



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Elisa Joaquim Santos

**Introdução às Transformações de Möbius: Aspectos Geométricos e
Algébricos**

RECIFE
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Elisa Joaquim Santos

Introdução às Transformações de Möbius: Aspectos Geométricos e Algébricos

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues

RECIFE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

E43i

Santos, Elisa Joaquim

Introdução às Transformações de Möbius: Aspectos Geométricos e Algébricos / Elisa Joaquim Santos. - 2019.
91 f. : il.

Orientador: Adriano Regis Rodrigues.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em
Matemática, Recife, 2021.

1. Aplicações conformes. 2. Esfera de Riemann. 3. Inversão geométrica. 4. Projeção estereográfica. 5. Transformações
de Möbius. I. Rodrigues, Adriano Regis, orient. II. Título

CDD 510

ELISA JOAQUIM SANTOS

**INTRODUÇÃO ÀS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS: ASPECTOS GEOMÉTRICOS E
ALGÉBRICOS**

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como componente optativo para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Recife, 27 de Dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adriano Régis Melo Rodrigues da Silva (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco

A Deus e à minha família.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus pela força que me deu durante essa jornada. Agradeço à minha mãe, Salomé Joaquim, e à minha avó, Josefa Caetana, por todo carinho, incentivo, orações permanentes e amor incondicional.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues, pela amizade, paciência e ensinamentos constantes, sem sua ajuda não acreditaria o quanto eu era capaz de fazer matemática. Agradeço ao Prof. Dr. Rodrigo Gondim e ao Prof. Dr. Thiago Dias por aceitarem participar na minha banca e contribuírem com o meu trabalho. Agradeço aos funcionários, técnicos e professores do Departamento de Matemática da UFRPE pela boa convivência e colaboração na minha formação.

Agradeço aos meus amigos do curso por toda ajuda e experiência compartilhada. Agradeço especialmente às minhas amigas Naira Caroline e Willyane Rodrigues pelas palavras e atitudes de apoio e por estarem presentes em momentos de alegria e tristeza.

Por fim, agradeço à todos que contribuíram direta e indiretamente na minha formação e realização desse trabalho.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei.

Declaração

Eu, **Elisa Joaquim Santos**, declaro para devidos fins e efeitos, que a monografia sob título **Introdução às Transformações de Möbius: Aspectos Geométricos e Algébricos**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de licenciada, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito a processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais.

Recife, 27 de dezembro de 2019.

Assinatura: _____

Resumo

As transformações de Möbius são funções racionais complexas importantes para além da matemática. Pertencem ao conjunto de aplicações que preservam ângulos, denominadas por conformes, e que são empregadas em diversos problemas físicos. O propósito deste trabalho é introduzir de maneira geométrica e algébrica as transformações de Möbius, utilizando geometria básica e incentivando o estudo desta através de sua aplicação. Para isso, abordaremos noções preliminares de transformações no plano euclidiano e no plano complexo, projeção estereográfica, esfera de Riemann e as relações entre esses conceitos e as transformações de Möbius. Por fim realizaremos uma classificação algébrica para essas transformações.

Palavras-chave: Aplicações conformes; Esfera de Riemann; Inversão geométrica; Projeção estereográfica; Transformações de Möbius.

Abstract

Möbius transformations are important complex rational functions for mathematics and other areas. They belong to the set of maps that preserve angles, called conformal, and that are applied in various physical problems. The aim of this work is to introduce in a geometric and algebraic way the Möbius transformations, using basic geometry and encouraging its study through its application. For this, we will introduce preliminary notions of complex numbers, plane transformations, stereographic projection, Riemann sphere and the relationships between these concepts and Möbius transformations. Finally, we obtain algebraic classification for these transformations.

Keywords: Conformal maps; Riemann sphere; Geometric inversion; Stereographic projection; Möbius transformation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ângulo entre curvas	23
Figura 2 – Rotação de um ponto	25
Figura 3 – Rotação em torno de um ponto: primeiro caso	26
Figura 4 – Rotação em torno de um ponto: segundo caso	26
Figura 5 – Reflexão de um ponto em relação a uma reta	27
Figura 6 – Reflexão como isometria: primeiro caso	27
Figura 7 – Reflexão como isometria: segundo caso	28
Figura 8 – Preservação de ângulo pela semelhança	30
Figura 9 – Homotetia de centro O e razão k	30
Figura 10 – Jakob Steiner	31
Figura 11 – Inversão geométrica de um ponto	32
Figura 12 – Semelhança	32
Figura 13 – Preservação de reta	33
Figura 14 – Preservação de círculo não ortogonal	34
Figura 15 – Preservação de círculo ortogonal	35
Figura 16 – Círculo ortogonal por um ponto e seu inverso	36
Figura 17 – Círculo ortogonal	37
Figura 18 – Preservação de ângulo pela inversão geométrica	38
Figura 19 – Plano complexo	40
Figura 20 – Módulo de um número complexo	40
Figura 21 – Complexo conjugado	41
Figura 22 – Representação polar	42
Figura 23 – Produto de números complexos	42
Figura 24 – Divisão de números complexos	43
Figura 25 – Fórmula complexa da inversão	44
Figura 26 – Projeção estereográfica	48
Figura 27 – Fórmula para projeção estereográfica	49
Figura 28 – Fórmula estereográfica pelo ângulo	51
Figura 29 – Relação métrica no triângulo retângulo	52
Figura 30 – Semelhança estereográfica	52
Figura 31 – Projeção de um círculo passando por N	53
Figura 32 – Projeção de um círculo paralelo ao equador	54
Figura 33 – Projeção de um círculo não paralelo ao equador	54
Figura 34 – Cone oblíquo	55
Figura 35 – Preservação de ângulo pela projeção estereográfica	56
Figura 36 – Inversão geométrica em projeção estereográfica	57

Figura 37 – August Ferdinand Möbius	61
Figura 38 – Elíptica	66
Figura 39 – Hiperbólica	67
Figura 40 – Loxodrômica	67
Figura 41 – Parabólica	68
Figura 42 – Construção 1	79
Figura 43 – Efeito da transformação F	80
Figura 44 – Construção 2	83
Figura 45 – Efeito da transformação G	84

Sumário

	Introdução	21
1	NOÇÕES PRELIMINARES	23
1.1	Transformações no plano euclidiano	23
1.1.1	Isometrias	23
1.1.1.1	Translação	24
1.1.1.2	Rotação	25
1.1.1.3	Reflexão	26
1.1.2	Semelhança e homotetia	29
1.1.3	Inversão geométrica	31
1.2	Números complexos	38
1.2.1	O corpo dos números complexos	38
1.2.2	O plano complexo	39
1.2.3	Módulo e conjugado	40
1.2.4	Representação polar	41
1.2.5	Equação do círculo	43
1.2.6	Transformações no plano complexo	43
2	ESFERA DE RIEMANN E PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA	47
2.1	Projeção estereográfica	47
3	TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS	61
3.1	Um pouco de história	61
3.2	Definição	62
3.3	Propriedades	64
3.3.1	Pontos fixos	65
3.3.2	Pontos fixos no infinito	65
3.3.3	Existência e unicidade	68
3.3.4	Razão cruzada	69
3.3.5	Grupo	70
3.3.6	Matriz associada à transformação	70
3.3.6.1	Coordenadas homogêneas	73
3.3.6.2	Ortogonalidade	76
4	CLASSIFICAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS	79
4.1	O multiplicador de uma transformação	79

4.2	Transformação Parabólica	84
4.3	Transformação Elíptica	86
4.4	Transformação Hiperbólica	86
4.5	Transformação Loxodrômica	87
	REFERÊNCIAS	89

Introdução

As transformações de Möbius são um tipo especial de aplicações que preservam ângulos entre curvas, denominadas por conformes. Matematicamente, estão inseridas no estudo de funções racionais a uma variável complexa.

Existem diferentes áreas e problemas nos quais as transformações conformes possuem aplicações. Uma delas é a física, em problemas de contorno, de escoamento de fluidos ou eletromagnéticos. A ideia principal de utilizar estas aplicações é transformar as regiões nas quais os problemas são considerados em regiões mais simples como retângulos, discos ou semiplanos, cuja solução é mais fácil. Na dinâmica de fluidos, o trabalho com a função de Green em domínios multiplamente conexos é muito importante, e esta função é obtida por grupos de Schottky que são obtidos por transformações de Möbius. Para mais detalhes, consultar (1) e (5).

Apesar das diversas aplicações, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo introdutório, geométrico e algébrico das transformações de Möbius, baseando-se, principalmente, em geometria euclidiana básica e motivando o estudo desta por meio de sua aplicação nas transformações em questão. Dessa forma, o texto pode ser acessível a estudantes de ensino médio e da graduação em áreas exatas.

O trabalho estrutura-se em quatro capítulos. No primeiro capítulo abordamos algumas transformações nos planos euclidiano e complexo, no segundo o estudo da esfera de Riemann. Analisaremos as transformações de Möbius como a composição de aplicações simples no plano e ampliá-las para o plano complexo estendido que é identificado com a esfera de Riemann via projeção estereográfica. Uma das propriedades importantes vista é a preservação de círculos e ângulos. O estudo das transformações de Möbius se inicia no terceiro capítulo, trazendo a definição e as diversas propriedades que a mesma possui. Ainda apresentamos uma maneira de visualizar a transformação por meio de uma representação matricial. Um dos principais resultados é associar uma transformação de Möbius a uma transformação linear em \mathbb{C}^2 . Para isso, estudamos coordenadas homogêneas, pontos fixos como autovetores destas transformações lineares e ortogonalidade em \mathbb{C}^2 . No último capítulo aplicamos os resultados anteriores na classificação das transformações de Möbius em: parabólica, elíptica, hiperbólica e loxodrômica. Para cada uma delas é realizada uma caracterização geométrica, analisando seu comportamento em uma vizinhança muito próxima dos pontos fixos. Também exibimos uma caracterização algébrica, através do traço da matriz associada.

1 Noções preliminares

1.1 Transformações no plano euclidiano

Nesta seção apresentamos as transformações que usaremos para estudar as transformações de Möbius em geral. Antes disso, trataremos de alguns conceitos preliminares necessários para o estudo de cada transformação, em uma abordagem semelhante a dos livros (9) e (10).

1.1.1 Isometrias

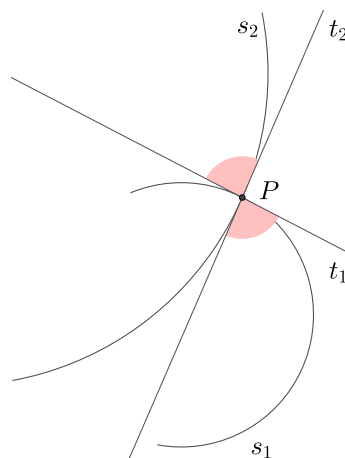
Definição 1.1. Uma transformação σ no plano é uma isometria se preserva distâncias, ou seja, para quaisquer pontos A e B com imagens $\sigma(A) = A'$ e $\sigma(B) = B'$ tem-se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

A aplicação de uma isometria em uma figura F origina uma figura F' dita congruente a F . Toda transformação isométrica é bijetiva e sua inversa também é uma isometria. A demonstração pode ser encontrada em (10). Mais adiante trataremos de preservação de ângulos, mas antes vejamos o que significa ângulo entre curvas.

Definição 1.2. Sejam s_1 e s_2 duas curvas que se intersectam em P e cujas retas tangentes em P estejam bem definidas. O ângulo entre s_1 e s_2 é definido como o ângulo entre suas retas tangentes t_1 e t_2 em P .

Figura 1 – Ângulo entre curvas



Fonte: Material da autora

O teorema a seguir garante que toda isometria preserva retas, círculos e ângulos.

Proposição 1.3. *Sejam σ uma isometria, r e s retas no plano que se intersectam em P e C um círculo de centro O e raio R . Considere ainda $A, B \in r, C \in C$ e α o ângulo entre as retas r e s em P . As seguintes propriedades são válidas:*

- i) σ transforma a reta r em outra reta definida por $\sigma(A) = A'$ e $\sigma(B) = B'$.
- ii) σ transforma o círculo C em um círculo de mesmo raio e centrado em $\sigma(O) = O'$.
- iii) A medida do ângulo entre as imagens das retas r e s sob a transformação σ é a mesma que a do ângulo α .

Demonstração. i) Seja $D \in r$ diferente de A e de B . Sem perda de generalidade, suponha que D está entre A e B . Assim,

$$\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}.$$

Pela isometria, $\overline{AD} = \overline{A'D'}$, $\overline{DB} = \overline{D'B'}$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Dessa forma,

$$\overline{A'D'} + \overline{D'B'} = \overline{A'B'}.$$

Isto nos diz que se D pertence a reta r , então D' pertence a reta definida por A' e B' . Logo σ preserva retas.

ii) Pela isometria temos que para cada ponto C do círculo, $\overline{OC} = \overline{O'C'}$. Como $\overline{OC} = R$, segue que $\overline{O'C'} = R$. Logo, C' pertence a um círculo centrado em O' de raio R . Como C é fixo, porém arbitrário, σ preserva círculos.

iii) Seja $E \in s$. Os triângulos AEP e $A'E'P'$ são congruentes pelo caso LLL , pois pela isometria $\overline{AE} = \overline{A'E'}$, $\overline{EP} = \overline{E'P'}$ e $\overline{AP} = \overline{A'P'}$. De acordo com a congruência anterior, $\angle APE = \alpha = \angle A'P'E'$. Portanto σ preserva ângulo entre retas.

□

As transformações apresentadas adiante são tipos especiais de isometrias.

1.1.1.1 Translação

Definição 1.4. Uma translação σ por um vetor \vec{u} é a transformação que associa a cada ponto A no plano o ponto $\sigma(A) = A + \vec{u} = A'$.

Uma definição alternativa, em termos de paralelogramo, pode ser encontrada em (10).

Proposição 1.5. *A translação é uma isometria.*

Demonstração. Sejam A e B pontos do plano, σ uma translação pelo vetor \vec{u} , $\sigma(A) = A'$ e $\sigma(B) = B'$. Teremos,

$$\overline{AB} = \|B - A\| = \|(B + \vec{u}) - (A + \vec{u})\| = \|B' - A'\| = \overline{A'B'}.$$

Logo, a translação é isometria. □

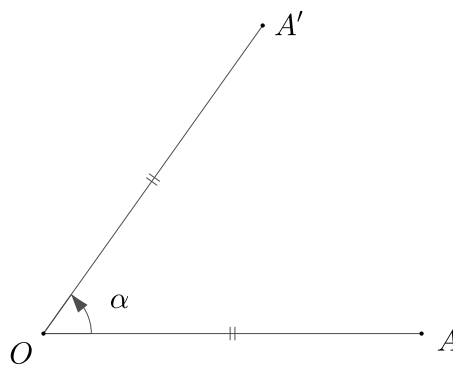
Corolário 1.6. *Toda translação preserva retas, círculos e ângulos.*

Demonstração. Segue das proposições (1.3) e (1.5). □

1.1.1.2 Rotação

Definição 1.7. Uma rotação σ de centro O por um ângulo α é a transformação que associa ao ponto A um ponto $\sigma(A) = A'$ de maneira que $\overline{OA'} = \overline{OA}$ e $\angle AOA' = \alpha$.

Figura 2 – Rotação de um ponto



Fonte: Material da autora

Proposição 1.8. *A rotação é uma isometria.*

Demonstração. Sejam A e B pontos do plano, σ uma rotação de centro O por um ângulo α , e A' e B' as imagens de A e B sob σ . Existem dois casos a considerar: os pontos O, A e B são colineares ou os pontos O, A e B não são colineares.

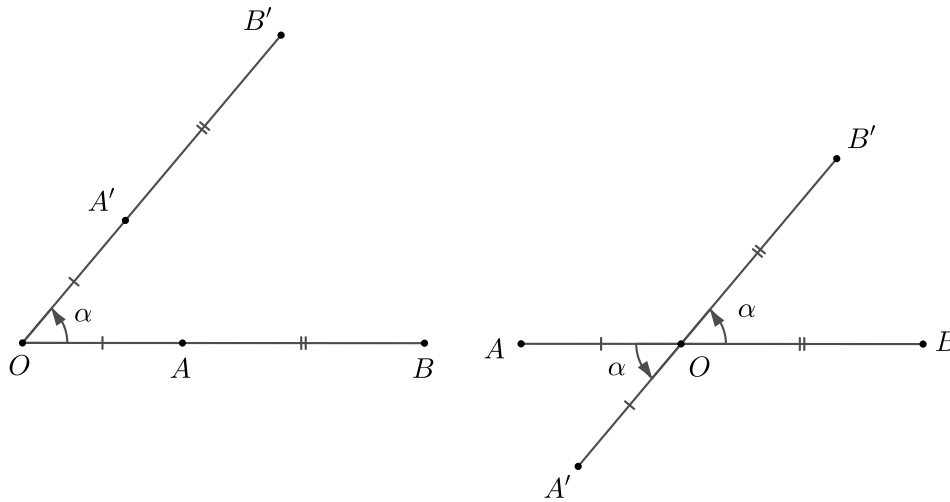
Suponha que os pontos O, A e B são colineares em que O está entre A e B como na imagem direita da figura (3). Por definição,

$$\overline{AB} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA'} + \overline{OB'} = \overline{A'B'}.$$

De outro modo, poderíamos ter, sem perda de generalidade, A entre O e B , como na imagem esquerda da figura (3). Então,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = \overline{A'B'}.$$

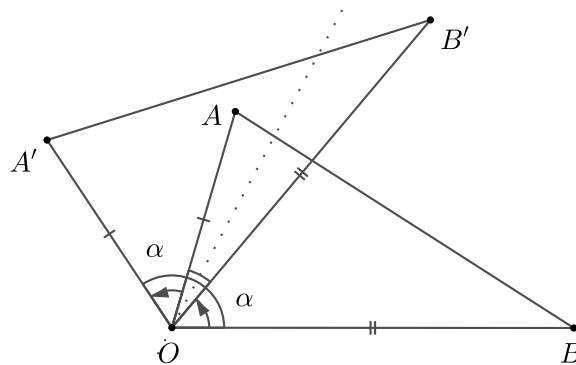
Figura 3 – Rotação em torno de um ponto: primeiro caso



Fonte: Material da autora

No outro caso, suponha que O , A e B não são colineares. Os ângulos $\angle AOB'$ e $\angle BOA'$ possuem a mesma bissetriz, ilustrada na figura (4). Com isso, $\angle AOB = \angle A'OB'$. Sendo assim, os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes pelo caso LAL , pois $\angle AOB = \angle A'OB'$ e pela rotação $\overline{OA} = \overline{OA'}$ e $\overline{OB} = \overline{OB'}$. Pela congruência, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Figura 4 – Rotação em torno de um ponto: segundo caso



Fonte: Material da autora

□

Corolário 1.9. Toda rotação preserva retas, círculos e ângulos.

Demonstração. Decorre das proposições (1.3) e (1.8).

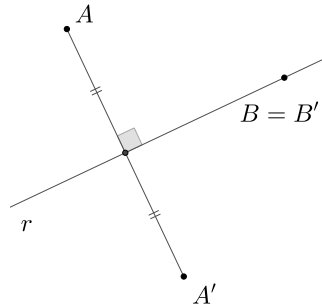
□

1.1.1.3 Reflexão

Definição 1.10. Uma reflexão σ em torno de uma reta r é a transformação que fixa os pontos da reta r , ou seja, $\sigma(B) = B$ se $B \in r$ e associa o ponto $A \notin r$ ao ponto $\sigma(A) = A'$, de maneira

que r seja mediatriz¹ do segmento AA' .

Figura 5 – Reflexão de um ponto em relação a uma reta



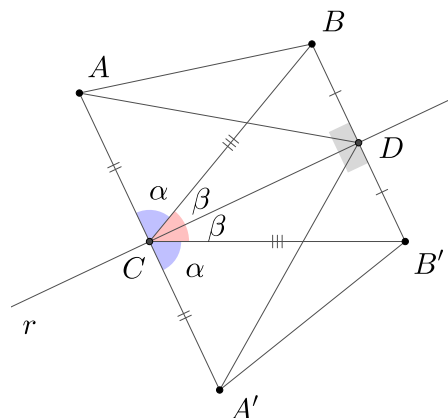
Fonte: Material da autora

Proposição 1.11. *A reflexão é uma isometria.*

Demonstração. Seja σ uma reflexão em relação à reta r . A demonstração será feita em dois casos: A e B pontos do mesmo semiplano definido por r ou A e B pontos de semiplano opostos.

Suponha que A e B estão no mesmo semiplano definido por r e que a reta AB não seja perpendicular a r . Sejam C e D os pontos de intersecção dos segmentos AA' e BB' com a reta r , respectivamente. Observando a figura (6), os triângulos BCD e $B'CD$ são congruentes pelo caso LAL , pois possuem $\overline{BD} = \overline{B'D}$, $\angle BDC = 90^\circ = \angle B'DC$ e CD é um lado em comum. Logo, $\angle BCD = \angle B'CD = \beta$ e $\overline{BC} = \overline{B'C}$. De maneira análoga, os triângulos ACD e $A'CD$ são congruentes, então, denotando $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \alpha + \beta = \angle A'CD$. Assim, chegamos que $\angle ACB = \angle A'CB' = \alpha$. Além disso, $\overline{AC} = \overline{A'C}$. Portanto os triângulos ABC e $A'B'C$ são congruentes, implicando que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, como queríamos provar.

Figura 6 – Reflexão como isometria: primeiro caso



Fonte: Material da autora

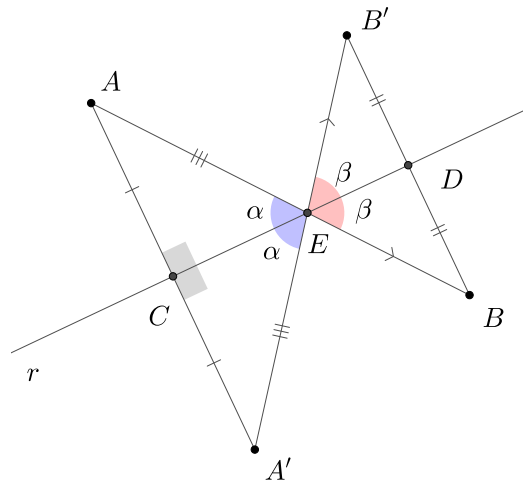
¹ Reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.

Se a reta AB for perpendicular a r e B estiver entre A e C , então A' , C e B' estão nessa reta pela definição de reflexão. Logo,

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{A'C} - \overline{B'C} = \overline{A'B'}.$$

Suponha agora que A e B estão em semiplanos distintos definidos por r e que, do mesmo modo, a reta AB não seja perpendicular a r . Considere suas imagens A' e B' , respectivamente, e os pontos C e D . Seja E o ponto de interseção de AB com r . Acompanhando a figura (7), temos que os triângulos ACE e $A'CE$ são congruentes pelo caso LAL , pois $\overline{AC} = \overline{A'C}$, $\angle ACE = \angle A'CE = 90^\circ$ e CE é um lado em comum. Dessa maneira, $\angle AEC = \alpha = \angle A'EC$ e $\overline{AE} = \overline{A'E}$. Analogamente, os triângulos $B'DE$ e BDE são congruentes. Logo, $\angle B'ED = \beta = \angle BED$ e $\overline{B'E} = \overline{BE}$. Os ângulos $\angle AEC$ e $\angle BED$ são opostos pelo vértice em relação às retas AB e r . Segue que $\beta = \angle BED = \alpha$. Portanto $\angle AEA' = \angle BEB' = 2\alpha$ e então A' , E e B' são colineares.

Figura 7 – Reflexão como isometria: segundo caso



Fonte: Material da autora

Concluimos que é isometria, pois

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{A'E} + \overline{EB'} = \overline{A'B'}.$$

Se a reta AB for perpendicular a r , B' está entre A e C , então A' , C e B estão nessa reta pela definição de reflexão. Como $\overline{A'B} = \overline{A'C} - \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{B'C} = \overline{AB'}$, então

$$\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{B'C} + \overline{AB'} = \overline{BC} + \overline{B'C} + \overline{A'B} = \overline{A'B'}.$$

□

Corolário 1.12. *Toda reflexão preserva retas, círculos e ângulos.*

Demonstração. Resulta das proposições (1.3) e (1.11).

□

1.1.2 Semelhança e homotetia

As transformações de semelhança e homotetia não são isometrias, por isso serão tratadas separadamente. Como nas transformações anteriores, veremos que homotetia também preserva retas, círculos e ângulos. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar (4), (9) e (15).

Definição 1.13. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas figuras no plano. Uma semelhança σ de razão k é uma transformação no plano de \mathcal{F} em \mathcal{F}' tal que dados os correspondentes $\sigma(A) = A'$ e $\sigma(B) = B'$ em \mathcal{F}' , então $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.

Pela definição anterior as figuras \mathcal{F} e \mathcal{F}' são ditas semelhantes de razão k . A transformação semelhança possui inversa σ^{-1} que também é uma semelhança, mas com razão $1/k$. Note que quando $k = 1$ a semelhança se transforma em uma isometria. Logo, *toda isometria é uma semelhança*. Particularmente, quando a figura \mathcal{F} é um triângulo, é possível mostrar que a definição anterior coincide com a definição clássica de semelhança de triângulos (ver (9)).

Como visto anteriormente para isometrias, também temos que toda semelhança preserva retas, círculos e ângulos, como afirma o teorema a seguir.

Teorema 1.14. *Se σ é uma semelhança de \mathcal{F} em \mathcal{F}' de razão k , então σ*

- i) *transforma todo segmento de extremos em \mathcal{F} em segmento de extremos em \mathcal{F}' .*
- ii) *transforma círculo de raio R contido em \mathcal{F} em círculo de raio kR contido em \mathcal{F}' .*
- iii) *preserva ângulo entre retas.*

Demonstração.

- i) Considere o segmento AB em \mathcal{F} . Dado $C \in AB$, como σ é semelhança,

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \implies k \cdot \overline{A'B'} = k \cdot \overline{A'C'} + k \cdot \overline{C'B'} \implies \overline{A'B'} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}.$$

Logo, $C' \in A'B'$. Reciprocamente, seja $D' \in A'B'$, onde $D = \sigma^{-1}(D')$. Como σ^{-1} é uma semelhança, então $D \in AB$. Portanto o segmento AB tem como imagem o segmento $A'B'$ e vice-versa.

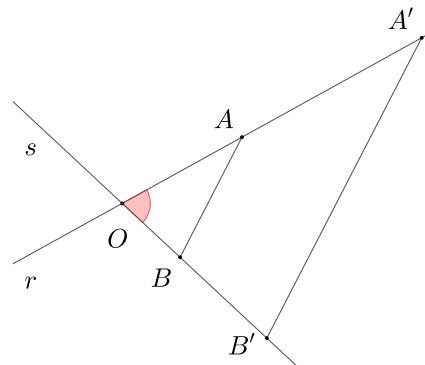
- ii) Para cada $D \in \mathcal{C}$, pela semelhança e pelo item i), o segmento OD é levado no segmento $O'D'$ e ainda $\overline{O'D'} = k \cdot \overline{OD} = k \cdot R$. Logo, o círculo \mathcal{C} possui correspondência biunívoca com o círculo de raio $k \cdot R$ e centrado em O' .
- iii) Sejam r e s retas que se intersectam em O . Considere o triângulo AOB formado por um ponto de r , digamos A , e um ponto B de s , como ilustra a figura (8). De acordo com o

item i), AOB é levado em um triângulo $A'O'B'$, pois σ preserva retas. Pela semelhança, $\overline{AO} = k \cdot \overline{A'O'}$, $\overline{OB} = k \cdot \overline{O'B'}$ e $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$. Então teremos,

$$\frac{\overline{A'O'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{O'B'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k}.$$

Assim AOB e $A'O'B'$ são triângulos semelhantes pelo caso LLL , logo $\angle AOB = \angle A'O'B'$. Portanto σ preserva ângulos.

Figura 8 – Preservação de ângulo pela semelhança

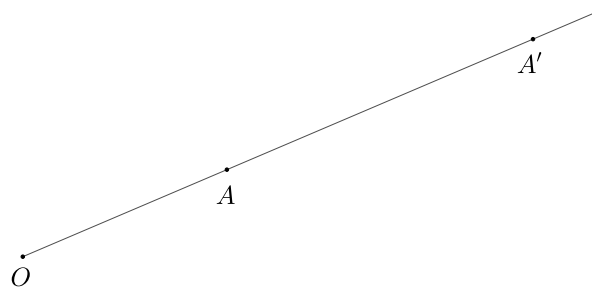


Fonte: Material da autora

□

Definição 1.15. Seja O um ponto do plano e k um número real positivo. Uma homotetia σ de centro O e razão k é uma transformação do plano nele mesmo que associa o ponto A ao ponto $\sigma(A) = A'$ de maneira que: se $A = O$, então $A' = O$, e se $A \neq O$, então A' é o ponto da semirreta OA tal que $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$.

Figura 9 – Homotetia de centro O e razão k



Fonte: Material da autora

Proposição 1.16. Toda homotetia é uma semelhança.

Demonstração. Considere uma homotetia de centro O e razão k . Sejam A e B pontos no plano. Suponha O, A e B são colineares, que $k > 1$ e A está entre O e B . Então,

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k \cdot \overline{OB} - k \cdot \overline{OA} = k \cdot \overline{AB}.$$

O caso $k < 1$ a demonstração é semelhante.

Se O, A e B não são colineares, AOB e $A'OB'$ são semelhantes pelo caso LAL , pois $\angle AOB = \angle A'OB'$ e

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k.$$

Pela semelhança dos triângulos, $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$. Dessa forma, toda homotetia é uma semelhança. \square

Corolário 1.17. *Homotetia preserva retas, círculos e ângulos.*

Demonstração. Resulta do teorema (1.14) e da proposição (1.16). \square

1.1.3 Inversão geométrica

Como já vimos anteriormente, existem diversas transformações no plano. Veremos a seguir um tipo especial dessas transformações denominada inversão geométrica. A inversão no plano em relação a um círculo foi investigada inicialmente em 1830 pelo matemático suíço Jakob Steiner (1796-1863) que trabalhava principalmente com geometria sintética.

Figura 10 – Jakob Steiner



Fonte: Internet

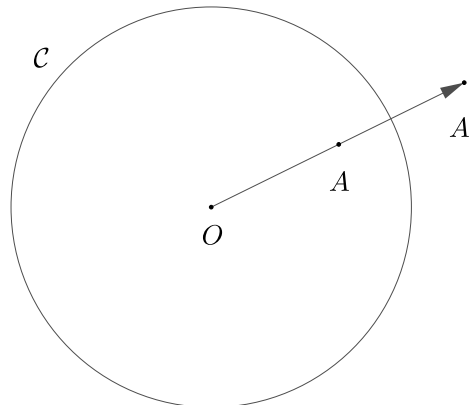
A inversão era utilizada em muitas de suas provas e a partir disso, foram solucionados problemas que até então se acreditava serem impossíveis de resolver com a geometria euclidiana na época, como o problema das três circunferências de Apolônio². A teoria desenvolvida nesta subseção pode ser encontrada em (4), (6) e (13).

Definição 1.18. Seja A um ponto do plano e C um círculo de centro O e raio R . Definimos a imagem da $A \neq O$ sob inversão em relação à C como o ponto $A' = I_C(A)$ que está na mesma direção de \overrightarrow{OA} e a uma distância R^2/\overline{OA} de O . Em outros termos,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2.$$

² Problema no qual são dadas três circunferências distintas e deve-se encontrar uma tangente às três simultaneamente.

Figura 11 – Inversão geométrica de um ponto

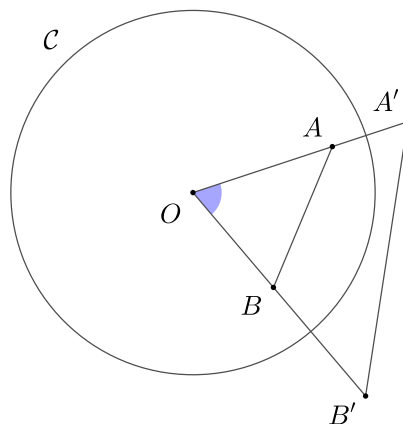


Fonte: Material da autora

Com base na definição anterior, a inversão geométrica leva pontos interiores ao círculo em pontos exteriores e vice-versa, enquanto que os pontos da fronteira permanecem fixos. Note que o inverso do ponto O não está definido, então temos uma bijeção do plano furado nele mesmo. A proposição a seguir tem extrema importância para demonstrar que a inversão geométrica preserva retas, círculos e ângulos.

Proposição 1.19. *Se a inversão em relação ao círculo C , de raio R e centrado em O leva dois pontos A e B em A' e B' , respectivamente, então os triângulos AOB e $B'OA'$ são semelhantes.*

Figura 12 – Semelhança



Fonte: Material da autora

Demonstração. Sejam A e B dois pontos e A' e B' suas imagens sob inversão em relação a C , como na figura (12). Por definição,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \implies \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}.$$

Além disso, tem-se $\angle AOB = \angle A'OB'$. Pelo caso *LAL* segue o resultado. \square

Corolário 1.20. *Sejam A e B pontos sob inversão em relação a um círculo C de raio R e centrado em O . Então a distância entre suas imagens A' e B' é dada por:*

$$\overline{A'B'} = \frac{R^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \cdot \overline{AB}.$$

Demonstração. Pela proposição (1.19)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{R^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$$

Portanto,

$$\overline{A'B'} = \frac{R^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \cdot \overline{AB}.$$

□

Proposição 1.21. *A inversão em relação a um círculo C , centrado em O de raio R , tem a propriedade de levar retas e círculos em retas ou em círculos.*

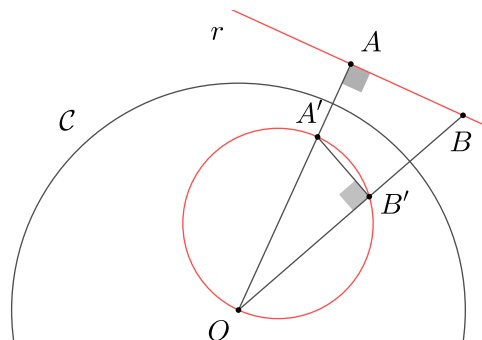
Demonstração. Podemos considerar os seguintes casos de retas:

i) Reta que passa por O .

Seja r uma reta que passa por O . Se $P \in r$, então $I_C(P) = P'$ é um ponto que está na mesma direção de \overrightarrow{OP} , a uma distância $\frac{R^2}{OP}$ do centro. Logo $P' \in r$. Portanto a imagem de uma reta passando por O é ela mesma.

ii) Reta que não passa por O .

Figura 13 – Preservação de reta



Fonte: Material da autora

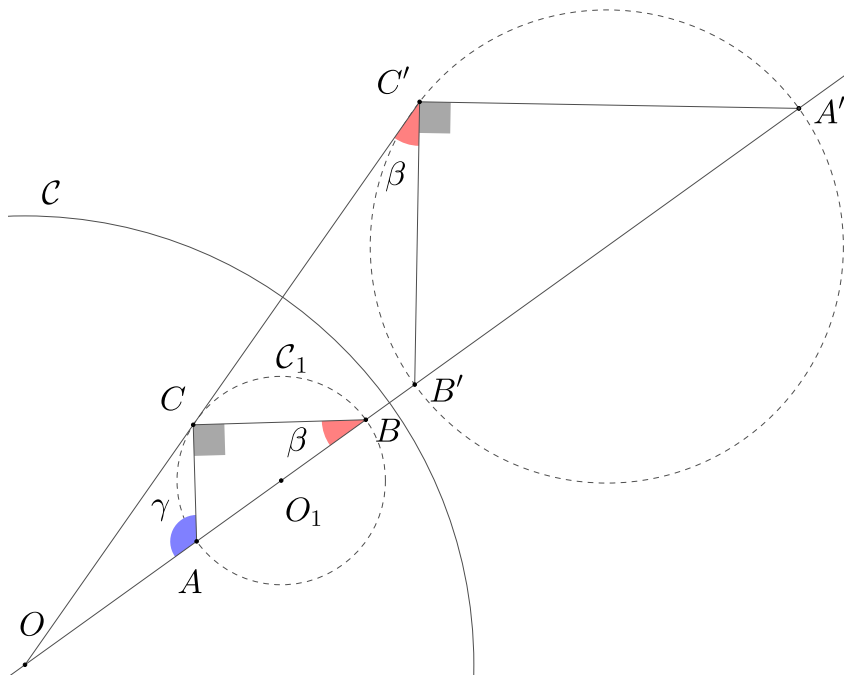
Seja r uma reta que não passa por O . Considere a reta perpendicular a r passando por O que intersecta r em um ponto A . Tomemos um ponto $B \in r$ diferente de A e consideremos sua imagem B' sob inversão em relação a C (figura (13)). Como os triângulos AOB e $B'OA'$ são semelhantes, proposição (1.19), e $\angle OAB = 90^\circ$, obtemos que $\angle OB'A' = 90^\circ$. Assim, o triângulo $B'OA'$ é retângulo em B' . Logo B' é ponto de um círculo cujo diâmetro

é OA' se, e somente se, $B \in r$. A recíproca se dá pela unicidade da reta perpendicular a AA' passando por A . Portanto a imagem de uma reta que não passa por O é um círculo passando por O .

Agora, para os círculos, considere os seguintes casos:

- i) Círculo que não passa por O .

Figura 14 – Preservação de círculo não ortogonal



Fonte: Material da autora

Seja C_1 um círculo com centro O_1 que não passa por O . Traçando uma reta r passando por O e O_1 , considere os pontos A e B da interseção entre r e C_1 e suas imagens A' e B' sob inversão em relação a C . Sejam C um ponto qualquer de C_1 , e C' seu inverso. Considere ainda $\angle ACB = 90^\circ$ e $\angle CBA = \beta$. A situação descrita é ilustrada na figura (14). Note que os triângulos AOC e $C'OA'$ são semelhantes, então

$$\angle OAC = \angle OC'A' = \gamma.$$

Mas, em relação ao triângulo ABC , o ângulo γ é a soma dos ângulos internos não adjacentes. Assim, $\gamma = 90^\circ + \beta$. Pela semelhança dos triângulos BOC e $C'OB'$, também temos

$$\angle OBC = \angle OC'B'.$$

Logo,

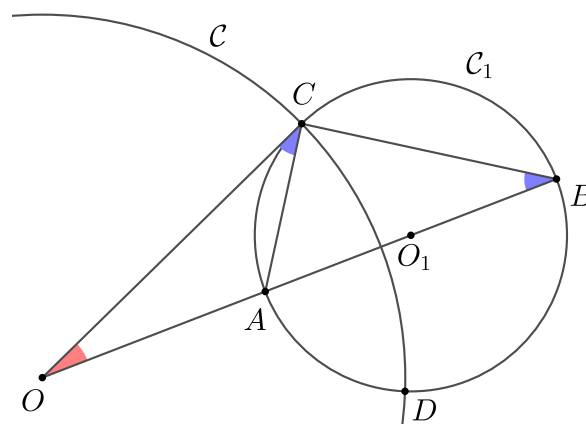
$$\angle OAC = \angle OC'A' \implies \gamma = \angle OC'B' + \angle A'C'B' \implies 90^\circ + \beta = \beta + \angle A'C'B'.$$

Então $\angle A'C'B' = 90^\circ$. Isto nos diz que o triângulo $A'B'C'$ é retângulo em C' . Logo, C' pertence a um círculo cujo diâmetro é $A'B'$. Portanto a imagem de um círculo que não passa por O é um círculo que não passa por O . Para concluir a recíproca, deve-se notar que os mesmos argumentos são válidos trocando C por C' .

ii) Círculo ortogonal a \mathcal{C} .

A figura (15) mostra um círculo \mathcal{C}_1 , centrado em O_1 e ortogonal a \mathcal{C} nos pontos C e D . Isto nos diz que os segmentos OC e OD são tangentes a \mathcal{C}_1 em C e D , respectivamente. Considere a reta que passa por O e O_1 , intersectando \mathcal{C}_1 em pontos A e B .

Figura 15 – Preservação de círculo ortogonal



Fonte: Material da autora

O ângulo $\angle ABC$ é um ângulo inscrito relativo ao arco AC . O ângulo $\angle OCA$ é um ângulo semi-inscrito relativo ao mesmo arco. Logo $\angle ABC = \angle OCA$. Os triângulos AOC e COB são semelhantes pelo caso AA. Então,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \implies \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2,$$

o que caracteriza B como o inverso de A em relação a \mathcal{C} .

□

Além de levar retas e círculos em retas ou em círculos, a inversão geométrica possui a propriedade de preservar ângulos entre curvas. Existem transformações que podem ou não preservar o sentido do ângulo. Neste caso, se estamos falando do ângulo formado entre as curvas γ_1 e γ_2 , admitimos que o sentido do ângulo é de γ_1 para γ_2 .

Definição 1.22. Uma transformação é conforme quando o ângulo formado entre as imagens de duas curvas sob a transformação é igual e está no mesmo sentido que o ângulo entre as curvas originais. No caso em que os ângulos são iguais mas o sentido é oposto, diremos que a transformação é anticonforme.

As proposições a seguir serão utilizadas para mostrar que a inversão geométrica é anticonforme.

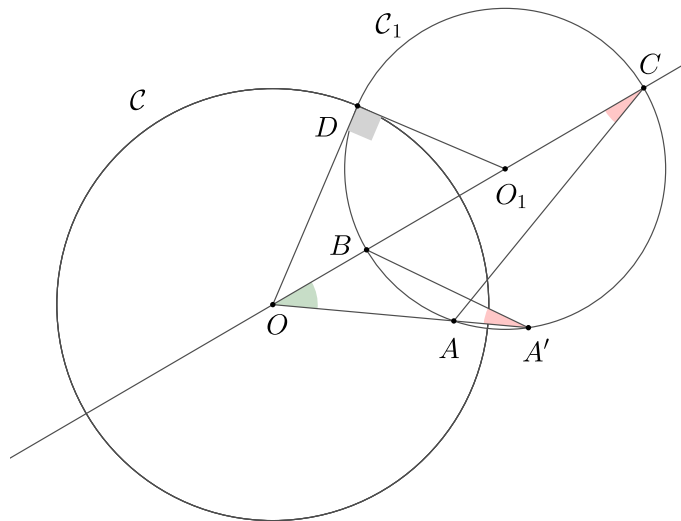
Proposição 1.23. *Seja \mathcal{C} um círculo centrado em O e considere o ponto A e seu inverso A' em relação a \mathcal{C} . Qualquer círculo passando por A e A' é ortogonal a \mathcal{C} .*

Demonstração. Seja \mathcal{C} o círculo de inversão centrado em O de raio R . Considere um ponto A interior a \mathcal{C} e sua imagem sob inversão A' . Seja \mathcal{C}_1 um círculo centrado em O_1 com raio R_1 e considere a reta passando por O e O_1 , intersectando \mathcal{C}_1 em pontos B e C . Observando a figura (16), os triângulos $OA'B$ e OCA são semelhantes pelo caso AA, pois $\angle OA'B = \angle OCA$ e $\angle A'OB = \angle AOC$. Assim,

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \implies \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2.$$

Isto mostra que B e C são inversos em relação ao círculo \mathcal{C} .

Figura 16 – Círculo ortogonal por um ponto e seu inverso



Fonte: Material da autora

Considere um dos pontos de intersecção de \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 , que denotaremos por D . Note que $\overline{OB} = \overline{OO_1} - \overline{O_1B}$ e $\overline{OC} = \overline{OO_1} + \overline{O_1C}$. Além disso, $\overline{O_1B} = \overline{O_1C} = \overline{O_1D} = R_1$ e $\overline{OD} = R$. Logo, $\overline{OB} = \overline{OO_1} - R_1$ e $\overline{OC} = \overline{OO_1} + R_1$. Consequentemente,

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = (\overline{OO_1} - R_1) \cdot (\overline{OO_1} + R_1) \implies R^2 = \overline{OO_1}^2 - R_1^2 \implies \overline{OO_1}^2 = R^2 + R_1^2.$$

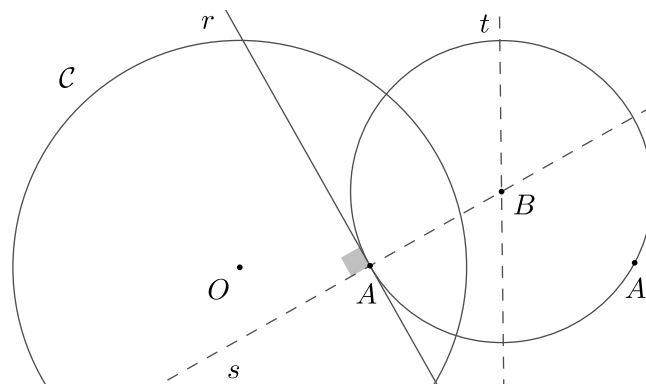
Concluimos que $\overline{OO_1}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{O_1D}^2$, o que implica $\angle ODO_1 = 90^\circ$. Portanto os círculos \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 são ortogonais. \square

Proposição 1.24. *Seja \mathcal{C} um círculo centrado em O . Dado um ponto $A \notin \mathcal{C}$ e uma reta passando por A , existe um único círculo tangente a esta reta em A e ortogonal a \mathcal{C} .*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos.

- a) Se a reta é a que passa por OA , então esta reta é o círculo desejado (aqui consideramos reta como sendo círculo degenerado de raio infinito).
- b) Suponha que a reta r não é a que passa por OA . Tomemos uma reta s perpendicular a r passando por A . Seja B o ponto de intersecção entre a mediatriz t de AA' com a reta s . Seguindo a construção na figura (17), o círculo centrado em B e raio $AB = A'B$ é ortogonal a C pela proposição (1.23) e tangente a r , pois r passa por A e é perpendicular ao raio AB .

Figura 17 – Círculo ortogonal



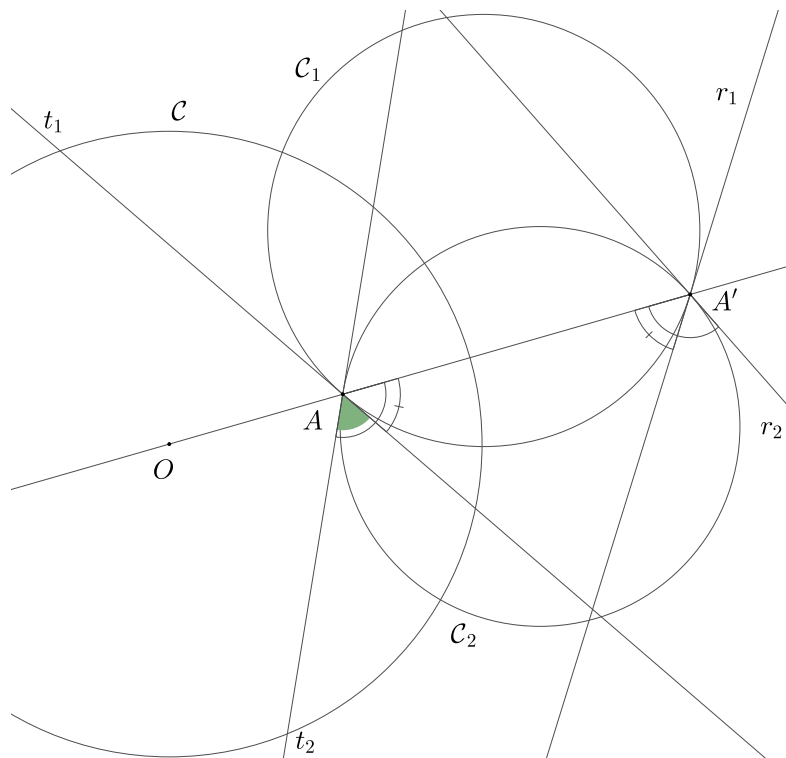
Fonte: Material da autora

□

Proposição 1.25. *A inversão geométrica é uma transformação anticonforme.*

Demonstração. Considere um círculo C centrado em O . Para provar que a inversão em relação à C inverte o sentido do ângulo entre duas curvas e preserva sua medida, é suficiente mostrar que o faz entre duas retas, já que ângulo entre curvas é o ângulo entre suas retas tangentes. A demonstração pode ser seguida pela figura (18). Sejam s_1, s_2 duas curvas concorrentes em A e t_1, t_2 suas tangentes em A . Pela proposição (1.24), existem círculos C_1 e C_2 ortogonais a C e tangentes as retas t_1 e t_2 em A , respectivamente. Considere a reta OA e seu inverso A' em relação a C . Sabemos que o inverso de C_1 é ele mesmo e que o de t_1 é um círculo tangente a C_1 passando por A' . Sendo assim, o inverso de C_1 e de t_1 possuem a mesma reta tangente r_1 em A' . De maneira análoga, considere a reta r_2 tangente a C_2 em A' . O ângulo entre as retas OA' e t_2 é semi-inscrito relativo ao arco AA' de C_2 , assim como o ângulo entre as retas OA' e r_2 . No círculo C_1 , o ângulo entre as retas OA' e t_1 é semi-inscrito relativo ao arco AA' , do mesmo modo que o ângulo entre OA' e r_1 . O ângulo entre s_1 e s_2 é a diferença do ângulo entre as retas OA' e t_2 com o ângulo entre OA' e t_1 . Como são preservados, então o ângulo em questão é preservado.

Figura 18 – Preservação de ângulo pela inversão geométrica



Fonte: Material da autora

Tomando o sentido do ângulo de t_1 para t_2 (horário) nas imagens temos o sentido de r_1 para r_2 que é antihorário. Logo, o sentido do ângulo é invertido e a medida preservada. Portanto a inversão geométrica é anticonforme.

□

1.2 Números complexos

A necessidade dos números complexos se deu através da resolução de equações de terceiro grau. O matemático Raphael Bombelli (1526-1573) publicou um livro denominado por l'Algebra em 1572 onde, no capítulo *II*, estudava resolução de equações de grau não superior a quatro. Foi a partir desta obra que os números complexos começaram a ser utilizados. O termo número complexo foi introduzido por Carl Friederich Gauss (1777-1855) em 1832. O conjunto dos números complexos como corpo foi definido por William Rowan Hamilton (1805-1865).

1.2.1 O corpo dos números complexos

Os números complexos são um corpo com as operações de adição e multiplicação, satisfazendo muitas propriedades que serão apresentadas nesta seção. Para os devidos objetivos, esta será uma breve revisão e o leitor interessado em se aprofundar pode consultar (1) e (7).

Definição 1.26. O corpo dos números complexos é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$$

onde i é a unidade imaginária com a propriedade de que $i^2 = -1$.

Para quaisquer $z = a + ib$ e $w = c + id$ em \mathbb{C} estão definidas:

1. soma: $z + w = (a + c) + i(b + d)$;
2. produto: $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$;
3. elemento neutro da soma: $0 = 0 + i0$;
4. elemento neutro do produto: $1 = 1 + i0$,
5. elemento oposto: $-z = -a - ib$;
6. elemento inverso: $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Proposição 1.27. Para quaisquer z, w e t em \mathbb{C} as seguintes propriedades são válidas:

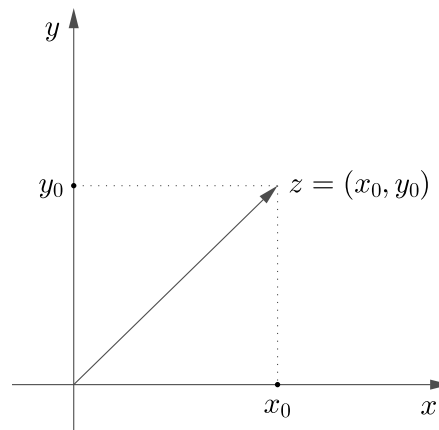
- a) $z + (w + t) = (z + w) + t$;
- b) $z + w = w + z$;
- c) $0 + z = z$;
- d) $z + (-z) = 0$;
- e) $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$;
- f) $z \cdot w = w \cdot z$;
- g) $1 \cdot z = z$;
- h) $z \cdot z^{-1} = 1$, se $z \neq 0$;
- i) $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$.

1.2.2 O plano complexo

Dado um número complexo $z = x + iy$, x é sua parte real denominada por $Re z$ e y sua parte imaginária denominada por $Im z$.

Definição 1.28. O plano complexo é o conjunto de todas as representações dos números complexos $z = x_0 + iy_0$ identificado com o ponto (x_0, y_0) do plano cartesiano.

Figura 19 – Plano complexo



Fonte: Material da autora

Neste contexto, o plano cartesiano é o plano complexo, o eixo das abscissas é o eixo real e o eixo das ordenadas é o eixo imaginário.

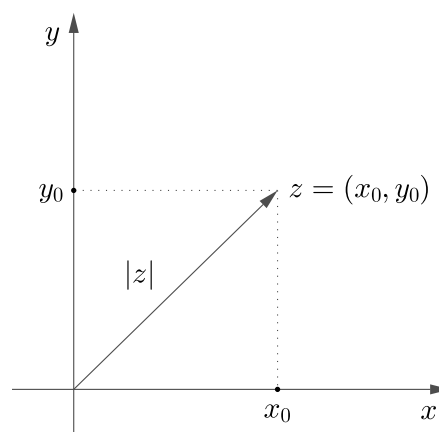
1.2.3 Módulo e conjugado

Definição 1.29. O módulo de um número complexo $z = x_0 + iy_0$ é definido como

$$|z| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Geometricamente, representa a distância do ponto (x_0, y_0) à origem.

Figura 20 – Módulo de um número complexo



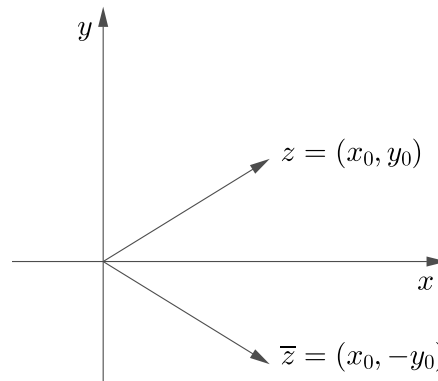
Fonte: Material da autora

Definição 1.30. O conjugado de $z = x_0 + iy_0$ é o número complexo

$$\bar{z} = x_0 - iy_0$$

Geometricamente, representa uma reflexão do ponto (x_0, y_0) em relação ao eixo real.

Figura 21 – Complexo conjugado



Fonte: Material da autora

Proposição 1.31. *Sejam z e w números complexos. As seguintes propriedades são válidas:*

- a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
- b) $|z| = |\bar{z}|$;
- c) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$;
- d) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- e) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- f) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- g) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, para $w \neq 0$.

1.2.4 Representação polar

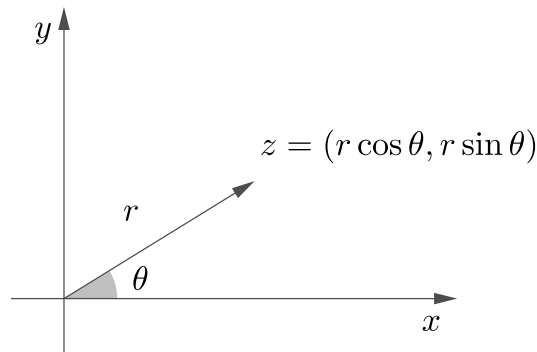
Considere um número complexo $z = x + iy \neq 0$. O argumento de z é o ângulo θ formado pelo eixo Ox e pelo vetor \vec{Oz} .

Definição 1.32. A representação polar de um número complexo z (ou representação trigonométrica) é

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

onde θ é o argumento de z e $r = |z|$.

Figura 22 – Representação polar



Fonte: Material da autora

Proposição 1.33. *Sejam $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ números complexos em sua forma polar. O produto e o quociente são dados por:*

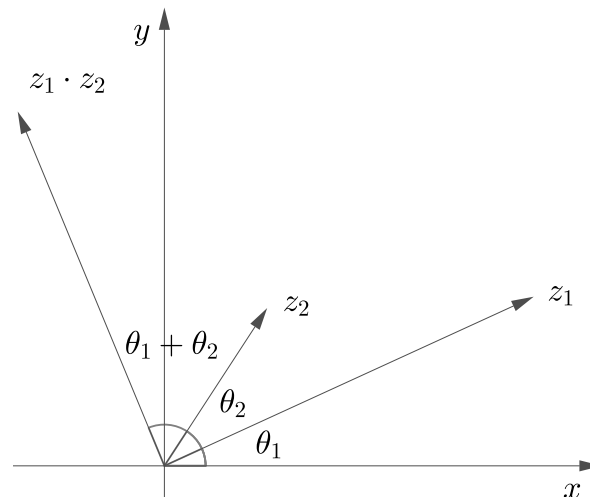
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2))$$

e

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} (\cos (\theta_2 - \theta_1) + i \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1)), \text{ se } z_1 \neq 0.$$

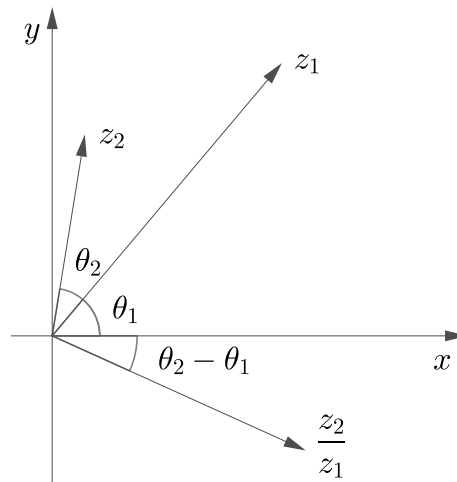
Graficamente,

Figura 23 – Produto de números complexos



Fonte: Material da autora

Figura 24 – Divisão de números complexos



Fonte: Material da autora

Observação 1.34. É comum utilizar $e^{i\theta}$ para representar $\cos \theta + i \sin \theta$, pois a igualdade é válida. Um estudo aprofundado desse fato pode ser encontrado em (1) e (7).

1.2.5 Equação do círculo

Proposição 1.35. *A equação*

$$a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

onde $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ e $|b|^2 - ac > 0$, determina um círculo em \mathbb{C} se $a \neq 0$ e uma reta em \mathbb{C} se $a = 0$.

Demonstração. Sejam $z = x + iy$ e $b = x_0 + iy_0$. Suponha $a \neq 0$, então

$$\begin{aligned} a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 &\implies a(x^2 + y^2) + (x_0 + iy_0)(x + iy) + (x_0 - iy_0)(x - iy) + c = 0 \\ &\implies a(x^2 + y^2) + 2x_0x - 2y_0y + c = 0 \\ &\implies (x^2 + y^2) + \frac{2x_0}{a}x - \frac{2y_0}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies \left(x + \frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{a}\right)^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - ac}{a^2} \end{aligned}$$

que representa a equação de um círculo, pois $x_0^2 + y_0^2 - ac = |b|^2 - ac > 0$.

Se $a = 0$, a equação $a(x^2 + y^2) + 2x_0x - 2y_0y + c = 0$ se reduz a $2x_0x - 2y_0y + c = 0$ que representa uma reta. \square

1.2.6 Transformações no plano complexo

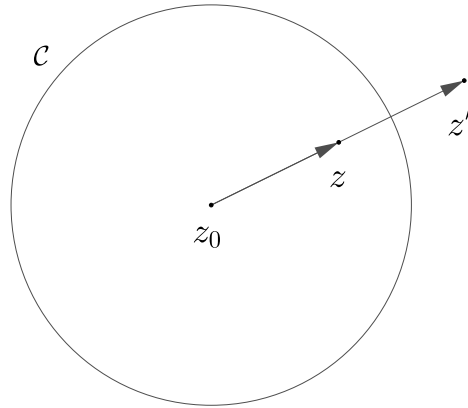
Também podemos definir, a partir das operações entre números complexos, as transformações no plano euclidiano vistas anteriormente. Existe uma expressão para a inversão geométrica em termos de números complexos, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.36. *Seja z um ponto sob inversão em relação a um círculo \mathcal{C} de raio R e centrado em z_0 no plano complexo. Então,*

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \frac{z_0\bar{z} + (R^2 - |z_0|^2)}{\bar{z} - \bar{z}_0}.$$

Demonstração. Considere um círculo \mathcal{C} de raio R centrado em z_0 .

Figura 25 – Fórmula complexa da inversão



Fonte: Material da autora

Como na figura (25), considerando um ponto z interior ao círculo e sua imagem z' em relação a \mathcal{C} , teremos por definição

$$|z - z_0| \cdot |z' - z_0| = R^2.$$

Os vetores representados pelos números complexos $z - z_0$ e $z' - z_0$ estão na mesma direção. Então existe $\lambda > 0$ tal que $(z' - z_0) = \lambda \cdot (z - z_0)$. Dessa forma,

$$\lambda|z - z_0| = |z' - z_0| = \frac{R^2}{|z - z_0|} \implies \lambda = \frac{R^2}{|z - z_0|^2}.$$

Logo

$$\begin{aligned} (z' - z_0) = \lambda \cdot (z - z_0) &\implies z' = \frac{R^2}{|z - z_0|^2} \cdot (z - z_0) + z_0 \\ &\implies z' = \frac{R^2(z - z_0) + z_0|z - z_0|^2}{|z - z_0|^2} \\ &\implies z' = \frac{R^2(z - z_0) + z_0(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)} \\ &\implies z' = \frac{R^2 + z_0(\bar{z} - \bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} \\ &\implies z' = \frac{R^2 + z_0\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} \\ &\implies z' = \frac{z_0\bar{z} + R^2 - |z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \end{aligned}$$

□

Definição 1.37. Seja $w = a + ib$ um número complexo fixado.

1. Uma translação por w é a transformação que leva $z = x + iy$ em $z + w = (x + a) + i(y + b)$.
2. A transformação que leva $z \in \mathbb{C}$ em $w \cdot z$ é a composição de uma homotetia de centro na origem com uma rotação pelo argumento de w .
3. A conjugação complexa é a transformação que leva $z = x + iy$ em seu conjugado $\bar{z} = x - iy$, representando então uma reflexão em torno do eixo real.
4. A inversão complexa é a transformação que leva z em $\frac{1}{z}$, onde $z \neq 0$.

Proposição 1.38. A inversão complexa é a composição de uma inversão em relação ao círculo unitário centrado na origem com uma reflexão em relação ao eixo real. Em outros termos,

$$\frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Demonstração. De fato, a transformação que leva z em $1/\bar{z}$ representa uma inversão em relação ao círculo unitário centrado na origem. De um primeiro modo, poderíamos utilizar a fórmula complexa para a inversão geométrica, proposição (1.36), fazendo $z_0 = 0$ e $R = 1$ chegamos diretamente no resultado. De outro modo, se z' é o inverso de z em relação ao círculo unitário centrado na origem, então

$$|z| \cdot |z'| = 1 \implies |z'| = \frac{1}{|z|}.$$

Como os vetores \vec{Oz} e $\vec{Oz'}$ estão na mesma direção, teremos

$$z' = \lambda z \implies |z'| = \lambda |z|,$$

com $\lambda > 0$. Das expressões anteriores,

$$\lambda |z| = \frac{1}{|z|} \implies \lambda = \frac{1}{|z|^2} \implies \lambda z = \frac{z}{|z|^2} \implies z' = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}}.$$

Portanto $1/\bar{z}$ representa o inverso de z em relação ao círculo unitário. Aplicando a conjugação complexa (reflexão em torno do eixo real), temos a transformação $1/z$ como queríamos provar.

□

Proposição 1.39. A inversão complexa preserva retas, círculos e ângulos.

Demonstração. Pela proposição anterior, a inversão é a composição da inversão em relação ao círculo unitário centrado na origem com uma conjugação complexa. Ambas transformações preservam retas, círculos e ângulos e a composição delas ainda preserva. Logo a inversão complexa preserva retas, círculos e ângulos.

□

Proposição 1.40. *A inversão complexa é conforme.*

Demonstração. A inversão em relação ao círculo unitário é anticonforme, assim como a conjugação complexa. Quando compomos as duas transformações o sentido do ângulo é preservado, pois é trocado pela inversão e em seguida trocado pela conjugação voltando ao inicial. Logo inversão complexa é anticonforme. \square

De maneira geral, a composição de um número par de transformações anticonformes é conforme, enquanto que a composição de um número ímpar de transformações anticonformes é anticonforme.

2 Esfera de Riemann e projeção estereográfica

A esfera de Riemann, nomeada devido ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866) no século XIX, é uma maneira de ampliar o plano complexo, adicionando um ponto chamado de ponto do infinito. Dessa forma, expressões como $1/0$ ficam bem definidas, sendo úteis em análise complexa. Ainda nesta área, ela está presente na teoria das funções meromorfas, sendo pensadas como funções holomorfas cujo contradomínio é a esfera de Riemann. Na geometria é um exemplo de superfície de Riemann. Nas geometrias projetiva e algébrica, é um exemplo fundamental de uma variedade complexa, espaço projetivo e variedade algébrica. Em outras áreas que dependem de análise e geometria, a esfera de Riemann encontra utilidade na mecânica quântica e outros ramos da física.

O tratamento rigoroso desse tema torna-se difícil, desde que precisamos de uma abordagem de tópicos mais avançados. A abordagem que adotamos é mais simples em virtude dos objetivos do trabalho, que incluem ampliar e visualizar geometricamente as transformações de Möbius na esfera de Riemann.

Neste capítulo definiremos o plano complexo estendido e a função que associa a esfera de Riemann com esse plano, dita projeção estereográfica. Estudaremos algumas propriedades da projeção, como a preservação de círculos e ângulos. Por último, veremos o efeito que algumas funções complexas causam na esfera de Riemann. Os fundamentos desenvolvidos neste capítulo seguem as referências (6), (7), (13) e (14).

Definição 2.1. O plano complexo estendido, denotado por \mathbb{C}_∞ , é a união do plano complexo \mathbb{C} com um ponto que não pertence a \mathbb{C} , denotado por ∞ .

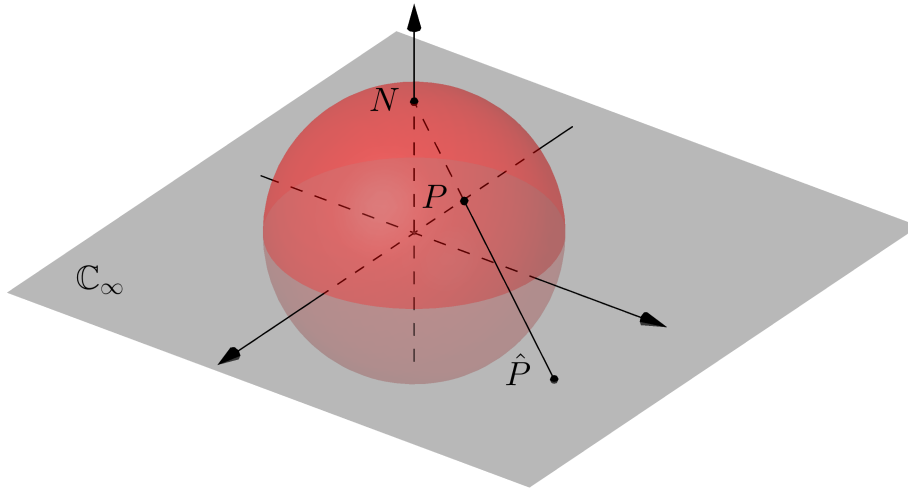
2.1 Projeção estereográfica

Existe uma maneira geométrica de visualizar o plano complexo estendido. Considere a esfera unitária centrada na origem $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, seu pólo norte $N = (0, 0, 1)$ e o plano complexo estendido.

Definição 2.2. Projeção estereográfica é a função T que associa cada ponto $P \in S^2$ um ponto $T(P) = \hat{P} \in \mathbb{C}_\infty$ de maneira que:

- a) se $P = N$, então $\hat{P} = \infty$;
- b) se $P \neq N$, então \hat{P} é o ponto de interseção do plano \mathbb{C} com a reta que passa por N e P .

Figura 26 – Projeção estereográfica



Fonte: Material da autora

Assim, observando a figura (26), cada ponto da esfera corresponde a um ponto do plano complexo estendido de modo que:

- i) pontos do hemisfério sul da esfera são levados em pontos interiores ao círculo unitário no plano, em particular, o polo sul $S = (0, 0, -1)$ é levado em $\hat{P} = 0$;
- ii) pontos da fronteira do círculo unitário no plano \mathbb{C}_∞ são levados neles mesmos;
- iii) pontos do hemisfério norte são levados em pontos exteriores ao círculo unitário no plano, onde N é levado no ponto do infinito.

Definição 2.3. A esfera identificada com o plano complexo estendido é chamada *esfera de Riemann*.

Proposição 2.4. Um ponto $P = (X, Y, Z) \in S^2$ sob projeção estereográfica é levado em

$$T(P) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right).$$

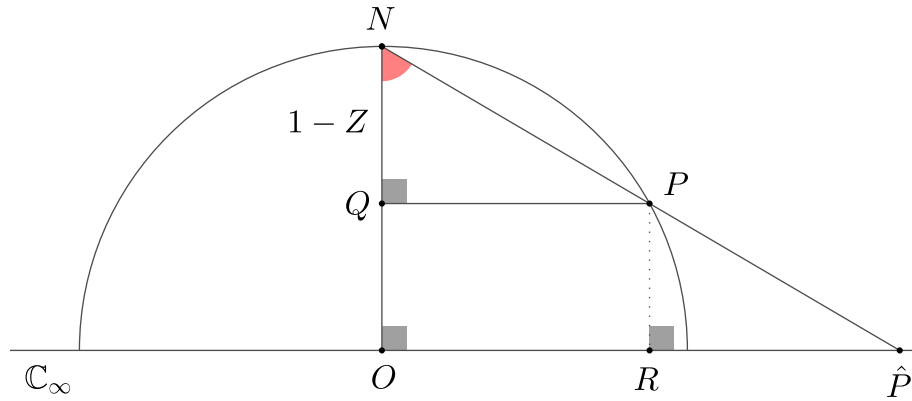
Reciprocamente, um ponto $\hat{P} = (x, y) \in \mathbb{C}$ é levado em

$$T^{-1}(\hat{P}) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Demonstração. Considere o plano passando por N , P e R , onde R é a projeção ortogonal de P sob o plano complexo. Seja Q o ponto de interseção da reta ON com a reta perpendicular ao segmento ON passando por P . A figura (27) mostra a situação descrita. Sabemos que $\overline{ON} = 1$ e

que $\overline{PR} = \overline{OQ} = Z$, implicando que $\overline{NQ} = 1 - Z$. Além disso, $\overline{PQ} = \overline{OR}$. Os triângulos $ON\hat{P}$ e QNP são semelhantes pelo caso AA , pois $\angle ON\hat{P} = \angle QNP$ e $\angle NO\hat{P} = \angle NQP = 90^\circ$.

Figura 27 – Fórmula para projeção estereográfica



Fonte: Material da autora

Assim,

$$\frac{\overline{O\hat{P}}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{QN}} = \frac{1}{1-Z}.$$

Como $\overrightarrow{O\hat{P}}$ e \overrightarrow{OR} estão na mesma direção, teremos

$$\frac{\overrightarrow{O\hat{P}}}{\|\overrightarrow{O\hat{P}}\|} = \frac{\overrightarrow{OR}}{\|\overrightarrow{OR}\|} \implies \overrightarrow{O\hat{P}} = \frac{\|\overrightarrow{O\hat{P}}\|}{\|\overrightarrow{OR}\|} \cdot \overrightarrow{OR}.$$

Sendo $\hat{P} = (x, y)$ e $R = (X, Y)$, temos

$$(x, y) = \frac{\|\overrightarrow{O\hat{P}}\|}{\|\overrightarrow{OR}\|} (X, Y).$$

Ainda temos $\overline{O\hat{P}} = \|\overrightarrow{O\hat{P}}\|$ e $\overline{OR} = \|\overrightarrow{OR}\|$, então

$$(x, y) = \frac{\|\overrightarrow{O\hat{P}}\|}{\|\overrightarrow{OR}\|} (X, Y) = \frac{\overline{O\hat{P}}}{\overline{OR}} \cdot (X, Y) = \frac{1}{1-Z} (X, Y).$$

Então,

$$T(X, Y, Z) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right)$$

que é a fórmula para a projeção estereográfica que leva $P \in S^2$ em $\hat{P} \in \mathbb{C}$.

Se quisermos a inversa, basta notar que para P temos

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \implies X^2 + Y^2 = 1 - Z^2 \implies \|\overrightarrow{OR}\|^2 = \overline{OR}^2 = 1 - Z^2 = (1-Z)(1+Z).$$

Então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{O\hat{P}}}{\overline{OR}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{(1-Z)}\right)^2 \implies \overline{O\hat{P}}^2 = \frac{\overline{OR}^2}{(1-Z)^2} = \frac{(1-Z)(1+Z)}{(1-Z)^2} = \frac{1+Z}{1-Z} \\ \implies \overline{O\hat{P}}^2(1-Z) &= (1+Z) \implies \overline{O\hat{P}}^2 - \overline{O\hat{P}}^2 Z = (1+Z) \implies Z = \frac{\overline{O\hat{P}}^2 - 1}{\overline{O\hat{P}}^2 + 1}. \end{aligned}$$

Sabendo que $\overline{O\hat{P}}^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$ teremos

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{X}{1-Z} \implies X = x(1-Z) = x \left(1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \implies X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Analogamente,

$$Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Portanto, a transformação inversa é

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

□

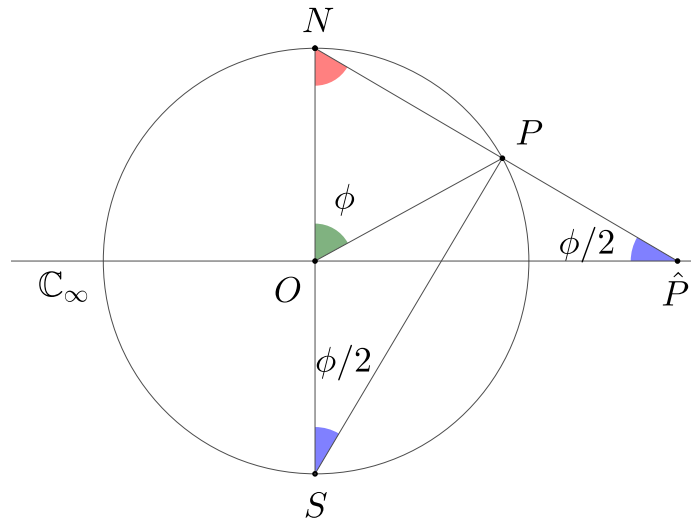
Existe uma maneira de caracterizar P em função do ângulo ϕ que forma com o eixo Oz .

Proposição 2.5. *Sejam P um ponto de S^2 e $\hat{P} \in \mathbb{C}$ sua imagem sob projeção estereográfica. Se $\phi = \angle NOP$ e θ é o ângulo que \hat{P} forma com eixo real no plano complexo, então*

$$\hat{P} = \cotg\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\theta}$$

Demonstração. Considere a seção da esfera determinada pelo plano passando por N, O e P , como mostra a figura (28). O ponto \hat{P} pode ser escrito em função de θ no plano \mathbb{C}_∞ da seguinte maneira: $\hat{P} = \overline{O\hat{P}} \cdot e^{i\theta}$. O ângulo ϕ é o ângulo central em relação ao arco NP . Enquanto que $\angle NSP$ é o ângulo inscrito relativo ao mesmo arco. Então, $\angle NSP = \frac{\phi}{2}$. Os triângulos NSP e $N\hat{P}O$ são semelhantes pelo caso AA , pois $\angle PNS = \angle \hat{P}NO$ e $\angle NPS = \angle NO\hat{P} = 90^\circ$. Então, $\angle NSP = \frac{\phi}{2} = \angle N\hat{P}O$.

Figura 28 – Fórmula estereográfica pelo ângulo



Fonte: Material da autora

Em relação ao triângulo $NO\hat{P}$,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\overline{NO}}{\overline{N\hat{P}}} \implies \overline{N\hat{P}} = \frac{\overline{NO}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

e

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\overline{O\hat{P}}}{\overline{N\hat{P}}} \implies \overline{N\hat{P}} = \frac{\overline{O\hat{P}}}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\overline{O\hat{P}}}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)} \implies \overline{O\hat{P}} = \frac{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Portanto,

$$\hat{P} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\theta}.$$

□

A seguir serão apresentados dois resultados que utilizaremos para provar que a projeção estereográfica preserva retas, círculos e ângulos.

Lema 2.6. *Seja Γ um círculo de diâmetro AB e $D \in AB$. Então $C \in \Gamma$ se, e somente se, CD é perpendicular a AB e $\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{CD}^2$.*

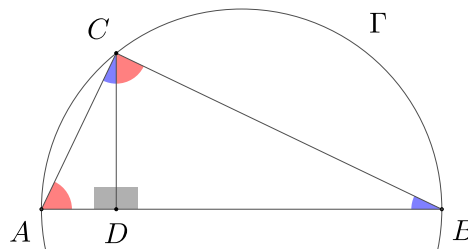
Demonstração. Considere o círculo Γ de diâmetro AB (figura (29)) e seja $C \in \Gamma$. Sendo CD perpendicular a AB , com $D \in AB$, então os triângulos ACD e BCD são retos em D . Por

$\angle ACB = 90^\circ$, segue que $\angle DBC = \angle ACD$ e $\angle BCD = \angle CAD$. Logo os triângulos ACD e CBD são semelhantes pelo caso AA. Dessa forma,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \implies \overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{CD}^2.$$

Reciprocamente, suponha que CD é perpendicular a AB em D e que $\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{CD}^2$. Os triângulos ACD e BDC são semelhantes pelo caso LAL, pois $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ e $\frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$. Logo $\angle ACD + \angle DCB = 90^\circ$ e $C \in \Gamma$.

Figura 29 – Relação métrica no triângulo retângulo

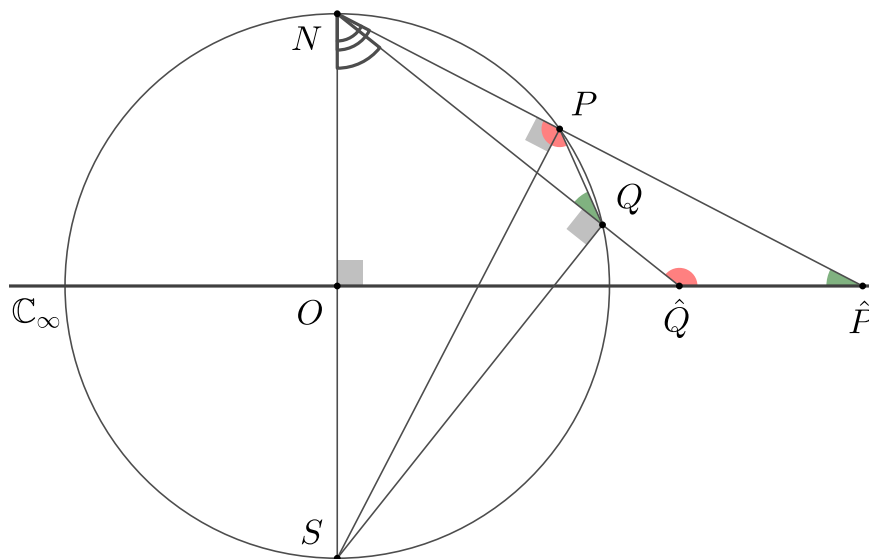


Fonte: Material da autora

□

Lema 2.7. Sejam $P, Q \in S^2$ pontos sob projeção estereográfica coplanares com N e O , cujas imagens são \hat{P} e \hat{Q} , respectivamente. Então os triângulos NPQ e $N\hat{Q}\hat{P}$ são semelhantes.

Figura 30 – Semelhança estereográfica



Fonte: Material da autora

Demonstração. Considere o plano determinado pelos segmentos ON e PQ , formando a seção representada na figura (30). Os triângulos NSP e $N\hat{P}O$ são semelhantes pelo caso AA, pois

$\angle SNP = \angle ON\hat{P}$ e $\angle NOP = \angle NPS$. Assim,

$$\frac{\overline{N\hat{P}}}{\overline{NS}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{NP}} \implies \overline{NP} \cdot \overline{N\hat{P}} = 2.$$

De maneira análoga os triângulos NSQ e $N\hat{Q}O$ são semelhantes. Então

$$\frac{\overline{N\hat{Q}}}{\overline{NS}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{NQ}} \implies \overline{NQ} \cdot \overline{N\hat{Q}} = 2.$$

Logo,

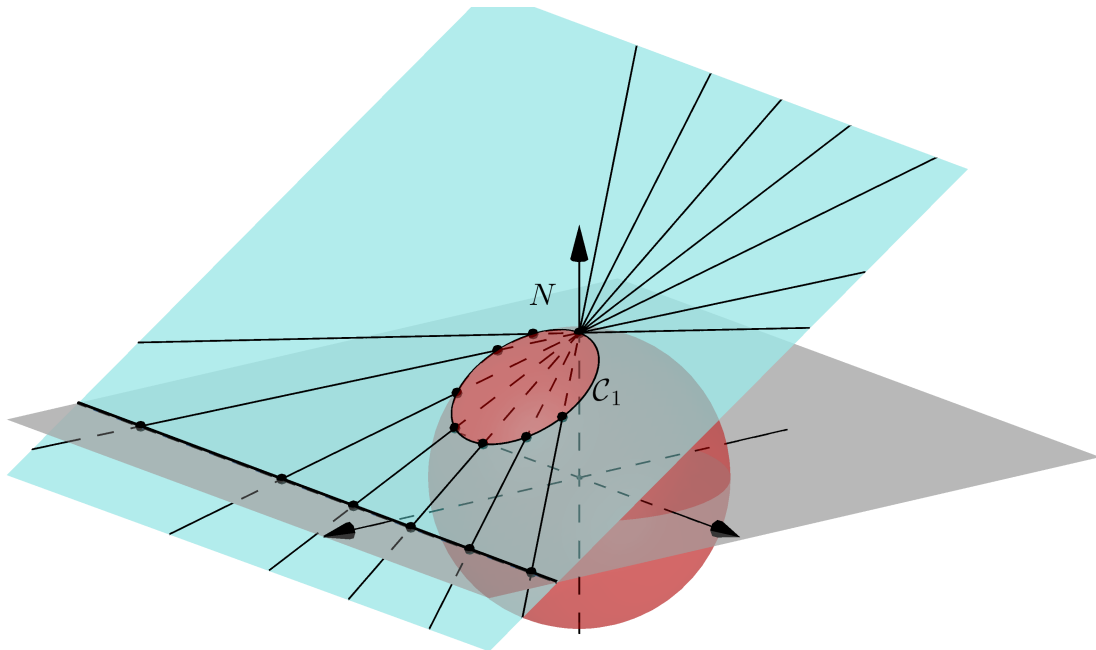
$$\overline{NP} \cdot \overline{N\hat{P}} = \overline{NQ} \cdot \overline{N\hat{Q}}.$$

Da equação anterior e do fato de $\angle PNQ = \angle \hat{Q}N\hat{P}$, pelo caso LAL, os triângulos NPQ e $N\hat{Q}\hat{P}$ são semelhantes. \square

Proposição 2.8. *A projeção estereográfica transforma círculos na esfera que não passam por N em círculos em \mathbb{C}_∞ e leva círculos passando por N em retas em \mathbb{C}_∞ .*

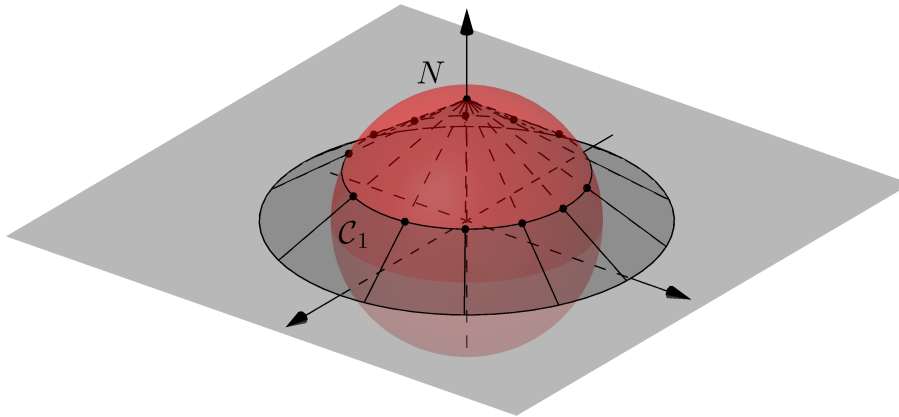
Demonstração. Suponha que o círculo \mathcal{C}_1 passa por N , como mostra a figura (31). Podemos enxergá-lo como a interseção de um plano com a esfera. Sabemos que este plano contém o círculo e a imagem estereográfica de cada ponto de \mathcal{C}_1 , pois contém as retas que passam por N e por P , para cada $P \in \mathcal{C}_1$. Como a interseção desse plano com \mathbb{C}_∞ é uma reta, temos que \mathcal{C}_1 é levado em uma reta.

Figura 31 – Projeção de um círculo passando por N



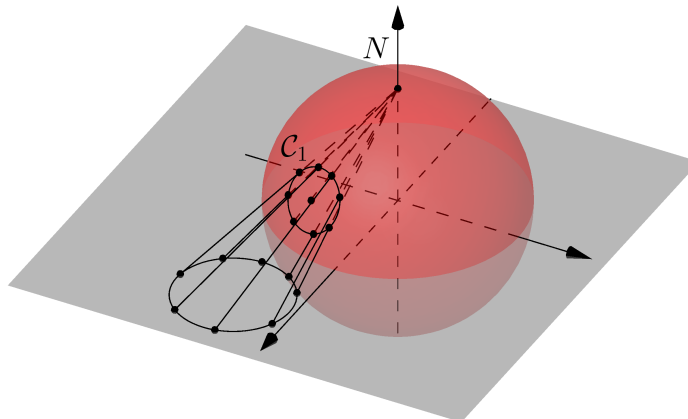
Se o círculo é paralelo ao plano \mathbb{C}_∞ , como mostra a figura (32), todas as retas que passam por cada ponto $P \in \mathcal{C}_1$ formam um cone circular reto. A interseção desse cone com \mathbb{C}_∞ é um círculo. Logo o círculo \mathcal{C}_1 é levado em um círculo.

Figura 32 – Projeção de um círculo paralelo ao equador



Fonte: Material da autora

Figura 33 – Projeção de um círculo não paralelo ao equador



Fonte: Material da autora

Se o círculo \mathcal{C}_1 não é paralelo ao plano \mathbb{C}_∞ , ilustrado na figura (33), então todas as retas que passam por cada $P \in \mathcal{C}_1$ formam um cone oblíquo.

Vamos considerar que o círculo \mathcal{C}_1 que queremos projetar tem diâmetro PQ de maneira que as retas PQ e NO são coplanares, como nas hipóteses do lema (2.7). Tomemos um cone oblíquo circular de diâmetro da base \hat{P} e \hat{Q} (imagens de P e Q) em \mathbb{C}_∞ e vértice N , como mostra a figura (34). Diferente dos casos anteriores, vamos mostrar que esse círculo em \mathbb{C}_∞ de diâmetro $\hat{P}\hat{Q}$ tem como imagem estereográfica inversa o círculo de diâmetro PQ . Considere o plano $N\hat{P}\hat{Q}$ e o ponto Q . Traçemos por Q o plano normal Π ao plano $N\hat{P}\hat{Q}$, de maneira que a reta QP' , da interseção de Π com o plano $N\hat{P}\hat{Q}$ (com $P' \in N\hat{P}$), seja tal que $\angle NQP' = \angle N\hat{P}\hat{Q}$. Pelo lema (2.7), podemos concluir que $P' = P$.

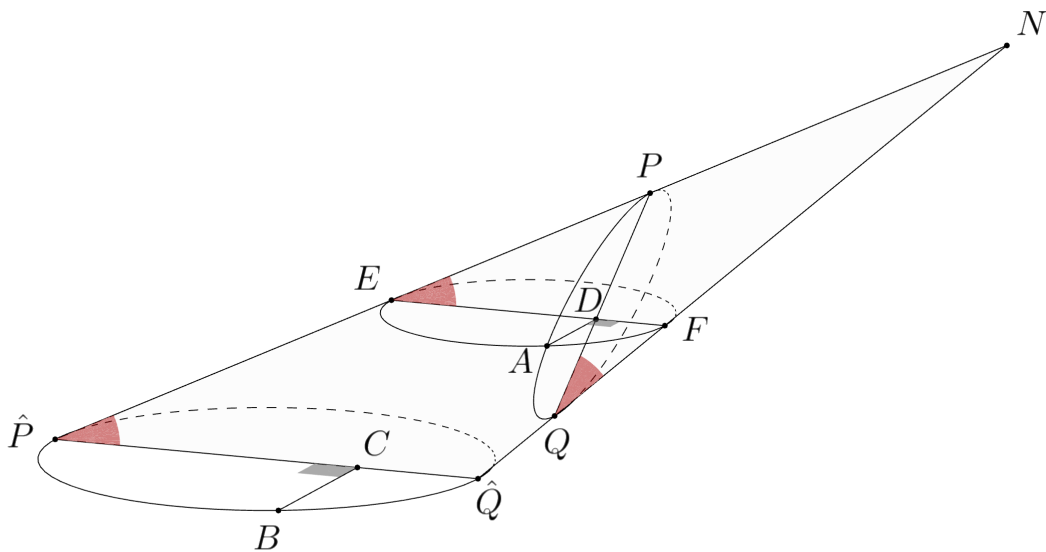
O plano Π determina uma curva γ no cone, passando pelos pontos P e Q . Vamos mostrar que γ é um círculo. Sejam A um ponto arbitrário de γ e B um ponto qualquer do círculo da base. Considere as retas AD e BC perpendiculares ao plano $N\hat{P}\hat{Q}$ nos pontos D e C , respectivamente. Estas retas são paralelas entre si, pois são perpendiculares ao mesmo plano. Considere o plano paralelo ao plano da base do cone passando pela reta AD . A seção que esse plano determina no cone é um círculo passando pelos pontos E e F no plano $N\hat{P}\hat{Q}$. De acordo com o lema (2.6),

$$\overline{ED} \cdot \overline{DF} = \overline{AD}^2.$$

No plano $N\hat{P}\hat{Q}$ temos $\angle NQP = \angle N\hat{P}\hat{Q} = \angle NEF$. Assim, em relação aos triângulos PDE e FDQ , $\angle PED = \angle FQD$ e $\angle PDE = \angle FDQ$. Logo os triângulos PDE e FDQ são semelhantes pelo caso AA . Portanto,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DF}} \implies \overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{DP} \cdot \overline{DQ} = \overline{AD}^2.$$

Figura 34 – Cone oblíquo



Fonte: Material da autora

Concluimos, de acordo com o lema (2.6), que a curva γ é um círculo de diâmetro PQ , ou seja, o círculo C é projetado estereograficamente no círculo de diâmetro $\hat{P}\hat{Q}$.

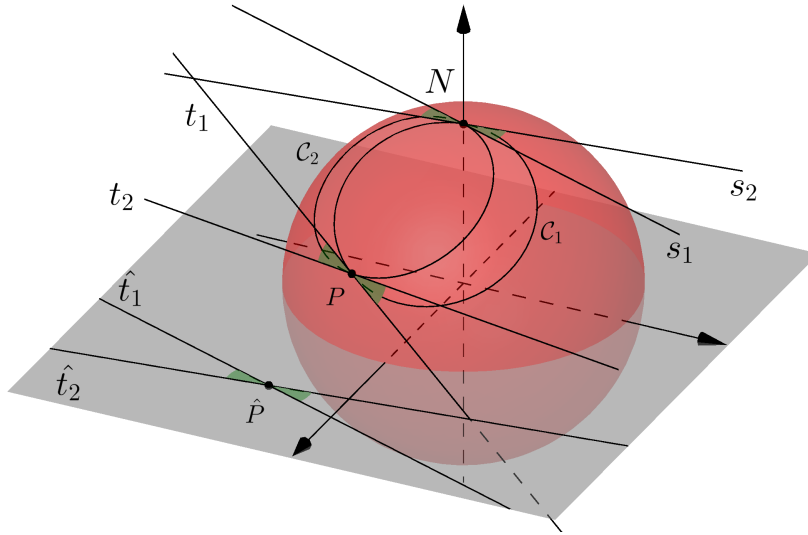
□

Proposição 2.9. *A projeção estereográfica preserva ângulos.*

Demonstração. Como o ângulo entre duas curvas na superfície esférica é o ângulo entre suas tangentes, basta mostrar que o ângulo entre retas é preservado. Sejam t_1 e t_2 duas retas tangentes à superfície esférica em P . O plano passando por N e t_1 intersecta a esfera em um círculo C_1 e o

plano \mathbb{C}_∞ em uma reta \hat{t}_1 . O plano passando por N e t_2 intersecta a esfera em um círculo \mathcal{C}_2 e o plano \mathbb{C}_∞ em uma reta \hat{t}_2 , como ilustra a figura a seguir.

Figura 35 – Preservação de ângulo pela projeção estereográfica



Fonte: Material da autora

Os círculos passam por N são levados estereograficamente em retas no plano que são exatamente \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Sejam s_1 e s_2 retas tangentes a \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em N , respectivamente. Temos s_1 paralela a \hat{t}_1 , pois s_1 é paralela ao plano \mathbb{C}_∞ e \hat{t}_1 é a interseção de \mathbb{C}_∞ com um plano contendo s_1 . Analogamente, s_2 é paralela a \hat{t}_2 . Então o ângulo entre as retas s_1 e s_2 é igual ao ângulo entre as retas \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Como o ângulo entre s_1 e s_2 é igual ao ângulo entre t_1 e t_2 em P , concluímos então que o ângulo entre as retas t_1 e t_2 é o mesmo que entre as retas \hat{t}_1 e \hat{t}_2 , mostrando assim a preservação de ângulo.

□

Proposição 2.10. *A projeção estereográfica pode ser vista, em cada plano, como uma inversão em relação a um círculo centrado em N com raio $\sqrt{2}$.*

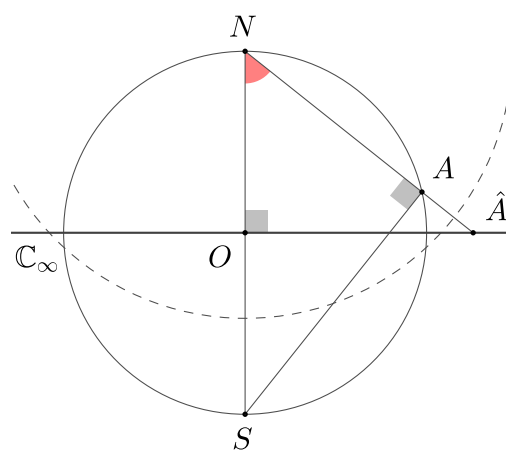
Demonstração. Considere a esfera de Riemann Σ e um ponto $A \in \Sigma$. Traçemos o plano que passa por N , A e S . Note que esse plano também passa por \hat{A} formando a seção representada na figura (36).

Os triângulos NSA e $N\hat{A}O$ são semelhantes por possuírem ângulo reto e ângulo em N em comum. Então,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{N\hat{A}}} \implies \overline{NA} \cdot \overline{N\hat{A}} = \overline{NO} \cdot \overline{NS} \implies \overline{NA} \cdot \overline{N\hat{A}} = 1 \cdot 2 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

Isso caracteriza \hat{A} como sendo o inverso de A em relação a um círculo de raio $\sqrt{2}$ e centrado em N , como queríamos provar.

Figura 36 – Inversão geométrica em projeção estereográfica



Fonte: Material da autora

□

Vamos observar os efeitos causados na esfera de Riemann quando aplicamos as transformações de conjugação complexa e inversão complexa.

Proposição 2.11. *A conjugação complexa em \mathbb{C}_∞ induz uma reflexão na esfera de Riemann em relação ao plano xz .*

Demonstração. A conjugação é dada pela transformação $S(x, y) = (x, -y)$. Seja $A = (X, Y, Z)$ um ponto na esfera, sua imagem estereográfica será

$$T(A) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right) = B.$$

Aplicando a conjugação complexa em B obtém-se

$$S(B) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{-Y}{1-Z} \right) = C.$$

Pela proposição (2.4), a imagem estereográfica inversa de C na esfera é

$$T^{-1}(C) = \left(\frac{2 \cdot \frac{X}{1-Z}}{\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{-Y}{1-Z}\right)^2 + 1}, \frac{2 \cdot \frac{-Y}{1-Z}}{\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{-Y}{1-Z}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{-Y}{1-Z}\right)^2 - 1}{\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{-Y}{1-Z}\right)^2 + 1} \right).$$

Sabendo que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{X}{1-Z} \right)^2 + \left(\frac{-Y}{1-Z} \right)^2 + 1 &= \frac{X^2 + Y^2}{(1-Z)^2} + 1 = \frac{X^2 + Y^2 + (1-Z)^2}{(1-Z)^2} \\ &= \frac{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 - 2Z}{(1-Z)^2} = \frac{2 - 2Z}{(1-Z)^2} \\ &= \frac{2(1-Z)}{(1-Z)^2} = \frac{2}{1-Z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{-Y}{1-Z}\right)^2 - 1 &= \frac{X^2 + Y^2}{(1-Z)^2} - 1 = \frac{X^2 + Y^2 - (1-Z)^2}{(1-Z)^2} \\
&= \frac{X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 + 2Z}{(1-Z)^2} = \frac{1 - Z^2 - Z^2 - 1 + 2Z}{(1-Z)^2} \\
&= \frac{2Z - 2Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{2Z(1-Z)}{(1-Z)^2} \\
&= \frac{2Z}{1-Z}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(C) &= \left(\frac{\frac{2X}{1-Z}}{\frac{2}{1-Z}}, \frac{\frac{-2Y}{1-Z}}{\frac{2}{1-Z}}, \frac{\frac{2Z}{1-Z}}{\frac{2}{1-Z}} \right) \\
&= \left(\frac{2X}{(1-Z)} \cdot \frac{(1-Z)}{2}, \frac{-2Y}{(1-Z)} \cdot \frac{(1-Z)}{2}, \frac{2Z}{(1-Z)} \cdot \frac{(1-Z)}{2} \right) \\
&= (X, -Y, Z) = D.
\end{aligned}$$

O ponto D é uma reflexão de A em relação ao plano xz .

□

Proposição 2.12. *A inversão complexa induz na esfera de Riemann uma rotação de 180 graus em torno do eixo real.*

Demonstração. A inversão complexa é dada por

$$S(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Se $A = (X, Y, Z)$ um ponto da esfera, sua imagem estereográfica será

$$T(X, Y, Z) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right) = B.$$

A imagem de B sob inversão complexa é

$$\begin{aligned}
S(B) &= \left(\frac{\frac{X}{1-Z}}{\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2}}, \frac{\frac{-Y}{1-Z}}{\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2}} \right) \\
&= \left(\frac{X}{(1-Z)} \cdot \frac{(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)}, \frac{-Y}{(1-Z)} \cdot \frac{(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)} \right) \\
&= \left(\frac{X(1-Z)}{X^2+Y^2}, \frac{-Y(1-Z)}{X^2+Y^2} \right) = C.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{X(1-Z)}{X^2+Y^2}\right)^2 + \left(\frac{-Y(1-Z)}{X^2+Y^2}\right)^2 + 1 &= \frac{X^2(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)^2} + \frac{Y^2(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)^2} + 1 \\
 &= \frac{(X^2+Y^2)(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)^2} + 1 \\
 &= \frac{(1-Z)^2}{X^2+Y^2} + 1 \\
 &= \frac{1-2Z+Z^2+X^2+Y^2}{X^2+Y^2} \\
 &= \frac{2-2Z}{X^2+Y^2}.
 \end{aligned}$$

Ainda temos,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{X(1-Z)}{X^2+Y^2}\right)^2 + \left(\frac{-Y(1-Z)}{X^2+Y^2}\right)^2 - 1 &= \frac{X^2(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)^2} + \frac{Y^2(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)^2} - 1 \\
 &= \frac{(X^2+Y^2)(1-Z)^2}{(X^2+Y^2)^2} - 1 \\
 &= \frac{(1-Z)^2}{X^2+Y^2} - 1 \\
 &= \frac{1-2Z+Z^2-X^2-Y^2}{X^2+Y^2} \\
 &= \frac{Z^2-2Z+Z^2}{X^2+Y^2} \\
 &= \frac{(-2Z)(1-Z)}{X^2+Y^2}.
 \end{aligned}$$

A imagem estereográfica inversa de C na esfera será

$$\begin{aligned}
 T^{-1}(C) &= \left(\frac{2X(1-Z)}{X^2+Y^2}, \frac{(-2Y)(1-Z)}{X^2+Y^2}, \frac{(-2Z)(1-Z)}{X^2+Y^2} \right) \\
 &= \left(\frac{2X(1-Z)}{2(1-Z)}, \frac{(-2Y)(1-Z)}{2(1-Z)}, \frac{(-2Z)(1-Z)}{2(1-Z)} \right) \\
 &= (X, -Y, -Z).
 \end{aligned}$$

Chegamos a uma transformação W na esfera que leva um ponto (X, Y, Z) em $(X, -Y, -Z)$. De acordo com (2), considerando a base canônica do \mathbb{R}^3 , a transformação W é tal que $W(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $W(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ e $W(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$. A matriz da transformação é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz apresenta uma matriz de rotação em torno do eixo x em um ângulo de 180 graus.

Lembremos que uma matriz de rotação em θ graus é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Para $\theta = 180^\circ$ obtemos exatamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que é a matriz que representa a transformação W .

□

3 Transformações de Möbius

3.1 Um pouco de história

Figura 37 – August Ferdinand Möbius



Fonte: Internet

August Ferdinand Möbius conduziu o observatório de Pleissenburg em Leipzig de 1816 até sua morte em 1868. Tornou-se professor universitário simultaneamente enquanto conduzia o observatório. Em seus dias de estudante, assistiu a alguma das palestras de Gauss sobre astronomia. Möbius desenvolveu a teoria de suas transformações em um artigo intitulado "Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung" publicado em 1855. Neste trabalho, ele enfatizou o que chamou de "relação" entre objetos. Estendeu a ideia euclidiana de congruência e semelhança entre figuras. Considerava que duas figuras estavam "relacionadas" se você pudesse passar de uma para a outra por uma transformação composta por sucessivas translações, ampliações e inversões, como as que estudamos neste trabalho. Möbius ficou mais famoso por seu trabalho em geometria projetiva. Suas ideias sobre "relações" estavam introduzidas mais tarde em seu livro "Der Barycentrische Calcul" publicado em Leipzig em 1827, em que ele usou coordenadas baricêntricas para representar não apenas pontos comuns do plano, mas também pontos à distância infinita. Ele estabeleceu a teoria básica da topologia, na qual o "relacionamento" é estendido para ter um significado ainda mais amplo de formas que são obtidas uma da outra por qualquer tipo de deformações contínuas, expansões ou contrações que não envolvem fazer e consertar "buracos". Como exemplo mais conhecido tem-se a chamada faixa de Möbius. Ele também trabalhou com teoria dos números, dando o seu nome à função de Möbius e à fórmula de inversão de Möbius.

Neste capítulo definiremos as transformação de Möbius e estudaremos alguns resultados, incluindo a preservação de retas, círculos e ângulos. A abordagem baseia-se no conhecimento de

números complexos, transformações no plano e esfera de Riemann. A história citada no primeiro parágrafo e o estudo a seguir segue as referências (1), (6), (7), (12) e (13).

3.2 Definição

Nesta seção iremos definir inicialmente o que é uma transformação de Möbius e estudá-la a partir das transformações de Möbius ditas elementares.

Definição 3.1. Uma transformação de Möbius é uma função racional a uma variável complexa da forma

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3.1)$$

onde a, b, c e d são constantes complexas tais que $ad - bc \neq 0$.

Observações 3.2.

1. Os coeficientes de uma transformação de Möbius não são únicos, pois para todo $k \in \mathbb{C}_\infty$ não nulo a expressão

$$\frac{kaz + kb}{kcz + kd}$$

define a mesma transformação que em (3.1). Se $ad - bc = 1$, dizemos que a transformação está normalizada.

2. Se $ad - bc = 0$, a transformação torna-se constante. De fato, sendo $c \neq 0$, da igualdade temos $bd = ad^2/c$. Logo,

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} \frac{(cz - d)}{cz - d} = \frac{acz^2 - adz + bcz - bd}{(cz)^2 - d^2} \\ &= \frac{acz^2 + (bc - ad)z - bd}{c^2d^2 - d^2} = \frac{acz^2 - \frac{ad^2}{c}}{c^2z^2 - d^2} \\ &= \frac{a(c^2z^2 - d^2)}{c(c^2z^2 - d^2)} = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Sendo $c = 0$, então $M(z) = (a/d)z + (b/d)$ e $ad - bc = ad = 0$ implicando que $a = 0$. Logo M se torna constante igual a b/d .

3. Se $c = 0$, então M é uma função polinomial de grau 1, ou seja, $M(z) = Az + B$, onde $A \neq 0$. No caso $c \neq 0$, o domínio de M é $\mathbb{C} - \{-d/c\}$. A equação

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

tem solução se, e somente se, $w \neq a/c$ e a solução única é dada por

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Portanto M é uma bijeção de $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ em $\mathbb{C} - \{a/c\}$ com inversa

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

que também é uma transformação de Möbius, pois $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$.

4. A composição de duas transformações de Möbius

$$M_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \text{ e } M_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

será

$$\begin{aligned} (M_1 \circ M_2)(z) &= \frac{a_1 \left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \right) + d_1} = \frac{\frac{a_1a_2z + a_1b_2 + b_1c_2z + b_1d_2}{c_2z + d_2}}{\frac{a_2c_1z + b_2c_1 + c_2d_1z + d_1d_2}{c_2z + d_2}} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(a_2c_1 + c_2d_1)z + (b_2c_1 + d_1d_2)} \end{aligned}$$

que é uma transformação de Möbius, pois

$$\begin{aligned} &(a_1a_2 + b_1c_2) \cdot (b_2c_1 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2) \cdot (a_2c_1 + c_2d_1) \\ &= a_1d_1a_2d_2 + b_1c_1b_2c_2 - a_1d_1b_2c_2 - b_1c_1a_2d_2 \\ &= (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

O estudo das transformações de Möbius se torna mais completo quando trabalhamos com o plano complexo estendido (definição (2.1)). Estendemos M da seguinte maneira:

- i) $M(\infty) = \infty$, se $c = 0$;
- ii) $M(-d/c) = \infty$ e $M(\infty) = a/c$, se $c \neq 0$.

Dessa maneira toda transformação de Möbius é uma bijeção de \mathbb{C}_∞ em \mathbb{C}_∞ cuja inversa também é uma transformação de Möbius.

Para estudar uma transformação de Möbius em geral, estudamos as transformações cuja composição nos leva até a forma geral.

Proposição 3.3. *A transformação de Möbius pode ser escrita como:*

$$M(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d},$$

ou seja, é a composição de translações, homotetias, rotações e inversão. Estas são ditas transformações de Möbius elementares.

Demonstração. Se $c = 0$, a transformação se reduz a

$$M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

que é a composição de uma homotetia de razão $|a/d|$, uma rotação pelo $\arg(a/d)$ e uma translação por b/d . Se $c \neq 0$, então

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{caz + cb}{c(cz + d)} \\ &= \frac{caz + bc + ad - ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a(cz + d)}{c(cz + d)} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}. \end{aligned}$$

□

A preservação de retas, círculos e ângulos se torna evidente, desde que olhemos uma transformação de Möbius como composição de transformações que preservam.

Proposição 3.4. *Toda transformação de Möbius transforma círculos em \mathbb{C}_∞ em círculos em \mathbb{C}_∞ .*

Demonstração. De um primeiro modo, podemos olhar a transformação de Möbius como a composição das transformações da proposição (3.3) que preservam retas e círculos, como provamos no capítulo preliminar. Portanto, toda transformação de Möbius preserva retas e círculos. Outra maneira de provar, seria aplicando a transformação na equação (1.35).

□

Proposição 3.5. *Toda transformação de Möbius preserva ângulos.*

Demonstração. Desde que as transformações da proposição (3.3) preservam a medida de um ângulo, segue que uma transformação de Möbius também preserva.

□

3.3 Propriedades

Na maioria das propriedades a seguir iremos supor que a transformação de Möbius estará normalizada.

3.3.1 Pontos fixos

O estudo dos pontos fixos de uma transformação de Möbius pode nos dizer o comportamento da transformação em uma vizinhança desse ponto.

Definição 3.6. Um ponto z é dito ponto fixo de uma transformação M se $M(z) = z$.

Proposição 3.7. Com exceção da identidade, uma transformação de Möbius tem no máximo dois pontos fixos. A saber, se $c = 0$ os pontos fixos são

$$\xi_+ = \infty \quad e \quad \xi_- = -\frac{b}{a-d},$$

e se $c \neq 0$ os pontos fixos são

$$\xi_+ = \frac{(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad e \quad \xi_- = \frac{(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

Demonstração. Se $c = 0$, a transformação se reduz a $M(z) = (a/d)z + b/d$ que possui ∞ como ponto fixo pela extensão à \mathbb{C}_∞ e $\xi = -b/(a-d)$ resolvendo a equação $M(z) = z$. Se $c \neq 0$, suponha M normalizada. Assim,

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \implies az + b = cz^2 + dz \implies cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Considerando z como a incógnita de uma equação do segundo grau. Então,

$$\Delta = (d-a)^2 - 4(-b)c = (d-a)^2 + 4bc$$

Sabendo que a transformação está normalizada, então $bc = ad - 1$. Logo,

$$\Delta = a^2 - 2ad + d^2 + 4(ad - 1) = a^2 - 2ad + d^2 + 4ad - 4 = a^2 + 2ad + d^2 - 4 = (a+d)^2 - 4.$$

Portanto,

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

Concluimos que existem no máximo dois pontos fixos:

$$\xi_+ = \frac{(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad e \quad \xi_- = \frac{(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}. \quad (3.2)$$

□

3.3.2 Pontos fixos no infinito

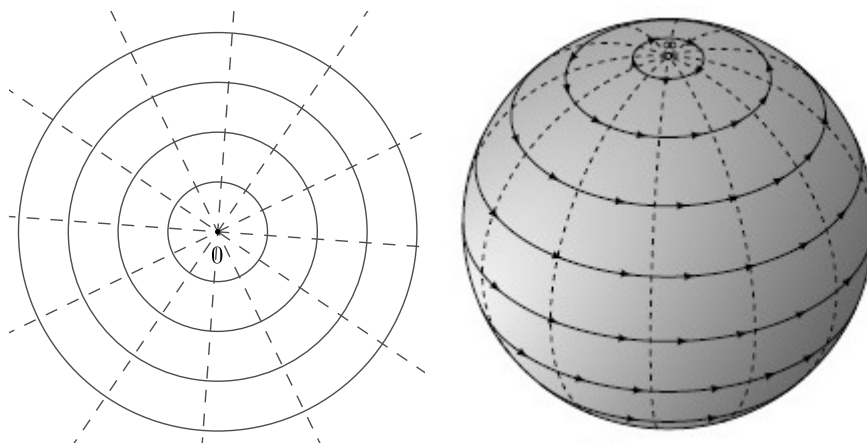
Ao estender a transformação de Möbius para \mathbb{C}_∞ , definimos ∞ como ponto fixo no caso $c = 0$. Sendo $c = 0$, a transformação de Möbius se reduz a

$$M(z) = Az + B,$$

onde $A = \rho e^{i\theta}$. Dessa forma, M representa a composição de uma rotação por θ em torno da origem, seguida de uma homotetia por ρ centrada na origem e uma translação por B . Vamos visualizar cada uma dessas três transformações na esfera de Riemann.

Se $\theta > 0$, a transformação $M(z) = e^{i\theta}z$ é uma rotação no plano por um ângulo θ que induz uma rotação na esfera pelo mesmo ângulo ao redor do eixo vertical que passa pelo centro da esfera. Na imagem esquerda da figura (38), as curvas invariantes no plano são os círculos centrados na origem, pois uma rotação leva pontos dessa circunferência nela mesma, e as curvas que são trocadas entre si são as retas passando pela origem. Na esfera (imagem direita da mesma figura) as curvas invariantes são circunferências horizontais e as que são trocadas entre si são circunferências passando por N e S . Assim não existem pontos fixos nas circunferências horizontais. Os únicos pontos fixos dessa transformação na esfera são 0 e ∞ . As circunferências passando por esses pontos fixos são trocadas entre si sob efeito da transformação. Se $\theta < 0$ os efeitos são os mesmos, apenas a rotação é no sentido contrário. Transformações assim são chamadas de transformações de Möbius *elíptica*.

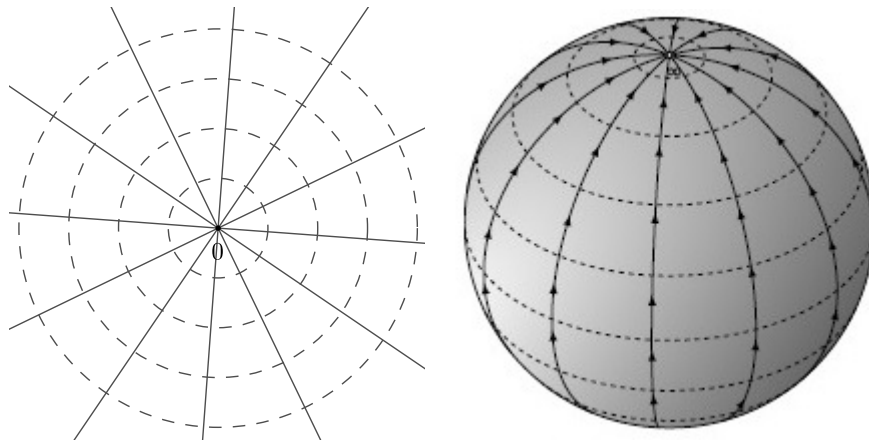
Figura 38 – Elíptica



Fonte: Duran (2013)

Se $\rho > 0$ a transformação $M(z) = \rho z$ induz uma homotetia por ρ na esfera (expansão) e se $\rho < 0$ induz uma contração. Os pontos fixos dessa transformação na esfera são 0 e ∞ . As curvas invariantes no plano são retas passando pela origem e na esfera são as circunferências que passam pelos pontos fixos, enquanto que as circunferências horizontais são trocadas entre si, como ilustra a figura (39). Transformações assim são chamadas de transformações de Möbius *hiperbólica*.

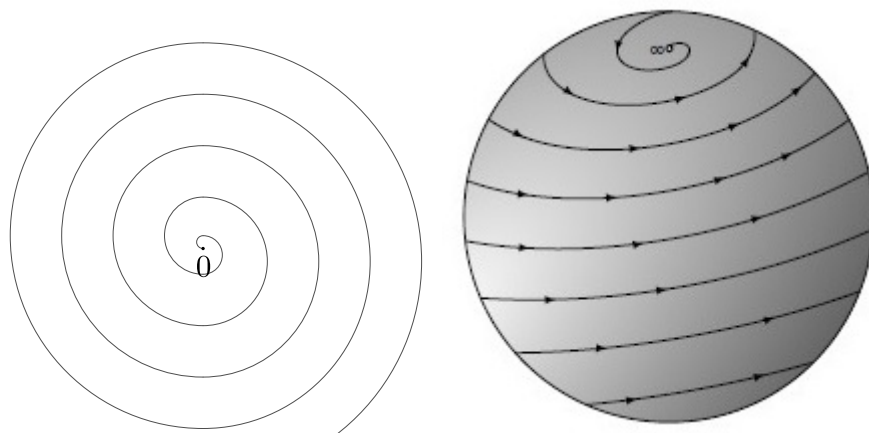
Figura 39 – Hiperbólica



Fonte: Duran (2013)

Se $\theta > 0$ e $\rho > 1$ a transformação $M(z) = \rho e^{i\theta} z$ (composição de uma rotação com expansão) induz na esfera uma transformação que tem como curvas invariantes no plano espirais divergindo de S e convergindo para N (figura (40)). Entretanto, as circunferências horizontais são trocadas entre si, assim como as que passam por 0 e ∞ , que continuam sendo os pontos fixos. Se $\theta < 0$ e $\rho > 1$, ainda temos a mesma transformação mudando apenas o sentido da transformação. Se $\rho < 1$ a única diferença seria que as espirais iriam divergir de N e convergir para S , enquanto que a rotação dependeria do sinal de θ . Transformações assim são chamadas de transformações de Möbius *loxodrômica*.

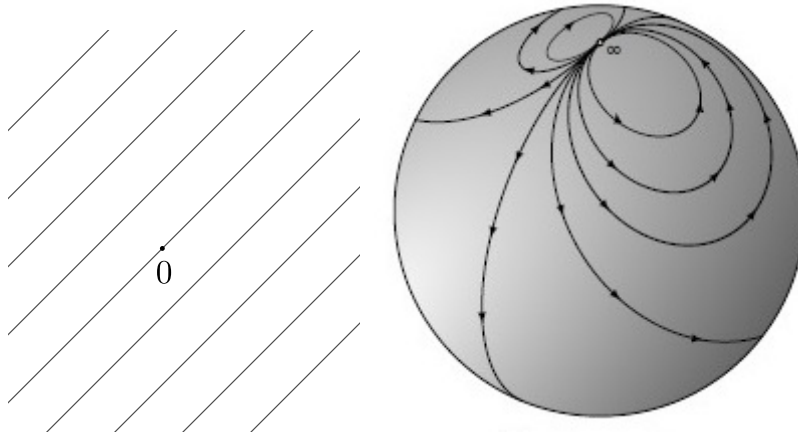
Figura 40 – Loxodrômica



Fonte: Duran (2013)

Para a translação $M(z) = z + B$, as curvas invariantes em \mathbb{C} são retas paralelas à translação, exemplificadas na figura (41). Assim, a translação tem como curvas invariantes na esfera as circunferências cuja reta tangente passando por ∞ é paralela às retas invariantes em \mathbb{C} . Transformações assim são chamadas de transformações de Möbius *parabólica*.

Figura 41 – Parabólica



Fonte: Duran (2013)

A partir do que foi visto, podemos dizer que toda transformação de Möbius do tipo $M(z) = Az + B$ possui o ∞ como ponto fixo.

3.3.3 Existência e unicidade

Proposição 3.8. *Uma transformação de Möbius fica completamente determinada pelo conhecimento das imagens de três pontos distintos.*

Demonstração. Seja M uma transformação de Möbius em que $M(z_1) = w_1$, $M(z_2) = w_2$ e $M(z_3) = w_3$. Mostraremos que M existe e é única. Considere a transformação

$$T(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}$$

tal que

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \text{ se } z_1 = \infty, \\ T(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_3}, \text{ se } z_2 = \infty, \\ T(z) &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ se } z_3 = \infty. \end{aligned}$$

Se $z_i \neq \infty$, para $i = 1, 2$ ou 3 temos

$$ad - bc = z_3(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) - z_1(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) \neq 0,$$

pois z_1, z_2 e z_3 são distintos entre si. Se $z_1 = \infty$, então $ad - bc = 0(-z_3) - (z_2 - z_3) = z_2 - z_3 \neq 0$. Os casos $z_2 = \infty$ e $z_3 = \infty$ são análogos. Assim, T é uma transformação de Möbius.

Observe que, $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ e $T(z_3) = \infty$. Da mesma maneira existe transformação de Möbius H de modo que $H(w_1) = 0$, $H(w_2) = 1$ e $H(w_3) = \infty$. Temos

$H^{-1}(0) = w_1, H^{-1}(1) = w_2$ e $H^{-1}(\infty) = w_3$. A transformação $M = H^{-1} \circ T$ é de Möbius e tem a propriedade desejada, pois

$$M(z_1)(H^{-1} \circ T)(z_1) = H^{-1}(T(z_1)) = H^{-1}(0) = w_1,$$

$$M(z_2) = (H^{-1} \circ T)(z_2) = H^{-1}(T(z_2)) = H^{-1}(1) = w_2,$$

$$M(z_3) = (H^{-1} \circ T)(z_3) = H^{-1}(T(z_3)) = H^{-1}(\infty) = w_3.$$

Esta transformação é única, pois supondo que existe M_1 com a mesma propriedade, ou seja, $M_1(z_1) = w_1, M_1(z_2) = w_2$ e $M_1(z_3) = w_3$, teríamos

$$(M_1^{-1} \circ M)(z_1) = M_1^{-1}(M(z_1)) = M^{-1}(w_1) = z_1,$$

$$(M_1^{-1} \circ M)(z_2) = M_1^{-1}(M(z_2)) = M^{-1}(w_2) = z_2,$$

$$(M_1^{-1} \circ M)(z_3) = M_1^{-1}(M(z_3)) = M^{-1}(w_3) = z_2,$$

Como uma transformação de Möbius tem no máximo dois pontos fixos pela proposição (3.7), a transformação $M^{-1} \circ M$ deve ser a identidade. Logo $M_1 = M$, e portanto a transformação com essa propriedade é única. □

3.3.4 Razão cruzada

Vimos na subseção anterior que o conhecimento da imagem de três pontos distintos determina completamente uma transformação de Möbius. Poderíamos ver isso de outra maneira. Utilizando a transformação em sua decomposição temos

$$w_i = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz_i + d}, \quad i = 1, 2, 3.$$

A diferença entre quaisquer imagens será:

$$\begin{aligned} w_i - w_j &= \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)}{c} \cdot \frac{1}{cz_i + d} - \frac{a}{c} - \frac{(bc - ad)}{c} \cdot \frac{1}{cz_j + d} \\ &= \frac{(bc - ad)}{c} \left(\frac{cz_j + d - cz_i - d}{(cz_i + d)(cz_j + d)} \right) \\ &= \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}. \end{aligned}$$

Sendo z um ponto qualquer com imagem w obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_2)(w_1 - w_3)} &= \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)} \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)} \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \\ &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)}. \end{aligned}$$

Esta expressão envolvendo z chama-se *razão cruzada* dos números z, z_1, z_2 e z_3 . Ela permanece a mesma quando trocamos os z pelos w , ou seja, a razão cruzada é invariante por uma transformação de Möbius. Esta invariância prova, de um modo geral, que ela fica determinada através do conhecimento da imagem de três pontos distintos.

3.3.5 Grupo

Proposição 3.9. *O conjunto das transformações de Möbius de \mathbb{C}_∞ em \mathbb{C}_∞ com a operação de composição é grupo.*

Demonstração. A transformação identidade $M(z) = z$ é o elemento neutro e pertence ao conjunto das transformações de Möbius, basta considerar $a = 1, b = 0, c = 0$ e $d = 1$, onde $ad - bc = 1 \neq 0$, na transformação da forma (3.1). A composição de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius. A transformação de Möbius possui uma inversa que também é uma transformação de Möbius.

Com estas três propriedades, fica provado que o conjunto das transformações de Möbius é um grupo. \square

3.3.6 Matriz associada à transformação

Outra maneira de enxergar uma transformação de Möbius e suas propriedades é através de uma representação matricial.

Definição 3.10. Seja

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

uma transformação de Möbius. Definimos a matriz associada a essa transformação como sendo a matriz 2×2 formada pelos coeficientes da transformação, ou seja, é a matriz $[M]$ dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Na definição anterior não existe apenas uma matriz associada à transformação M . Isso decorre da não unicidade dos coeficientes da transformação de Möbius, ou seja, da igualdade

$$\frac{kaz + kb}{kcz + kd} = \frac{az + b}{cz + d}$$

para todo $k \in \mathbb{C}$ não nulo. Assim, existem inúmeras matrizes associadas a uma mesma transformação, sendo dadas por

$$\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}.$$

Observações 3.11.

1. M possui inversa se, e somente se, sua matriz associada $[M]$ possui inversa, ou seja, tenha determinante $ad - bc \neq 0$.
2. A inversa da transformação de Möbius é

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

que tem como matriz associada

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Entretanto esta matriz não é $[M]^{-1}$, pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se a transformação estiver normalizada, ou seja, se $ad - bc = 1$, a igualdade ocorre. Utilizando a não unicidade dos coeficientes, temos que para uma transformação qualquer que $[M]^{-1}$ é

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

que representa a transformação inversa de Möbius.

3. Para os coeficientes $a = d = 1$ e $b = c = 0$ temos a transformação de Möbius identidade $M(z) = z$ que na representação matricial coincide com a matriz identidade

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. A inversa da matriz $[M]$, com M normalizada, representa a transformação inversa M^{-1} . Ou seja, a matriz associada

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

possui inversa

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

que representa M^{-1} .

5. A multiplicação de duas matrizes associadas às transformações M_1 e M_2 representa a matriz da composição destas duas transformações. Assim

$$[M_1] \cdot [M_2] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

que é $[M_1 \circ M_2]$.

Proposição 3.12. *Se a transformação de Möbius está normalizada, então existem exatamente duas matrizes associadas. A saber*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Seja

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

uma transformação de Möbius normalizada. Suponha que a matriz

$$\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

com $k \in \mathbb{C}$ não nulo, represente a transformação M . Assim, a matriz nos diz que a transformação pode ser escrita como

$$M(z) = \frac{kaz + kb}{kcz + kd}.$$

Por hipótese, M está normalizada. Então devemos ter,

$$\begin{aligned} (ka)(kd) - (kb)(kc) = 1 &\implies k^2ad - k^2bc = 1 \\ \implies k^2(ad - bc) = 1 &\implies k^2 = 1 \\ &\implies k = 1 \text{ ou } k = -1. \end{aligned}$$

Portanto a matriz associada deve ser

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

□

Em geral podemos associar uma matriz 2×2 com entradas reais a uma transformação linear. Mas não podemos fazer o mesmo para uma matriz que represente uma transformação de Möbius, pois os coeficientes são números complexos, e mesmo que sejam números reais a transformação pode não ser linear. A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

corresponde a transformação de Möbius

$$M(z) = -\frac{1}{z}$$

que não é linear, pois para $\alpha \neq 1$ não nulo.

$$M(\alpha z) = -\frac{1}{\alpha z} = \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\alpha} M(z) \neq \alpha M(z).$$

Logo, não podemos associar uma matriz que representa a transformação de Möbius a uma transformação linear como de costume.

Proposição 3.13. *O conjunto das matrizes 2×2 com entradas complexas e que possuem determinante igual a 1, denotado por $SL(2, \mathbb{C})$, é grupo.*

Demonstração. De fato, se

$$[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } [M_1] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

pertencem a $SL(2, \mathbb{C})$ então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + c_1d & b_1c + dd_1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\begin{aligned} & (aa_1 + bc_1)(b_1c + dd_1) - (ab_1 + bd_1)(ca_1 + c_1d) \\ &= aca_1b_1 + ada_1d_1 + bcb_1c_1 + bdc_1d_1 - aca_1b_1 - adc_1b_1 - bca_1d_1 - bdc_1d_1 \\ &= ad(a_1d_1 - b_1c_1) - bc(a_1d_1 - b_1c_1) \\ &= (ad - bc)(a_1d_1 - b_1c_1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mostrando que $[M] \cdot [M_1] \in SL(2, \mathbb{C})$.

Sabemos que $[M]^{-1}$ é

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

que possui determinante

$$da - (-b)(-c) = ad - bc = 1.$$

Portanto $[M]^{-1} \in SL(2, \mathbb{C})$. □

3.3.6.1 Coordenadas homogêneas

A seguir, apresentamos uma forma diferente de escrever um número complexo, conhecida como coordenadas homogêneas, que será importante para os resultados posteriores. A forma natural de definir tal conceito é via geometria projetiva. No contexto de geometria algébrica, tais coordenadas são importantes para representar um espaço projetivo, de onde decorre uma outra maneira de obter as transformações de Möbius. Não trataremos coordenadas homogêneas nesse contexto, pois escapa dos objetivos do nosso trabalho. Ver (8) para maiores detalhes.

Definição 3.14. Dois números complexos z_1 e z_2 são chamados de coordenadas homogêneas de $z \in \mathbb{C}_\infty$ quando

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

O caso $z_2 = 0$ representa o ponto ∞ .

Observação 3.15. A cada número complexo z corresponde uma infinidade de coordenadas homogêneas, pois

$$\frac{kz_1}{kz_2} = \frac{z_1}{z_2} = z$$

para todo k não nulo.

Uma transformação linear de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^2 , que leva z_1 em w_1 e z_2 em w_2 é representada pela matriz complexa

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{bmatrix}$$

Proposição 3.16. Uma transformação de Möbius pode ser obtida a partir de uma transformação linear em \mathbb{C}^2 , quando consideramos pontos de \mathbb{C}^2 como coordenadas homogêneas de um ponto $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Se z_1 e z_2 , w_1 e w_2 são coordenadas homogêneas de z e w , respectivamente, então para uma transformação linear T em \mathbb{C}^2 ,

$$T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{w_1}{w_2} \implies w = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2} = \frac{\frac{az_1}{z_2} + \frac{bz_2}{z_2}}{\frac{cz_1}{z_2} + \frac{dz_2}{z_2}} = \frac{az + b}{cz + d}$$

que representa uma transformação de Möbius. □

A representação de uma transformação em forma de matriz faz com que alguns cálculos se tornem mais rápidos. Vemos isso, por exemplo, no resultado que diz que multiplicar as matrizes que representam duas transformações nos dá a matriz da composta, exibindo assim o formato da composta. Um número complexo em forma de coordenadas homogêneas apresenta informações sobre os pontos fixos de uma transformação de Möbius.

Proposição 3.17. O ponto $z = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ é ponto fixo de uma transformação de Möbius M se, e somente se, $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ é autovetor da matriz que representa M .

Demonstração. Suponha que z é ponto fixo de M , ou seja, $M(z_1/z_2) = z_1/z_2$. Em termos de matriz teremos,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Logo z é autovetor de M com autovalor $\lambda = 1$. Por outro lado, suponha que $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ é autovetor de $[M]$. Assim,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Na transformação M corresponde a:

$$M(z) = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda z_1}{\lambda z_2} = \frac{z_1}{z_2} = z.$$

Logo z é ponto fixo. □

Corolário 3.18. *O ponto ∞ é ponto fixo de uma transformação T se, e somente se, ela é da forma $T(z) = Az + B$.*

Demonstração. De fato, já sabemos que se $T(z) = Az + B$, o ponto ∞ é ponto fixo. Pela proposição anterior, $\infty = \frac{z_1}{0}$ ser ponto fixo de T implica que ele é autovetor da matriz que representa T . Então

$$\lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 \\ cz_1 \end{bmatrix}$$

Isto implica que $\lambda = a$ e $c = 0$. Temos então a transformação

$$T(z) = \frac{\lambda z}{d} + \frac{b}{d}.$$

que é da forma $Az + B$, onde $A = \frac{\lambda}{d}$ e $B = \frac{b}{d}$. □

Lembremos que os autovalores de uma transformação T são as raízes da equação característica dada por: $\det([T] - \lambda[I]) = 0$ onde $[T]$ é a matriz que representa a transformação e $[I]$ a matriz identidade. Assim,

$$\det([T] - \lambda[I]) = 0 \implies \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \implies \det \left(\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Logo,

$$\det([T] - \lambda[I]) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Se a transformação estiver normalizada, a equação se reduz a $\lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 = 0$, que pode ser escrita como

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = a + d.$$

Resolvendo a equação, chegamos que existem dois possíveis autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{(a + d) + \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{(a + d) - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2}.$$

Devemos lembrar que o produto dos autovalores de uma matriz quadrada nos fornece seu determinante, enquanto a soma nos fornece o traço da matriz. Logo $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det T = 1$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}T = a + d$. Portanto conhecendo um dos autovalores, podemos determinar o outro.

3.3.6.2 Ortogonalidade

O estudo de transformações lineares em \mathbb{C}^2 nos remete a estudar a relação entre vetores em \mathbb{C}^2 , relação esta que pode ser levada ao estudo das transformações de Möbius.

Definição 3.19. O produto interno entre dois vetores $[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ e $[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ em \mathbb{C}^2 é dado por

$$\langle p, q \rangle = \bar{p} \cdot q = \bar{p}_1 \cdot q_1 + \bar{p}_2 \cdot q_2$$

Observação 3.20. A maneira usual de definir o produto interno seria por: $\langle p, q \rangle = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2$. Entretanto na definição é exigido que $\langle p, p \rangle$ seja positivo. Note que para o caso $[p] = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ esta definição não satisfaz $\langle p, p \rangle$ positivo, pois

$$\langle p, p \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0.$$

Proposição 3.21. Dados $[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, $[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ e $[r] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ em \mathbb{C}^2 , seguintes propriedades são válidas:

- a) $\langle p, p \rangle \geq 0$;
- b) $\langle p, p \rangle = 0$ se, e somente se, $p = 0$;
- c) $\langle p + q, r \rangle = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$;
- d) $\langle r, p + q \rangle = \langle r, p \rangle + \langle r, q \rangle$;
- e) $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$.

Demonstração. a) $\langle p, p \rangle = \bar{p}_1 \cdot p_1 + \bar{p}_2 \cdot p_2 = |p_1|^2 + |p_2|^2 \geq 0$, pois $|p_1|^2 \geq 0$ e $|p_2|^2 \geq 0$.

b) Se $\langle p, p \rangle = 0$, então $|p_1|^2 + |p_2|^2 = 0$. Assim devemos ter $|p_1| = 0$ e $|p_2| = 0$, o que implica que $p = 0$. Por outro lado, suponha que $p = 0$, então devemos ter $p_1 = p_2 = 0$. Logo, $\langle p, p \rangle = 0$.

c) Temos,

$$\begin{aligned} \langle p + q, r \rangle &= \overline{(p_1 + q_1)} \cdot r_1 + \overline{(p_2 + q_2)} \cdot r_2 = \bar{p}_1 \cdot r_1 + \bar{q}_1 \cdot r_1 + \bar{p}_2 \cdot r_2 + \bar{q}_2 \cdot r_2 \\ &= (\bar{p}_1 \cdot r_1 + \bar{p}_2 \cdot r_2) + (\bar{q}_1 \cdot r_1 + \bar{q}_2 \cdot r_2) = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle. \end{aligned}$$

d) De maneira semelhante,

$$\begin{aligned} \langle r, p + q \rangle &= \bar{r}_1 \cdot (p_1 + q_1) + \bar{r}_2 \cdot (p_2 + q_2) = \bar{r}_1 \cdot p_1 + \bar{r}_1 \cdot q_1 + \bar{r}_2 \cdot p_2 + \bar{r}_2 \cdot q_2 \\ &= (\bar{r}_1 \cdot p_1 + \bar{r}_2 \cdot p_2) + (\bar{r}_1 \cdot q_1 + \bar{r}_2 \cdot q_2) = \langle r, p \rangle + \langle r, q \rangle. \end{aligned}$$

e) Por último,

$$\langle p, q \rangle = \overline{p_1} \cdot q_1 + \overline{p_2} \cdot q_2 = \overline{p_1 \cdot \overline{q_1}} + \overline{p_2 \cdot \overline{q_2}} = \overline{p_1 \cdot \overline{q_1} + p_2 \cdot \overline{q_2}} = \overline{\langle q, p \rangle}.$$

□

Definição 3.22. Dois vetores $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ em \mathbb{C}^2 são ortogonais quando

$$\langle p, q \rangle = \overline{p} \cdot q = \overline{p_1} \cdot q_1 + \overline{p_2} \cdot q_2 = 0.$$

Proposição 3.23. Dois vetores em \mathbb{C}^2 são ortogonais se, e somente se, são vetores de coordenadas homogêneas de pontos de \mathbb{C} projetados estereograficamente em pontos antipodais na esfera de Riemann.

Demonstração. Suponha que dois vetores $[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ e $[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ são ortogonais. Então,

$$\langle p, q \rangle = 0 \implies \overline{p_1} \cdot q_1 + \overline{p_2} \cdot q_2 = 0 \implies \frac{q_1}{q_2} = -\frac{\overline{p_2}}{\overline{p_1}} \implies p = -\frac{1}{\overline{q}}.$$

Queremos mostrar que p e q com esta relação são projetados em pontos P e Q antipodais da esfera de Riemann, ou seja, são diametralmente opostos. Se $Q = (X, Y, Z)$, a conjugação complexa de q induz uma reflexão em torno do plano xz , pela proposição (2.11), então Q é levado em $Q_1 = (X, -Y, Z)$. Aplicando a inversão complexa em \overline{q} , obtemos na esfera um ponto $Q_2 = (X, Y, -Z)$, pois a mesma induz uma rotação de 180° em torno do eixo real de acordo com a proposição (2.12). Por fim, levando o ponto $1/\overline{q}$ em $p = -1/\overline{q}$, obtemos um ponto $P = (-X, -Y, -Z)$, que é diametralmente oposto a Q .

Reciprocamente, suponha que $p = \frac{p_1}{p_2}$ e $q = \frac{q_1}{q_2}$ são projetados estereograficamente em pontos antipodais na esfera de Riemann, que denominaremos por P e Q , respectivamente. Se P forma um ângulo ϕ com o eixo Oz e p forma um ângulo θ com o eixo real, então Q forma ângulos $\pi - \phi$ e $\pi + \theta$, respectivamente. Da proposição (28), temos

$$p = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\theta} \quad \text{e} \quad q = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right)e^{i(\pi+\theta)} = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i(\pi+\theta)}.$$

Dessa forma,

$$q = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i(\pi+\theta)} = \frac{1}{\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)}e^{i\pi}e^{i\theta} = -\frac{1}{\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)}e^{i\theta} = -\frac{1}{\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{-i\theta}} = -\frac{1}{\overline{p}}.$$

Portanto p e q são ortogonais. □

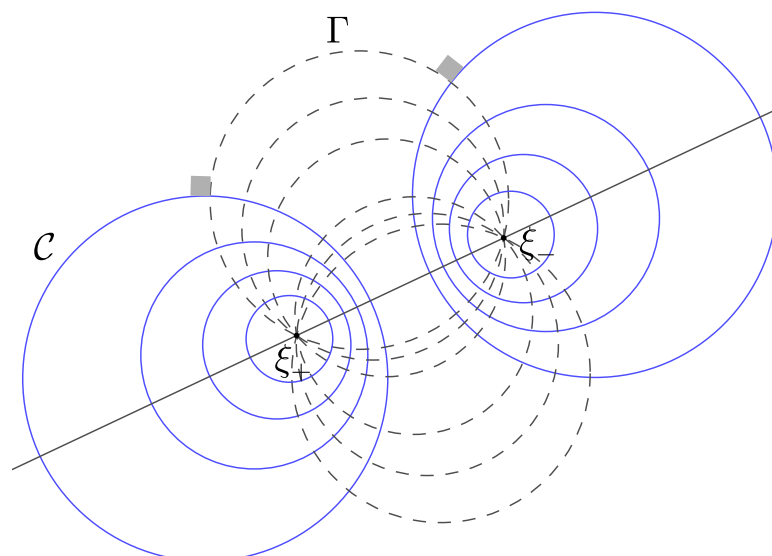
4 Classificação das Transformações de Möbius

De acordo com o estudo nos capítulos anteriores iremos classificar as transformações de Möbius e abordar as propriedades de cada uma delas. Inicialmente, iremos fazer uma construção para definir o que é o multiplicador de uma transformação.

4.1 O multiplicador de uma transformação

Considere uma transformação de Möbius M que possui dois pontos fixos distintos ξ_+ e ξ_- . Vamos construir duas famílias de círculos. A primeira delas, que denominaremos por Γ , é constituída pelos círculos passando pelos dois pontos fixos, representada pelas linhas tracejadas da figura (42). Para construir a segunda delas, que denominaremos por \mathcal{C} , considere um ponto P da reta passando por ξ_+ e ξ_- , que não esteja entre os pontos fixos. Para cada P , considere o círculo centrado em P e de raio $R = \sqrt{\|P - \xi_+\| \cdot \|P - \xi_-\|}$, pois desse modo, ξ_+ e ξ_- serão inversos geométricos um do outro em relação a \mathcal{C} , ($R^2 = \|P - \xi_+\| \cdot \|P - \xi_-\|$). Como cada círculo da família Γ passa por dois pontos que são inversos geométricos, então pela proposição (1.23), cada círculo Γ é ortogonal a cada círculo \mathcal{C} . Sendo M uma transformação dessa figura nela mesma, então cada círculo da família Γ é aplicado em outro da mesma família e cada círculo da família \mathcal{C} é aplicado em outro da mesma família, pois M preserva círculos pela proposição (3.4).

Figura 42 – Construção 1

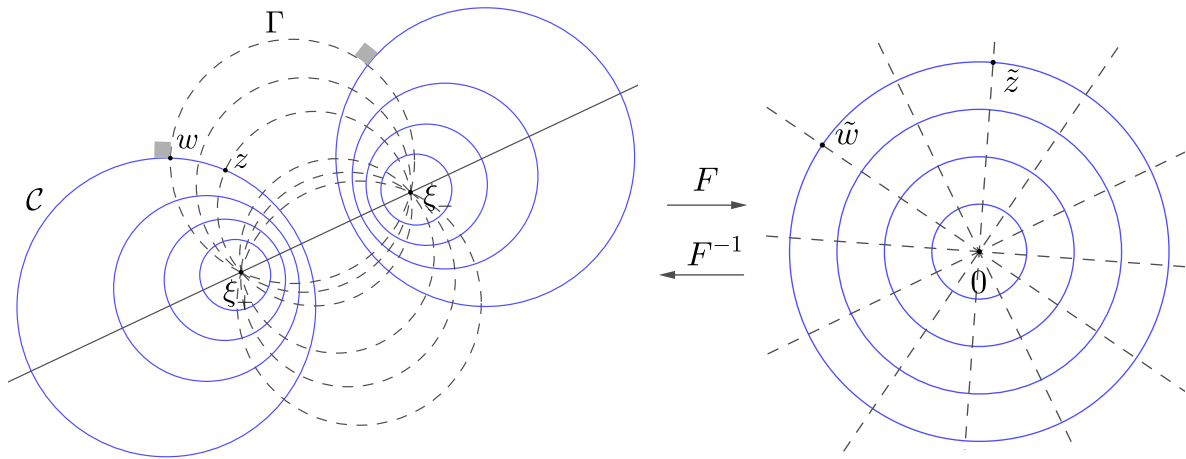


Seja F uma transformação de Möbius tal que $F(\xi_+) = 0$ e $F(\xi_-) = \infty$. Para F ficar completamente determinada, deveríamos ter outro ponto com imagem fixada de acordo com a proposição (3.8). A partir de apenas dois pontos temos uma infinidade de transformações. Assim considere umas destas transformações,

$$F(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}. \quad (4.1)$$

Cada círculo da família Γ é levado, por F , em círculos passando por ∞ e pelo zero. Enquanto que cada círculo \mathcal{C} é levado em um círculo centrado na origem, pois as imagens de Γ devem ser ortogonais as de \mathcal{C} , visto que F preserva ângulos pela proposição (3.5).

Figura 43 – Efeito da transformação F



Fonte: Material da autora

Deste modo, sejam $w = M(z)$, $\tilde{z} = F(z)$ e $\tilde{w} = F(w)$. Podemos pensar em F como sendo uma aplicação que transfere M para uma transformação de Möbius \tilde{M} atuando nas imagens de Γ e \mathcal{C} . Dessa forma,

$$\tilde{w} = F(w) = F(M(z)) = F(M(F^{-1}(\tilde{z}))).$$

Logo,

$$\tilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}. \quad (4.2)$$

Além do mais,

$$\tilde{M}(0) = F(M(F^{-1}(0))) = F(M(\xi_+)) = F(\xi_+) = 0$$

e

$$\tilde{M}(\infty) = F(M(F^{-1}(\infty))) = F(M(\xi_-)) = F(\xi_-) = \infty,$$

ou seja, 0 e ∞ são pontos fixos de \tilde{M} . Esta transformação será fundamental para a classificação da transformação M mais adiante. Pelo corolário (3.18), \tilde{M} é da forma $Az + B$. Como o zero também é ponto fixo, teremos que $\tilde{M}(\tilde{z}) = m\tilde{z}$, onde $m = \rho e^{i\alpha}$. Sendo assim, \tilde{M} representa uma homotetia por ρ seguida de uma rotação pelo ângulo α .

Definição 4.1. O número m da discussão anterior é chamado de multiplicador de M .

Escolhemos 0 como a imagem de ξ_+ e ∞ como a imagem de ξ_- , obtendo, neste caso, um multiplicador associado m_+ . No caso de ξ_+ ser levado no ∞ e ξ_- ser levado em 0 teríamos outro multiplicador associado, que denotaremos por m_- . A proposição a seguir nos mostra a relação existente entre os dois multiplicadores.

Proposição 4.2. Os multiplicadores de uma transformação M são inversos, ou seja,

$$m_+ = \frac{1}{m_-}.$$

Demonstração. De fato, considere M com pontos fixos ξ_+ e ξ_- levados em 0 e ∞ através de F , como na equação (4.1), respectivamente. Sendo $\tilde{M}(\tilde{z}) = m_+\tilde{z}$ e $\tilde{M} \circ F = F \circ M$, então

$$m_+ \cdot \left(\frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \right) = \frac{w - \xi_+}{w - \xi_-}.$$

Fazendo ξ_+ e ξ_- serem levados em ∞ e 0 respectivamente, da equação anterior obtemos

$$m_- \cdot \left(\frac{z - \xi_-}{z - \xi_+} \right) = \frac{w - \xi_-}{w - \xi_+} \implies \frac{1}{m_-} \cdot \left(\frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \right) = \frac{w - \xi_+}{w - \xi_-}.$$

Comparando as equações, segue que $m_+ = \frac{1}{m_-}$. □

É possível determinar uma expressão para m em função dos coeficientes a, b, c e d de M . Sabemos que ξ_+ e ξ_- possuem a forma explicitada nas equações (3.2). Dessa maneira, para $w = M(\infty) = a/c$ temos

$$\tilde{M}(F(\infty)) = F(M(\infty)) \implies \tilde{M}(1) = F(a/c) \implies m_+ = \frac{a - c\xi_+}{a - c\xi_-}.$$

Pela proposição (4.2), teríamos

$$m_- = \frac{a - c\xi_-}{a - c\xi_+}.$$

Uma forma explícita para m_+ e m_- é dada pela substituição das expressões em (3.2) na equação anterior, obtendo

$$m_+ = \frac{(a + d) + \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{(a + d) - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}$$

e

$$m_- = \frac{(a + d) - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{(a + d) + \sqrt{(a + d)^2 - 4}}.$$

Proposição 4.3. Seja m o multiplicador de uma transformação M . Então,

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = a + d.$$

Demonstração. Com efeito, desde que $\tilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$, então $[\tilde{M}] = [F] \cdot [M] \cdot [F^{-1}]$. Aplicando o determinante na equação anterior obtemos $\det[\tilde{M}] = \det[M]$. Independentemente de F estar normalizada ou não, M está normalizada se, e somente se, \tilde{M} está. Uma matriz para \tilde{M} normalizada é

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix}.$$

Pelo traço de cada matriz, temos

$$\text{tr}[\tilde{M}] = \text{tr}[F]\text{tr}[M]\text{tr}[F^{-1}] \implies \text{tr}[\tilde{M}] = \text{tr}[M] \implies \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = a + d.$$

Note que $1/m$ também é solução da equação. Assim, a equação é válida para os dois multiplicadores. \square

No capítulo anterior, vimos que uma transformação de Möbius pode ser obtida por uma transformação linear em \mathbb{C}^2 atuando nos pares de coordenadas homogêneas de um ponto em \mathbb{C}_∞ (proposição (3.16)). Também estudamos que os pontos fixos são autovetores da matriz que representa a transformação (proposição (3.17)). Agora vamos ver um resultado que associa ponto fixo e o multiplicador de uma transformação.

Proposição 4.4. *Seja ξ_+ ponto fixo de M cuja representação em vetor é autovetor da matriz normalizada $[M]$ com autovalor λ_+ . Então o multiplicador associado a ξ_+ é dado por $m_+ = \frac{1}{\lambda_+^2}$.*

Demonstração. Seja M uma transformação de Möbius com pontos fixos ξ_+ e ξ_- , levados em 0 e ∞ , respectivamente, por F como em (4.1). Ainda considere $\tilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$, com $\tilde{M}(\tilde{z}) = m_+ \tilde{z}$. Queremos mostrar que $m_+ = \frac{1}{\lambda_+^2}$. Como ξ_+ é ponto fixo de M , pela proposição (3.17),

$$[\xi_+] = \begin{bmatrix} \xi_+ \\ 1 \end{bmatrix}$$

é autovetor de $[M]$ normalizada com autovalor λ_+ . Primeiramente note que $[\tilde{\xi}_+] = [F][\xi_+]$ é autovetor de $[\tilde{M}]$ com autovalor λ_+ , pois

$$[\tilde{M}][\tilde{\xi}_+] = [F][M][F^{-1}][F][\xi_+] = [F][M][\xi_+] = [F]\lambda_+[\xi_+] = \lambda_+[\tilde{\xi}_+].$$

Considere a matriz normalizada de F dada por

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_+ \\ \frac{1}{\xi_+ - \xi_-} & \frac{-\xi_+}{\xi_+ - \xi_-} \\ 1 & -\xi_- \\ \frac{1}{\xi_+ - \xi_-} & \frac{-\xi_-}{\xi_+ - \xi_-} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$[\tilde{\xi}_+] = [F][\xi_+] = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_+ \\ \frac{1}{\xi_+ - \xi_-} & \frac{-\xi_+}{\xi_+ - \xi_-} \\ 1 & -\xi_- \\ \frac{1}{\xi_+ - \xi_-} & \frac{-\xi_-}{\xi_+ - \xi_-} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_+ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a matriz normalizada de \tilde{M} dada por

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} \sqrt{m_+} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_+}} \end{bmatrix}.$$

Desde que $[\tilde{\xi}_+]$ é autovetor de $[\tilde{M}]$ com autovalor λ_+ , teremos que

$$[\tilde{M}][\tilde{\xi}_+] = \lambda_+[\tilde{\xi}_+] \implies \begin{bmatrix} \sqrt{m_+} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_+}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{m_+}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_+ \end{bmatrix}.$$

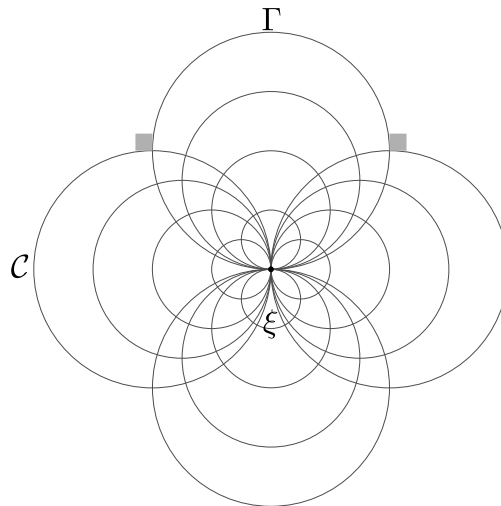
Portanto, para a igualdade anterior ser válida, devemos ter

$$\frac{1}{\sqrt{m_+}} = \lambda_+ \implies m_+ = \frac{1}{\lambda_+^2}.$$

De maneira análoga, mostra-se que $m_- = \frac{1}{\lambda_-^2}$. □

Considere agora uma transformação de Möbius M que possui um único ponto fixo ξ . Iremos proceder de maneira semelhante, considerando duas famílias de círculos. A primeira família Γ e a segunda \mathcal{C} são construídas de maneira que se intersectem em ξ e sejam ortogonais no segundo ponto de interseção.

Figura 44 – Construção 2



Fonte: Material da autora

Como anteriormente, existem infinitas transformações de Möbius que levam ξ em ∞ . Considere uma delas dada por

$$G(z) = \frac{1}{z - \xi}. \quad (4.3)$$

Sob a transformação G , as imagens das famílias de círculos Γ e \mathcal{C} são retas perpendiculares, pois G preserva ângulos. Sejam $w = M(z)$, $\tilde{z} = G(z)$ e $\tilde{w} = G(w)$. Como anteriormente, G induz uma transformação de Möbius \tilde{M} atuando nas imagens das famílias Γ e \mathcal{C} , dada por

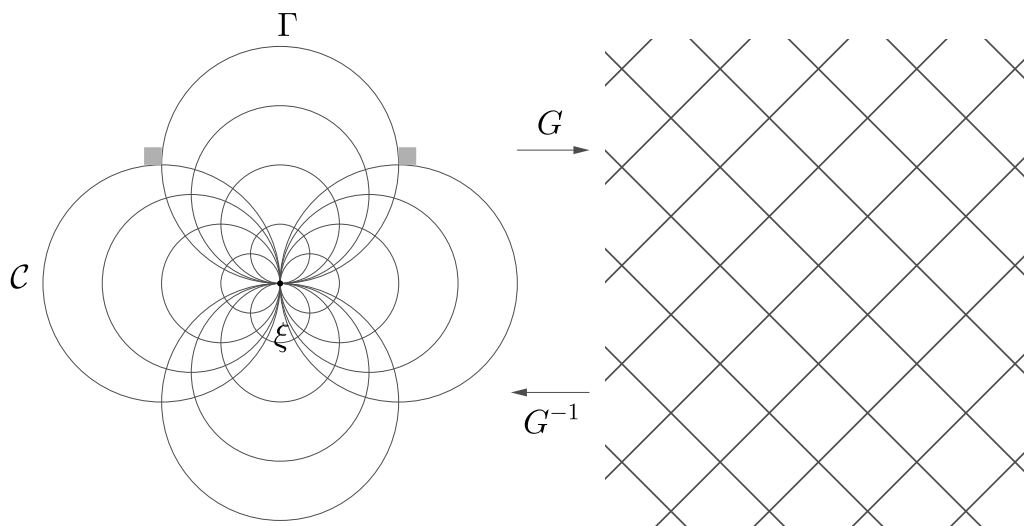
$$\tilde{M} = G \circ M \circ G^{-1}.$$

O ponto ∞ é ponto fixo de \tilde{M} , pois

$$\tilde{M}(\infty) = G(M(G^{-1}(\infty))) = G(M(\xi)) = G(\xi) = \infty.$$

Como ∞ é ponto fixo, então \tilde{M} é da forma $\tilde{M}(\tilde{z}) = A\tilde{z} + p$. Mais precisamente, como ele é único, então $A = 1$ e $\tilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + p$.

Figura 45 – Efeito da transformação G



Fonte: Material da autora

Observação 4.5. No caso em que M possui um único ponto fixo, não definimos o multiplicador m , pois \tilde{M} não é da forma $m\tilde{z}$.

A partir do estudo da transformação \tilde{M} e do multiplicador m , iremos definir os tipos de transformação de Möbius e analisar de modo geométrico e algébrico o comportamento destes tipos de transformações em vizinhanças dos pontos fixos.

4.2 Transformação Parabólica

Definição 4.6. Uma transformação de Möbius M é parabólica se $\tilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + p$.

Podemos interpretar uma transformação parabólica geometricamente. Na construção de $\tilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + p$ apresentada na seção anterior, as famílias Γ e \mathcal{C} são levadas em retas (que são círculos passando por $G(\xi) = \infty$). Como os círculos são ortogonais, suas imagens serão retas

perpendiculares, pela preservação de ângulos através de G . Assim, o efeito de \tilde{M} é transladar os retângulos para a direita ou esquerda, dependendo do sinal de p . Portanto, o efeito de M será trocar as regiões de intersecção entre quatro círculos, no mesmo sentido.

Existe uma maneira equivalente de classificar uma transformação parabólica, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.7. *Uma transformação de Möbius M é parabólica se, e somente se, $a + d = \pm 2$.*

Demonstração. Se M é parabólica, possui apenas um ponto fixo. Assim, da proposição (3.7), tem-se $\sqrt{(a+d)^2 - 4} = 0$, ou seja, $a + d = \pm 2$. Reciprocamente, se $a + d = \pm 2$ então M possui um único ponto fixo, e portanto é parabólica. \square

Em seguida, apresentamos a relação que o fator de translação p possui com os coeficientes de M .

Proposição 4.8. *Seja $M = \frac{az + b}{cz + d}$ uma transformação de Möbius parabólica, com $\tilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + p$, onde $\tilde{M} = G \circ M \circ G^{-1}$ em que G tem a forma explicitada em (4.3). Então $p = \pm c$, a depender do sinal de $a + d$.*

Demonstração. Sabemos que M possui um único ponto fixo ξ que é da forma $(a-d)/2c$. Sendo $\tilde{M} \circ G = G \circ M$, então

$$\tilde{M}(G(\infty)) = G(M(\infty)) \implies \tilde{M}(0) = G(a/c) \implies 0 + p = \frac{1}{\frac{a}{c} - \xi} \implies p = \frac{1}{\frac{a}{c} - \frac{a-d}{2c}}$$

Portanto,

$$p = \frac{2c}{a+d} = \pm c$$

a depender se $a + d = -2$ ou $a + d = 2$. \square

Exemplo 4.9. Considere a transformação

$$M(z) = -\frac{1}{z} - 2,$$

onde $a = -2, b = -1, c = 1$ e $d = 0$, e $ad - bc = 1$. Note que $a + d = -2$, então pelo teorema (4.7) M é parabólica. Seu único ponto fixo é $\xi = -1$ e o fator de translação, pela proposição (4.8), é $p = -1$. Logo, $G(z) = (z + 1)^{-1}$ e $\tilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} - 1$. Além disso, temos, de fato, $G(M(z)) = \tilde{M}(G(z))$, pois

$$G(M(z)) = G\left(-\frac{1}{z} - 2\right) = \frac{1}{-\frac{1}{z} - 2 + 1} = \frac{-z}{z + 1}$$

que é igual a

$$\tilde{M}(G(z)) = \tilde{M}\left(\frac{1}{z + 1}\right) = \frac{1}{z + 1} - 1 = \frac{-z}{z + 1}.$$

4.3 Transformação Elíptica

Definição 4.10. Uma transformação de Möbius M é elíptica se $\tilde{M}(\tilde{z}) = e^{\pm i\alpha} \tilde{z}$.

Na primeira construção realizada na seção (4.1), as curvas invariantes em relação a $\tilde{M}(\tilde{z}) = e^{\pm i\alpha} \tilde{z}$ são os círculos centrados na origem, pois \tilde{M} representa uma rotação pura. Logo, as curvas invariantes de M são a família de círculos \mathcal{C} .

Vamos analisar a inversão complexa $M(z) = 1/z$. Temos $\xi_+ = 1, \xi_- = -1$,

$$m_+ = \frac{a - c\xi_+}{a - c\xi_-} = \frac{0 - 1(1)}{0 - 1(-1)} = -1$$

e, pela proposição (4.2), $m_- = -1$. Então $\tilde{M}(\tilde{z}) = -\tilde{z}$ que representa uma rotação de um ângulo π em torno da origem. O fato é que, em geral, \tilde{M} mostra o comportamento de M em uma vizinhança dos pontos fixos. Assim, $\tilde{M}(\tilde{z}) = -\tilde{z}$ mostra o comportamento de $1/z$ em uma vizinhança dos pontos -1 e 1 . Isto quer dizer que para z em uma vizinhança muito próxima, o efeito de $M(z) = 1/z$ é uma rotação sob o ângulo π ao redor dos pontos fixos. Duas aplicações dessa mesma transformação produzem a identidade. De maneira geral, se o ângulo é da forma $\alpha = (m/n)2\pi$, com m/n fração irredutível, n aplicações da transformação com o ângulo α produzem a identidade. No nosso exemplo temos, $\alpha = (1/2)2\pi$. Entretanto se m/n é irracional, não importa quantas vezes aplicamos a transformação, não obteremos a identidade.

Teorema 4.11. Se uma transformação M é elíptica, então $a + d$ é real e $|a + d| < 2$.

Demonstração. Suponha que M é elíptica. Então temos $m_+ = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Pela proposição (4.3),

$$\sqrt{m_+} + \frac{1}{\sqrt{m_+}} = a + d \implies \sqrt{\cos \alpha + i \sin \alpha} + \sqrt{\cos \alpha - i \sin \alpha} = a + d.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} (\sqrt{\cos \alpha + i \sin \alpha} + \sqrt{\cos \alpha - i \sin \alpha})^2 &= \cos \alpha + i \sin \alpha + 2 + \cos \alpha - i \sin \alpha = 2 \cos \alpha + 2 \\ &= 4 \cos^2(\alpha/2) = (a + d)^2 \end{aligned}$$

Como $2 \cos(\alpha/2) = a + d$ e $|2 \cos(\alpha/2)| < 2$, então $a + d$ é um número real e $|a + d| < 2$. De maneira análoga provamos utilizando m_- .

□

4.4 Transformação Hiperbólica

Definição 4.12. Uma transformação de Möbius M é hiperbólica se $\tilde{M}(\tilde{z}) = \rho \tilde{z}$.

As curvas invariantes, na primeira construção realizada na seção (4.1), em relação a \tilde{M} são retas passando pela origem, pois $\tilde{M}(\tilde{z}) = \rho\tilde{z}$ é uma homotetia centrada na origem. Logo M deixa invariante os círculos da família Γ .

Uma transformação hiperbólica com $\rho > 1$ nos diz que em uma vizinhança muito próxima de ξ_+ o efeito de M é uma expansão centrada em ξ_+ , enquanto que o efeito em uma vizinhança próxima de ξ_- é uma contração de fator $1/\rho$. Para ver isto, seja $u = z - \xi_+$ e $v = w - \xi_+$ vetores com origem em ξ_+ até z e sua imagem $w = M(z)$. Quando u é infinitesimal, então o efeito de M é rotacionar u por α e expandir por ρ . De outra maneira,

$$m \left(\frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \right) = \frac{w - \xi_+}{w - \xi_-} \implies m \frac{u}{z - \xi_-} = \frac{v}{w - \xi_-} \implies \frac{v}{u} = m \left(\frac{w - \xi_-}{z - \xi_-} \right).$$

Quando u se aproxima de zero, z e w se aproximam de ξ_+ , implicando que na equação anterior $v = m \cdot u$.

Teorema 4.13. *Se uma transformação de Möbius M é hiperbólica, então $a + d$ é real e $|a + d| > 2$.*

Demonstração. Seja M uma transformação hiperbólica com multiplicador $m_+ = \rho > 1$. De acordo com a proposição (4.3) temos

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = a + d \implies \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right)^2 = (a + d)^2 \implies \rho + 2 + \frac{1}{\rho} = (a + d)^2.$$

Dessa maneira,

$$(a + d)^2 = \frac{\rho^2 + 2\rho + 1}{\rho} \implies |a + d|^2 = \frac{|\rho^2 + 2\rho + 1|}{|\rho|} = \frac{|\rho + 1|^2}{|\rho|} > 4.$$

Portanto, $|a + d| > 2$ e, como ρ é real, $a + d$ é real. A prova com $m_- = 1/\rho$ é análoga pela própria simetria da equação anterior. \square

4.5 Transformação Loxodrômica

Por último, estudamos um tipo de transformação que é a composição de uma elíptica com hiperbólica que possuem os mesmos pontos fixos.

Definição 4.14. Uma transformação de Möbius M é loxodrômica se $\tilde{M}(\tilde{z}) = \rho e^{\pm i\alpha} \tilde{z}$.

Nesta transformação, nenhum dos círculos das famílias Γ e \mathcal{C} (primeira construção da seção (4.1)) são invariantes. Em uma vizinhança muito próxima dos pontos fixos ξ_+ e ξ_- , o efeito de M é a combinação dos efeitos das transformações elíptica e hiperbólica, ou seja, é rotacionar e expandir/contrair a depender do sinal de ρ .

Teorema 4.15. *Se uma transformação de Möbius é loxodrômica, então $a + d$ é complexo.*

Demonstração. Lembremos que $\cos \alpha + i \sin \alpha = (\cos (\alpha/2) + i \sin (\alpha/2))^2$. Pela proposição (4.3),

$$\sqrt{\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)}} = a + d.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\rho}(\cos (\alpha/2) + i \sin (\alpha/2)) + \frac{1}{\sqrt{\rho}}(\cos (\alpha/2) - i \sin (\alpha/2)) = a + d \\ \implies & \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \cos (\alpha/2) + i \left(\sqrt{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \sin (\alpha/2) = a + d. \end{aligned}$$

Portanto, $a + d$ é um número complexo. □

Observação 4.16. Assim como no teorema (4.7), é possível demonstrar a recíproca dos teoremas (4.11), (4.13) e (4.15), obtendo uma classificação algébrica para os tipos de transformações de Möbius.

Referências

- 1 ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. LTC, 2008.
- 2 BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper e Row, 1980.
- 3 BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Editora Blucher, 2019.
- 4 COXETER, Harold Scott Macdonald; GREITZER, Samuel L. **Geometry revisited**. Maa, 1967.
- 5 CUNHA, Ricardo Ferreira da et al. **Aplicações das transformações conformes em problemas eletromagnéticos**. 2014.
- 6 DURAN, Franciéli. **Transformações de Möbius e inversões**. 2013.
- 7 FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES, Nilson C. **Introdução às funções de uma variável complexa**. SBM, 2013.
- 8 HITCHIN, Nigel. **Projective geometry**. Lecture Notes, University of Oxford, 2003.
- 9 LIMA, Elon Lages et al. **Medida e forma em geometria**. IMPA/VITAE, 1991.
- 10 LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. SBM, 1996.
- 11 MILIES, César Polcino. **Breve História da Álgebra Abstrata**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática (www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf), 2004.
- 12 MUMFORD, David; SERIES, Caroline; WRIGHT, David. **Indra's pearls: The vision of Felix Klein**. Cambridge University Press, 2002.
- 13 NEEDHAM, T. **Visual Complex Analysis**. 5. ed. New York: Clarendon Press, Oxford, 2000.
- 14 NUNES, Euderley de Castro et al. **A esfera de Riemann: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio**. 2015.2
- 15 WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, Jose Paulo Q. **Construções geométricas**. SBM, 2007.