y).$$

1.1.1 Espaços vetoriais normados

Definição 1.8. Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* em E é uma aplicação $||\;\;|| : E \to \mathbb{R}$ que associa a cada vetor u o número real $||u||$ chamado a norma de u, satisfazendo:

1. $||u|| \geq 0$ e $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

2. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $||\lambda \cdot u|| = |\lambda| \cdot ||u||$;

3. Para quaisquer $u, v \in E$ temos que $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$. Esta propriedade é conhecida como *desigualdade triangular*.

Definição 1.9. Seja E um espaço vetorial e $|| \ ||$ uma norma em E. O par $(E, || \ ||)$ é chamado de *espaço vetorial normado*.

Observação 1.10. Todo espaço vetorial normado torna-se um espaço métrico a partir da seguinte correspondência $d(x, y) = ||x - y||$.

Exemplo 1.11. O espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, || \ ||)$, $(\mathbb{R}^n, || \ ||_S)$ e $(\mathbb{R}^n, || \ ||_M)$ é um espaço vetorial normado, onde:

1. $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$;

2. $||x||_S = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

3. $||x||_M = \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.

Exemplo 1.12. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Definimos:

$$\mathcal{L}(E; F) \ = \ \{T : E \to F \ ; \ \text{T é contínua e linear}\};$$

que é um espaço vetorial normado, dotado da norma $||T|| = \sup\{|T(x)| \ ; \ x \in E, ||x|| = 1\}$.

1.1.2 Espaços vetoriais com produto interno

Definição 1.13. Seja E um espaço vetorial normado. Um *produto interno* é uma aplicação $\langle \ , \ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par de vetores (u, v) associa um número real $\langle u, v \rangle$ satisfazendo:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

3. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;

4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Definição 1.14. Seja E um espaço vetorial e $\langle \ , \ \rangle$ um produto interno em E. Ao par $(E, \langle \ , \ \rangle)$ damos o nome de *espaço vetorial com produto interno*.

Exemplo 1.15. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno $< x, y >= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$. O par $(\mathbb{R}^n, \langle \ , \ \rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno.

Observação 1.16. Podemos induzir a partir de um produto interno a seguinte norma $||x - y|| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$.

Definição 1.17. Sejam M um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$. A *bola aberta*, *bola fechada* e *esfera*, as quais denotaremos respectivamente por $B(a, r)$, $B[a, r]$ e $S[a, r]$ são os subconjuntos de M, definidos por:

$$B(a, r) = \{x \in M \ ; \ d_M(x, a) < r\};$$
$$B[a, r] = \{x \in M \ ; \ d_M(x, a) \leq r\};$$
$$S[a, r] = \{x \in M \ ; \ d_M(x, a) = r\}.$$

Exemplo 1.18. Seja E um vetorial normado e $a = 0 \in M$. Quando $r = 1$, o conjunto $S = \{x \in M \ ; \ ||x|| = 1\}$ é chamado de *esfera unitária.*

1.2 Conceitos básicos da topologia em espaços métricos

Neste tópico apresentaremos alguns conceitos básicos da topologia dos espaços métricos necessários para a boa compreensão dos resultados apresentados no decorrer deste trabalho.

1.2.1 Conjuntos abertos

Definição 1.19. Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto. Diremos que $a \in A$ é um *ponto interior* de A quando existir $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Definição 1.20. Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$. Definimos o *interior* de A como $\text{int}(A) = \{a \in A \ ; \ \exists \ r_a > 0 \ B(a, r_a) \subset A\}$, ou seja, o conjunto de todos os pontos interiores de A.

Definição 1.21. Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$. Diremos que A é *aberto* quando $\text{int}(A) = A$. Isto quer dizer que todo ponto de A é ponto interior.

Exemplo 1.22. Seja M um espaço métrico. Toda bola aberta em M é um conjunto aberto.

Teorema 1.23 (Propriedade dos conjuntos abertos)**.** *Sejam M um espaço métrico e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset M$ uma família de conjuntos abertos. Então:*

1. $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ *é um subconjunto aberto de M;*

2. *Dado $S \subset L$ finito, tem-se que $\bigcap\limits_{\lambda \in S} A_\lambda$ é um subconjunto aberto de M.*

Definição 1.24. Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de conjuntos abertos de um espaço métrico M. Diremos que $\mathcal{B}$ é uma *base* quando todo aberto $A \subset M$ se exprime como $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} B_\lambda$ com $B_\lambda \in \mathcal{B}$.

A noção de conjunto aberto é relativa, isto é, depende do espaço métrico no qual estamos considerando o conjunto imerso. Abaixo apresentaremos a relação entre conjunto aberto num espaço métrico e em um subespaço métrico:

Definição 1.25. Seja $X \subset M$. Considerando em X a métrica induzida por M, os conjuntos *abertos no subespaço métrico* X são as interseções $A \cap X$ onde $A \subset M$ é aberto.

Definição 1.26. Sejam M um espaço métrico, $b \in M$ e $A \subset M$. Diremos que b é um *ponto de fronteira* de A se para todo $r > 0$ a bola $B(b, r)$ contém pontos de A e do seu complementar.

Exemplo 1.27. Considere $M = \mathbb{R}$ e $A = [0, 1)$. Os pontos 0 e 1 são pontos de fronteira de A.

1.2.2 Conjuntos fechados

Definição 1.28. Sejam M um espaço métrico, $X \subset M$ e $a \in M$. Diremos que a é um *ponto aderente* a X quando $d(a, X) = \inf \{ d_X(a, x) \; ; \; x \in X\} = 0$.

Definição 1.29. O conjunto formado por todos os pontos aderentes a um conjunto X é chamado de *fecho* de X e denotado por $\overline{X}$.

Definição 1.30. Um subconjunto $X \subset M$ é dito *fechado* quando $\overline{X} = X$, isto é, quando ele contém todos os seus pontos aderentes.

Exemplo 1.31. Seja M um espaço métrico. Toda bola fechada em M é um conjunto fechado.

Teorema 1.32 (Propriedade dos conjuntos fechados)**.** *Sejam M um espaço métrico e $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset M$ uma família de conjuntos fechados. Então:*

1. $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ *é um subconjunto fechado de M;*
2. *Dado $S \subset L$ finito, tem-se que* $\bigcup\limits_{\lambda \in S} F_\lambda$ *é um subconjunto fechado de M.*

Assim como a noção de conjuntos abertos, o conceito de fecho e conjunto fechado é relativo e esta relação entre o fecho num espaço métrico e num subespaço é dada pelo seguinte resultado:

Proposição 1.33. *Sejam L um subespaço do espaço métrico M. Dado um subconjunto $X \subset L$, indiquemos com $\tilde{X}$ o fecho de X em L e com $\overline{X}$ o fecho de X em M. Então $\tilde{X} = \overline{X} \cap L$.*

Corolário 1.34. *Se L é fechado em M, então para todo $X \subset L$ tem-se que $\tilde{X} = \overline{X}$.*

Definição 1.35. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Diremos que X é *denso* em M quando $\overline{X} = M$, ou de forma equivalente, quando para cada aberto $A \subset M$ têm-se que $A \cap X \neq \emptyset$.

O seguinte resultado relaciona um conjunto cujo interior do complementar é vazio com o seu fecho. Este é um dos passos importantes na demonstração de alguns resultados presentes neste trabalho e sua demonstração não é comum na literatura clássica. Por este motivo, apresentaremos a mesma.

Teorema 1.36. *Se $A \subset M$ e $\operatorname{int}(A^c) = \emptyset$ então A é denso em M.*

Demonstração: De fato, seja $\alpha \in M$, note que podemos decompor M da seguinte forma $M = \operatorname{int}(A^c) \ \cup \ \partial A^c \ \cup \ \operatorname{int}(A)$. Como $\operatorname{int}(A^c) = \emptyset$ temos que $\alpha \notin \operatorname{int}(A^c)$, portanto $\alpha \in \partial A^c$ ou $\alpha \in \operatorname{int}(A)$, o que implica que $\alpha \in \overline{A}$. A inclusão contrária $\overline{A} \subset M$ é óbvia.

■

A seguir, apresentaremos um conceito importante no estudo de limite de funções, que se apresenta como um conceito semelhante ao de ponto aderente, a menos de uma sutileza que veremos abaixo:

Definição 1.37. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $a \in X$ é dito um *ponto de acumulação* se $d(a, X - a) = 0$.

Definição 1.38. O conjunto formado por todos os pontos de acumulação de um conjunto X é chamado de *derivado* e denotado por X'.

Definição 1.39. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Diremos que X é um conjunto *magro* quando $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, \cdots, F_n, \cdots$ são fechados com interior vazio em M.

1.3 Funções contínuas

A seguir, apresentaremos o conceito de continuidade em espaços métricos, o qual pode ser visto como uma generalização de continuidade na reta. Em seguida, apresentaremos algumas condições suficientes de continuidade.

Definição 1.40. Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos, $f : M \to N$ uma aplicação e $a \in M$. Diremos que f *é contínua em* $a \in M$ quando:

Para todo $\epsilon > 0$ for possível obter um $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Ou de forma equivalente, quando para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.

Observação 1.41. Note que, neste caso, a existência do $\delta > 0$ depende do ponto que estamos analisando a continuidade e do $\epsilon > 0$ dado, isto é, $\delta = \delta(a, \epsilon)$.

Definição 1.42. Seja $f : M \to N$ uma aplicação. Diremos que f é *uniformemente contínua* quando dados $x, y \in M$ e $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $d_M(x, y) < \delta$ então $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Observação 1.43. Note que a diferença da continuidade para continuidade uniforme, é que na continuidade uniforme o $\delta > 0$ depende apenas do $\epsilon > 0$, ou seja, $\delta = \delta(\epsilon)$. Além disso, toda aplicação uniformemente contínua, em particular, é contínua.

Exemplo 1.44. Para cada $i \in \mathbb{N}$ considere a aplicação $p_i : M_1 \times \cdots \times M_i \times \cdots \times M_n \to M_i$ definida por $p_i(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = x_i$. Temos que p_i é uniformemente contínua e sobrejetiva.

Exemplo 1.45. Uma *imersão isométrica* é uma aplicação $f : M \to N$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se que $d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y))$. Quando f for sobrejetiva, diremos que f é uma *isometria*. Esse tipo de aplicação é sempre contínua.

Podemos caracterizar a continuidade das transformações lineares a partir do seguinte resultado:

Teorema 1.46. *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear. T é contínua se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $||T(x)|| < c$ para todo $x \in S = \{x \in E \; ; \; ||x|| = 1\}$.*

A seguir, apresentaremos algumas condições suficientes para que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua. Para tal, se faz necessário elencar os seguintes conceitos:

Definição 1.47. Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. Diremos que f é uma *aplicação lipschitziana* se existe $c > 0$ (constante de Lipschitz) tal que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se que $d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y)$.

Definição 1.48. Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. Diremos que f é uma *contração* se existe $c \in [0, 1)$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se que $d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y)$.

Definição 1.49. Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. Diremos que f é uma *contração fraca* se para quaisquer $x, y \in M$ tem-se que $d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y)$.

Observação 1.50. Toda contração fraca e toda contração são aplicações Lipschitzianas.

Proposição 1.51. *Toda aplicação Lipschitziana é contínua.*

A noção de continuidade pode ser vista também através dos abertos e fechados do espaço métrico como segue no resultado abaixo:

Proposição 1.52. *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(X) = \{x \in M \ ; \ f(x) \in X\}$ é aberto (respectivamente fechado) para todo $X \subset N$ aberto (respectivamente fechado).*

1.4 Homeomorfismos

O estudo dos homeomorfismos deve-se principalmente ao fato de que ao contrário do que ocorre em Álgebra Linear onde a inversa de uma transformação linear, ainda é uma transformação linear, ou na Teoria dos Grupos, onde a inversa de um homomorfismo bijetivo ainda é um homomorfismo, em topologia ocorre o fenômeno de existirem funções $f : A \to B$ contínuas e bijetivas cuja inversa é descontínua. Como exemplo deste fato, podemos citar a função $f : [0, 2\pi) \to S^1$, onde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ que é contínua e bijetiva, mas sua inversa $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ é descontínua em $p = (1, 0) \in S^1$. Então, os homeomorfismos são as funções em que o fato citado acima não ocorre, isto é, se $f : A \to B$ é contínua e bijetiva, então sua inversa também será contínua e bijetiva como definiremos abaixo:

Definição 1.53. Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos. Um *homeomorfismo* de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua.

Definição 1.54. Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos. Diremos que M e N são *homeomorfos* se existe um homeomorfismo de M sobre N.

Definição 1.55. Uma propriedade que goza um espaço métrico M chama-se uma *propriedade topológica* quando todo espaço homeomorfo a M também goza daquela propriedade.

Proposição 1.56. *Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to P$ homeomorfismo, então:*

1. *$g \circ f : M \to P$ é homeomorfismo;*

2. *$f^{-1} : N \to M$ também é homeomorfismo.*

Exemplo 1.57. Se $f : M \to N$ é uma isometria então f é um homeomorfismo.

Definição 1.58. Duas métricas d_1 e d_2 em um espaço métrico M são ditas *métricas equivalentes* quando a aplicação identidade $i_{12} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é um homeomorfismo.

Proposição 1.59. *A bijeção $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo se, e somente se, a métrica d_M é equivalente a métrica $d_1(x, y) = d_N(f(x), f(y))$ induzida por f em M.*

Proposição 1.60. *A aplicação $f : (M, d) \to (N, d_1)$ é contínua se, e somente se, a métrica $d_f : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por $d_f(x, y) = d(x, y) + d_1(f(x), f(y))$ é equivalente a d.*

A partir deste tópico, sempre que não houver confusão, não faremos menção a distinção da métrica do espaço, isto é, se d_M for a métrica em M utilizaremos a notação d.

1.5 Sequências

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos acerca da noção de sequências em espaços métricos.

Definição 1.61. Seja M um espaço métrico. Uma *sequência* em M é uma aplicação $x_n : \mathbb{N} \to M$ que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ associa o ponto $x_n \in M$ chamado o $n-$ésimo termo da sequência. Usaremos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n) para representar uma sequência.

Definição 1.62. Uma *subsequência* é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequencia é indicada pelas notações $(x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$, $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, ou apenas, (x_{n_k}).

Definição 1.63. Uma sequência em um espaço métrico chama-se *limitada* quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.64. Sejam M um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. Diremos que $a \in M$ é *limite* de x_n e escrevemos $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ quando dado $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Neste dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Teorema 1.65 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes, isto é, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ então $a = b$.*

Teorema 1.66. *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ uma sequência, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ se, e somente se, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$.*

Podemos generalizar o conceito de sequência para o espaço de todas as funções $\mathcal{F}(X, M)$, como veremos abaixo:

Definição 1.67. Dado X um conjunto e M um espaço métrico. Uma *sequência de funções* é uma correspondência que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $f_n : X \to M$.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções, $f_n : X \to M$, existem diferentes maneiras de se definir o que se entende quando se diz que uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge para a função $f : X \to M$. Entre os diversos tipos de convergência, os mais comuns são a convergência simples e a convergência uniforme.

Definição 1.68. Diz-se que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge *simplesmente* em X para a aplicação $f : X \to M$ quando para cada $x \in X$ a sequência $(f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ tem limite $f(x)$ em M. Ou seja, dado $x \in X$ e $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ (que depende de x e de ϵ) tal que $n > n_o \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Definição 1.69. Dizemos que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge *uniformemente* em X para a aplicação $f : X \to M$ quando para todo $\epsilon > 0$, for possível obter $n_o \in \mathbb{N}$ (que depende apenas ϵ) tal que $n > n_o \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Exemplo 1.70. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge simplesmente em $\mathbb{R}$ para a função nula.
De fato, dado $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, tomamos $n_o = n_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n_o > \frac{|x|}{\epsilon}$. Então $n > n_o$ $\Rightarrow \frac{|x|}{n} < \epsilon$.
Por outro lado, se f_n estiver definida em $X \subset \mathbb{R}$ limitado, temos que $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente em X. De fato, sendo $X \subseteq \mathbb{R}$ limitado, isto é, existe $K > 0$ tal que $|x| \leq K$ para todo $x \in X$. Então, dado $\epsilon > 0$ tome $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ com $n_o > \frac{K}{\epsilon}$ tal que $n \geq n_o \Rightarrow$ $\frac{|x|}{n} < \epsilon$. Mas esta convergência não é uniforme em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.71 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente.*

Teorema 1.72. *Uma sequência de pontos $z_n = (x_n, y_n)$, no produto cartesiano $M \times N$ de espaços métricos, converge para o ponto $c = (a, b) \in M \times N$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ em M e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ em N.*

Definição 1.73. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de *Cauchy* quando dado $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Observação 1.74. Intuitivamente, uma sequência é dita de Cauchy quando a partir de um certo número natural $n_0 \in \mathbb{N}$, os termos dessa sequência se tornam suficientemente próximos uns dos outros.

Teorema 1.75. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então:*

1. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy então ela é limitada;*

2. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente, então ela própria converge;*

3. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente então ela é uma sequência de Cauchy.*

Como vimos acima, a continuidade é uma propriedade que preserva convergência de sequências. Porém, apenas a continuidade não é suficiente para que uma aplicação transforme sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. O próximo resultado tem como objetivo estabelecer condições para que uma aplicação $f : M \to N$ transforme sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.

Teorema 1.76. *Sejam* M, N *espaços métricos,* $f : M \to N$ *uma aplicação uniformemente contínua e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* M*. Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy em* M *então a sequência* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy em* N*.*

Abaixo, elencaremos alguns conceitos acerca do limite de uma função $f : X \to M$.

Definição 1.77. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M, $a \in \overline{X}$ e $f : X \to N$ uma aplicação definida em X e tomando valores num espaço métrico N. Diz-se que um ponto $b \in N$ é *limite* de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado é possível obter um $\delta > 0$ tal que $x \in X,\ d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \epsilon$.

Teorema 1.78. *Seja* $a \in \overline{X} \subset M$*. Dada* $f : X \to N$*, tem-se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in N$ *se, e somente se, para toda sequência de pontos* $x_n \in X$*, com* $x_n \to a$*, tem-se* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$*.*

Capítulo 2

Espaços métricos completos

Ao estudarmos análise na reta, nos deparamos com uma caracterização da convergência de sequências que é a propriedade de ser de *Cauchy*. Embora essa propriedade seja bastante importante e garanta a veracidade de alguns resultados na análise real e a convergência de algumas sequências, esta não pode ser generalizada para qualquer tipo de espaço, ou seja, existem espaços cujas sequências de *Cauchy* não são convergentes. Um exemplo desta situação ocorre ao considerarmos a sequência:

$$\begin{array}{rccl} x_n : & \mathbb{N} & \longrightarrow & (0,1] \\ & n & \longmapsto & x_n = \frac{1}{n} \end{array}$$

cujo limite é $0 \notin (0,1]$. Os espaços métricos cuja situação acima não ocorre, recebem o nome especial de espaço métrico completo.

Definição 2.1. Seja (M, d) um espaço métrico. Diremos que M é *completo* com relação a métrica d se toda sequência de Cauchy for convergente em M.

A completude da reta segue como consequência direta do teorema de Bolzano-Weiestrass, como vemos a seguir:

Teorema 2.2. *A reta $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo com a métrica $d(x, y) = |x - y|$.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de Cauchy. Pelo Teorema 1.75 item 1. temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Então, pelo Teorema 1.71 temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, então pelo Teorema 1.75 item 2. temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. ■

No próximo resultado apresentaremos algumas propriedades dos espaços métricos completos:

Teorema 2.3 (Propriedade dos espaços métricos completos)**.** *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos completos. Então:*

1. *Se $F \subset M$ é um subespaço fechado, então F é completo;*

2. *Se $F \subset M$ é um subespaço completo, então F é fechado em M;*

3. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo;*

4. *Se A e B são subespaços completos de M então $A \cup B$ é completo;*

5. *$M \cap N$ é completo*

Demonstração:

1. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ uma sequência de Cauchy. Como $F \subset M$ temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ e sendo M completo temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em M. Uma vez que F é fechado, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in F$, ou seja, F é completo.

2. Seja $F \subset M$ um subespaço completo. Note que dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \cap F$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in M$, uma vez que toda sequência convergente é de Cauchy, temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M, o que implica dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em F e sendo F completo esta é convergente. Pela unicidade do limite, não se pode ter que $a \notin F$. Portanto F é fechado.

3. Seja $z_n = (x_n, y_n)$ uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Uma vez que as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$ são uniformemente contínuas pelo Teorema 1.76 temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ são sequências de Cauchy em M e N respectivamente e portanto convergentes, digamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Então, pelo Teorema 1.72, temos que $c = (a, b) \in M \times N$ é limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Logo $M \times N$ é completo.

4. Sendo $A, B \subset M$ completos, pelo item 2. deste Teorema temos que A e B são fechados em M. Segue do Teorema 1.32 que $A \cup B$ é fechado em M, o que implica dizer pelo item 1. deste Teorema, que $A \cup B$ é completo.

5. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \cap N$ uma sequência de Cauchy. Observe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ e sendo estes completos temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a em M e para um b em N, pela unicidade do limite, temos que $a = b \in M \cap N$, ou seja, $M \cap N$ é completo.

■

Observação 2.4. No item 2. é suficiente que M seja apenas um espaço métrico não necessariamente completo, e o item 3. vale para uma quantidade finita de espaços métricos. Além disso, segue dos Teoremas 2.2 e 2.3 item 3., que o *espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ é completo.

Vale ressaltar que o item 3. deste teorema pode ser generalizado para o produto infinito de espaços métricos completos, como afirma o resultado a seguir, cuja demonstração segue as mesmas linhas que no caso finito, e esta pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.5. *O produto cartesiano* $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *é completo se, e somente se, cada um dos fatores* M_i *são completos.*

A propriedade "ser completo" não é uma propriedade topológica, isto é, não é preservado por homeomorfismos. O resultado abaixo apresenta uma condição suficiente para que uma aplicação contínua transforme espaços métricos completos em espaços métricos completos.

Teorema 2.6. *Seja* $f : M \to N$ *contínua, tal que existe* $c > 0$ *com* $d(f(x), f(y)) \geq c \cdot d(x, y)$ *para quaisquer* $x, y \in M$. *Então* f *transforma subespaços completos de* M *em subespaços completos de* N.

Demonstração: Seja $A \subseteq M$ um espaço métrico completo. Queremos mostrar que $f(A) \subset N$ é um espaço métrico completo. Desta forma, seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ uma sequência de Cauchy, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(y_m, y_n) < \epsilon$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ temos que $y_n = f(x_n)$ com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Vamos mostrar então que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em A. Assim, dado $\epsilon' > 0$ tome $n_1 = n_0 \in \mathbb{N}$ e para este n_0 temos que se $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq k \cdot d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon \cdot k = \epsilon'$, com $\frac{1}{c} = k$. Sendo A completo temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, digamos $x_n \to a$ e sendo f contínua, pelo Teorema 1.66, temos que $f(x_n) \to f(a)$. ■

Uma das propriedades mais importantes dos números reais é a propriedade dos intervalos encaixantes que garante que se $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$ então existe pelo menos um ponto em comum a cada um desses intervalos, ou seja, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Desta propriedade decorrem várias outras propriedades importantes, tais como: a propriedade do supremo a qual garante que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente possui supremo, o teorema de Bolzano-Weierstrass e por consequência a completude de $\mathbb{R}$, propriedades estas que são equivalentes. A proposição abaixo é uma generalização da propriedade dos intervalos encaixantes:

Proposição 2.7. *Um espaço métrico* M *é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente* $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ... \supset F_n \supset ...$ *de subconjuntos fechados não-vazios* $F_n \subset M$ *com* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, *existe um ponto* $a \in M$ *tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Demonstração: Inicialmente, suponha que M é completo e que nos seja dada uma sequência (F_n) como na hipótese. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha um ponto $x_n \in F_n$. Isto define uma sequência (x_n) em M tal que para $n, m \geq n_0 \Rightarrow x_n, x_m \in F_{n_0}$. Como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_{n_0}) < \epsilon$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M. Como M é completo, temos que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$. Dado $p \in \mathbb{N}$ para todo $n \geq p$, onde $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in F_p$ para todo

$p \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Este ponto é único, pois dado $b \in M$ tal que $a, b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, temos que $d(a,b) \leq \text{diam}(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que implica que $d(a,b) = 0$. Logo, $a = b$. Reciprocamente, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Para todo $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Então, $X_1 \supset X_2 \supset \cdots X_n \supset \cdots$ e, portanto, $(\overline{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de decrescente de conjuntos fechados não-vazios. Ainda, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, temos que $0 = \lim_{n\to\infty} \text{diam}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \text{diam}(\overline{X_n})$. Logo, existe $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$. Uma vez que $a \in \overline{X_n}$ para todo n temos que, qualquer bola aberta de centro a contém pontos x_n com índices suficientemente grandes, ou seja, a é limite de uma subsequência de (x_n). E como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, segue do teorema 1.75 que $x_n \to a$. ■

Observação 2.8. É indispensável que se tenha $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, pois considere $F_n = [n, \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n é fechado mas $\bigcap F_n = \emptyset$. Isto ocorre pois não faz sentido considerar o $\text{diam}(F_n)$ uma vez que este não é limitado superiormente.

Quando o espaço em questão, além de ser um espaço métrico completo é um espaço vetorial normado temos que estes recebem o nome especial de *Espaço de Banach*.

Definição 2.9. Seja E um espaço vetorial normado. Se toda sequência de Cauchy em E for convergente então E é chamado de *espaço de Banach.*

Definição 2.10. Seja E um espaço de Banach. Se a norma em E provém de um produto interno, diremos que E é um *espaço de Hilbert.*

Abaixo, apresentaremos alguns exemplos de espaços métricos completos, de Banach e de Hilbert.

Exemplo 2.11. Se o espaço métrico M é completo (respectivamente de Banach) então $\mathcal{B}_\alpha(X, M) = \{f : X \to M \,; d(\alpha, f) < +\infty\}$ é completo (respectivamente de Banach) seja quais forem X e $\alpha : X \to M$, onde $d(\alpha, f) = \sup_{x\in X} d(\alpha(x), f(x))$.

Observação: Quando $\alpha : X \to M$ é constante, temos que $\mathcal{B}_\alpha(X, M) = \mathcal{B}(X, M) = \{f : X \to M \,; f \text{ é limitada}\}$. Ou seja, segue do Exemplo 2.11 que quando M é completo, também é completo o espaço das funções limitadas.

Exemplo 2.12. Se M é completo, então

$$\mathcal{C}_0(X; M) = \{f : X \to M \;;\; f \text{ é contínua e limitada}\}$$

é completo com a métrica $d(g, f) = \sup_{x\in X} d(g(x), f(x))$. Basta observar que $\mathcal{C}_0(X; M)$ é um subespaço fechado do espaço métrico completo $\mathcal{B}(X, M)$.

Exemplo 2.13. Se F é completo, então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E;F)$ é completo e portanto de Banach.

Para ver isto, considere $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$. Assim, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_o \Rightarrow ||T_n - T_m|| = \sup\{|T_n(x) - T_m(x)| \ : \ x \in E \ e \ ||x|| = 1\} < \epsilon \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in S} |T_n(x) - T_m(x)| < \epsilon$. Concluímos então que $(T_n)|_S$ é de Cauchy em $\mathcal{B}(S,F)$.

Sendo F completo temos que existe $T_0 : S \to F$ limitada, tal que $T_n \to T_0$ uniformemente em S. Indiquemos como $T : E \to F$ a extensão da aplicação $T_0 : S \to F$, definida por $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T_0(u)$. Mostremos que $T_n \to T$ simplesmente em E. Como T é uma transformação linear, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $T_n(0) = 0 \to 0 = T(0)$.
E note que para $x \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T_n(x) &= \lim_{n\to\infty} T_n\left(\frac{x}{||x||}\right) \cdot ||x|| \\
&= ||x|| \cdot \lim_{n\to\infty} T_n\left(\frac{x}{||x||}\right) \\
&= ||x|| \cdot T_o\left(\frac{x}{||x||}\right) \\
&= T(x).
\end{aligned}$$

Mostremos então que T é linear; assim dados $x, y \in E$ temos:

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) \\
&= \lim_{n\to\infty} [T_n(x) + T_n(y)] \\
&= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\
&= T(x) + T(y)
\end{aligned}$$

Como $T\ |_S = T_0$ é limitada vemos que $T \in \mathcal{L}(E;F)$. E como $T_n\ |_S \to T\ |_S$ uniformemente, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ no espaço $\mathcal{L}(E;F)$

Exemplo 2.14. Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço ℓ^p como sendo o espaço das sequências reais absolutamente p-somáveis, isto é,

$$\ell^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

dotado da norma

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Afirmamos que ℓ^p é um espaço de Banach.

1. Inicialmente, mostremos que ℓ^p é um espaço vetorial.

i) $0 \in \ell^p$ pois se $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$;

ii) Dados $x, y \in \ell^p$ temos que $x + y \in \ell^p$ em virtude da desigualdade abaixo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

conhecida como *Desigualdade de Minkowski.*

iii) Se $x \in \ell^p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda \cdot x \in \ell^p$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda \cdot x_n|^p = |\lambda|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

2. ℓ^p é um espaço de Banach.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em ℓ^p. Fixado $i \in \mathbb{N}$, vemos que $|x_{mi} - x_{ni}| \leq ||x_m - x_n||_p$, ou seja, (x_{ni}) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe $a_i = \lim x_{ni}$. Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ mostremos que $a = \lim x_n$. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que m,n $\geq n_o \Rightarrow ||x_m - x_n||_p < \epsilon$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n \geq n_o$ temos que

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{mi} - x_{ni}|^p < \epsilon^p. \tag{2.1}$$

Mantendo fixos k e n e fazendo $m \to \infty$ em 2.1, vemos que

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i - x_{ni}|^p \leq \epsilon^p \quad \forall\, n \geq n_o. \tag{2.2}$$

Fazendo $k \to \infty$, temos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - x_{ni}|^p \leq \epsilon^p \quad \forall\, n \geq n_o. \tag{2.3}$$

Em particular, se $n > n_o$ temos que $a - x_n \in \ell^p$, ou seja, $a = a - x_n + x_n \in \ell^p$. Reescrevendo (2.3), obtemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_o$ implica que $||x_n - a||_p < \epsilon$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e converge para a.

Observação 2.15. Quando $p = 2$ o espaço ℓ^2 é um espaço de Hilbert cuja norma provém do produto interno $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i$.

O exemplo abaixo mostra que nem sempre um espaço vetorial normado é um espaço de Banach.

Exemplo 2.16. (Um espaço vetorial normado que não é de Banach.) Considere o conjunto das funções polinomiais $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$ munido com a norma $||p|| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |p(t)|$.

Notamos que, em relação à esta norma $\mathcal{P}[0,1]$ não é completo, pois seja $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ a sequência de polinômios que converge uniformemente em $[0,1]$ para a função contínua e^x, que não é um polinômio. Logo $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy que não converge em $\mathcal{P}[0,1]$.

2.1 Extensão de aplicações contínuas

Em algumas situações temos que uma aplicação está definida apenas em um subconjunto X de um espaço métrico e precisamos que esta esteja definida no espaço métrico todo. Algumas vezes, é possível estender tal aplicação, isto é, considera-lá definida em todo espaço. Neste tópico, apresentaremos algumas condições para que possamos estender aplicações contínuas.

Definição 2.17. Dado $X \subset Y$, uma aplicação $F : Y \to Z$ chama-se uma *extensão* de $f : X \to Z$ quando para todo $x \in X$ tem-se que $F(x) = f(x)$.

Definição 2.18. Diremos que f se *estende continuamente* a M quando f possui uma extensão $F : M \to N$ contínua.

Uma pergunta natural que surge é: sempre é possível estender uma aplicação contínua? A resposta para este fato é negativa, isto é, nem sempre é possível como veremos no exemplo abaixo:

Exemplo 2.19. Considere a aplicação $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x\cdot(x-1)}$. Note que sendo $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, como este limite não existe, temos que não é possível estender a aplicação f continuamente para nenhum conjunto que contém o intervalo $[0,1]$.

Nosso objetivo então é apresentar algumas condições para que uma determinada aplicação contínua definida em um subconjunto $X \subset M$ possua uma extensão contínua. O resultado que apresentaremos é uma condição necessária e suficiente para que uma determinada aplicação possa ser estendida continuamente a todo espaço métrico M, para isso pediremos que o domínio seja denso em M. E consideremos o seguinte resultado inicial:

Lema 2.20. *Sejam M, N espaços métricos, X um subespaço de M e $f : X \to N$ uma aplicação contínua. Se, para cada ponto $a \in X$, existe o limite, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ então a aplicação $F : \overline{X} \to N$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\,;\, se\ x \in X \\ F(y) = \lim\limits_{x\to y} f(x)\,;\, se\ y \in \overline{X} - X \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração: Queremos garantir que F é contínua em $\overline{X}$. Desta forma, seja $a \in \overline{X}$, isto é, $a \in X$ ou $a \in \overline{X} - X$. Se $a \in X$ como, por hipótese, f é contínua em X segue que $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ que por sua vez é igual a $F(a)$ pela definição de F. Se $a \in \overline{X} - X$, pela definição de F temos que $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Desta forma, temos que para todo $a \in \overline{X}$, vale $\lim_{x\to a} f(x) = F(a)$. Por definição de limite, temos que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x,a) < \delta$ implica que $d(f(x), F(a)) < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Mostremos então que para todo $\overline{x} \in \overline{X}$, com $d(\overline{x}, a) < \delta$ implica que $d(F(\overline{x}), F(a)) < \epsilon$.

De fato, sendo $\overline{x} \in \overline{X}$ temos que $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto, $d(x_n, a) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue então da definição de limite que $d(f(x_n), F(a)) < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $F(\overline{x}) = \lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, segue que

$$d(F(\overline{x}), F(a)) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), F(a)) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Portanto, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\overline{x} \in \overline{X}$ e $d(\overline{x}, a) < \delta$ implica que $d(F(\overline{x}), F(a)) < \epsilon$, ou seja, F é contínua em todo $a \in \overline{X}$.

■

Teorema 2.21. *Uma aplicação contínua $f : X \to N$, definida num subconjunto denso $X \subset M$, pode-ser estendida continuamente a M se, e somente se, para cada $a \in M$, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.*

Demonstração: Como X é denso em M, temos que $\overline{X} = M$, assim tem sentido considerar $\lim_{x\to a} f(x)$ para todo $a \in M$. Ainda, se existe $F : M \to N$ contínua então, pelo Teorema 1.66, temos que $\lim_{x\to a} F(x) = F(a)$ para todo $x \in M$. Em particular, $\lim_{x\to a} f(x) = F(a)$.
Mostremos agora que se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe para cada $a \in M$, então $f : X \to N$ pode ser estendida continuamente em $X \subset M$ denso.
Suponha que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ para cada $a \in \overline{X} = M$. Então, pelo Lema 2.20, segue que $F : \overline{X} \to M$ a aplicação definida por:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ } se \text{ } x \in X \\ F(y) = \lim_{x\to y} f(x) \text{ } se \text{ } y \in \overline{X} - X \end{cases}$$

é contínua, isto é, f pode ser estendida continuamente. ■

Teorema 2.22. *(Unicidade da extensão) A extensão contínua $F : M \to N$ de uma aplicação contínua $f : X \to N$, definida num subconjunto denso $X \subset M$, se existir, é única.*

Demonstração: Para todo $a \in M$, o valor $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ é determinado unicamente pelos valores que f assume em X, ou seja, é uma consequência da unicidade do limite. ■

O critério de Cauchy também pode ser empregado na existência de extensões de aplicações contínuas como segue abaixo:

Teorema 2.23. *(Critério de Cauchy para extensão de aplicações continuas) Seja $f : X \to N$ uma aplicação contínua definida num subconjunto X de um espaço métrico M e tomando valores no espaço métrico completo N. Dado $a \in \overline{X}$, a fim de que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ é necessário e suficiente que, para todo $\epsilon > 0$, se possa obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $d(x,a) < \delta, d(y,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Demonstração: Suponha que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista para todo $a \in \overline{X}$, digamos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Por definição de limite, temos que dado $\epsilon > 0$ podemos obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \epsilon$. Assim, se $x, y \in X$ cumpre $d(x,a) < \delta$ e $d(y,a) < \delta$ temos pela desigualdade triangular que $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), b) + d(f(y), b) < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Reciprocamente, suponha que para todo $\epsilon > 0$ se possa obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ com $d(x,a) < \delta$ e $d(y,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. A ideia da prova é considerar uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X e mostrar que se esta converge para a então a sequência $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em N, de onde obteremos pelo Teorema 1.78 que o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e, para isto, mostraremos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em N que por hipótese é completo. Assim, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Por definição de limite de uma sequência, temos que tomando $\epsilon = \delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ tem-se que $d(x_n, a) < \delta$ e $d(x_m, a) < \delta$, e uma vez que $x_n, x_m \in X$, por hipótese, temos que $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon \; \forall \; \epsilon > 0$. Assim, podemos concluir que $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em N e portanto convergente, no que segue temos pelo Teorema 1.78 que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

■

2.2 Completamento de um espaço métrico

Vimos que nem todo espaço métrico (M, d) é completo. Quando o espaço não é completo, é possível adicionar pontos de forma que ele se torne um espaço métrico completo e este novo espaço o qual denotaremos por $\widehat{M}$ é chamado de completamento de M. Como um subconjunto fechado de um espaço métrico completo ainda é completo, temos que $\overline{M}$ é completo e contém M, desta forma, basta considerar apenas os pontos de $\widehat{M}$ que são aderentes a M. Assim, vamos impor que M seja denso no seu completamento, isto é, $\widehat{M} = \overline{M}$. Note que, para que M se torne um espaço métrico completo não é necessário que se tenha $M \subset \widehat{M}$, basta que encontremos uma imersão isométrica, isto é, uma aplicação $\phi : (M, d_M) \to (N, d_N)$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ vale $d_M(x,y) = d_N(\phi(x), \phi(y))$, onde N é um espaço métrico completo. Tomemos então $\widehat{M} = \overline{\phi(M)}$. Como M e $\phi(M)$ são isométricos, pois sendo ϕ uma imersão isométrica temos que $\phi|_{\phi(M)}$ é uma isometria, e além disso $d_M(x,y) = d_N(\phi(x), \phi(y))$ para quaisquer $x, y \in M$, temos que tudo se passa como se de fato $M \subset \widehat{M}$. Assim, temos a seguinte definição para o completamento:

Definição 2.24. Um *completamento* de um espaço métrico M é um par $(\widehat{M}, \phi)$, onde $\widehat{M}$ é completo e $\phi : M \to \widehat{M}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\phi(M)$ é densa em $\widehat{M}$.

O próximo resultado garante que todo espaço métrico M possui um completamento e para demonstrá-lo utilizaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [9]:

Lema 2.25. *Se M é um espaço métrico, A é denso em M e toda sequência de Cauchy em A converge em M então M é completo.*

Teorema 2.26. *(Existência do completamento) Todo espaço métrico M possui um completamento*

Demonstração: Seja (M, d) um espaço métrico. Vamos denotar por $\mathcal{C}[M]$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em M.
Vamos dividir as demonstrações em alguns passos para facilitar o entendimento do leitor:
1º passo: A relação $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, é de equivalência em $\mathcal{C}[M]$.
De fato,
1. *(Reflexiva)* $(x_n) \sim (x_n)$ pois $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;
2. *(Simétrica)* Se $(x_n) \sim (y_n)$ então $(y_n) \sim (x_n)$.
De fato, como $(x_n) \sim (y_n)$ temos que $0 = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n)$, logo $(y_n) \sim (x_n)$.
3. *(Transitiva)* Se $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$ então $(x_n) \sim (z_n)$.
Uma vez que $(x_n) \sim (y_n)$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ e como $(y_n) \sim (z_n)$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$. Mostremos então que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$. Note que, como d é métrica, pela desigualdade triangular, temos que $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$ então $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq 0 + 0 = 0$, portanto $(x_n) \sim (z_n)$.

2º passo: $\widehat{d}$ está bem definida.
Seja $\widehat{M} = \{[x_n] \ ; \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}[M] \ \}$, o conjunto de todas as classes de equivalência, $\sim$, onde $[x_n]$ representa todas as sequências (x_n) que estão na mesma classe de equivalência. Para cada $\widehat{x} = [x_n] \in \widehat{M}$ e $\widehat{y} = [y_n] \in \widehat{M}$ considere a seguinte aplicação $\widehat{d} : \widehat{M} \times \widehat{M} \to \mathbb{R}$, dada por $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.
Mostremos então que $\widehat{d}$ está bem definida, para isto, mostraremos primeiramente que $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De fato, note que pela desigualdade triangular e propriedades do módulo, temos que $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \leq |d(x_m, x_n) - d(y_m, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$. Uma vez que (x_n) e (y_n) são de Cauchy em M, segue que $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto convergente. Notemos ainda que a aplicação independente da escolha particular dos representantes da classe, pois sejam

$(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, uma vez que $|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$ e $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, segue que $\widehat{d}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \widehat{d}(x', y')$. Portanto $\widehat{d}$ está bem definida.

3º passo: $\widehat{d}$ é métrica.
Uma vez que d é métrica em M e $\widehat{d}$ está bem definida, temos que $\widehat{d}$ é uma métrica em $\widehat{M}$.

4º passo: ϕ é imersão isométrica.
Considere a aplicação $\phi : M \to \widehat{M}$, onde para cada $x \in M$ e $\widehat{x} = [(x, \cdots, x, \cdots)] \in \widehat{M}$, $\phi(x) = \widehat{x}$. Note que ϕ é uma imersão isométrica pois $\widehat{d}(\phi(x), \phi(y)) = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y),$.

5º passo: $\phi(M) \subset \widehat{M}$ é denso.
De fato, sejam $\widehat{M} = [(x_n)] \in \widehat{X}$ e $\epsilon > 0$ dado. Uma vez que $(x_n) \subset M$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então $d(x_m, x_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Note que $z = x_{n_0} \in \phi(M)$ e $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{z}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$, assim $z \in B(\widehat{x}, \epsilon) \cap \phi(M)$, onde $B(\widehat{x}, \epsilon) \subset \widehat{M}$. Portanto $\phi(M)$ é denso em $\widehat{M}$.

6º passo: $\widehat{M}$ é completo.
Para isto, seja $(\widehat{z}_n)$ uma sequência de Cauchy em $\phi(M)$, onde cada $\widehat{z}_n$ é representado pela sequência $(z_n, \cdots, z_n, \cdots)$. Note que como ϕ é uma imersão isométrica, temos que $\widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{z}_m) = d(z_n, z_m)$ e portanto (z_n) é de Cauchy em M, uma vez que $(\widehat{z}_n) \subset \phi(M)$ é de Cauchy. Seja então $\widehat{z} = [(z_k)]$ em $\widehat{M}$. Note que $(\widehat{z}_k)$ converge para $\widehat{z}$, pois dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, n \geq n_0$ implica que $d(z_n, z_k) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Assim, para cada $k \geq n_0$ temos $\widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{z}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(z_k, z_n) \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$, isto é, $(\widehat{z}_n)$ converge para $\widehat{z}$ em $\widehat{M}$. Pela proposição 2.25 $\widehat{M}$ é completo.

■

Teorema 2.27. *(Unicidade do completamento) Sejam $(\widehat{M}, \phi)$ e (M'', ψ) completamentos de um mesmo espaço métrico M. Então existe uma única isometria $f : \widehat{M} \to M''$ tal que $f \circ \phi = \psi$.*

Demonstração: Como $f \circ \phi = \psi$, temos que f está definida na imagem $\phi(M)$, ou seja, para cada $y = \phi(x) \in \phi(M)$ considere $f_0(y) = \psi(y)$. Como ϕ é uma imersão isométrica, temos que ϕ é injetiva. Vamos definir $f_0 : \phi(M) \to (M'', \psi)$ que cumpre $f_0 \circ \phi = \psi$. Desta forma, existe uma única isometria $f : \widehat{M} \to M''$ tal que $f \circ \phi = \psi$, pois f é uma extensão da f_0, e pela unicidade da extensão, segue que f é única. Mostremos, por fim, que de fato

f_0 é isometria. Sejam $x, y \in \phi(M)$, isto é, $x = \phi(a)$ e $y = \phi(b)$. Assim,

$$\begin{aligned} d(f_0(x), f_0(y)) &= d(\psi(\phi(a)), \psi(\phi(b))) \\ &= d(\phi(a), \phi(b)) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

Observação 2.28. O resultado acima garante que o completamento é único a menos de isometrias.

Exemplo 2.29. $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$. Para ver isto, considere a aplicação $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = x$. Note que ϕ é uma imersão isométrica e além disso, $\phi(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ que é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.30. Se M é completo, então para todo $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ é um completamento de X. De fato, considere a aplicação $\psi : X \to M$ definida por $\psi(x) = x$. Temos que ψ é uma imersão isométrica e além disso $\psi(X) = X$ portanto $\overline{\psi(X)} = \overline{X}$.

Exemplo 2.31. O completamento do produto cartesiano $M \times N$ é o produto $\widehat{M} \times \widehat{N}$, onde $\widehat{M}$ e $\widehat{N}$ são os completamentos de M e N respectivamente. Isto ocorre pois admitindo que $M \subset \widehat{M}$ e $N \subset \widehat{N}$ densos, temos que $\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N} = \widehat{M} \times \widehat{N}$, ou seja, $M \times N$ é denso no espaço métrico completo $M \times N$.

2.3 Espaços métricos topologicamente completos

Como ser completo não é uma propriedade topológica, isto é, não é preservada por homeomorfismo, surge a pergunta: dado um espaço métrico (M, d), existe alguma métrica d_1 equivalente a d, que torne M completo? Ou seja, M é homeomorfo a um espaço métrico completo? Os seguintes resultados são uma resposta ao questionamento:

Proposição 2.32. *Se d_1 é equivalente a d então a aplicação identidade $i : (M, d) \to (M, d_1)$ é um homeomorfismo.*
Demonstração: *Segue da definição 1.58.* ■

Proposição 2.33. *Se $h : (M, d) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo então $d_1(x, y) = d_N(h(x), h(y))$ é uma métrica em M, equivalente a d, tal que $h : (M, d_1) \to (N, d_N)$ é uma isometria, logo (M, d_1) é completo se (N, d_N) o for.*

Demonstração: Vamos considerar $d_1(x, y) = d_N(h(x), h(y))\ \forall x, y \in M$ a métrica induzida por h. Pela proposição 1.60. temos que d é equivalente a d_1 uma vez que por hipótese

$h : (M, d) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo. Segue então que se N for completo, então (M, d_1) também é, pois sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (M, d_1)$ uma sequência de Cauchy, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $d_1(x_n, x_m) < \epsilon$. Para o mesmo $n_0 \in \mathbb{N}$, temos que $n \geq n_0$ implica $d_N(h(x_n), h(x_m)) < \epsilon$, ou seja, $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (N, d_N). Como (N, d_N) é completo, temos que existe $y = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$. Sendo h é um homeomorfismo, temos que h^{-1} é contínua e portanto $h^{-1}(h(x_n)) = x_n$ é convergente e converge para $h^{-1}(y)$. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e (M, d_1) é completo. ■

Exemplo 2.34. Considere o espaço métrico $I = ((-1, 1), d)$ onde $d(x, y) = |x - y|$. I não é completo, pois considere a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (-1, 1)$ e que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e portanto de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $I \subset (\mathbb{R}, d)$ é um subespaço temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em I . Observe ainda que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \notin (-1, 1)$ e portanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em $(-1, 1)$. Mas $h : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{x}{1-|x|}$ é um homeomorfismo do intervalo aberto $(-1, 1)$ com o espaço métrico completo $\mathbb{R}$. Assim, a métrica $d_1(x, y) = |h(x) - h(y)|$ é equivalente à métrica $d(x, y) = |x - y|$ em $(-1, 1)$ e o torna completo.

A fim de generalizar o exemplo anterior, apresentamos o seguinte resultado que garante que essa propriedade não é especifica do intervalo aberto $(-1, 1)$, mas vale para todo conjunto $A \subset M$ aberto:

Proposição 2.35. *Seja M um espaço métrico completo. Se $A \subset M$ é um conjunto aberto, então A é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja $A \subset M$ aberto no espaço métrico completo M, então $M - A$ é fechado e , por consequência, a função contínua $\phi : M \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(x) = d(x, M - A)$ é tal que $\phi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in A$. Isto ocorre pois se $d(x, M - A) = 0$ implica dizer que x é aderente a $M - A$ e sendo este fechado temos que $x \in M - A$ no que decorre que $x \notin A$.
Considere a aplicação $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{\phi(x)}$. Observe que uma vez que $\phi(x) \neq 0 \ \forall \ x \in A$, temos que f é contínua. Seja $F \subset A \times \mathbb{R} \subset M \times \mathbb{R}$ o gráfico de f, o qual é definido por $F = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \cdot \phi(x) = 1\}$ é fechado em M $\times\mathbb{R}$ pois é imagem inversa do conjunto fechado $\{1\}$ pela aplicação contínua $t \cdot \phi$. Logo, pelo Teorema 2.3 temos que F é completo quando munido da métrica induzida por $M \times \mathbb{R}$, digamos $d_F((x, f(x)), (y, f(y)) = d_M(x, y) + |f(x) - f(y)|$. Defina agora $g : A \to F$ que a cada $x \in A$ associa o ponto $g(x) = (x, f(x))$.

Note que g é uma bijeção, pois g é sobrejetiva por construção e g é injetiva uma vez que dados $x, y \in A$ com

$$g(x) \quad = \quad g(y) \Rightarrow (x, f(x)) = (y, f(y)) \Rightarrow x = y.$$

Além disso, g é contínua, pois suas coordenadas o são e g^{-1} é contínua pois é a restrição da projeção $p_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ ao conjunto F. Logo g é um homeomorfismo. ■

Observação 2.36. Não é verdade que se M é completo então todo subconjunto $X \subset M$ é homeomorfo a um espaço métrico completo, como é o caso de $\mathbb{Q}$ que não é homeomorfo a um espaço métrico completo.

Mais geralmente vale o seguinte resultado, cuja prova encontra-se em [5]:

Teorema 2.37. *Seja* $C = \bigcap_{\lambda \in S} A_\lambda$ *onde* S *é um conjunto enumerável e* A_λ *para todo* $\lambda \in S$, *são subconjuntos abertos de um espaço métrico completo* M. *Então* C *é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Definição 2.38 (Espaços métricos topologicamente completos)**.** Seja (M, d) um espaço métrico. Diremos que (M, d) é *topologicamente completo* se este for homeomorfo a um espaço métrico completo, ou de forma equivalente, se existe uma métrica d_1 equivalente a d tal que (M, d_1) é um espaço métrico completo

Exemplo 2.39. Seja $\mathbb{Q} = \{r_1, \cdots, r_n, \cdots\}$ o conjunto dos números racionais. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere $A_i = \mathbb{R} - \{r_i\}$. Note que cada A_i é aberto pois $A_i^c = \{r_i\}$ que é finito e portanto fechado. Além disso, $A_1 \cap \cdots \cap A_i \cap \cdots$ é o conjunto dos números irracionais. Segue então da Proposição 2.37 que o conjunto dos números irracionais é homeomorfo a um espaço métrico completo.

2.4 Alguns resultados importantes na teoria dos espaços métricos completos

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados importantes desta teoria, mais especificamente, o teorema de Baire e o teorema do ponto fixo de Banach, bem como suas aplicações. Estes resultados, apesar de se tratarem de coisas distintas, possuem como um elo em comum a necessidade da completude do espaço.

2.4.1 O teorema de Baire e aplicações

Dentre todos os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos espaços métrico completos podemos destacar René-Louis Baire (1874-1932) que em seus trabalhos trouxe a definição de conjunto magro e uma importante ferramenta matemática denominada teorema de Baire. Neste resultado, Baire garante que a interseção enumerável de conjuntos abertos e densos em um espaço métrico completo, ainda é um subconjunto denso deste espaço. Vale ressaltar que este resultado pode ser tratado em espaços mais gerais, como por exemplo, nos espaços topológicos, espaços estes que não abordamos neste trabalho. E além disso, possui diversas consequências na matemática, sobretudo na análise funcional, tais como: o teorema de Banach-Steinhaus, o teorema da aplicação aberta e o teorema do gráfico fechado. Desta forma, a fim de apresentarmos a demonstração deste resultado, precisamos abordar o seguinte lema:

Lema 2.40. *Seja M um espaço métrico completo. São equivalentes:*

1. *Todo conjunto magro tem interior vazio;*
2. *Se $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio então* $\text{int}(F) = \emptyset$*;*
3. *Toda interseção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso em M.*

Demonstração: $(1 \Rightarrow 2)$ Suponha que cada F_n seja fechado, isto é, $\overline{F_n} = F_n$. Ainda, como $\text{int}(F_n) = int(\overline{F_n}) = \emptyset$ segue que F é magro. Como, por hipótese, todo conjunto magro tem interior vazio temos que $\text{int}(F) = \emptyset$.
$(2 \Rightarrow 1)$ Seja X um conjunto magro, queremos mostrar que $\text{int}(X) = \emptyset$. Para isto, considere $X \subset F$ onde F satisfaz as hipóteses de 2.. Como $X \subset F$ temos que $\text{int}(X) \subset \text{int}(F) = \emptyset$, ou seja, $\text{int}(X) = \emptyset$.
$(2 \Rightarrow 3)$ Seja $\{A_n\}$ uma familia de abertos densos e vamos definir $F_n = A_n^c$. Note que cada F_n é fechado uma vez que A_n é aberto e, além disso, $\text{int}(F_n) = \emptyset$ pois sendo A_n denso temos que para todo $\alpha \in F_n$ e $r > 0$ tem-se que $B(\alpha, r) \cap A_n \neq \emptyset$ e portanto $B(\alpha, r) \nsubseteq F_n$. Por 2. temos que:

$$\text{int}(F) = \emptyset \Rightarrow \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \emptyset \Rightarrow \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \text{int}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \emptyset \Rightarrow \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = M.$$

Portanto $\bigcap A_n$ é denso em M.
$(3 \Rightarrow 2)$ Considere $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado e tem interior vazio. Escrevendo $A_n = F_n^c$ segue que cada A_n é aberto em M. Além disso, observe que $\text{int}(A_n^c) = \text{int}(F_n) = \emptyset$. Assim, $\overline{A_n} = M$ e portanto segue do item 3 que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M. Então:

$$\text{int}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \emptyset \Rightarrow \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \emptyset \Rightarrow \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \text{int}(F) = \emptyset.$$

■

Teorema 2.41 (Teorema de Baire)**.** *Seja M um espaço métrico completo. Se para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset M$ é um aberto denso, então $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é um subconjunto denso de M.*

Demonstração: Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos abertos e densos de M. Mostremos que dada qualquer bola aberta B_1, tem-se que $A \cap B_1 \neq \emptyset$. Assim, seja B_1 uma bola aberta arbitrária, sendo A_1 aberto e denso temos que $A_1 \cap B_1$ é aberto e não-vazio, desta forma existe $r > 0$ tal que $B_r \subset A_1 \cap B_1$. Tomando uma bola aberta B_2 de raio menor que r e menor ou igual a $\frac{1}{2}$, temos que $\overline{B_2} \subset B_r \subset A_1 \cap B_1$. Prosseguindo da mesma forma, obtemos uma B_3 de raio menor que $\frac{1}{3}$ tal que $\overline{B_3} \subset A_2 \cap B_2$ e portanto para todo n, temos que existe B_{n+1} tal que $\overline{B_{n+1}} \subset A_n \cap B_n$.
Por construção, obtemos uma sequência decrescente $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset ... \supset \overline{B_n} \supset ...$ com $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{B_n}) = 0$. Sendo M completo, segue do Teorema 2.7 que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \{a\}$. Como $\overline{B_{n+1}} \subset A_n \cap B_n$ para todo n segue que $a \in A_n$ para todo n e $a \in B_1$, logo $A \cap B_1 \neq \emptyset$. ■

Observação 2.42. O Lema 2.40 garante que o teorema de Baire é equivalente aos itens 1. e 2. deste lema.

Corolário 2.43 (do teorema de Baire)**.** *Seja M um espaço métrico completo não-vazio. Se $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ enumerável onde cada F_n é fechado em M, então existe pelo menos um n, tal que* $\operatorname{int}(F_n) \neq \emptyset$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$ para todo n. Sendo M completo, segue do item 2 do Lema 2.40 que $\operatorname{int}(M) = \emptyset$ o que implica dizer que $M = \emptyset$, uma vez que um espaço métrico é aberto em si mesmo, mas isto é um absurdo. ■

No que segue, apresentaremos algumas aplicações do teorema de Baire sobretudo na análise funcional.

A reta real $\mathbb{R}$ é não-enumerável

Teorema 2.44. *A reta real $\mathbb{R}$ é não-enumerável.*

Demonstração: Suponha que $\mathbb{R}$ seja enumerável, então $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$, isto é, podemos escrever $\mathbb{R}$ como sendo a reunião enumerável de seus pontos que são claramente fechados em $\mathbb{R}$. Segue então do corolário do Teorema de Baire que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que um dos pontos de $\mathbb{R}$ tem interior não-vazio, o que é um absurdo. ■

O teorema de Banach - Steinhaus

Teorema 2.45 (Teorema de Banach - Steinhaus)**.** *Seja X um espaço de Banach, Y um espaço vetorial normado e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares contínuos de X em Y. Se para cada $x \in X$, existe $C_x > 0$ tal que $||T_n(x)|| \leq C_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{L}(X;Y)$, isto é, existe $C > 0$ tal que $||T_n|| \leq C$ para todo n.*

Demonstração: Considere para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = \{x \in X \mid ||T_n(x)|| \leq k, \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que cada A_k é fechado pois, sendo $\alpha \in \overline{A_k}$, temos que $\alpha = \lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i$ onde $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A_k$. Assim, para cada n fixado temos $||T_n(\alpha_i)|| \leq K$. Como $T_n : X \to Y$ é contínuo temos que $||T_n(\alpha)|| \leq K$,isto é, $\alpha \in A_k$.
Note que $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, pois dado $x \in X$, $||T_n(x)|| \leq C_x$ e portanto existe um natural k tal que $||T_n(x)|| \leq k$, ou seja, $x \in A_k$ para algum k.
Sendo X completo, segue do corolário 2.43 que existe um k_0 tal que $\text{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$. Desta forma, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A_{k_0}$. Seja agora $x \in X - \{0_X\}$ arbitrário e $z = x_0 + \gamma \cdot x$ onde $\gamma = \frac{r}{3 \cdot ||x||}$, ainda $z \in B(x_0, r) \subset A_{k_0}$.
Mostremos agora que $||T_n||$ é limitada. Para isto, observe que $x = \frac{z - x_0}{\gamma}$, $||T_n(z)|| \leq k_0$ e $||T_n(x_0)|| \leq k_0$, daí

$$||T_n(x)|| = \left|\left|T_n\left(\frac{z - x_0}{\gamma}\right)\right|\right| \leq \frac{||T_n(x_0)|| + ||T_n(z)||}{\gamma} \leq \frac{6 \cdot ||x|| \cdot k_0}{r}$$

Tomando o sup na desigualdade acima, segue que:

$$||T_n|| = \sup_{||x||=1} ||T_n(x)|| \leq \frac{6 \cdot k_0}{r}.$$

■

O teorema da aplicação aberta

Nem sempre é verdade que dada uma função $f : M \to N$ e $A \subset M$ aberto, a imagem $f(A) \subset N$ é um subconjunto aberto de N. Um exemplo bastante simples dessa situação é considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Note que tomando $A = (-1, 1)$ que é um aberto da reta, vemos que $f(A) = [0, 1)$ que não é aberto em $\mathbb{R}$. O Teorema que vamos apresentar neste tópico, estabelece condições para que uma transformação linear contínua transforme conjuntos abertos em conjuntos abertos. Para compreendermos a demonstração deste resultado, precisamos do seguinte resultado auxiliar e sua demonstração encontra-se em [1]:

Lema 2.46. *Sejam E e F espaços normados, com E completo e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Se existirem $r, R > 0$ tais que:*

$$\overline{T(B_E(0; R))} \supset B_F(0; r).$$

Então

$$T(B_E(0; R)) \supset B_F\left(0; \frac{r}{2}\right).$$

Observação 2.47. O lema acima garante que se conseguimos uma bola aberta contida no fecho da imagem de uma transformação linear de uma bola aberta, podemos diminuir o raio de forma que a bola esteja contida apenas na imagem da transformação linear desta mesma bola.

Teorema 2.48 (O teorema da aplicação aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ linear, contínua e sobrejetiva. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, se T é bijetiva então T^{-1} é contínua.*

Demonstração: Sabemos que $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_E(0; n)$. Uma vez que T sobrejetiva temos que $F = \overline{F} = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(B_E(0; n))} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}$. Segue então que F é completo e $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}$.
Pelo Teorema de Baire, existe n_0 tal que $\overline{T(B_E(0, n_0))}$ tem interior não-vazio, isto é, existe uma bola de centro b e raio $r > 0$ tal que $B_F(b, r) \subset \overline{T(B_E(0, n_0))}$. Assim, temos que $\overline{T(B_E(0, n_0))} = -\overline{T(B_E(0, n_0))}$. Segue então que $B_F(-b, r) = -B_F(b, r) \subset \overline{T(B_E(0; n_0)}$. Note ainda que dado x, podemos escrever $x = \frac{1}{2}(b + x) + \frac{1}{2}(b - x)$ e , portanto, $B_F(0; r) \subset \frac{1}{2}B_F(b; r) + \frac{1}{2}B_F(-b; r) \subset \overline{T(B_E(0, n_0))}$. Pelo Lema 2.46 segue que, $T(B_E(0, n_0)) \supset B_F(0; \rho)$ e, portanto, $T(B_E(0, c \cdot n_0)) \supset B_F(0; c \cdot \rho)\ \forall\ c > 0$.
Vamos mostrar agora que $T(B_E(x; c \cdot n_0)) \supset B_F(T(x); c \cdot \rho)$. De fato, note que

$$
\begin{aligned}
T(B_E(x, c \cdot n_0)) &= T(x) + T(B_E(0; c \cdot n_0)) \\
&\supset T(x) + B_F(0; c \cdot \rho) \\
&= B_F(T(x); c \cdot \rho)
\end{aligned}
$$

Agora mostremos que $T(U)$ é aberto em F para todo U aberto em E. Seja $U \subset E$ aberto, $x \in U$ e $c > 0$ tal que $B_E(x, c \cdot n_0) \subset U$. Então $T(U) \supset T(B_E(x; c \cdot n_0)) \supset B_F(T(x); c \cdot \rho)$, isto é, $T(U)$ é aberto. Além disso, T^{-1} é contínua pois a imagem inversa de qualquer aberto de E é um aberto de F. ■

O teorema do gráfico fechado

Sabe-se da análise matemática que o gráfico $G(f)$ de uma aplicação contínua $f : M \to N$ é sempre um subconjunto fechado de $M \times N$. Porém, nem sempre $G(f)$ ser fechado implica que f é contínua, para ver isto basta considerar uma aplicação descontínua cujo gráfico contém uma quantidade finita de pontos. O resultado abaixo estabelece sobre quais condições $G(f)$ ser fechado implica que $f : M \to N$ é contínua.

Teorema 2.49 (O teorema do gráfico fechado)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração: Suponha que T é contínua, vamos mostrar que $G(T)$ é fechado. Para isto, considere a aplicação $f : E \times F \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ||T(x) - y||$. Observe que o gráfico de T é a imagem inversa do conjunto fechado $\{0\} \subset \mathbb{R}$ pela aplicação contínua f, portanto é fechado. Reciprocamente, se $G(T)$ é fechado mostremos que T é contínua. Para isto, considere a aplicação $\phi : G(T) \to E$ definida por $\phi(x, T(x)) = x$ que é linear e bijetiva e note que ϕ é contínua em virtude do Teorema 1.46 uma vez que $||\phi(x,T(x))|| = ||x|| \leq ||x|| + ||T(x)|| = ||(x, T(x))||$. Segue então do Teorema 2.48 que ϕ^{-1} é contínua, assim existe $c > 0$ tal que $||(x,T(x))|| \leq c \cdot ||x||$ para todo x em E. Observe também que $||T(x)|| \leq ||T(x)|| + ||x|| = ||(x,T(x))|| \leq c \cdot ||x||$, o que conclui a continuidade de T. ■

2.4.2 O teorema do ponto fixo de Banach e aplicações

O próximo resultado busca determinar solução (ou soluções) de equações do tipo:

$$\phi(x) = b \tag{2.4}$$

onde ϕ é uma aplicação contínua definida em um conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^n$. Observe que reescrevendo a equação obtemos $\phi(x) - b = 0 \Leftrightarrow x + \phi(x) - b = x$, assim considerando a função $f(x) = \phi(x) - b + x$ vemos que encontrar uma solução para (2.4) é equivalente a determinar *pontos fixos* da aplicação f, isto é, encontrar $x \in F$ tal que

$$f(x) = x. \tag{2.5}$$

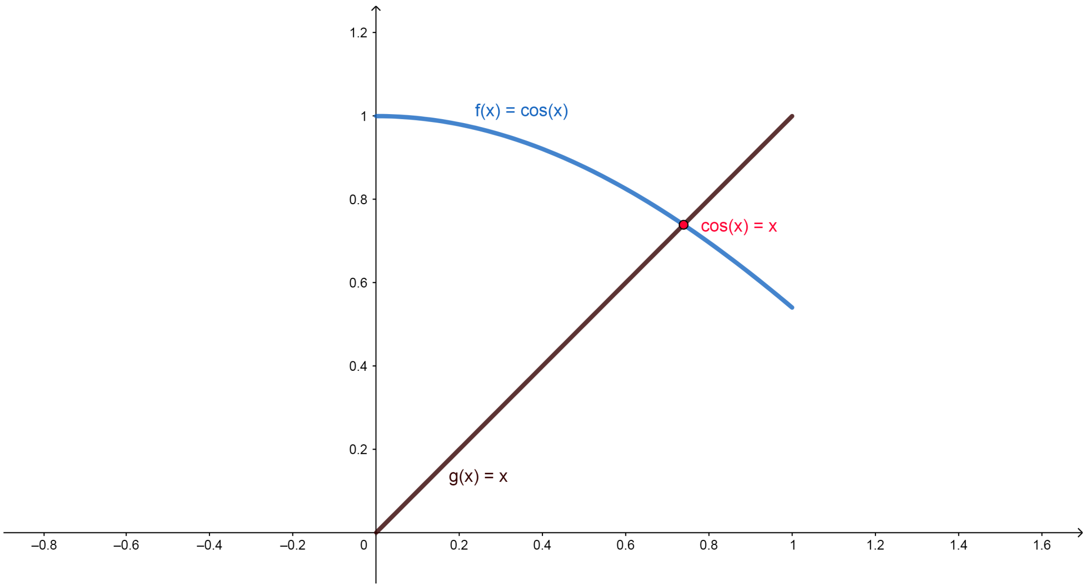
Para resolver a equação (2.5), é necessário a compreensão dos conceitos preliminares abaixo:

Definição 2.50. Seja $f : M \to M$ uma aplicação e $x_0 \in M$. Diremos que x_0 é um *ponto fixo* de f quando $f(x_0) = x_0$.

Exemplo 2.51. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ admite ponto fixo. De fato, $f(x) = x$ implica que $x^2 = x$ e, portanto, $x = 0$ *ou* $x = 1$.

Exemplo 2.52. A aplicação $f(x) = cos(x)$, $0 \leq x \leq 1$ admite ponto fixo como vemos na figura abaixo:

Figura 2.1: Gráfico de $\cos(x) = x$ no intervalo $[0, 1]$



Fonte: Produzido pelo autor

Para determinarmos o ponto fixo de algumas aplicações, basta realizarmos algumas manipulações algébricas como é o caso do exemplo 2.51, mas nem sempre é possível determinar o ponto fixo de aplicações apenas com manipulações algébricas e, por isto, existem alguns resultados na matemática que garantem sob quais condições uma aplicação admite pontos fixos e como determiná-los. O teorema do ponto fixo de Banach é um deles e este possui diversas consequências na matemática, principalmente na teoria das equações diferenciais e integrais. A fim de apresentarmos este resultado, elencaremos a seguinte definição que nada mais é do que o método de determinar os pontos fixos de uma contração, conhecido como o método das aproximações sucessivas.

Definição 2.53. Sejam $f : F \to \mathbb{R}^n$, com $F \subset \mathbb{R}^n$, F fechado, e $x_0 \in F$. A sequência definida por $x_1 = f(x_0)$ e $x_n = f^n(x_0), \forall\, n \geq 1$ é chamada de *aproximações sucessivas* da solução da equação (2.5).

Proposição 2.54. *Se $f : F \to F$ é contínua e a sequência definida por $x_1 = f(x_0)$ e $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0)$ for convergente em F então $a = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$ é ponto fixo de f.*

Demonstração: De fato, suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, assim temos que:

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a.$$

■

Teorema 2.55 (Teorema do ponto fixo de Banach)**.** *Seja M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único $a \in M$ tal que $f(a) = a$.*

Demonstração: Para boa compreensão deste resultado, dividiremos a demonstração nas etapas de existência e unicidade:

Existência do ponto fixo:

Dado $x_0 \in M$, considere a sequência dada por $x_1 = f(x_0)$ e $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$. Mostremos por indução que vale $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}$:

P(1): Vejamos se vale para n = 1:

Note que $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1)$, pois f é uma contração. Logo é válido para $n = 1$.

P(n): Suponha que seja válida para n, isto é, $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$.

P(n+1): Vejamos se é válido para $n + 1$:

Note que $d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq c \cdot d(x_{n+1}, x_n) \leq c^{n+1} \cdot d(x_0, x_1)$, onde usamos o fato de f ser contração e a hipótese de indução.

Logo, pelo princípio de indução finita, temos que $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue então que para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer, vale

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Assim, como $c \in [0, 1)$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c} \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1).$$

Como $c^n \to 0$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow c^n < \epsilon$. Para este n_0, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$, ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em M e portanto convergente. Segue então da Proposição 2.54 que f admite pontos fixos.

Unicidade do ponto fixo:

Suponha, por absurdo que f admite dois pontos fixos, isto é, existem $a, b \in M$ tal que $f(a) = a$ e $f(b) = b$ com $a \neq b$. Sendo f uma contração temos que $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b)$ o que implica $d(a, b) \leq c \cdot d(a, b)$, portanto, $d(a, b) - c \cdot d(a, b) \leq 0$, assim, $d(a, b) \cdot [1 - c] \leq 0$. Como $d(a, b) \geq 0$ e $[1 - c] > 0$ segue que $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$ o que é um absurdo. ■

Observação 2.56. Fazendo $p \to \infty$ na desigualdade $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1)$ obtemos $d(x_n, a) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1)$ o que nos fornece um limite superior para o erro ao tomarmos o n-ésimo iterado x_n como um valor para o ponto fixo a.

Aplicações do teorema do ponto fixo de Banach

Aplicação 1 (Equações diferenciais/Teorema de Picard). *Seja f uma função contínua num retângulo $R = \{(t,x) \mid |t-t_0| \leq a \ , \ |x-x_0| \leq b\}$ e assim limitada em R, ou seja, $|f(t,x)| \leq c \ \forall (t,x) \in R$. Suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz em R com respeito ao segundo argumento, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que para $(t,x),(t,v) \in R$, $|f(t,x) - f(t,v)| \leq k \cdot |x-v|$. Desta forma, o Teorema do ponto fixo de Banach garante que o problema de valor inicial(PVI):*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem solução única no intervalo $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ onde $\beta < \min\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$.

Demonstração:

1) Considere $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ o conjunto das aplicações contínuas $x : I \to \mathbb{R}$, onde $I = [t_0 - \beta, t_0+\beta]$ com a métrica $d(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$;

2) Seja $\widehat{\mathcal{C}}(I,\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \mid |x(t)-x_0| \leq c\cdot\beta\}$ que é fechado em $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

3) Pelo Teorema fundamental do cálculo, podemos reescrever o PVI como $\phi(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\, ds$.

Dados $s \in I$ e $x(t) \in \widehat{\mathcal{C}}(I,\mathbb{R})$, como $c\cdot\beta < b$ e $\beta < a$, qualquer que seja o mínimo ($\beta < min\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$), temos que:

$$\begin{aligned} s \in I \quad &\Rightarrow \quad t_0 - \beta \leq s \leq t_0 + \beta \\ &\Rightarrow \quad t_0 - a \leq t_0 - \beta \leq s \leq t_0+\beta \leq t_0 + a \\ &\Rightarrow \quad |s-t_0| \leq a. \end{aligned}$$

Além disso, $x(t) \in \widehat{\mathcal{C}}(I,\mathbb{R}) \Rightarrow |x(t)-x_0| \leq c\cdot\beta < b$, ou seja, $(s,x(s)) \in R$, isto é, a integral está bem definida.
Notemos que, $\phi \in \widehat{\mathcal{C}}(I,\mathbb{R})$ sempre que $x(t) \in \widehat{\mathcal{C}}(I,\mathbb{R})$ pois

$$|\phi(x) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\, ds \right| \leq c\cdot|t-t_0| \leq c\cdot\beta$$

Além disso, temos que ϕ é contração, pois:

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k \cdot |x(s) - y(s)|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k \cdot \sup_{u \in I} |x(u) - y(u)|\, ds \\
&\leq |t - t_0| \cdot k \cdot d(x, y) \\
&\leq k \cdot \beta \cdot d(x, y) \Rightarrow d(\phi(x), \phi(y)) \leq k \cdot \beta \cdot d(x, y)
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, existe uma única $x(t)$ que é ponto fixo de ϕ. ■

Aplicação 2 (Equação de Fredholm)**.** *Uma equação integral da forma:*

$$x(t) - \mu \cdot \int_a^b K(t, u) \cdot x(u)\, du = v(t) \tag{2.6}$$

é chamada equação de Fredholm de segunda espécie. Com $[a, b]$ um intervalo arbitrário, x uma função em $[a, b]$ e μ é um parâmetro. O núcleo K assume valores em $[a, b] \times [a, b]$ e v é uma função contínua em $[a, b]$.

Estudaremos a solução do problema no conjunto das aplicações contínuas definidas no intervalo $[a, b]$ dotado da métrica $d(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$. Neste caso, como as funções são contínuas e estão definidas no compacto $[a, b]$ a métrica pode ser vista como sendo o max |x(t) - y(t)|, onde $t \in [a, b]$.
Suponha agora que K é contínua em $[a, b] \times [a, b]$ e que $|\mu| < \frac{1}{c} \cdot (b - a)$, sendo c a constante que limita a função K, isto é, $|K(t, u)| \leq c \ \forall \ (t, u) \in [a, b] \times [a, b]$. Nestas condições a equação 2.6 possui solução única x em $[a, b]$.

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{C}_0([a, b])$ é um espaço métrico completo. Assim, toda contração $T : \mathcal{C}_0([a, b]) \to \mathcal{C}_0([a, b])$ admite um único ponto fixo. Desta forma considere

$$\begin{array}{rcll}
T & : & \mathcal{C}_0([a, b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0([a, b]) \\
& & x(t) & \longmapsto & v(t) + \mu \cdot \int_a^b K(t, u) \cdot x(u)\, du
\end{array}$$

Sendo v, x e K contínuas em $[a, b]$, temos que T está bem definida (a integral faz sentido). Vamos mostrar que T é contração, para isso notemos que dadas $x(t), y(t) \in \mathcal{C}_0([a, b])$, temos:

$$\begin{aligned}
d(T(x(t)),T(y(t))) &= \sup_{t\in[a,b]}\left|\mu\cdot\int_a^b K(t,u)\cdot[x(u)-y(u)]\,du\right| \\
&\leq |\mu|\cdot\sup_{t\in[a,b]}\int_a^b c\cdot|x(u)-y(u)|\cdot du \\
&\leq^* |\mu|\cdot c\cdot\int_a^b \sup_{h\in[a,b]}|x(h)-y(h)|\,du \\
&= |\mu|\cdot c\cdot(b-a)\cdot\sup_{h\in[a,b]}|x(h)-y(h)| < |\mu|\cdot c\cdot(b-a)\cdot d(x,y)
\end{aligned}$$

(*)Fixando $u\in[a,b]$ temos que $|x(u)-y(u)|\leq\sup\limits_{h\in[a,b]}|x(h)-y(h)|$.

Logo, segue que T é contração uma vez que $|\mu|<\frac{1}{c}\cdot(b-a)$ e pelo Teorema do ponto fixo de Banach, existe $x(t)\in\mathcal{C}_0([a,b])$ tal que $T(x(t))=x(t)$, ou seja,

$$T(x(t))=x(t)\Leftrightarrow x(t)-\mu\cdot\int_a^b K(t,u)\cdot x(u)\,du=v(t).$$

■

Capítulo 3

Espaços métricos compactos

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar o conceito de conjuntos compactos em espaços métricos. A motivação do estudo da teoria dos espaços métricos compactos deve-se principalmente ao objetivo de generalizar a noção de finitude e limitação, já formalizada no conjunto dos números reais. Veremos que esta definição não abrange a maioria dos espaços métricos. Inicialmente, revisaremos o conceito de compacidade na reta bem como alguns resultados válidos apenas nestes espaços.

3.1 Compacidade na reta

Definição 3.1. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *compacto* quando este é fechado e limitado.

Teorema 3.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo subconjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}$ possui ponto de acumulação.*

Demonstração: Suponha que X é limitado, isto é, existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $X \subset [\alpha, \beta]$, ou seja, $\alpha \leq x \leq \beta$ para todo $x \in X$. Considere o conjunto

$$A = \{a \in \mathbb{R} \ ; \ X \cap (a, +\infty) \text{ é infinito}\}.$$

Primeiramente, notemos que $A \neq \emptyset$, pois, $\alpha \in A$ pois $X \cap (\alpha, \infty)$ é infinito uma vez que $X \subset (\alpha, \infty)$.
Além disso, A é limitado superiormente. Para ver isto, note que $X \subset [\alpha, \beta]$ e se $k > \beta \Rightarrow X \cap (k, \infty) = \emptyset$. Pois se existisse $a \in X$ e $a \in (k, \infty)$ teríamos que $a > k > \beta$. Como $a \in X$ temos que $a \leq \beta$, ou seja, $\beta < a \leq \beta$ o que é um absurdo. Logo A é limitado superiormente por β.
A propriedade do supremo dos números reais, garante que todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{R}$ possui supremo, desta forma, temos que existe $c = supA$.
Mostremos então c é ponto de acumulação de A.
De fato, dado $\epsilon > 0$ temos que $c - \epsilon$ não é cota superior de A, isto quer dizer que existe

$a \in A$ tal que $c - \epsilon < a \leq c < c + \epsilon$.
Logo, existem infinitos pontos à direita de $c - \epsilon$. Por outro lado, não há uma infinidade de pontos de X à direita de $c + \epsilon$, pois se houvesse $c + \epsilon \in A \Rightarrow c + \epsilon \leq c$ o que não ocorre. Logo $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap X$ é infinito, pois se $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap X$ fosse finito, teríamos que $(c+\epsilon, \infty) \cap X$ deveria ser infinito uma vez que $(c-\epsilon, \infty) = [(c-\epsilon, c+\epsilon] \cup (c+\epsilon, \infty)] \cap X = (c - \epsilon, c + \epsilon) \cap X \cup [c + \epsilon, \infty) \cap X$, que é infinito uma vez que $c - \epsilon \in A$. Portanto, segue o resultado. ■

O próximo resultado, também chamado de Teorema de Bolzano-Weierstrass é um caso particular do teorema anterior para limites de uma sequência.

Teorema 3.3 (As vezes chamado de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $S = \{x_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos termos da sequência. Vamos dividir a demonstração em 2 casos:
Caso 1: S é finito.
Neste caso temos que $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Assim, $x_i = x_{k_1} = x_{k_2} = \cdots$ é uma subsequência constante e portanto convergente.
Caso 2: S é infinito e limitado (pois a sequência é limitada).
Sendo S infinito e limitado, pelo teorema anterior, temos que S admite um ponto de acumulação. Vamos então construir tal subsequência convergente:
Para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $\epsilon = \dfrac{1}{k}$, uma vez que $\epsilon > 0$ dado.
Para $k = 1$ temos que existe $x_{k_1} \in B(c, 1)$ onde c é o ponto de acumulação e $x_{k_1} \in S$. Prosseguindo desta forma, temos que:
Para $k = k_j$ temos que existe $x_{k_j} \in B\left(c, \dfrac{1}{k_j}\right)$ onde $x_{k_j} \in S$. Assim, dado $\epsilon > 0$ seja $k_{j_0} > \dfrac{1}{k_j}$, então se $k_j > k_{j_0}$ então $|x_{k_j} - c| < \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{k \to \infty} x_{k_j} = c$. ■

Teorema 3.4 (Borel-Lebesgue)**.** *Seja* $[a, b] \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, *onde* A_λ *é uma familia de subconjuntos abertos da reta. Então existem* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in L$ *tais que* $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Demonstração: Sendo A_λ aberto para todo λ, temos que existe $r_{t,\lambda} > 0$ tal que $t \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$ e para cada $t \in [a, b]$. Considere então o conjunto:

$$X = \{x \in [a, b] \ ; \ [a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}\}.$$

Inicialmente, note que $X \neq \emptyset$, pois $a \in X$ uma vez que $[a, a] = \{a\} \subset A_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$.
Nosso objetivo é mostrar que $X = [a, b]$.
Sendo A_λ aberto, temos que existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset A_\lambda$. Como $a < b$ temos que $b = a + k$, com $k > 0$. Assim, se $a + \delta' < a + k \Rightarrow \delta' < k$. Daí, tome $\delta' < k$ e $\delta' < \delta$, assim $[a, a + \delta') \subset A_\lambda$.

Vamos mostra que X é um intervalo, para isto, mostraremos que se $x \in X$ e $a \leq y < x$ então $y \in X$. Isto ocorre pois $[a, y] \subset [a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$,, isto é, X é um intervalo da forma $[a, c]$ ou $[a, c)$, onde $c = \sup(X)$.

Mostremos então que $c \in X$. Como $X \subset [a, b]$ temos que $[a, c] \subseteq [a, b]$. Assim, temos que existe $\lambda_0 \in L$ tal que $c \in A_{\lambda_0}$. Sendo A_{λ_0} aberto existe $\epsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Ainda como $c = \sup(X)$ temos que, $c - \epsilon$ não é cota superior para X, pela definição de sup, temos que existe $x \in X$ tal que $c - \epsilon < x \leq c$. Sendo $x \in X$, segue que $[a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$, o que implica, $[a, c] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}$, isto é, $c \in X$.

Por fim, vejamos que $c = b$.

De fato, se $c < b$ então existe $c' \in [a, b]$ tal que $c < c' < b$. Com raciocinio análogo, garantimos que $[a, c'] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A'_{\lambda_0}$. O que implicaria $c' \in X$, o que é um absurdo, pois isto contradiz o fato de c ser supremo de X. Logo $b = c$. ■

Teorema 3.5 (Forma geral do teorema de Borel-Lebesgue). *Seja F um subconjunto fechado e limitado da reta. De toda familia $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de abertos tais que $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ pode-se extrair uma subfamilia finita $(A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_n})$ cuja reunião contém F.*

Demonstração: Como F é limitado temos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq h \leq \beta$ para todo $h \in F$. Como F é fechado temos que F^c é aberto e $[\alpha, \beta] \subset \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup F^c$. Pelo Teorema anterior, existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in L$ tais que $[\alpha, \beta] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup F^c$. Como F^c não contém nenhum ponto de F temos que $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. ■

Observação 3.6. Note que em $\mathbb{R}$ um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ compacto se, e somente se, de toda familia $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de abertos com $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ pode-se extrair uma subfamilia finita cuja reunião contém F.

Teorema 3.7. *Dada uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots X_n \supset \cdots$ de conjuntos compactos não-vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os X_n.*

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in X_n$. Como a sequência de conjuntos X_n é decrescente, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X_1$. Sendo X_1 compacto, pelo Teorema 3.3 temos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, digamos $\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = a \in X_1$. Além disso, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, por definição de convergência, temos que $x_{n_k} \in X_n$ sempre que $n < n_k$. Como X_n é compacto temos que $a \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.2 Espaços métricos compactos

Como vimos na seção acima, um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, se e somente se, é fechado e limitado. Porém, esta condição não pode ser generalizada para espaços mais gerais como, por exemplo, em ℓ^2 não é suficiente que um subconjunto $X \subset \ell^2$ para ser compacto, seja fechado e limitado, por isto, é necessário um estudo mais aprofundado e uma definição de compacidade que abranja a maioria dos espaços. Assim, a partir desse momento, nosso objetivo é apresentar o conceito de compacidade que é válido em espaços métricos. Para boa compreensão do tema, elencaremos abaixo os primeiros conceitos dessa teoria:

Definição 3.8. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma *cobertura* de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto quer dizer que para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Definição 3.9. Se existir um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in L'$ com $x \in \mathcal{C}_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L'} C_\lambda$ então a subfamilia $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ chama-se uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$.

Definição 3.10. Quando L' é um subconjunto próprio de L, $\mathcal{C}'$ diz-se uma *subcobertura própria* de $\mathcal{C}$.

Definição 3.11. Uma cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ é dita *aberta*, quando cada A_λ com $\lambda \in L$ é um subconjunto aberto de M.

Definição 3.12. A cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se *finita* quando L é um conjunto finito. Neste caso, podemos escrever $L = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ e desta forma temos que $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$.

Agora apresentaremos o conceito mais importante deste capítulo que é o conceito de compacidade.

Definição 3.13. Um espaço métrico M chama-se *compacto* quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita, ou seja, dizer que M é compacto significa que se $M = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada A_λ é aberto em M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Definição 3.14. Um subconjunto X de um espaço métrico chama-se um *subconjunto compacto* quando o subespaço métrico X é compacto. Isto significa que toda cobertura $X = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A'_\lambda$ por meio de abertos A'_λ de X é possível extrair uma subcobertura finita $X = A'_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A'_{\lambda_n}$.

A proposição a seguir relaciona a noção de compacidade em um subespaço métrico com a de compacidade no espaço métrico todo.

Proposição 3.15. *Um subconjunto $X \subset M$ é compacto se, e somente se, de cada cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, a partir dos abertos $A_\lambda \subset M$, é possível extrair uma subcobertura finita $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.*

Demonstração: Inicialmente, suponha X compacto e seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ cobertura tal que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ com $A_\lambda \subset M$ aberto para todo $\lambda \in L$. Definindo $B_\lambda = A_\lambda \cap X$, pela definição de aberto relativo, segue que $B_\lambda \subset X$ é aberto para todo $\lambda \in L$ e $X = \bigcup_{\lambda\in L} B_\lambda$. Sendo X compacto, temos que a cobertura $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ admite subcobertura finita, isto é, $X = B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_n}$. Segue então que dado $\alpha \in X$ temos que $\alpha \in B_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$, e portanto, $\alpha \in A_{\lambda_0}$ o que implica dizer que $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Reciprocamente, seja $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ cobertura aberta de X, onde $B_\lambda \subset X$ é aberto em X para todo $\lambda \in L$. Pela definição de aberto relativo, temos que, $B_\lambda = A_\lambda \cap X$ com $A_\lambda \subset M$ aberto em M. Segue então que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Por hipótese, temos que $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ o que implica dizer que $X = B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_n}$ e, portanto, X é compacto.

■

Como a definição de compacto é formulada em termos dos abertos do espaço, segue que a compacidade é um invariante topológico, isto é, é preservada por homeomorfismos como veremos no resultado a seguir:

Proposição 3.16. *Se M e N são homeomorfos então M é compacto se, e somente se, N o é.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que se $f : M \to N$ é homeomorfismo e M é compacto, então N é compacto.
De fato, como f é homeomorfismo, em particular, é uma aplicação sobrejetiva, isto é, $f(M) = N$. Assim, seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ uma cobertura aberta de N, isto é,

$$N = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \Rightarrow f(M) = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda.$$

Então, temos que $f^{-1}(f(M)) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)$. Logo $M = \bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(A_\lambda)$. Sendo f contínua temos que $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ é uma cobertura aberta de M, uma vez que $A_\lambda \subset N$ é aberto. Sendo M compacto, esta cobertura admite uma subcobertura finita, isto é, existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in L$ tais que

$$\begin{aligned} M = f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n}) \;&\Rightarrow\; f(M) = f(f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})) \\ &\Rightarrow\; f(M) = f(f^{-1}(A_{\lambda_1})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_{\lambda_n}))) \\ &\Rightarrow\; f(M) = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Isto implica que N é compacto. De forma análoga, sabendo que $f^{-1} : N \to M$ é contínua e N compacto, segue que M é compacto. ■

Observação 3.17. Segue da Proposição acima que se $A \subset M$ é compacto e $f : M \to N$ é contínua então $f(A) \subset N$ é compacto.

Proposição 3.18. *Seja M um espaço métrico.*

1. *Se M é finito então M é compacto;*

2. *Se M é discreto e infinito então M não é compacto;*

3. *Se $K, L \subset M$ são subconjuntos compactos então $K \cup L$ é compacto.*

Demonstração:

1. De fato, seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $M = \{x_1, \cdots, x_n\}$, isto é, $M = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Na pior das hipoteses, temos que $x_i \in A_{\lambda_i}$ para cada i e $A_{\lambda_i} \cap A_{\lambda_j} = \emptyset$ se $i \neq j$. Sendo M finito, temos que $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Ou seja, M é compacto.

2. De fato, suponha que M é discreto, isto é, para cada x_i existe $r_i > 0$ tal que $B(x_i, r_i) = \{x_i\}$. Então, temos que $M = \bigcup \{x_i\} = \bigcup B(x_i, r_i)$. Portanto $\{B(x_i, r_i)\}$ é uma cobertura aberta de M. Se M fosse compacto então esta cobertura aberta admitiria uma subcobertura finita o que implicaria que M é finito. Logo M não é compacto.

3. Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $K \cup L$, isto é, $K \cup L = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Desta forma, temos que $K \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ e $L \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Sendo K e L compactos, temos que $K \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ e $L \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_p}$. Ou seja, $K \cup L \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_{n+1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_p}$ e, portanto, é compacto.

■

O resultado que apresentaremos a seguir, tem como objetivo caracterizar a noção de espaços métrico compactos a partir do conceito de conjuntos fechados, uma vez que inicialmente definimos a partir dos abertos do espaço. Para isto, elencaremos a definição abaixo:

Definição 3.19. Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ goza da *propriedade da interseção finita* quando para qualquer subconjunto finito $L = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, tem-se que $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset$.

Proposição 3.20 (Caracterização de compactos a partir de fechados)**.** *Seja M um espaço métrico, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos abertos e $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos fechados.*

1. *$M = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ se, e somente se, $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$, onde $F_\lambda = M - A_\lambda$;*

2. *M é compacto se, e somente se, toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia possui uma subfamília finita com interseção vazia: $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} = \emptyset$;*

3. *M é compacto se, e somente se, dada uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com a propriedade da interseção finita tem-se que $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$.*

Demonstração:

1. Inicialmente mostremos que se $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$.
   De fato, suponha por absurdo que $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$, então existe $\alpha \in \cap F_\lambda$, isto é, $\alpha \in F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Isto quer dizer que $\alpha \in F_\lambda = M - A_\lambda$ para todo $\lambda \Rightarrow \alpha \in M$ *e* $\alpha \notin A_\lambda$ para todo λ, ou seja, $\alpha \in M$ e $\alpha \notin \cup A_\lambda$. Portanto $M \neq \cup A_\lambda$ o que é um absurdo, pois $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.
   Reciprocamente, vamos mostrar que se $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$ então $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.
   Mostremos que $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ por dupla inclusão. A primeira inclusão $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \subset M$ segue da definição dos A_λ. Seja então $\alpha \in M$, como $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$, temos que $\alpha \notin \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$, isto é, $\alpha \notin F_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Assim $\alpha \notin M - A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Desta forma, $\alpha \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$ e, portanto, $\alpha \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de onde concluímos que $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

2. Inicialmente, suponha que M é compacto e seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma familia de fechados com interseção vazia. Sendo F_λ fechado, temos que $M - F_\lambda = A_\lambda$ é aberto em M. Vamos garantir que $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Para garantir isto, mostraremos que $M \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Daí, seja $\alpha \in M$, como $\cap F_\lambda = \emptyset \Rightarrow \alpha \notin \cap F_\lambda \Rightarrow \alpha \notin F_\lambda$ para algum λ. Desta forma, temos que $\alpha \in A_\lambda = M - F_\lambda$ para algum $\lambda \Rightarrow \alpha \in \cup A_\lambda$, isto é, $M = \cup A_\lambda$. Então $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de M. Sendo M compacto, temos que esta cobertura admite uma subcobertura finita, isto é, $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Pelo que mostramos no item 1., temos que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \emptyset$, ou seja, obtemos uma subfamilia finita com interseção vazia.
   Reciprocamente, mostraremos que se toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia possui uma subfamília finita com interseção vazia então M é compacto.
   Assim, seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de M. Definindo $F_\lambda = M - A_\lambda \; \forall \lambda \in L$, temos que F_λ é fechado. Note que $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$, pois, se existisse $\alpha \in \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ teríamos que $\alpha \in F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, isto é, $\alpha \in M$ e $\alpha \notin A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, o que implicaria dizer que $M \neq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ o que não ocorre uma vez que $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de M. Então, por hipótese, temos que existe uma subfamilia finita de F_λ tal que $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} = \emptyset$. Note ainda que, pelo item 1. segue que, $\emptyset = F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \Leftrightarrow M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Portanto M é compacto.

3. Mostremos que se M é compacto então dada uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção finita tem-se que $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$.
   Suponha, por absurdo, que $\cap F_\lambda = \emptyset \Rightarrow (\cap F_\lambda)^c = M$, isto é, $\cup F_\lambda^c = M$ e sendo F_λ fechado, temos que F_λ^c é aberto. Daí, $(F_\lambda^c)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de M.

Sendo M compacto, temos que existe $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset L$ tal que $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ implica que $M^c = A^c_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A^c_{\lambda_n} \Rightarrow \emptyset = F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n}$, o que é um absurdo pois a família de fechados satisfaz a propriedade da interseção finita.

Agora mostremos que se dada uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia tem-se que $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$ então M é compacto.

Suponha, por absurdo, que M não é compacto. Então existe $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ cobertura aberta de M que não admite subcobertura finita. Assim, dado $J \subset L$ finito, $M \neq \bigcup\limits_{\lambda \in J} A_\lambda$ implica que $M^c \neq \left(\bigcup\limits_{\lambda \in J} A_\lambda\right)^c$. Definindo $F_\lambda = M - A_\lambda$ temos que $\bigcap\limits_{\lambda \in J} F_\lambda \neq \emptyset$, ou seja, $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma coleção de fechados que satisfaz a propriedade da interseção finita. Então temos que $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow M \neq \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Isto quer dizer que $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ não é uma cobertura de M, o que é um absurdo.

■

A seguir, apresentaremos algumas propriedades dos espaços métricos compactos:

Proposição 3.21 (Propriedades dos espaços métricos compactos)**.** *Seja M um espaço métrico.*

1. *Se M é compacto e $F \subset M$ é fechado então F é compacto;*
2. *Se $F \subset M$ é compacto então F é fechado;*
3. *Qualquer interseção $K = \bigcap\limits_{\lambda \in L} K_\lambda$ de compactos $K_\lambda \subset M$ é compacta;*
4. *Se M é compacto então M é completo;*
5. *Se M é compacto então M é limitado;*
6. *Se M é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \to N$ é limitada;*
7. *Se M é compacto então toda aplicação contínua $f : M \to N$ é fechada, isto é, $F \subset M$ fechado $\Rightarrow f(F) \subset N$ fechado;*
8. *Se M é compacto então toda bijeção contínua $f : M \to N$ é um homeomorfismo.*

Demonstração:

1. Seja M compacto e $F \subset M$ fechado. Dada $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de F, isto é, $F \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Observe que sendo F fechado, temos que $M - F$ é aberto e além disso $M = \cup A_\lambda \cup (M - F)$ é uma cobertura aberta de M. Sendo M compacto, temos que esta cobertura admite uma subcobertura finita, assim $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup (M - F)$. Como $F \subset M$ e nenhum ponto de F pertence a $M - F$, temos que $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Logo F é compacto.

2. Seja K um conjunto compacto. Se K não fosse fechado teríamos que existe $x \in \overline{K} - K$. Pondo para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = M - B[x, \frac{1}{n}]$, teríamos uma cobertura aberta $K \subset \cup A_n$, isto ocorre pois como $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}] = \{x\}$ então $\cup A_n = M - \{x\} \supset K$ uma vez que $x \notin K$. Como $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, a reunião de uma coleção finita de conjuntos A_n é igual ao conjunto de maior índice da coleção. Como $x \in \overline{K}$, cada bola $B[x, \frac{1}{n}]$ contém algum ponto de K, ou seja, nenhum A_n contém K. Logo a cobertura aberta $K \subset \cup A_n$ não admite subcobertura finita, mas isto é uma contradição pois K é compacto. Logo K é fechado.

3. Sendo K_λ compacto, em particular, K_λ é fechado. Assim, $\cap K_\lambda$ é fechado em M e portanto em K_λ. Logo K é compacto, uma vez que, sendo K_λ fechado $\tilde{K} = \overline{K}$, isto é, o fecho de K em K_λ coincide com o fecho de K em M.

4. Se M é compacto então M é um subconjunto fechado denso do seu completamento. Logo $M = \widehat{M}$.

5. Se M é compacto, da cobertura aberta $M = \bigcup\limits_{x\in M} B(x, 1)$ podemos extrair uma subcobertura finita $M = B(x_1, 1) \cup \cdots \cup B(x_n, 1)$, logo M é limitado.

6. Seja $f : M \to N$ contínua. Se M é compacto então $f(M)$ é compacto, em particular, fechado.

7. Seja $F \subset M$ fechado $\Rightarrow F$ compacto $\Rightarrow f(F)$ compacto $\Rightarrow f(F) \subset N$ limitado.

8. Sendo f fechada, temos que sua inversa $f^{-1} : N \to M$ é tal que $F \subset M$ fechado $\Rightarrow (f^{-1})^{-1}(F) = f(F) \subset N$ fechado. Logo f^{-1} é contínua.

■

Observação 3.22. No item 4. da Proposição 3.21 vimos que todo espaço métrico compacto é completo e portanto as propriedades válidas nos espaços métricos completos são válidas nos espaços métricos compactos.

3.3 Espaços métricos totalmente limitados

Antigamente, a demonstração mais popular do Teorema de Borel-Lebesgue usava o método das bisseções repartidas que funcionava assim:
Se $[a, b] \subset \cup A_\lambda$ fosse uma cobertura aberta que não admitisse subcobertura finita, dividindo $[a, b]$ ao meio, em pelo menos uma das metades, a qual chamaríamos de $[a_1, b_1]$, a cobertura aberta $[a_1, b_1] \subset \cup A_\lambda$ não admitiria subcobertura finita. Prosseguindo assim obteríamos uma sequência de intervalos fechados e limitados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$ com $b_n - a_n = \dfrac{(b-a)}{2^n}$ (pois estamos sempre divivindo o intervalo ao meio) e, para nenhum

n, $[a_n, b_n] \subset \cup A_\lambda$ admitiria subcobertura finita. Pela Proposição 2.7, sendo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fechado e portanto completo, temos que existe $c \in [a, b]$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$. Ora, como $[a_n, b_n] \subset \cup A_\lambda \Rightarrow c \in A_\lambda$ para algum λ. Como A_λ é aberto para todo λ, temos que para n suficientemente grande $c \in [a_n, b_n] \subset A_\lambda$. Isto ocorre pois uma vez que A_λ é aberto e $c \in A_\lambda$ temos que existe $r > 0$ tal que $(c - r, c + r) \subset A_\lambda$. Daí, para $\epsilon = r$ temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{(b-a)}{2^{n+1}} < r$, uma vez que $\dfrac{1}{2^n}$ converge para 0, e portanto, $c - r \neq a_n$ e $b_n < c + r \Rightarrow [a_n, b_n] \subset (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A_\lambda$. Isto mostra que $[a_n, b_n]$ pode ser coberto por um único A_λ o que é um absurdo. Esta demonstração deu origem ao que chamamos hoje de espaços métricos totalmente limitados. Vale ressaltar ainda que nesta seção, nosso objetivo é apresentar algumas caracterizações de compacidade, que utiliza a noção de espaço métrico totalmente limitado que será definida a seguir:

Definição 3.23. Um espaço métrico M chama-se *totalmente limitado* quando, para todo $\epsilon > 0$, pode-se obter uma decomposição $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, de M como reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro menor do que ϵ.

No próximo resultado, apresentaremos duas caracterizações de espaços métricos totalmente limitados:

Proposição 3.24 (Caracterização dos espaços métricos totalmente limitados)**.** *Seja M um espaço métrico:*

1. *M é totalmente limitado se, e somente se, podemos escrever $M = B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$.*

2. *M é totalmente limitado se, e somente se, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número finito de pontos $x_1, \cdots, x_n \in M$ tais que todo ponto $x \in M$ dista menos de ϵ de algum x_i.*

Demonstração:

1. Inicialmente, suponha que M é totalmente limitado, isto é $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ com $\text{diam}(X_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Como $\text{diam}(X_i) < \epsilon$ e fixado $x_i \in X_i$ segue que $X_i \subset B(x_i, \epsilon)$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, portanto $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. A inclusão $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon) \subset M$ segue da definição.
   Reciprocamente, se $M = B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$ mostremos que M é totalmente limitado. Para isto, basta tomar $X_n = B(x_n, \frac{\epsilon}{3})$ para todo $\epsilon > 0$.

2. Segue do item 1.

■

Abaixo, segue algumas propriedades dos espaços métricos totalmente limitados:

Proposição 3.25 (Propriedade dos espaços métricos totalmente limitados)**.** *Seja M um espaço métrico:*

1. Todo subespaço X de um espaço métrico totalmente limitado ainda é totalmente limitado;

2. Se M é totalmente limitado então M é limitado;

3. Se $X \subset M$ é totalmente limitado então $\overline{X}$ é totalmente limitado;

4. M é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento $\widehat{M}$ o é.

Demonstração:

1. Seja $X \subset M$ um subespaço métrico de M onde M é totalmente limitado. Sendo M totalmente limitado temos que $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ com $\text{diam}(X_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Daí, note que $X = (X_1 \cap X) \cup \cdots \cup (X_n \cap X)$. Como $X \cap X_i \subset X_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, temos que $\text{diam}(X \cap X_i) \leq \text{diam}((X_i)) < \epsilon$ segue então que X é totalmente limitado.

2. Segue da definição.

3. Suponha que X é totalmente limitado. Sendo X limitado temos que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ com $\text{diam}(X_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Então $\overline{X} = \overline{X_1 \cup \cdots \cup X_n} = \overline{X_1} \cup \cdots \cup \overline{X_n}$ e como $\text{diam}(X_n) = \text{diam}(\overline{X_n})$ temos que $\overline{X}$ é totalmente limitado.

4. Mostremos inicialmente que se M é totalmente limitado então seu completamento $\widehat{M}$ também é totalmente limitado.
   De fato, seja M um espaço métrico e $\phi : M \to \widehat{M}$ uma imersão isométrica com $\widehat{M}$ completo. Suponha que M é totalmente limitado, isto é, $M = M_1 \cup \cdots \cup M_n$ com $\text{diam}(M_i) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Daí, $\phi(M) = \phi(M_1) \cup \cdots \cup M_n) = \phi(M_1) \cup \cdots \cup \phi(M_n)$. Então, $\overline{\phi(M)} = \widehat{M} = \overline{\phi(M_1)} \cup \cdots \cup \overline{\phi(M_n)}$. Sejam $a_1, a_2 \in \phi(M_n)$ então existem $x, y \in M_n$ tal que $a = \phi(x)$ e $b = \phi(y)$ e sendo ϕ uma imersão isométrica temos que $d(a, b) = d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$. Daí, $\sup\{d(a, b) \mid a, b \in \phi(M_n)\} = \sup\{d(x, y) \; ; \; x, y \in M_n\} < \epsilon$. Assim, $\widehat{M}$ é totalmente limitado.
   Reciprocamente, como $M \subset \widehat{M}$ que é totalmente limitado então pelo item 1. segue que M é totalmente limitado.

■

A partir da noção de espaços métricos totalmente limitados, apresentaremos algumas caracterizações dos espaços métricos compactos:

Proposição 3.26 (Caracterização dos espaços métricos compactos)**.** *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1. *M é compacto;*

2. *Todo subconjunto infinito $X \subset M$ possui ponto de acumulação;*

3. *Toda sequência em M possui uma subsequência convergente;*

4. *M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração: Mostremos que 1) $\Rightarrow$ 2).
Para isto suponhamos, por absurdo, que $X \subset M$ não possui pontos de acumulação. Observe que $\overline{X} = X \cup X'$. Uma vez que X não possui pontos de acumulação temos que $X' = \emptyset$, segue então que $\overline{X} = X$, ou seja, X é fechado em M e portanto X é compacto. Além disso, como $X' = \emptyset$ temos que X discreto. Desta forma, X é finito, pois todo espaço métrico discreto e compacto é finito, o que é um absurdo. Logo X possui ponto de acumulação.
Mostremos que 2) $\Rightarrow$ 3).
Seja $S = \{x_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos termos da sequência. Vamos dividir a demonstração em 2 casos:
Caso 1: S é finito.
Neste caso temos que $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Assim, $x_i = x_{k_1} = x_{k_2} = \cdots$ é uma subsequência constante e portanto convergente.
Caso 2: S é infinito e limitado (pois a sequência é limitada).
Neste caso, pelo item 1., temos que S admite um ponto de acumulação, mostremos que este é limite de uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $\epsilon = \dfrac{1}{k}$, uma vez que $\epsilon > 0$ é dado.
Para $k = 1 \Rightarrow \exists \ x_{k_1} \in B(c, 1)$ onde c é o ponto de acumulação e $x_{k_1} \in S$. Prosseguindo desta forma, temos que:
Para $k = k_j \Rightarrow \exists \ x_{k_j} \in B\left(c, \dfrac{1}{k_j}\right)$ onde $x_{k_j} \in S$. Assim, dado $\epsilon > 0$ seja $k_{j_0} > \dfrac{1}{k_j}$, então se $k_j > k_{j_0} \Rightarrow d(x_{k_j}, c) < \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_j} = c$.
Vamos mostrar que 3) $\Rightarrow$ 4).
Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ uma sequência de Cauchy. Pelo item 3. temos que esta admite uma subsequência convergente e portanto, pelo Teorema 1.75 item 2) a própria $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, logo M é completo.
Vejamos que M é totalmente limitado. Para isto, mostraremos que para todo $\epsilon > 0$; M é a reunião finita de bolas abertas de raio ϵ. Assim, dado $\epsilon > 0$ seja $x_1 \in M$.
Se $M = B(x_1, \epsilon)$ já está demonstrada a implicação. Caso contrário, existe $x_2 \in M$ tal que $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$, isto quer dizer que, $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$. Então se $M = B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, temos o que queríamos provar. Caso a igualdade não ocorra, quer dizer que existe $x_3 \in M$

tal que $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$ e $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Prosseguindo dessa forma, obtemos que $M = B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$ ou existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$ para todo $m \neq n \in \mathbb{N}$. Neste caso nenhuma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seria de Cauchy e muito menos convergente, uma vez que toda sequência convergente é de Cauchy. Logo, por hipótese, isto não pode ocorrer. Portanto, M é totalmente limitado e a implicação está provada.
Vamos mostrar que 4) $\Rightarrow$ 1).
Suponha que M é completo e totalmente limitado, isto é, $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ com $\operatorname{diam}(X_i) < \epsilon$ com $i \in \{1, \cdots, n\}$. Suponha agora, por absurdo, que M não é compacto, isto é, existe $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ cobertura aberta de M que não admite subcobertura finita. Como M é totalmente limitado, podemos supor que X_1 não admite subcobertura finita, isto é, X_1 não é compacto. Sendo X_1 não compacto, temos que $X_2 \subset X_1$, uma vez que X_2 está presente na decomposição de X_1 que não admite subcobertura finita. Como $X_2 \subset X_1$ temos que X_2 é totalmente limitado. Prosseguindo da mesma forma, obtemos uma sequência $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de subconjuntos a qual podemos supor fechados cujo $\operatorname{diam}(X_n) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Assim, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = 0$ e X_n está contido numa reunião finita dos A_λ. Sendo M completo, pela Proposição 2.7 , temos que existe $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. E como A_λ é aberto para todo λ e $X_n \subset \bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ para todo n temos que $a \in A_{\lambda_0}$ para algum λ_0. Novamente, como A_{λ_0} é aberto, temos que $B(a, \frac{1}{n}) \subset A_{\lambda_0}$ para algum n. Isto ocorre pois como A_{λ_0} é aberto temos que existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_{\lambda_0}$ e sendo $\frac{1}{r} > 0$ pela propriedade arquimediana dos números reais temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{r} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < r$. Daí, concluímos que $X_n \subset A_{\lambda_0}$, o que é um absurdo. Logo M é compacto.

■

Corolário 3.27. *Um espaço métrico M é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento é compacto.*

Demonstração: M é totalmente limitado se, e somente se, $\widehat{M}$ é totalmente limitado (e completo) se, e somente se, $\widehat{M}$ é compacto. ■

Corolário 3.28. *Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ limitado e fechado. Sendo K limitado temos que K é totalmente limitado (pois todo subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ limitado é totalmente limitado). Como $K \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, temos que K é completo. Dessa forma K é completo e totalmente limitado e, pelo Teorema anterior, isto ocorre se, e somente se, K é compacto.

■

Corolário 3.29. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fecho compacto se, e somente se, é limitado.*

Demonstração: Suponha que $\overline{X}$ é compacto $\Leftrightarrow$ $\overline{X}$ é totalmente limitado. Daí, como $X \subset \overline{X}$ temos que X é totalmente limitado e portanto limitado.
Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Então X é totalmente limitado e portanto $\overline{X}$ é totalmente limitado e fechado (completo) logo $\overline{X}$ é compacto. ■

Corolário 3.30. *Todo espaço métrico compacto M contém um subconjunto enumerável denso.*

Demonstração: Sabemos que M é compacto se, e somente se, M é totalmente limitado e completo. Sendo M totalmente limitado, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto finito $F_n \subset M$ tal que $d(x, F_n) < \frac{1}{n}$ para todo $x \in M$. Seja $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Então F é enumerável (pois é a reunião enumerável de conjuntos finitos) e para todo x temos que $d(x, F) = 0$. Logo F é denso em M. ■

Nem sempre uma aplicação contínua $f : M \to N$ é uniformemente contínua. Um exemplo disto, é considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Porém, como vimos no capítulo 2) uma função uniformemente contínua é sempre contínua. O resultado a seguir estabelece condições para que uma aplicação contínua seja uniformemente contínua, que neste caso, é a necessidade da compacidade do domínio.

Proposição 3.31. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Se M é compacto então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua e M um espaço métrico compacto. Suponha, por absurdo, que $f : M \to N$ não é uniformemente contínua, isto quer dizer que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n, y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Como M é compacto, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, isto é, existe $a \in M$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_j} = a$. Pelo mesmo argumento, a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Mostremos então que a subsequência convergente $(y_{n_j})_{n_k\in\mathbb{N}}$ converge para a, assim dado $\epsilon > 0$ pela convergência de $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ temos que existe n_{j_0} tal que $n_j \geq n_{j_0} \Rightarrow d(x_{n_j}, a) < \epsilon$. Note então que dado $\epsilon' > 0$ para $n'_{j_0} = \max\{n_{j_0}, \dfrac{1}{\epsilon}\} \in \mathbb{N}$ temos $n_j \geq n'_{j_0} \Rightarrow d(y_{n_j}, a) \leq d(x_{n_j}, y_{n_j}) + d(x_{n_j}, a) < \epsilon'$. Então, note que $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) = d(f(a), f(a)) = 0$, uma vez que d é métrica e d, f são contínuas. Segue então que $\epsilon \leq 0$ o que é um absurdo. Logo $f : M \to N$ é uniformemente contínua. ■

3.3.1 Espaços métricos sequêncialmente compactos

A noção de espaços métricos compactos pode ser dada a partir de limite de sequências, como vemos na definição abaixo:

Definição 3.32. Diz-se que um espaço métrico é *sequencialmente compacto* quando toda sequência de pontos nele contida possui uma subsequência convergente.

Observação 3.33. A Proposição 3.26 diz que um espaço métrico é sequêncialmente compacto se, e somente se, é compacto.

3.4 Espaços métricos localmente compactos

A noção de espaço métrico compacto pode ser vista localmente, isto é, embora o espaço métrico em questão não seja compacto, podemos analisar a compacidade ponto a ponto do espaço como veremos neste tópico.

Definição 3.34. Um espaço métrico M chama-se *localmente compacto* quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança compacta. Isto significa que para cada $x \in M$ existe um compacto K com $x \in \operatorname{int}(K)$.

O próximo resultado nos dá uma caracterização de espaços métricos localmente compactos:

Proposição 3.35 (Caracterização de espaços métricos localmente compactos)**.** *Seja M um espaço métrico.*

1. *M é localmente compacto se, e somente se, para todo $x \in M$ existe um aberto A com $x \in A$ e $\overline{A}$ compacto.*

2. *M é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in M$ existe $r > 0$ tal que $B[x, r]$ seja compacta.*

Demonstração:

1. Inicialmente, suponha que M é localmente compacto, isto é, dado $x \in M$ existe K tal que $x \in$ int(K) e K é compacto. Tome $A = \operatorname{int}(K)$, então A é aberto, $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto pois $\overline{A} \subset \overline{K} = K$, ou seja, $\overline{A}$ é um fechado contido em um compacto K e portanto compacto.
   Reciprocamente, suponha que para cada $x \in M$ exista um aberto A tal que $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto. Considere então $K = \overline{A}$, e note que, por hipótese, K é compacto. Além disso, como $A \subset \overline{A}$ temos que $\operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(\overline{A})$. Uma vez que $x \in \operatorname{int}(A) = A$, segue que $x \in \operatorname{int}(\overline{A}) = \operatorname{int}(K)$, e portanto, M é localmente compacto.

2. Inicialmente, suponha que M é localmente compacto e, pelo item 1. temos que para cada $x \in M$ existe A aberto tal que $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto. Sendo A aberto, para cada $x \in A$ temos que existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A \subset \overline{A}$. Tome então $r = \dfrac{\delta}{2}$, note que $B[x, r] \subset B(x, \delta) \subset \overline{A}$. Uma vez que $B[x, r]$ é um conjunto fechado e $\overline{A}$ é compacto, segue que, $B[x, r]$ é compacta.
   Reciprocamente, para cada $x \in M$, tome $r > 0$ tal que $B[x, r]$ seja compacta e defina $A = B(x, r)$. Note que A é aberto e, uma vez que, $\overline{A} = \overline{B(x, r)} \subset B[x, r]$, segue que $\overline{A}$ é compacto.

■

Observação 3.36. Note que, em particular, todo espaço métrico compacto M é localmente compacto, pois toda bola fechada em M é um conjunto compacto.

Exemplo 3.37. A reta real $\mathbb{R}$ e os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ são localmente compactos pois toda bola fechada é um conjunto fechado e limitado e portanto compacto.

Exemplo 3.38. O espaço ℓ^2 não é localmente compacto, pois nenhuma bola $B[a,r]$ em ℓ^2 pode ser compacta. Para ver este fato, basta considerar a sequência de pontos $x_n = a + r \cdot e_n$, onde $e_n = (0,0,0,\cdots,1,0,0,\cdots)$. Note que $||x_n|| = ||a + r \cdot e_n|| \leq ||a|| + r$, isto é, $||x_n - a|| \leq r$ o que implica $x_n \in B[a,r]$. Mas

$$||x_n - x_m|| = ||a + r \cdot e_n - a - r \cdot e_m|| = r \cdot ||e_m - e_n|| = \sqrt{2} \cdot r, \text{ se } m \neq n.$$

E, portanto nenhuma subsequência dessa sequência pode ser convergente (pois essa sequência não é de Cauchy). Logo $B[a,r]$ não é compacta.

O próximo resultado aborda algumas propriedades dos espaços métricos localmente compactos:

Proposição 3.39 (Propriedade dos espaços localmente compactos)**.** *Sejam M, N espaços métricos*

1. *Se M é localmente compacto e $A \subset M$ é aberto então A é localmente compacto;*

2. *Se M é localmente compacto e $F \subset M$ é fechado então F é localmente compacto;*

3. *Se $X, Y \subset M$ são localmente compactos então $X \cap Y$ é localmente compacto;*

4. *Se $X \subset M$ é denso e localmente compacto então X é aberto em M;*

5. *Se M é localmente compacto então M é homeomorfo a um espaço métrico completo;*

6. *Se $f : M \to N$ é contínua, aberta, sobrejetiva e M é localmente compacto então N é localmente compacto;*

7. *Se M e N são localmente compactos então $M \times N$ é localmente compacto.*

Demonstração:

1. Seja A um conjunto aberto e $a \in A \subset M$. Sendo A aberto temos que existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$. Então, temos que $B[a, \frac{r}{2}] \subset B(a,r) \subset A$. Além disso, como M é localmente compacto existe $s > 0$ tal que $B[a,s]$ é compacta. Daí, se $s > \frac{r}{2}$ tome $\gamma < \frac{r}{2} < s$ (seria análogo se $s < \frac{r}{2}$) e, portanto, $B[a,\gamma] \subset A$ é compacta. E assim, A é localmente compacto.

2. De fato, para todo $x \in F$ existe uma bola $B[x,r]$ compacta. Então $B[x,r] \cap F$ é uma bola fechada em F a qual sendo um subconjunto fechado de um compacto (neste caso o compacto é $B[a,r]$) é compacta. Logo F é localmente compacto.

3. Seja $\alpha \in X \cap Y$, daí $\alpha \in X$ *e* $\alpha \in Y$ então $\exists\, r, s > 0$ tal que $B[\alpha,r] \cap X$ *e* $B[\alpha,s] \cap Y$ são compactas. Então a interseção $(B[\alpha,r] \cap X) \cap (B[\alpha,s] \cap Y) = (B[\alpha,r] \cap B[\alpha,s]) \cap (X \cap Y)$ é uma bola fechada e compacta em $X \cap Y$. E, portanto, $X \cap Y$ é localmente compacto.

4. Seja A aberto em M. Note que $\overline{A \cap X} = A \cap \overline{X} = A \cap M = A$ (neste caso estamos olhando o fecho em A), isto quer dizer que, $A \cap X$ é denso em A. Assim, temos que, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança V de x em M tal que $V \cap X = F$ é compacto, e portanto fechada em M. Seja $A \subset M$ aberto tal que $x \in A \subset V$. Então $A \cap X$ é denso em A e fechado em A pois $A \cap X = A \cap V \cap X = A \cap F$. Portanto, $A \cap X = A \Rightarrow A \subset X$. Obtemos então que para cada ponto $x \in X$ existe um aberto A tal que $x \in A \subset X$. Logo X é aberto.

5. Sendo M localmente compacto, temos que M é aberto no seu completamento e portanto pela Proposição 2.35 temos que M é homeomorfo a um espaço métrico completo.

6. Dado $y \in N$ sendo f sobrejetiva temos que existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Seja V uma vizinhança compacta de x. Como f é aberta $f(V)$ é uma vizinhança de y, a qual é compacta pois f é contínua.

7. Seja $z = (x, y) \in M \times N$. Sendo M localmente compacto, temos que existe uma vizinhança V de x compacta e sendo N localmente compacto temos que existe U vizinhança compacta de x. Portanto $U \times V$ é uma vizinhança compacta de z em $M \times N$.

■

Observação 3.40. A recíproca do item 7. da Proposição anterior é válida como consequência direta do item 6. Pois sendo $M \times N$ localmente compacto, considere as aplicações projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$. Que são aplicações abertas, contínuas e sobrejetivas e portanto sendo $M \times N$ localmente compacto implica que M e N também são.

3.5 Equiconvergência e equicontinuidade

Como vimos, a noção de compacidade na reta e mais geralmente nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ se resume a: se um conjunto é fechado e limitado então ele é compacto. Esta situação porém não é condição suficiente de compacidade em espaços mais gerais, como por exemplo, se considerarmos $X = \{e_1, \cdots, e_n, \cdots\} \subset \ell^2$, onde $e_i = (0, 0, 0, \cdots, 1, \cdots)$, vemos que a distância entre quaisquer dois pontos é sempre $\sqrt{2}$ e portanto nenhuma sequência possui subsequência convergente e portanto X não é compacto, embora seja fechado e limitado. Em contextos mais gerais, um subconjunto X do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ possui fecho compacto se, e somente se, X é limitado.

No espaço das funções

$$\mathcal{C}(K; N) = \{f : K \to N \text{ ; f é contínua}\}$$

esta condição não é suficiente. Surge então uma pergunta: o que é necessário pedir a mais para que eu possa garantir a compacidade destes espaços? A resposta a este fato será dada no decorrer desta subseção. Para isto, introduziremos os seguintes conceitos:

Definição 3.41. Um subconjunto $X \subset \ell^2$ chama-se *equiconvergente* quando dado $\epsilon > 0$, pode-se obter um $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in X$, tem-se $\sum\limits_{i>k} {x_i}^2 < \epsilon^2$.

Nosso objetivo é estabelecer condições para que um subconjunto X de ℓ^2 fechado e limitado seja compacto. Para isto, vamos considerar as seguintes proposições:

Proposição 3.42. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ a aplicação $\mathcal{P}_k : \ell^2 \to \mathbb{R}^k$ definida por $\mathcal{P}_k(x) = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ é uma contração fraca linear.*

Demonstração: Sejam $x, y \in \ell^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$ e, além disso, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$. Note que $d_{\mathbb{R}^k}(\mathcal{P}_k(x), \mathcal{P}_k(y)) = \left(\sum\limits_{n=1}^{k} |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_{\ell^2}(x, y)$. Vejamos então que $\mathcal{P}$ é linear, pois:

$$\mathcal{P}(\lambda \cdot x + y) = (\lambda \cdot x_1 + y_1, \cdots, \lambda \cdot x_n + y_n) = \lambda(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = \lambda \cdot \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y)$$

■

O próximo resultado, tem demonstração análoga a anterior desta forma apresentaremos apenas seu enunciado:

Proposição 3.43. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ a aplicação $\mathcal{Q}_k : \ell^2 \to \ell^2$ definida por $\mathcal{Q}_k(x) = (x_{k+1}, \cdots, x_{k+2}, \cdots)$ é uma contração fraca linear.*

Observação 3.44.

1. Note que como as aplicações acima são contrações, em particular, estas são aplicações contínuas;

2. Além disso, pela definição de $\mathcal{Q}_k$ temos que X é equiconvergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existir um k tal que $||\mathcal{Q}_k(x)||_{\ell^2} < \epsilon$, para todo $x \in X$.

Proposição 3.45. *Um subconjunto $X \subset \ell^2$ é compacto se, e somente se, é equiconvergente, limitado e fechado.*

Demonstração: Inicialmente, mostremos que se X é compacto então X é equiconvergente, limitado e fechado.
Suponha que X é compacto e seja $x \in X$ como $x \in X \subset \ell^2$ temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ e, pela convergência desta série, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $k = k_x \in \mathbb{N}$ tal que $||\mathcal{Q}_{k_x}(x)||_{\ell^2} < \epsilon$. Sendo $\mathcal{Q}$ contínua, temos que existe $B_x = B(x, r_x)$ tal que $y \in B_x \Rightarrow ||\mathcal{Q}_{k_x}(y)||_{\ell^2} < \epsilon$. A cobertura $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} B_x$ admite subcobertura finita, uma vez que X é compacto, isto é, $X \subset B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_n}$. Considere $k = \max\{k_{x_1}, \cdots, k_{x_n}\}$. Então, para qualquer $x \in X$, temos que $|\mathcal{Q}_k(x)| < \epsilon$. Logo X é equiconvergente. Além disso, como X é compacto, em particular, é fechado e limitado.
Por outro lado, se X é limitado, fechado e equiconvergente então X é compacto.
Suponha que X é equiconvergente e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_i} = a_i$.
Mostremos que $a = (a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots) \in \ell^2$ e $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ em ℓ^2.
Primeiramente, mostremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em ℓ^2, isto ocorre pois dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{Q}_k(x)| < \dfrac{\epsilon}{4}$ para todo $x \in X$. Então, como $\mathcal{Q}$ é linear, vemos que se $x, y \in X \Rightarrow ||\mathcal{Q}_k(x - y)||_{\ell^2} = ||\mathcal{Q}_k(x) - \mathcal{Q}_k(y)||_{\ell^2} \leq ||\mathcal{Q}_k(x)||_{\ell^2} + ||\mathcal{Q}_k(y)||_{\ell^2} < \dfrac{\epsilon}{2}$.
A sequência de pontos $\mathcal{P}_k(x_n) = (x_{n_1}, \cdots, x_{n_k})$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^k$. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k(x_n) - \mathcal{P}_k(x_m) = (0, 0, \cdots, x_{(n+1)_k}, \cdots, x_{m_k})$. Então, $\mathcal{P}_k(x_n) - \mathcal{P}_k(x_m) = 0$ para $m, n \geq m_k$. Assim, $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |\mathcal{P}_k(x_m - x_n)| + ||\mathcal{Q}_k(x_m - x_n)||_{\ell^2} < \epsilon$. Como ℓ^2 é completo, existe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$ em ℓ^2. Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos que $b_i = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n_i} = a_i$. Portanto $b = a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.
Mostremos agora que $X \subset \ell^2$ equiconvergente, limitado e fechado implica X compacto.
Primeiro notamos que, para $i \in \mathbb{N}$ temos que $p_i(X)$ é limitado, uma vez que p_i é contínua e X é limitado. Logo, existe $J_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ tal que $p_i(X) \subset J_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
Seja $j : X \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} J_i$ a aplicação inclusão $j(x) = x$. Isto significa que dada uma sequência de pontos $x_n \in X$, temos que $\lim\limits_{n \to \infty} j(x_n) = a$ em $\prod\limits_{i=1}^{\infty} J_i$ se, e somente se, $a \in \ell^2$ e $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ em ℓ^2. Sendo $X \subset \ell^2$ fechado, temos que $\lim\limits_{n \to \infty} j(x_n) = a \in \prod\limits_{i=1}^{\infty} J_i \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in X$. Assim, J é um homeomorfismo de X sobre um conjunto fechado de $\prod\limits_{i=1}^{\infty} J_i$. Como $\prod\limits_{i=1}^{\infty} J_i$ é compacto então X é compacto. ■

Definição 3.46. Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \to N$. O conjunto E se diz *equicontínuo no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$ existe

$\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em $M \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$ seja qual for $f \in E$. Quando E for equicontínuo em todo ponto $x \in M$ diremos apenas que E é *equicontínuo.*

Observação 3.47. 1. A essência da definição acima reside no fato de que a escolha do δ a partir do $\epsilon > 0$ dado é a mesma para todas as aplicações $f \in E$.

2. Segue da definição de continuidade que se E é equicontínuo então $f \in E$ é contínua.

Definição 3.48. Uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$ diz-se *sequência de aplicações equicontínua no ponto* $a \in M$ (respectivamente equicontinua) quando o conjunto $E = \{f_1, \cdots, f_n\}$ o for.

A seguir, elencaremos algumas propriedades dos conjuntos equicontínuos:

Proposição 3.49 (Propriedade dos conjuntos equicontínuos)**.**

1. *Se M é discreto, todo conjunto E de aplicações $f : M \to N$ é equicontínuo;*
2. *Todo conjunto finito $E = \{f_1, \cdots, f_n\}$ de aplicações $f_i : M \to N$ com $i \in \{1, \cdots, n\}$ contínuas (todas num ponto $a \in M$) é equicontínuo;*
3. *A reunião de um número finito de subconjuntos equicontínuos é equicontínuo;*
4. *Todo subconjunto de um conjunto equicontínuo é equicontínuo.*

Demonstração:

1. De fato, suponha que M é discreto, isto é, dado $a \in M$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) = \{a\}$. Assim, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = r > 0$. Então se, $d(x, a) < \delta$ implica que $x = a$, logo $d(f(x), f(a)) = d(f(a), f(a)) = 0 < \epsilon$.
2. Suponha que f_i é contínua para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ no ponto $a \in M$. Por definição, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_i > 0$ tal que $d(x, a) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Assim, sendo E finito, temos que dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$ daí se $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$ para toda $f \in E$.
3. Seja $f \in E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$, logo $f \in E_i$ para algum i. Segue então da definição de equicontinuidade.
4. Segue da definição.

■

A seguir apresentaremos algumas condições suficientes de equicontinuidade:

Proposição 3.50 (Condições suficientes de equicontinuidade)**.** *Seja E um conjunto de aplicações. Então:*

1. *Se toda aplicação $f \in E$ satisfaz a condição de lipschitz então E é equicontínuo;*

2. *Se para cada ponto $x \in M$, existe uma bola $B_x = B(x, r_x)$ e também uma constante $c_x > 0$ tais que $d(f(y), f(z)) \leq c_x \cdot d(y, z)$ para $y, z \in B_x$ e $f \in E$ quaisquer, então o conjunto E das aplicações $f : M \to N$ é equicontínuo.*

Demonstração:

1. De fato, seja $f \in E$ e $a \in M$. Dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$, daí se $d(x, a) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$.

2. De fato, seja $f \in E$ e $a \in M$. Seja $x \in M$, por hipótese, existe $B(x, r_x)$ tal que se $a \in B(x, r_x)$ temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{c_x} > 0$ tal que $d(y, a) < \delta \Rightarrow$ $d(f(y), f(a)) \leq c_x \cdot d(y, a) < c_x \cdot \delta = c_x \cdot \dfrac{\epsilon}{c_x} = \epsilon$.

■

Exemplo 3.51. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ é equicontínua.

De fato, note que $d(f_n(x), f_n(y)) = \left|\dfrac{x}{n} - \dfrac{y}{n}\right| = \dfrac{|x - y|}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot |x - y| = \dfrac{1}{n} \cdot d(x, y)$. Sendo $x_n = \dfrac{1}{n}$ convergente, temos que esta é limitada, isto é, $|x_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $d(f_n(x), f_n(y)) \leq \dfrac{1}{n} \cdot d(x, y) \leq K \cdot d(x, y)$. Considere então $E = \{f_1, \cdots, f_n, \cdots\}$. Note que pelo item 1. da Proposição 3.50, temos que E é equicontínuo por que toda aplicação satisfaz a condição de lipschitz.

Exemplo 3.52. Se uma sequência equicontínua de aplicações $f_n : M \to N$ converge simplesmente para $f : M \to N$ então o conjunto $\{f, f_1, \cdots, f_n, \cdots\}$ é equicontínuo.

De fato, dado $a \in M$ e $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, pela continuidade de cada f_n temos que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Então $\lim\limits_{n \to \infty} d(f_n(x), f_n(a)) \leq \dfrac{\epsilon}{2} \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$ para este mesmo $\delta > 0$.

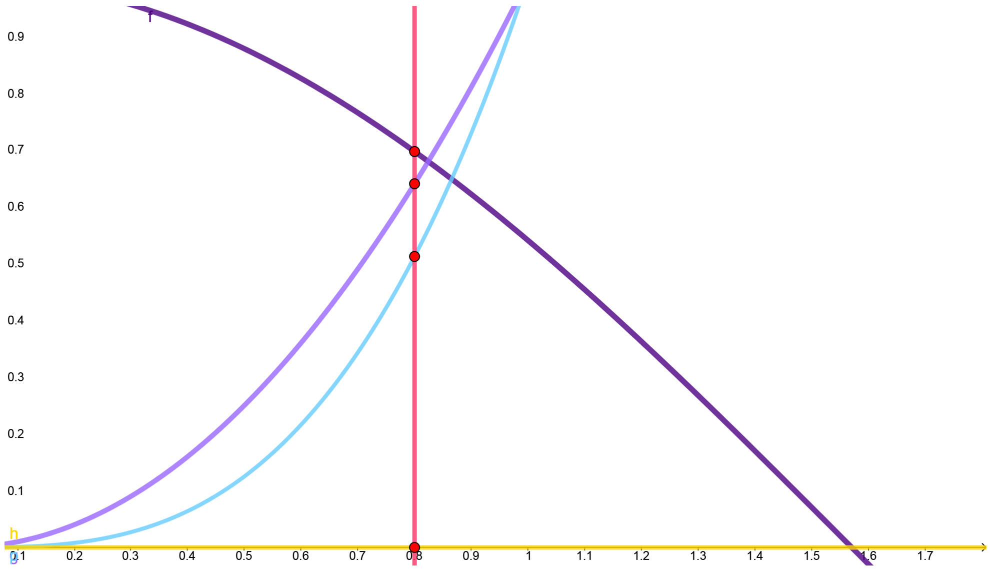
Observação 3.53. Observe que neste conjunto estamos incluindo a aplicação limite, isto é, $f \in E$. Além disso, em particular, f é contínua.

Nesta seção, como havíamos comentado anteriormente, nosso objetivo é apresentar condições para que um subconjunto $E \subset \mathcal{C}(K, N)$ tenha fecho compacto. Esta condição será dada em um teorema importante da análise conhecido como teorema de Ascoli-Arzelá no próximo tópico. Neste momento, nosso objetivo é introduzir os conceitos necessários para compreensão do mesmo. Desta forma, apresentamos abaixo os últimos conceitos necessários para tal:

Definição 3.54. Dado um conjunto E de aplicações $f : M \to N$ e um ponto $x \in M$, pondo $E(x) = \{f(x) \; ; \; f \in E\}$. Assim $E(x)$ é o subconjunto de N formado pelos valores que as aplicações $f \in E$ assumem no ponto x.

Exemplo 3.55. Quando $M = N = \mathbb{R}$ temos que $E(x)$ pode ser visualizado geometricamente tomando a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$ e vendo em que pontos ela corta o gráfico das funções $f \in E$. Particularmente, quando $E = \{x^2, \cos(x), x^3, 0\}$ temos que $E(0.8)$ pode ser visto geometricamente como:

Figura 3.1: Representação gráfica de $E(0.8)$



Fonte: Produzido pelo autor.

Definição 3.56. Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se *relativamente compacto* quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto. Isto significa que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente (o limite dessa subsequência não necessariamente está em X mas obrigatoriamente está em $\overline{X}$).

Proposição 3.57. *Se $X \subset M$ é relativamente compacto uma aplicação $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$.*

Demonstração: Devemos mostrar inicialmente que se $f : M \to N$ é contínua então $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$. Para isto, suponha que X é relativamente compacto,isto é, $\overline{X}$ é compacto. Assim, sendo f contínua temos que $f(\overline{X})$ é compacto, em particular, fechado em N. Como $X \subset \overline{X} \Rightarrow f(X) \subset f(\overline{X}) \Rightarrow \overline{f(X)} \subset \overline{f(\overline{X})} = f(\overline{X})$.
Por outro lado, seja $\alpha \in f(\overline{X})$ então $\alpha = f(x)$ com $x \in \overline{X}$, isto é, $\alpha = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_i\right)$ com $(\alpha_i) \subset X$ sendo f contínua temos que $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_i)$, daí $\alpha \in \overline{f(X)}$.
Reciprocamente, suponha que $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$ iremos mostrar que f é contínua.
Suponha, por absurdo, que f não é contínua. Isto quer dizer que existe $\alpha \in M$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $\epsilon > 0$ e $x_n \in M$ com $d(x_n, \alpha) < \dfrac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(\alpha)) \geq \epsilon$. Isto mostra que $f(\overline{X}) \nsubseteq \overline{f(X)}$, e isto contradiz nossa hipótese. ■

Corolário 3.58. *Se $X \subset M$ é relativamente compacto e $f : M \to N$ é contínua então $f(X) \subset M$ é relativamente compacto.*

Demonstração: Suponha que X é relativamente compacto, isto implica que $f(\overline{X})$ é compacto. Segue da Proposição anterior que $f(X)$ é relativamente compacto. ■

3.6 Exemplos de espaços métricos compactos

Exemplo 3.59. Todo subconjunto fechado e limitado do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é compacto.

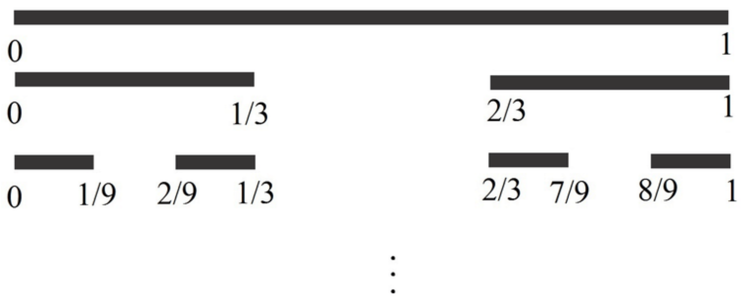
Exemplo 3.60. O círculo $\mathcal{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é compacto. Para ver isto, basta considerar uma parametrização de $\mathcal{S}^1$ definida por $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ onde $b - a \geq 2\pi$. Note que $\alpha([a, b]) = \mathcal{S}^1$ pois se $y \in \alpha([a, b])$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t) = y$ então:

$$\begin{aligned} (\cos(t), \sin(t)) = (y_1, y_2) \quad &\Leftrightarrow \quad {y_1}^2 + {y_2}^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \mathcal{S}^1. \end{aligned}$$

3.6.1 O conjunto de cantor K

Definição 3.61. O *conjunto de Cantor K* é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo: É

Figura 3.2: Construção do conjunto de Cantor



Fonte: `https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Construcao-do-Conjunto-de-Cantor_fig1_321952019`

retirado o terço médio aberto do intervalo $[0,1]$ em seguida retira-se o terço médio dos intervalos restantes e repete-se esse processo infinitas vezes.

O conjunto de Cantor K é limitado pois $K \subset [0,1]$. Além disso, considerando $I_1, \cdots, I_n, \cdots$ os intervalos abertos retirados na construção do conjunto de Cantor, vemos que $K = [0,1] - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_n$, assim $K^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_n$ que é a reunião infinita de conjuntos abertos e portanto aberto (em $\mathbb{R}$), assim temos que K é fechado em $\mathbb{R}$ e sendo $[0,1]$ fechado temos que $K = \overline{K} = \tilde{K}$, isto é, o fecho de K em $[0,1]$ é igual ao fecho de K em $\mathbb{R}$. Desta forma, temos que K é fechado e limitado portanto compacto.

3.6.2 O cubo de Hilbert

O cubo de Hilbert C é o conjunto das sequências de números reais $x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)$ tais que $0 \leq x_i \leq \dfrac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo é mostrar que ele é um subconjunto compacto de ℓ^2.

Primeiramente, notemos que $C \subset \ell^2$.

De fato, seja $x \in C$, isto é, $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots)$ e $0 \leq x_i \leq \dfrac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo $0 \leq x_i^2 \leq \dfrac{1}{i^2}$ e como a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}$ converge, por comparação, temos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ converge. Logo $x \in \ell^2$.

Proposição 3.62. *C é limitado, fechado e equiconvergente e portanto compacto.*

Demonstração: Mostremos inicialmente que C é limitado, para isto, considere C munido com a métrica induzida de ℓ^2, para todo $x \in C$ temos que $||x||_{\ell^2}^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}$ cuja soma é $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Mostremos agora que C é fechado, desta forma, seja $a \in \overline{C}$, isto é, $a = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$ com $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C$. Desta forma, temos que $0 \leq a_i \leq \dfrac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$, segue

do Teorema do confronto que $0 = a = \lim_{i\to\infty} a_i$. Como $0 \in C$ segue que C é fechado.
Por fim, note que C é equiconvergente, pois dado $\epsilon > 0$ como a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i>k} \frac{1}{i^2} < \epsilon^2$ assim $\sum_{i>k} {x_i}^2 < \epsilon^2$ para todo $x \in C$ e portanto C é equiconvergente.
Concluímos então que C é compacto. ■

3.7 Alguns resultados interessantes sobre espaços métricos compactos e suas consequências

3.7.1 O teorema de Dini

Sabe-se da análise da reta que se uma sequência de aplicações $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para aplicação $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então f ainda é uma aplicação contínua. O resultado abaixo procura estabelecer condições para recíproca deste resultado.

Teorema 3.63 (Teorema de Dini). *Se uma sequência de funções reais contínuas $f_n : M \to \mathbb{R}$, definidas num espaço métrico compacto M converge simplesmente para uma função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ e, além disso, tem-se $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$ para todo $x \in M$, isto é, a sequência é monótona não-decrescente então a convergência é uniforme em M.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$F_n = \{x \in M \ ; \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

Pela monotonicidade de f_n temos que $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$, isto ocorre pois, como f_n é monótona teríamos que $F_n \subset F_{n+1}$ ou $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se ocorresse $F_n \subset F_{n+1}$ para todo n, em particular teríamos que, $F_1 \subset \cdots F_n \subset \cdots$ e portanto se $\alpha \in F_1 \neq \emptyset$ concluiríamos que f_n não convergiria pontualmente em α, o que não pode ocorrer pois a sequência de funções converge pontualmente em todo $\alpha \in M$.
Notemos que cada F_n é fechado em M.
De fato, seja $\alpha \in \overline{F_n}$, isto é, $\alpha = \lim_{i\to\infty} \alpha_i$ com $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset F_n$, assim, temos que como a função módulo e $f_n : M \to \mathbb{R}$ são contínuas, vale que $|f_n(\alpha) - f(\alpha)| = \lim_{i\to\infty} |f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| \geq \epsilon$. E, portanto, $\alpha \in F_n$.
Sendo assim, cada F_n é compacto, pois $F_n \subset M$ é fechado e M é compacto.
Além disso, a interseção $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.
De fato, suponha, por absurdo, que $F \neq \emptyset$, então existe $\alpha \in F$. Isto quer dizer que $\alpha \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que $|f_n(\alpha) - f(\alpha)| \geq \epsilon$. Assim, temos que a sequência de aplicações $f_n : M \to N$ não converge pontualmente em α, o que é um

absurdo.
Segue então, pelo Teorema 3.7 que existe n_0 tal que $F_{n_0} = \emptyset$. Além disso, segue que como $\emptyset = F_{n_0} \supset F_{n_0+1} \supset \cdots$ temos que se $n > n_0$ implica que $F_n = \emptyset$. Concluímos então que se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, qualquer que seja $x \in M$, o que garante a convergência uniforme. ■

3.7.2 O teorema de Weierstrass e suas consequências

Teorema 3.64 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se M é compacto então toda aplicação $f : M \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximos e mínimos em M, isto é, existem x_0 e $x_1 \in M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x \in M$.*

Demonstração: Como f é contínua, temos que $f(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto e portanto limitado. Assim, f é limitada e pela propriedade do ínfimo e supremo existem $\alpha = inf\ f(M)$ e $\beta = \sup(f(M))$. E como $f(M)$ é fechado, temos que $\alpha, \beta \in f(M)$. Ou seja, $\alpha = f(x_0)$ e $\beta = f(x_1)$. ■

Corolário 3.65. *Seja M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.*

Demonstração: Sendo M compacto, pelo Teorema anterior, temos que existe $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in M$. Além disso, como $f(x) > 0$ para todo $x \in M$, em particular, $f(x_0) > 0$. Tome então $c = f(x_0)$ e portanto, segue o resultado. ■

Abaixo, apresentaremos algumas consequências do teorema de Weierstrass no que diz respeito a existência de máximos e mínimos para aplicação "distância":

Exemplo 3.66. Se $K, L \subset M$ são compactos então a função distância $d : K \times L \to \mathbb{R}$ definida por $d(K, L)$ atinge seu mínimo num ponto $(a, b) \in K \times L$.
De fato, sabemos que $d(K, L) = \inf\{d(x, y)\ ;\ x \in X \text{ e } y \in L\}$ como K e L são compactos, temos que $K \times L$ é compacto portanto pelo Teorema de Weierstrass a aplicação d assume mínimo, isto é, $d(K, L) = d(a, b)$ com $(a, b) \in K \times L$.

Exemplo 3.67. Se $K, L \subset M$ são compactos e $K \cap L = \emptyset$ então existe $c > 0$ tal que $d(a, b) = c > 0$ e $d(x, y) \geq c$ para quaisquer $x \in K$ e $y \in L$.
De fato, pelo exemplo anterior, temos que existem $u \in K$ e $v \in L$ tais que $d(u, v) = d(K, L) = 0$ e como d é uma métrica segue que $u = v$ o que seria um absurdo, uma vez que $K \cap L = \emptyset$.

Observação 3.68. Note que no exemplo 3.67 a hipótese de K e L serem compactos é necessária, pois se $A = \{(x, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \dfrac{1}{x^2+1}\right\}$, vemos que $d(A, B) = \inf\left\{|x - x| + \left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|\right\} = \inf\left\{\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|\right\} = 0$, pois $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

Como vimos acima, a hipótese de compacidade é necessária, mas esta basta valer apenas para um dos conjuntos como veremos a seguir:

Exemplo 3.69. Se $K \subset M$ é compacto e $F \subset M$ é fechado, com $K \cap F = \emptyset$ então existe $c > 0$ tal que $x \in K$ e $y \in F$ implica que $d(x, y) \geq c$, isto é, $d(K, F) > 0$. Para ver este fato, basta considerar a aplicação $d_F : K \to \mathbb{R}$ definida por $d_F(x) = d(x, F)$. Note que se ocorresse de $d(x, F) = 0$ implicaria dizer que x é aderente a F, ou seja, $x \in \overline{F} = F$. Segue então que $x \in K \cap F$ o que geraria uma contradição.

O lema abaixo é uma consequência dos exemplos anteriores e será útil na demonstração do próximo resultado desta seção.

Lema 3.70. *Sejam K, M espaços métricos, K compacto, $a \in M$, $a \times K \subset V \subset M \times K$, onde V é aberto. Então existe um aberto U em M tal que $a \times K \subset U \times K \subset V$.*

Demonstração: Inicialmente, notemos que o conjunto $a \times K$ é homeomorfo a K (e portanto compacto).
De fato, considere a aplicação $f : K \to a \times K$ definida por $f(t) = (a, t)$. Note que f é contínua pois $d(f(t), f(u)) = d((a, t), (a, u)) = d(u, t)$, isto é, f é uma contração fraca, logo contínua. Além disso, f é injetiva pois se $f(u) = f(t) \Rightarrow (a, u) = (a, t) \Rightarrow u = t$. Ainda, f é sobrejetiva por construção. Concluímos então que f é uma bijeção contínua e sendo K compacto, em virtude da Proposição 3.21 item 6. temos que f é um homeomorfismo.
Existe portanto $r > 0$ pelo exemplo 3.69 tal que $z \in (M \times K) - V, t \in K \Rightarrow d(z, (a, t)) \geq r$. Tomemos $U = B(a, r)$ em M. Assim, $(x, t) \in U \times K \Rightarrow d(x, a) < r \Rightarrow (x, t) \in V$. Logo $U \times K \subset V$. ■

Proposição 3.71. *Seja $f : M \times K \to N$ contínua, K compacto. Dado $a \in M$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em $M \Rightarrow d(f(x, t), f(a, t)) < \epsilon$ qualquer que seja $t \in K$.*

Demonstração: Considere o conjunto $V = \{(x, t) \in M \times K \; d(f(x, t), f(a, t)) < \epsilon\}$. Note que V é aberto pois é a imagem inversa da aplicação d composta com f que são aplicações contínuas pelo conjunto aberto $(-\infty, \epsilon) \subset \mathbb{R}$. Além disso, $a \times K \subset V$, pois dado $\alpha \in a \times K$ temos que $\alpha = (a, t)$ com $t \in K$. Daí, $d(f(a, t), f(a, t)) = 0 < \epsilon$. Pelo Lema 3.70 existe uma bola $B = B(a, \delta)$ em M tal que $B \times K \subset V$, o que conclui a demonstração. ■

3.7.3 O teorema de Cantor-Tychonov

O teorema a seguir generaliza a noção de produto cartesiano finito de espaços métricos compactos para o produto infinito de compactos:

Teorema 3.72 (Teorema de Cantor-Tychonov). *O produto cartesiano* $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *é compacto se, e somente se, cada fator* M_i *com* $i = 1, 2, 3, \cdots$ *, é compacto.*

Demonstração: Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mostremos que ela possui uma subsequência convergente em M, de onde concluiremos que M é sequencialmente compacto e portanto compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{ni}, \cdots)$. Sendo cada M_i compacto, obteremos um subconjunto infinito $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}^*} x_{ni} = a_i$. Pondo então $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ vemos que $\lim_{n\in\mathbb{N}*} x_n = a$. De fato, sendo M_1 compacto temos que a sequência $(x_{11}, \cdots, x_{n1}, \cdots)$ admite subsequência convergente, isto é, existe $\mathbb{N}_1$ tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}_1} x_{n1} = a_1$.Prosseguindo assim, obtemos uma sequência $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_i \supset \cdots$ e um ponto $a = (a_1, \cdots, a_i, \cdots)$ com $\lim_{n\in\mathbb{N}_i} x_{ni} = a_i$. Definamos $\mathbb{N}^*$ estipulando o seu $i-$ésimo elemento (na ordem crescente dos números naturais). O que implica dizer que a sequência $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}^*}$ é, a partir do seu $i-$ésimo elemento, uma subsequência de $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}_i}$. Assim, $\lim_{n\in\mathbb{N}^*} x_{ni} = a_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

■

3.7.4 O teorema de Riesz

O teorema de Riesz garante que nenhum espaço vetorial normado de dimensão infinita pode ser localmente compacto. Para demonstração do mesmo, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 3.73. *Seja* F *um subespaço vetorial fechado de um espaço vetorial normado* E*. Se* $F \neq E$ *então, para todo* $\epsilon > 0$*, pode-se obter um vetor* $u \in E$ *com* $||u|| = 1$ *e* $d(u, E) \geq 1 - \epsilon$*.*

Demonstração: Sendo $F \neq E$ temos que $E - F \neq \emptyset$. Daí, seja $x \notin E - F$ e como F é fechado temos que $x \in \overline{F}$ o que implica, $d(x, F) > 0$. Vamos escolher $y \in F$ próximo de x com $||x - y|| < d(x, F) + \delta$ com $\delta > 0$.
Consideremos:
$u = \dfrac{x - y}{||x - y||}$ e então $||u|| = \dfrac{||x - y||}{||x - y||} = 1$ e para todo $y' \in F$, levando em conta que qualquer vetor pode ser escrito como $y'' = y + ||x - y|| \cdot y'$, temos que:

$$||u - y'|| \quad = \quad \frac{||x - y - ||x - y|| \cdot y'||}{||x - y||} = \frac{||x - y''||}{||x - y||} \geq \frac{d(x, F)}{d(x, F) + \delta}$$

Fazendo $\delta \to 0$ na última desigualdade acima, temos que $\lim_{\delta\to 0} \dfrac{d(x, F)}{d(x, F) + \delta} = 1$. Assim, pela definição de limite, temos que é possível escolher $\delta > 0$ de forma que este limite seja maior ou igual a $1 - \epsilon$. Então para $||u - y'|| \geq 1 - \epsilon \Rightarrow d(u, F) \geq 1 - \epsilon$. ■

A demonstração do resultado abaixo será omitida neste capítulo por se fazer necessário o uso de alguns conceitos que não está presentes no corpo deste trabalho, mas esta pode ser encontrada em [5].

Lema 3.74. *Seja E um espaço vetorial normado. Todo subespaço vetorial de dimensão finita $F \subset E$ é fechado.*

Lema 3.75. *Se E é localmente compacto então a esfera $S \subset E$ é compacta.*

Demonstração: De fato, pois sendo E localmente compacto temos que dado $x \in E$ existe $B[x, r]$ compacta. Como $B[x, r]$ é homeomorfa a bola $B[x, 1]$ temos que $B[x, 1]$ é compacta e, além disso, $S \subset B[x, 1]$ é um fechado contido em um compacto e portanto S é compacta. ■

Teorema 3.76 (O teorema de Riesz)**.** *Seja E um espaço vetorial normado. Se E é localmente compacto então E tem dimensão finita.*

Demonstração: A esfera unitária $S = \{u \in E \mid ||u|| = 1\}$ é compacta. Iremos utilizar o Lema 3.73 repetidas vezes com $\epsilon = \dfrac{1}{2}$.
Seja $u_1 \in S$ e F_1 o subespaço vetorial gerado por u_1. Pelo Lema 3.74 temos que F_1 é fechado. Se $F_1 = E$ está demonstrado o Teorema. Caso isto não ocorra, temos que existe $u_2 \in S$ tal que $d(u_2, F_1) \geq \dfrac{1}{2}$, em particular, $||u_2 - u_1|| \geq d(u_2, F_1) \geq \dfrac{1}{2}$.
Seja então $F_2 = [u_1, u_2]$. Se $F_2 \neq E$ temos que existe $u_3 \in S$ tal que $d(u_3, F_2) \geq \dfrac{1}{2}$ e $||u_3 - u_1|| \geq \dfrac{1}{2}$ e $||u_2 - u_3|| \geq \dfrac{1}{2}$. Prosseguindo da mesma forma, temos que se $F_n \neq E$ existe $u_{n+1} \in S$ tal que $d(F_n, u_{n+1}) \geq \dfrac{1}{2}$ e $||u_{n+1} - u_n|| \geq \dfrac{1}{2}$. Portanto, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se $F_n \neq E \Rightarrow ||u_{n+1} - u_n|| \geq \dfrac{1}{2}$. Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ vemos que S não pode ser compacta, uma vez que esta sequência não admite subsequência convergente (pois nenhuma subsequência pode ser de Cauchy). Portanto temos que $E = F_n$ para algum n, isto é, E tem dimensão finita. ■

3.7.5 O teorema de Ascoli-Arzelá e aplicações

O teorema de Ascoli-Arzelá completa o que apresentamos na seção de equiconvergencia e equicontinuidade. De forma geral, este resultado estabelece condições para que um subconjunto $E \subset \mathcal{C}(K, N)$ seja relativamente compacto.

Lema 3.77. *Dada uma sequência equicontínua de aplicações $f_n : M \to N$, suponhamos que para cada $x \in M$, o conjunto $\{f_n(x) \mid x \in M\}$ tenha fecho completo em N. Se (f_n) converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset M$ então (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M.*

Teorema 3.78 (Teorema de Ascoli-Arzelá - versão I)**.** *Seja E um conjunto de aplicações contínua $f : K \to N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset \mathcal{C}(K, N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

i) E seja equicontínuo;

ii) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto.

Demonstração: Mostremos inicialmente que se E é relativamente compacto então valem os itens $i)$ e $ii)$.

Inicialmente mostraremos que $E(x)$ é relativamente compacto. Para isto, fixado $x \in K$ arbitrário, considere a aplicação $v_x : \mathcal{C}(K, N) \to N$ definida por $v_x(f) = f(x)$. Note que $d(v_x(f), v_x(g)) = \sup\limits_{x \in K} d(f(x), g(x)) = d(f(x), g(x))$ uma vez que K é compacto, desta forma temos que v_x é uma contração e portanto pela Proposição 1.51 v_x é contínua.

Notemos que $v_x(E) = E(x)$.

De fato, mostremos por dupla inclusão. Para ver que $v_x(E) \subset E(x)$, seja $f \in v_x(E)$, isto é, $v_x(f) = f(x) \in E(x)$. Assim, $f(x) \in E(x)$.

E, temos que $v_x(E) \supset E(x)$, pois se $\alpha \in E(x)$ implica que $\alpha = f(x)$ com $f \in E$. Assim, $f(x) = v_x(f)$; $f \in E \Rightarrow \alpha \in v_x(E)$.

Então, como E é relativamente compacto e v_x é contínua temos que $v_x(E)$ é relativamente compacto, de onde concluímos que $E(x)$ é relativamente compacto.

Mostremos agora que E é equicontínuo. Sejam $a \in K$ e $\epsilon > 0$ dados arbitrariamente. Consideremos a função contínua $\phi : \overline{E} \times K \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(f, x) = d(f(x), f(a))$. Notemos que ϕ é contínua e sendo E relativamente compacto temos que $\overline{E}$ é compacto. Assim, pela Proposição 3.71 temos que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$ para toda $f \in \overline{E}$. Desta forma, temos que $\overline{E}$ é equicontínuo e como $E \subset \overline{E}$ segue que E é equicontínuo.

Reciprocamente, suponha que $i)$ e $ii)$ sejam satisfeitos. Vamos mostrar que E é relativamente compacto, isto é, $\overline{E}$ é compacto. Considere $D = \{x_1, \cdots, x_i, \cdots\} \subset K$ um subconjunto enumerável e denso (que existe em virtude do corolário 3.30. Para cada $i \in \mathbb{N}$ considere o conjunto $L_i = \overline{E(x_i)} \subset N$. Por hipótese, temos que $E(x_i)$ é relativamente compacto o que implica dizer que $\overline{E(x_i)}$ é compacto. Assim, o produto cartesiano $\prod\limits_{i=1}^{\infty} L_i$ é compacto em virtude do Teorema 3.72. Para cada $f \in E$, chamemos de f' o ponto de $\prod\limits_{i=1}^{\infty} L_i$ cuja $i-$ésima coordenada é $f(x_i)$, isto é, f' é a restrição de f a D.

Note ainda que uma sequência de aplicações $f_n \in E$ converge simplesmente em D se, e somente se, (f'_n) converge em $\prod\limits_{i=1}^{\infty} L_i$.

A compacidade de $\prod\limits_{i=1}^{\infty} L_i$ garante que toda sequência de aplicações $f_n \in E$ possui uma subsequência convergente simplesmente em D e portanto pelo Lema 3.77 temos que a subsequência converge uniformemente em K. Logo E é relativamente compacto. ∎

Observação 3.79. Dada uma aplicação $\alpha : M \to N$, seja $\mathcal{C}_\alpha(M,N)$ o conjunto das aplicações contínuas $f : M \to N$ tais que $d(\alpha, f) = \sup_{x\in M} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$. Munindo $\mathcal{C}_\alpha(M,N)$ da métrica do sup, a demonstração acima mostra que $E \subset \mathcal{C}_\alpha(M,N)$ relativamente compacto implica E equicontínuo e $E(x)$ relativamente compacto, sem ter a hipótese de M compacto. O teorema de Ascoli-Arzelá, conforme enunciado acima não é válido para aplicações definidas num espaço não compacto.

Observe que a todo momento, a hipótese principal era de que o domínio K fosse compacto. Uma pergunta que surge é: seria possível retirar a hipótese da compacidade e o teorema continuar válido? A resposta é afirmativa, mas para isto, precisamos supor a seguinte condição sobre M(domínio das aplicações):
(S) $M = K_1 \cup \cdots \cup K_i \cup \cdots$ onde K_i é compacto para todo i e $K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.80. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfaz a condição (S). Basta tomar K_i a bola fechada de centro zero e raio i. De fato, sendo $K_i = B[0,i]$ temos que:
$\mathbb{R}^n = K_1 \cup \cdots K_i \cdots$. Pois se $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $||x||$ é um número real e pela propriedade arquimediana dos números reais existe um número natural i tal que $||x|| \leq i$ e portanto $x \in K_i$. Além disso, como $i \in \mathbb{N}$ temos que $i < i+1$ e portanto se $x \in K_i$ temos que $x \in B(0, i+1) = \operatorname{int}(B[0, i+1])$ pois $||x|| \leq i < i+1$.

A seguir apresentaremos algumas propriedades acerca da condição (S) :

Proposição 3.81 (Algumas propriedades acerca da condição (S))**.** *Seja M um espaço métrico que cumpre a condição (S), então:*

1. *M é localmente compacto;*

2. *Todo compacto $K \subset M$ está contido em algum dos K_i.*

Demonstração:

1. Seja $\alpha \in M$ então $\alpha \in K_i$ para algum i o que implica que K_{i+1} é uma vizinhança compacta de α pois $\alpha \in \operatorname{int}(K_{i+1})$.

2. Considere a cobertura aberta $K \subset M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{int}(K_i)$. Sendo K compacto, temos que esta cobertura admite uma subcobertura finita, isto é, $K \subset \operatorname{int}(K_{i_1}) \cup \cdots \cup \operatorname{int}(K_{i_p})$ com $i_1 < \cdots < i_p$. Logo $K \subset \operatorname{int}(K_{i_p}) \subset K_{i_p}$.

■

Assim, se M cumpre (S), dizer que uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$ converge uniformemente em cada um dos K_i é o mesmo que afirmar que (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta $K \subset M$. Se o espaço métrico M cumpre (S), dado qualquer espaço métrico N, definiremos uma métrica d^* no espaço $\mathcal{C}(M,N)$ das aplicações contínuas $f: M \to N$, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ segundo esta métrica se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada parte compacta $K \subset M$. Dadas $f, g : M \to N$ contínuas, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i = f|_{K_i}$ e $g_i = g|_{K_i}$. Logo $d(f_i, g_i) = \sup\limits_{x\in K_i} d(f(x), g(x))$. E definiremos:

$$d^*(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d(f_i,g_i)}{1+d(f_i,g_i)}$$

Escrevemos $\mathcal{C}_c(M,N) = (\mathcal{C}(M,N), d^*)$ para indicar o espaço das aplicações contínuas $f: M \to N$ com a métrica d^*.
Observe que a aplicação $\phi : \mathcal{C}_c(M,N) \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i,N)$ dada por $\phi(f) = (f|_{K_i})_{i\in\mathbb{N}} = (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma imersão isométrica, se considerado o produto cartesiano $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i,N)$ munido da métrica usual $d(u,v) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d(u_i,v_i)}{1+d(u_i,v_i)}$, onde $u = (u_i)$ e $v = (v_i)$, uma vez que as métricas são iguais.

Como a convergência no produto cartesiano é a convergência coordenada por coordenada e a convergência em cada fator $\mathcal{C}(K,M)$ é a convergência uniforme, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada K_i, ou seja, em cada parte compacta $K \subset M$.

Lema 3.82. *A imagem F da aplicação isométrica $\phi : \mathcal{C}_c(M,N) \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i,N)$ é um subconjunto fechado de $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i,N)$.*

Demonstração: F é formado pela sequências $u = (u_i)$ tais que, para cada $i \in \mathbb{N}$ a aplicação $u_i : K_i \to N$ é contínua e $i < j \Rightarrow u_i = u_j|_{K_i}$ Vamos mostrar que $F = \overline{F}$. Já sabemos que $F \subset \overline{F}$. Mostremos então que $\overline{F} \subset F$. Seja $u \in \overline{F}$, isto é, $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ com $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$. Logo, $u_i = \lim\limits_{n\to\infty} u_{ni}$ uniformemente, para cada $i \in \mathbb{N}$. Assim, $i < j \Rightarrow u_i = \lim\limits_{n\to\infty} u_{ni} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{nj}|_{K_i} = u_j|_{K_i}$. Portanto, $u \in \overline{F} \Rightarrow u \in F$. ∎

Apresentaremos então a segunda versão do teorema de Ascoli-Arzelá:

Teorema 3.83 (Teorema de Ascoli-Arzelá - versão II)**.** *Se $M = \cup K_i$ é uma reunião enumerável de compactos, com $K_i \subset int(K_{i+1})$ para cada i, então um conjunto $E \subset \mathcal{C}_c(M,N)$ é relativamente compacto se, e somente se:*

i) E é equicontínuo;

ii) Para cada $x \in M$, o conjunto $E(x) \subset N$ seja relativamente compacto.

Demonstração: Considere a isometria $\phi : \mathcal{C}_c(M,N) \to F \subset \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i,N)$. Faremos algumas afirmações:

1) E é relativamente compacto se, e somente se, $\phi(E)$ é relativamente compacto em F.
Inicialmente, suponha que E é relativamente compacto então $\overline{E}$ é compacto. Assim, temos que $\phi(\overline{E}) = \overline{\phi(E)}$ é compacto. A igualdade segue do fato de que E é relativamente compacto. Segue então que $\phi(E)$ é relativamente compacto.
Reciprocamente, suponha que $\phi(E)$ é relativamente compacto, isto é, $\overline{\phi(E)}$ é compacto. Como ϕ é uma isometria, em particular, ϕ é um homeomorfismo, em virtude do exemplo 1.57. Desta forma, temos que $\phi^{-1}(\phi(\overline{E})) = \overline{E}$ é compacto, em virtude da Proposição 3.16. Segue então que E é relativamente compacto.
2) $\phi(E)$ é relativamente compacto em F se, e somente se, $\phi(E)$ é relativamente compacto em $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i, N)$.
$(\Leftrightarrow)$ Isto ocorre em virtude do corolário 1.34, uma vez que F é fechado.
Observe ainda que um subconjunto $X \subset \prod\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ é relativamente compacto se, e somente se, cada projeção $p_i(X) \subset Y_i$ é compacta. Isto ocorre em virtude do Teorema 3.72.
Além disso, como $p_i(\phi(E)) = E|_{K_i} = \{f|_{K_i} \ ; \ f \in E\}$. Segue então das afirmações 1 e 2 que os itens $i)$ e $ii)$ deste teorema são válidos para E se, e somente se, são válidos para $E|_{K_i}$ com $i = 1, 2, 3, \cdots$
Logo, a versão $II)$ do teorema de Ascoli-Arzelá, decorre da versão $I)$, pois basta aplicar a mesma ao conjunto $E|_{K_i}$. ■

O teorema de Peano

Como aplicação do teorema de Ascoli-Arzelá, podemos apresentar o teorema de Peano que garante sob quais condições uma equação diferencial ordinária (EDO) admite uma solução:

Proposição 3.84 (Teorema de Peano)**.** *Seja* $S = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *com* $a, b > 0$ *e* $f : S \to \mathbb{R}$ *uma aplicação contínua. Então existe* $0 \leq \delta \leq a$ *tal que a equação diferencial* $y' = f(x, y)$ *tem uma solução definida em* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *que passa pelo ponto* (x_0, y_0).

Demonstração: Suponha que $f : S \to \mathbb{R}$ é contínua. Observe que S é o produto cartesiano de dois conjuntos compactos e portanto S é compacto. Pelo Teorema 3.64 temos que f é limitada, isto é, $|f(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y) \in S$. Tome $\delta = \min\left\{\dfrac{M}{b}, a\right\}$ e denote $\delta = a$. Seja $I_0 = [x_0, x_0 + a]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e defina $I_r = \left[x_0 + (r-1) \cdot \frac{a}{n}, x_0 + r \cdot \frac{a}{n}\right]$ com $1 \leq r \leq n$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos definir a seguinte aplicação: $y_n : I_0 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0 + \int_{x_0}^{x - \frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt \ \ se \ x \in I_2, \cdots, I_n \\ y_0 \ \ se \ x \in I_1 \end{cases}$$

Observe que se $x \in I_r$ temos que $y_n(x)$ está bem definida em termos de $y_n(t)$ para $t \in I_1 \cup \cdots \cup I_{r-1}$ além disso

$$\begin{aligned}
|y_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x-\frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x-\frac{a}{n}} M \cdot dt \\
&\leq M \cdot \left| x - \frac{a}{n} - x_0 \right| \\
&\leq M \cdot \left| x + a - \frac{a}{n} - x_0 \right| \\
&\leq M \cdot \frac{(n-1) \cdot a}{n} \\
&\leq M \cdot a \leq b.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo inicialmente é garantir que a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Para isto, considere o conjunto $E = \{y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$.

Mostraremos que E é relativamente compacto, para isto, mostraremos que valem os itens $i)$ e $ii)$ do Teorema 3.78. Note que $E(x) \subset \mathbb{R}$ é relativamente compacto pois, para cada $x \in I_r$ tem-se que $|y_n(x) - y_0| \leq b$, e portanto, $|y_n(x) - y_m(x)| \leq 2 \cdot b$. O que implica dizer que $E(x)$ é limitado e portanto $\overline{E(x)}$ é limitado.

Mostremos então que a sequência (y_n) é equicontínua para garantir que E é equicontínuo, para isto mostraremos que esta é uma aplicação Lipschitziana e concluiremos também a continuidade de cada y_n. Sejam então $x, z \in I_0$, note que

$$\begin{aligned}
|y_n(x) - y_n(z)| &= \left| \int_{x_0}^{x-\frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt - \int_{x_0}^{z-\frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \\
&\leq \left| \int_{z-\frac{a}{n}}^{x-\frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \\
&\leq M \cdot \left| x - \frac{a}{n} - z + \frac{a}{n} \right| \\
&= M \cdot |x - z|
\end{aligned}$$

Segue então do Teorema de Ascoli-Arzelá que a sequência $\{y_n\}$ possui uma subsequência convergente, isto é, $\lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k}(x) = u(x)$ para $x \in I_0$. Note que $u(x)$ é solução de $y' = f(x, y)$ pois $u(x_0) = y_0$ e $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $u'(x) = f(x, y)$ em I_0 uma vez que $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt$. Analogamente, pode-se definir $u \in [x_0 - a, x_0]$. ■

Referências Bibliográficas

[1] BOTELHO, G. M. A.; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V. **Fundamentos de análise funcional.** Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

[2] CAISSOTI, T. **Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações**. Mestrado em matemática para professores - Universidade de Lisboa, Lisboa. 2012.

[3] FERREIRA, M. S. **O teorema do ponto fixo de Banach e aplicações**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus. 2008

[4] FREITAS, L. B. S. **A função de van der Waerden : funções contínuas sem derivada em ponto algum são mais frequentes do que pensamos!**. 2011. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. 2011.

[5] LIMA, E. L.. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[6] LIMA, E. L.. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[7] LUNKES, A. L. Z. **Espaços Métricos - Uma Introdução**. 2015. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2015.

[8] MATONDO, F. K. **Análise funcional e algumas aplicações**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava. 2017.

[9] PITELLI. **Completude e compacidade**. Notas de aula - aula 6. Disponível em: < https://www.ime.unicamp.br/ pitelli/Aula6.pdf >.