



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Equação da Onda: soluções de Problemas de Valores Iniciais e  
de Fronteira a partir da análise de Fourier**

**Daniel César Pereira Lopes**

**Orientador Dr. Clessius Silva**

RECIFE

2019





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Daniel César Pereira Lopes**

**Equação da Onda: soluções de Problemas de Valores Iniciais e  
de Fronteira a partir da análise de Fourier**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de graduado.

Orientador: Prof. Dr. Clessius Silva

RECIFE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- E64e      Lopes, Daniel César Pereira  
            Equação da onda: Soluções de Problemas de Valores Iniciais e de Fronteira a partir da análise de Fourier / Daniel César Pereira Lopes. - 2019.  
            72 f.
- Orientador: Clessius Silva.  
            Inclui referências.
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2020.
1. Equação Diferencial Parcial. 2. Séries de Fourier. 3. Equação da onda. I. Silva, Clessius, orient. II. Título

CDD 510

---

DANIEL CÉSAR PEREIRA LOPES

**EQUAÇÃO DA ONDA: SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE VALORES INICIAIS E DE  
FRONTEIRA A PARTIR DA ANÁLISE DE FOURIER**

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Recife, 19 de dezembro de 2020.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Clessius Silva

Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Profa Dra Tarciana Maria Santos da Silva

Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos

Universidade Federal Rural de Pernambuco



*À todos que estiveram a meu lado durante essa jornada*





# Agradecimentos

Agradeço a minha família, que apesar dos percalços estiveram sempre ao meu lado ao longo desses anos.

Agradeço também aos meus professores, que me fizeram crescer bastante, alguns deles sempre serão inspiração para minha carreira.

Sou grato em especial ao meu orientador Clessius Silva, por ter sido um orientador incrível em que me ajudou muito ao longo desses anos sob sua orientação. Desde as iniciações científicas até este momento foi uma pessoa na qual com quem aprendi bastante. Quando "crescer" quero ser um professor que nem ele.

Também não poderia esquecer os meus amigos que fiz neste curso, amigos como: Matheus, Christyan, Danilo, Lyen, Guilherme, Ewellyn, entre outros. Obrigado pelos momentos fantásticos no qual me fizeram passar durante este curso.



# Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo sobre a Equação da Onda, uma importante equação no estudo das Equações Diferenciais Parciais. Trabalharemos com problemas envolvendo a equação da onda com corda finita com extremidades fixas, com a corda infinita, e com a corda semi-infinita. Entretanto, para chegarmos em tais problemas, precisaremos realizar um estudo acerca das Séries de Fourier, estudando sobre a convergência de tais séries, para tanto precisaremos de um pouco de Análise Real. Além disso, estudaremos algumas desigualdades importantes como: a Desigualdade de Bessel, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade de Minkowski. Para assim, termos uma base para solucionarmos as EDP's em questão.

**Palavras-chave:** Equação Diferencial Parcial, Séries de Fourier, Equação da Onda.



# Abstract

In this work, we will study the Wave Equation, an important equation in the study of Partial Differential Equations. We will work on problems involving the finite-string wave equation with fixed ends, the infinite string, and the semi-infinite string. However, to get to such problems, we will need to do a study about the Fourier Series, studying the convergence of such series, so we will need some Real Analysis. In addition, we will study some important inequalities such as: Bessel Inequality, Cauchy-Schwarz Inequality and Minkowski Inequality. For that, we have a basis for solving the EDP's in question.

**Keywords:** Partial Differential Equation, Fourier Series, Wave Equation.



# Sumário

brazil brazil

	Introdução . . . . .	15
1	RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	17
1.1	Funções Periódicas . . . . .	17
1.2	Convergência Pontual e Convergência Uniforme de séries de funções . . . . .	18
2	SÉRIES DE FOURIER . . . . .	20
2.1	Coefficientes de Fourier . . . . .	20
2.2	Teorema de Fourier . . . . .	21
2.3	Séries de Fourier de funções pares e ímpares . . . . .	23
2.4	Integração de Séries de Fourier . . . . .	25
2.5	Estimativas dos Coeficientes de Fourier . . . . .	29
3	CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER . . . . .	31
3.1	Classes das funções consideradas . . . . .	31
3.2	Convergência Pontual da Série de Fourier . . . . .	35
3.3	Desigualdade de Bessel . . . . .	42
3.4	Desigualdade de Cauchy Schwarz . . . . .	45
3.5	Desigualdade de Minkowski . . . . .	47
3.6	Convergência Uniforme da Série de Fourier . . . . .	49
4	EQUAÇÃO DA ONDA . . . . .	55
4.1	Equação da Corda Vibrante . . . . .	55
4.2	Resolução por séries de Fourier . . . . .	59
4.3	Vibrações forçadas e Ressonância . . . . .	63
4.4	Corda Infinita . . . . .	66
4.5	Corda Semi-infinita . . . . .	68

**REFERÊNCIAS** . . . . . 72



# Introdução

Provavelmente as Equações Diferenciais sejam as aplicações mais importantes do Cálculo Diferencial e integral. O estudo das Equações Diferenciais começou no século XVII com a criação do Cálculo Diferencial e Integral e foi guiado por suas aplicações a problemas provenientes da Física. Fenômenos de diversas áreas da ciência podem ser modelados por uma equação diferencial.

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação matemática envolvendo uma função e suas derivadas parciais. Uma solução para uma equação diferencial parcial é uma função que juntamente com suas derivadas parciais satisfazem a equação. Dizemos que uma equação diferencial parcial tem ordem  $m$  quando a derivada parcial de ordem mais alta tem ordem  $k$ . Mais precisamente, uma EDP é uma equação da forma

$$F \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = 0,$$

em que  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega$  é um aberto conexo de  $\mathbb{R}^n$  e  $F$  é uma função dada.

A maioria das equações diferenciais parciais surgem de modelos físicos, e algumas áreas dependem profundamente do estudo de EDP's, entre elas estão, a acústica, elasticidade, eletrodinâmica, dinâmica dos fluidos, difusão do calor, propagação de ondas, prospecção de petróleo, mecânica quântica, relatividade, etc. Devido a tal quantidade de aplicações, as EDP's têm se tornado uma das áreas da matemática mais intensa na pesquisa científica.

Uma das equações diferenciais parciais mais simples e que ocorre com frequência em matemática aplicada é a Equação da Onda. Tais equações aparecem quando se estudam modelos matemáticos de fenômenos que envolvam a propagação de ondas em um meio contínuo. Por exemplo, estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas são baseados nessa equação.

É possível mostrar que o deslocamento vertical de cada ponto de uma corda elástica

homogênea em função da posição  $x$  e do tempo  $t$ ,  $u(x, t)$ , satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t, u).$$

A equação acima é chamada **equação da onda**. O coeficiente constante  $c^2$  é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda. Para descrever o movimento da corda, é preciso especificar a extensão da corda, qual o tipo de articulação das extremidades e ainda o deslocamento e a velocidade iniciais da corda.

Neste trabalho, vamos estudar a resolução de vários problemas para a equação da onda, entre eles problemas de Cauchy e problemas de valores inicial e de fronteira (PVI). De maneira mais específica, faremos um estudo sobre: a equação da corda vibrante; energia da corda vibrante; harmônicos, frequência, amplitude; corda dedilhada; vibrações forçadas, ressonâncias; corda infinita; corda semi-infinita.

Para isto, precisaremos estudar o método de Fourier, o qual também é utilizado para resolver vários outros problemas de EDP. Este método é dividido em duas etapas. Primeiro, utiliza-se o método de separação de variáveis para substituir tal equação por um conjunto de equações diferenciais ordinárias que são resolvidas sob as condições impostas. As soluções dos problemas obtidas nessa primeira etapa ocorrem em termos de uma série infinita em senos e/ou cossenos, conhecidas como séries de Fourier.

Daí, a segunda etapa, é o estudo das séries de Fourier, que são ingredientes essenciais para a chamada Análise de Fourier. Por isso, faremos um estudo bem detalhado da teoria básica das séries de Fourier, demonstrando seus principais resultados, para que possamos desenvolver e solucionar os problemas envolvendo a equação da onda.

A principal referência para esse texto é o livro (3). De fato, nossa proposta é apresentar os resultados e demonstrações desta referência, referente ao tema supracitado, tornando-os mais compreensíveis à um aluno de licenciatura em matemática.

# 1 Resultados preliminares

Este capítulo aborda conceitos básicos e resultados da Análise Real que serão relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Por este motivo, alguns dos resultados apresentados neste capítulo não serão demonstrados aqui. Entretanto, pode-se encontrar facilmente as respectivas demonstrações no livro do Elon Lages Lima (5).

## 1.1 Funções Periódicas

**Definição 1.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada periódica de período  $T > 0$  se  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.1.** A função  $f(x) = \cos(x)$  é periódica de período  $2\pi$ .

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T > 0$ . Não é difícil verificar que  $nT$  também é um período de  $f$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Também não é difícil provar que se  $f$  é periódica de período  $T > 0$ , para todo  $T > 0$ , então  $f$  é constante.

**Definição 1.2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica, o menor  $T > 0$  tal que  $f(x + T) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é chamado período fundamental de  $f$ .

**Exemplo 1.2.** O período fundamental  $T$  da função  $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é  $T = \frac{2L}{n}$ .

De fato, se  $\text{sen}\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Tomando  $x = \frac{L}{2n}$ ,

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

daí,

$$\cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 1 \tag{1.1}$$

Queremos o menor valor positivo de  $T$  que satisfaça (1.1), logo

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2L}{n}$$

Portanto, o período fundamental de  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é  $T = \frac{2L}{n}$ .

De maneira análoga, concluímos que o período fundamental de  $\text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é  $T = \frac{2L}{n}$ .

## 1.2 Convergência Pontual e Convergência Uniforme de séries de funções

**Definição 1.3.** Uma série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge se a sequência de suas somas parciais,  $a_n = a_1 + \dots + a_n$  converge.

**Definição 1.4.** Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde  $u_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais, convergirá pontualmente se, para cada  $x_0 \in I$  fixado, a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  convergir. Ou seja, dados  $\epsilon > 0$  e  $x_0 \in I$ , existe um inteiro  $N$ , que depende de  $\epsilon$  e  $x_0$ , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \epsilon, \forall n < m \text{ tal que } n \geq N.$$

**Definição 1.5.** Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde  $u_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais, convergirá uniformemente se, dado  $\epsilon > 0$  existir um inteiro  $N$ , dependendo apenas de  $\epsilon$  e não de  $x$ , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \epsilon, \quad \forall m > n \geq N.$$

**Definição 1.6.** Uma série de funções  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  convergirá absolutamente se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$  dos valores absolutos convergir pontualmente.

**Proposição 1.3.** (*Teste M de Weierstrass*) Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uma série de funções, com  $u_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que existam constantes  $M_n \geq 0$  tais que

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  convirja. Então a série de funções converge uniforme e absolutamente em  $I$ .

**Exemplo 1.4.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ , definida em  $[0, 1]$  converge uniformemente.

De fato, temos que

$$\left| \frac{x}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$$

para todo  $x \in [0, 1]$ , e a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente, uma vez que é uma p-série com  $p > 1$ . Daí, pelo Teste M de Weierstrass, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$  converge uniformemente. O teste ainda garante que esta série de função converge absolutamente.

**Proposição 1.5.** (*Critério de Cauchy para séries*) A fim de que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada  $\epsilon > 0$ , exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$  quaisquer que sejam  $n > n_0$  e  $p \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 1.6.** Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente, com  $u_n$  sendo funções contínuas. Então a soma da série  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  é uma função contínua.

**Proposição 1.7.** Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente, com as funções  $u_n$  integráveis em um intervalo  $I$ . Então

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

**Proposição 1.8.** Suponha que as funções  $u_n(x)$  definidas num intervalo  $I$  sejam continuamente diferenciáveis e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  das derivadas convirja uniformemente e suponha que para um dado  $x_0 \in I$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  convirja. Então

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

# 2 Séries de Fourier

## 2.1 Coeficientes de Fourier

Se uma função  $f(x)$  for expressa por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.1)$$

esperamos que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  estejam relacionados com a função  $f$ . Assim, suponha que a igualdade (2.1) seja satisfeita e que a série em (2.1) seja uniformemente convergente. Pela Proposição 1.6, a função  $f$  tem que ser contínua. Além disso, deve ser periódica de período  $2L$ . Deste modo, usando a Proposição 1.7, podemos integrar ambos os lados da equação (2.1), assim

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \cdot \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right),$$

daí, usando que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \forall n \geq 1,$$

concluimos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Para encontrarmos os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , usamos a mesma ideia e as relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases} \\ \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

com  $m, n \geq 1$ .

Multiplicando (2.1) por  $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ , e integrando no intervalo de  $-L$  a  $L$ , temos

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) dx.$$

Utilizando a Proposição (1.7), tem-se

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-L}^L \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) dx + \int_{-L}^L \left( b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) dx \right).$$

Agora, usando as relações de ortogonalidade listadas anteriormente, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_m \cdot L.$$

Portanto,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.2)$$

De maneira análoga, obtemos que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.3)$$

Note que o  $1/2$  que aparece multiplicando o  $a_0$  na equação (2.1) serve para que todos os  $a_n$  tenham uma mesma fórmula.

Se o valor absoluto de  $f$  é integrável, ou seja,  $|f|$  é integrável, dizemos que a função  $f$  é *absolutamente integrável*. Assim, podemos dar uma boa definição. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado, em particular,  $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$ . Os números  $a_n$ , para  $n \geq 0$ , e  $b_n$ , para  $n \geq 1$  dados em (2.2) e (2.3) são definidos como os coeficientes de Fourier da função  $f$ .

## 2.2 Teorema de Fourier

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, assim podemos calcular os coeficientes de Fourier pelas expressões (2.2) e (2.3).

Logo, podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

O  $\sim$  que significa que a expressão do lado direito é a *série de Fourier* de  $f$ .

Essa série pode convergir ou divergir, mais adiante veremos o que é suficiente para a convergência dessas séries. Idealmente, esperamos que essa série convirja para  $f(x)$ , entretanto isso nem sempre acontece, como já falamos, uma série pode até divergir. Veremos, no Teorema de Fourier, que uma das condições a ser exigida é que a função seja seccionalmente diferenciável, conceito que discutiremos agora.

Dizemos que  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui descontinuidade de primeira espécie no ponto  $a \in X$  quando  $f$  é descontínua no ponto  $a$  e existem os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

**Definição 2.1.** Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiver apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo limitado, dizemos que  $f$  é *seccionalmente contínua*.

Em outras palavras, a Definição 2.1, quer dizer que, dados  $a < b$ , existem  $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ ,  $j = \{1, \dots, n-1\}$ , e existem os limites

$$f(a_j+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \text{ e } f(a_j-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$$

**Exemplo 2.1.** Toda função contínua é seccionalmente contínua.

**Exemplo 2.2.** A seguinte função é seccionalmente contínua

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**Definição 2.2.** Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for seccionalmente contínua e se a função derivada  $f'$  também for seccionalmente contínua, dizemos que  $f$  é seccionalmente diferenciável.

**Exemplo 2.3.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |x|$  é seccionalmente diferenciável.



**Teorema 2.4.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  converge, em cada ponto de  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ , ou seja,*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

A demonstração deste teorema será feita no capítulo seguinte.

## 2.3 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

**Definição 2.3.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par se  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.5.** A função  $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é par.

**Exemplo 2.6.** A função  $f(x) = x^{2n}$ , com  $n \in \mathbb{Z}_+$ , é par.

**Definição 2.4.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar se  $f(x) = -f(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.7.** A função  $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é ímpar.

**Exemplo 2.8.** A função  $f(x) = x^{2n-1}$ , com  $n \in \mathbb{Z}_+$ , é ímpar.

**Proposição 2.9.** 1. *A soma de duas funções pares é uma função par.*

2. *A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*

3. *O produto de duas funções pares é uma função par.*

4. *O produto de duas funções ímpares é uma função par.*

5. *O produto de uma função ímpar por uma função par é uma função ímpar.*

**Proposição 2.10.** 1. *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par integrável em qualquer intervalo limitado. Então*

$$\int_{-L}^L f = 2 \cdot \int_0^L f$$

2. *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar integrável em qualquer intervalo limitado. Então*

$$\int_{-L}^L f = 0$$

Agora, vamos aplicar as duas proposições anteriores ao cálculo das séries de Fourier de funções pares e ímpares.

1. Se  $f$  for uma função par, periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad e \quad b_n = 0.$$

2. Se  $f$  for uma função ímpar, periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = 0 \quad e \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

**Exemplo 2.11.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e definida por  $f(x) = x$ , para  $-L \leq x \leq L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  é dada por

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De fato, como  $f$  é ímpar, pelo observado acima  $a_n = 0$  e portanto, vamos ter uma série de Fourier em senos, cujos coeficientes serão

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tome  $u = \frac{n\pi x}{L}$ , daí

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \cdot \operatorname{sen}(u) du$$

Integrando por partes, temos,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \cdot \operatorname{sen}(u) du = \frac{2L}{n^2\pi^2} \cdot \left( -u \cdot \cos(u) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y) dy \right) = \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \cdot (-n\pi \cdot \cos(n\pi)) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função  $f$  é dada por

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

**Exemplo 2.12.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e definida por  $g(x) = x^2$ , para  $-L \leq x \leq L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  é dada por

$$g(x) \sim \frac{2L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

De fato, como  $g$  é uma função par, temos uma série de cossenos cujos coeficientes são

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3} \quad e$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Usando integração por partes duas vezes, temos

$$a_n = \frac{2}{L} \left( \left[ x^2 \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \int_0^L 2x \cdot \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n,$$

Portanto, a série de Fourier associada a  $g$  é dada por

$$g(x) \sim \frac{2L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para termos a igualdade ao invés do " $\sim$ " em ambos os exemplos anteriores, precisaremos do Teorema de Fourier, iremos trabalhar com este teorema mais adiante.

## 2.4 Integração de Séries de Fourier

**Teorema 2.13.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua e seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

*sua série de Fourier. Então a série pode ser integrada termo a termo e o valor da integral da série é a integral de  $f$*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \cdot \int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right). \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que a expressão (2.4) é válida mesmo se a série de Fourier não convergir uniformemente para  $f$ , ou até mesmo se a série de Fourier não convergir para  $f$ . Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua. Definimos a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pela expressão

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \quad (2.5)$$

a qual é contínua. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que  $F'(x)$  existe em todos os pontos  $x$  onde  $f$  é contínua. Além disso,  $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$  nesses pontos. Assim,

$F'(x)$  é seccionalmente contínua. Note que  $F$  é periódica de período  $2L$ . De fato,

$$F(x + 2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

onde usamos, para escrever a última igualdade, os fatos de que  $f(t) - \frac{a_0}{2}$  é periódica de período  $2L$  e de que:

$$\int_{a-L}^{a+L} g = \int_{-L}^L g,$$

se  $g$  é uma função periódica de período  $2L$  com  $a \in \mathbb{R}$  qualquer. Temos que  $\int_{-L}^L \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = 0$ , isso acontece pois

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \Rightarrow \int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt.$$

Resumindo, a função  $F$  definida por

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

é contínua, tem derivada  $F'$  contínua por partes e é periódica de período  $2L$ . Logo, assumindo o Teorema de Fourier, temos:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + B_n \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right), \quad (2.6)$$

onde os coeficientes de Fourier  $A_n$  e  $B_n$  são dados por:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 0,$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 1.$$

Agora, vamos usar a fórmula de integração por partes para relacionar os coeficientes de Fourier da  $F$  com aqueles da  $f$ :

$$A_n = \frac{1}{L} \left[ \left[ F(x) \frac{L}{n\pi} \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right].$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\left[ F(x) \frac{L}{n\pi} \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L = 0,$$

Deste modo,

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Logo,

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} b_n, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

De maneira análoga,

$$B_n = \frac{1}{L} \left[ \left[ -F(x) \frac{L}{n\pi} \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right]$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e usando o fato de que  $F(L) = F(-L)$ , temos que

$$\left[ \left[ -F(x) \frac{L}{n\pi} \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L \right] = 0$$

Daí,

$$B_n = \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Logo,

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \quad n \geq 1. \quad (2.8)$$

Para calcular o coeficiente  $A_0$ , fazemos  $x = 0$  em (2.6) e obtemos a seguinte expressão, lembrando que  $F(0) = 0$ :

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

Logo, usando (2.7),

$$A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (2.9)$$

Agora, usando as relações (2.5), (2.6) e as expressões para os coeficientes de Fourier de  $F$ , dadas por (2.7), (2.8) e (2.9), obtemos

$$\int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + B_n \cdot \sen \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

Assim,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-L}{n\pi} b_n \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{L}{n\pi} a_n \cdot \sen \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

Logo,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-b_n}{n} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{a_n}{n} \sen \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right), \quad (2.10)$$

esta expressão também pode ser escrita, integrando termo a termo, como segue

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x a_n \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dt + \int_0^x b_n \cdot \sen \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dt \right).$$

Fazendo  $x = a$  e  $x = b$  e subtraindo as expressões obtidas, temos que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \cdot \int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right).$$

□

Em termos de aplicação, o Teorema 2.13 pode ser escrito de uma forma mais prática, esta forma é:

"Se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Então, pelas equações (2.2), (2.10) e sabendo que  $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx$ ,

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (2.11)$$

**Exemplo 2.14.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e definida por  $f(x) = x$ , para  $-L \leq x \leq L$ . Então

$$F(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

De fato, pelo Exemplo 2.11, temos que

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

isto é,

$$x \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Daí, temos

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \quad e \quad \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx = \frac{L^2}{6} \quad (2.12)$$

Logo, usando o Teorema 2.13 e substituindo (2.12) em (2.11), chegamos que

$$F(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L.$$

## 2.5 Estimativas dos Coeficientes de Fourier

Mostraremos aqui como obter algumas estimativas dos coeficientes de Fourier de uma função dada.

1. Suponha que  $f$  seja periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então podemos obter as seguintes estimativas:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx \quad e$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

isso ocorre pelo fato de que as funções seno e cosseno são limitadas em valor absoluto, por 1. Assim, com a hipótese de integrabilidade de  $f$  e  $|f|$ , temos que existe uma constante  $M$ , com

$$M = L^{-1} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \quad \text{tal que}$$

$$|a_n| \leq M \quad e \quad |b_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

2. Suponha que  $f$  seja periódica de período  $2L$ , derivável tal que a derivada  $f'$  seja integrável e absolutamente integrável. Então, integrando por partes, temos

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \left[ f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Como  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ , logo,

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.13)$$

Tomando os valores absolutos, temos

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Analogamente, temos que

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow |b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx. \quad (2.14)$$

Logo, seguindo as hipóteses, existe uma constante  $K$ , com  $K = \pi^{-1} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$ , tal que

$$|a_n| \leq \frac{K}{n} \quad e \quad |b_n| \leq \frac{K}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

3. Suponha que  $f$  seja periódica de período  $2L$  e que a primeira e segunda derivada de  $f$  seja integrável e absolutamente integrável. Usando a estimativa anterior e integrando por partes em (2.13), temos

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \left[ \left[ f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e pela paridade da função cosseno, temos que

$$\left[ f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = 0.$$

Logo,

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$$

De maneira análoga, integrando por partes em (2.14)

$$|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Portanto, temos que existe  $K$ , com  $K = L\pi^{-2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$ , tal que

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^2} \quad e \quad |b_n| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.15)$$



# 3 Convergência das Séries de Fourier

## 3.1 Classes das funções consideradas

Para poder definir os coeficientes de Fourier e os termos da série de Fourier de uma função  $f$ , as hipóteses mínimas sobre tal função são periodicidade, integrabilidade e integrabilidade absoluta em  $[-L, L]$ . Vale destacar que a integral que usamos neste trabalho é a integral de Riemann.

Considere  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida num intervalo limitado  $[a, b]$ . Temos dois casos:

1. A função  $f$  é limitada. Neste caso, função é integrável se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores.
2. A função  $f$  não é limitada. Neste caso,  $f$  é integrável se o intervalo  $[a, b]$  puder ser decomposto em um número finito de intervalos  $I_1, \dots, I_n$ , com  $I_k = [a_k, b_k]$ , tais que para todos  $\delta > 0$  e  $\delta' > 0$ , a função  $f$  é limitada e integrável em  $[a_k + \delta, b_k - \delta']$  e os seguintes limites existem

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta' \rightarrow 0} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x) dx.$$

Neste caso, a integral imprópria de  $f$  é

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx.$$

Diremos que a função  $f$  é absolutamente integrável se o valor absoluto  $|f|$  for integrável num dos dois sentidos mencionados acima. Funções seccionalmente contínuas no intervalo  $[a, b]$  são limitadas e integráveis no caso 1.

Listaremos agora algumas propriedades que relacionam integrabilidade e integrabilidade absoluta. Esses fatos podem ser vistos em (3) Capítulo 3.

**Propriedades:** 1) Se  $f$  for integrável e limitada, então  $f$  será absolutamente integrável. A recíproca não é verdadeira. Um contra exemplo é a função de Dirichlet

$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2) Se  $f$  não for limitada, a integrabilidade de  $f$  não implica em integrabilidade absoluta.

**Definição 3.1.** Uma função  $f$  é chamada  $\mathcal{L}^1$ , quando  $f$  e  $|f|$  são integráveis.

**Proposição 3.1.** Se  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função  $\mathcal{L}^1$ , então os coeficientes de Fourier de  $f$  estarão bem definidos.

*Demonstração.* De fato, note que os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Como  $f$  é uma função  $\mathcal{L}^1$ , temos que  $f$  é integrável e absolutamente integrável. Portanto, os coeficientes de Fourier de  $f$  estão bem definidos.  $\square$

**Proposição 3.2.** Seja  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  uma partição do intervalo  $[a, b]$  e sejam  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$ . Considere  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\phi(x) = m_j$ , se  $x_{j-1} \leq x < x_j$ . Então, para cada  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  (suficientemente próximo de  $\frac{\pi}{2}$ ), existe  $\psi_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_\alpha(a) = \psi_\alpha(x_1) = \dots = \psi_\alpha(b) = 0$ , tal que  $\int_a^b |\psi(t) - \psi_\alpha(t)| = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\operatorname{tg}(\alpha)}$ .

*Demonstração.* Para fixar ideias, consideremos um caso com  $k = 4$  e uma  $\psi_\alpha$ . Daí, temos um trapézio de base  $(a, 0)$  até  $(0, x_1)$ .

Logo,

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{m_1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{m_1}{\operatorname{tg}(\alpha)}.$$

Portanto, a área do triângulo é

$$A_1 = \frac{m_1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \frac{m_1}{2} = \frac{m_1^2}{2\operatorname{tg}(\alpha)}$$

Observe que  $\int_{x_0}^{x_1} |\phi(t) - \psi_\alpha(t)| dt = \frac{m_1^2}{\operatorname{tg}(\alpha)}$  é 2 vezes a área  $A_1$ . Ou seja,

$$\int_{x_0}^{x_1} |\phi(t) - \psi_\alpha(t)| dt = \frac{m_1^2}{\operatorname{tg}(\alpha)}.$$

De maneira peculiar, temos

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |\phi(t) - \psi_\alpha(t)| dt = \frac{m_j^2}{tg(\alpha)}.$$

Por conseguinte,

$$\int_a^b |\phi(t) - \psi_\alpha(t)| = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{tg(\alpha)}.$$

Como queríamos demonstrar.

□

**Teorema 3.3.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{L}^1$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \epsilon \quad e \quad \psi(a) = \psi(b) = 0.$$

*Demonstração.* Dividiremos essa demonstração em duas partes, a primeira com  $f$  limitada e a segunda com  $f$  não limitada.

(Parte 1) Primeiramente, suponha que  $f$  seja limitada e integrável. Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \quad \text{tal que}$$

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (3.1)$$

em que  $m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ .

Agora, tome  $\phi(x)$  a função definida por

$$\phi(x) = m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j.$$

Não é difícil verificar que  $\phi$  é integrável e que

$$\int_a^b \psi(x) dx = \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}).$$

Então, podemos ver (3.1) como

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \phi(x)] dx < \frac{\epsilon}{2} \quad (3.2)$$

Temos que a partição tem  $k$  pontos e, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , consideramos uma função  $\psi_\alpha$ . Pela Proposição anterior, temos que

$$\int_a^b |\phi(x) - \psi_\alpha(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{tg(\alpha)} \quad (3.3)$$

Seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , logo  $m_j \leq M$ , e de (3.3) obtemos

$$\int_a^b |\phi(x) - \psi_\alpha(x)| dx \leq \frac{kM^2}{tg(\alpha)}.$$

Uma vez que o  $k$  está fixado, existe um  $\alpha$  tal que

$$\int_a^b |\phi(x) - \psi_\alpha(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.4)$$

Somando (3.2) e (3.4), chegamos que dado  $\epsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_\alpha(a) = \psi_\alpha(b) = 0$  tal que

$$\int_a^b [f(x) - \phi(x)] dx + \int_a^b |\phi(x) - \psi_\alpha(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

logo,

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi_\alpha(x) dx < \epsilon$$

daí,

$$\int_a^b |f(x) - \psi_\alpha(x)| dx < \epsilon.$$

(Parte 2) Suponha agora, que  $f$  não seja limitada, mas seja integrável e absolutamente integrável no sentido das integrais impróprias. Além disso, suponha que  $f$  é ilimitada apenas nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ . Deste modo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.5)$$

Como  $f$  é limitada e integrável em  $[a + \delta, b - \delta]$  pela parte anterior, existe uma função contínua  $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$  tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.6)$$

Considere a função  $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{se } a + \delta \leq x \leq b - \delta \\ 0, & \text{se } a \leq x < a + \delta \text{ e } b - \delta < x \leq b. \end{cases}$$

Daí, temos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx.$$

Como

$$\int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx,$$

de (3.5) e (3.6), temos que

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx < \epsilon.$$

Isso completa a demonstração.  $\square$

**Corolário 3.4.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{L}^1$ . Então existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

**Corolário 3.5.** *Suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função periódica de período  $2L$  e  $\mathcal{L}^1$  em  $[-L, L]$ . Então existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódicas de período  $2L$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

*Demonstração.* Suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja periódica de período  $2L$ , daí, vamos considerar  $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Como  $f$  é  $\mathcal{L}^1$  em  $[-L, L]$ , pelo Teorema (3.3), dado  $\epsilon > 0$ , existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pela periodicidade, de modo que

$$\left| \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx \right| < \epsilon, \quad \forall n.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

$\square$

## 3.2 Convergência Pontual da Série de Fourier

Nesta seção, vamos ver algumas condições suficientes sobre a função  $f$  que garanta a convergência da série de Fourier num ponto fixado  $x$ . Faremos também outra hipótese sobre o comportamento de  $f$  nas vizinhanças do ponto  $x$ .

Para tanto, vamos fazer estimativas do valor

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad (3.7)$$

$$\text{onde } s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \cdot \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right),$$

$$f(x+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \quad \text{e} \quad f(x-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$$

Escreveremos a soma parcial  $s_n(x)$  de forma mais conveniente com o propósito de termos majorações para  $e_n(x)$ . Pelas expressões dos coeficientes de Fourier e a identidade trigonométrica  $\text{sen}(a)\text{sen}(b) + \cos(a)\cos(b) = \cos(a-b)$ , temos que

$$s_n(x) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy. \quad (3.8)$$

A expressão abaixo é conhecida como o núcleo de Dirichlet.

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \quad (3.9)$$

essa expressão tem algumas propriedades interessantes, como

1.  $D_n(x)$  é uma função par, pois é soma de funções pares;
2. Usando as relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno, temos  $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 2 \left[ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{L}{n\pi} \right]_0^L = 0$ , logo
 
$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1;$$
3.  $D_n(x)$  é uma função contínua, pois é soma de funções contínuas;
4.  $D_n(x)$  é uma função periódica de período  $2L$ , pois é soma de funções periódicas de período  $2L$ ;
5.  $D_n(0) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{L}$ ;
6. Vale a seguinte expressão compacta de  $D_n(x)$ , para  $x \neq 2mL$ , com  $m \in \mathbb{N}$

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \left( \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \right). \quad (3.10)$$

Mostraremos que a propriedade 6 é válida. De fato, considere a expressão

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$$

Usando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta), \text{ temos}$$

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left( 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right).$$

Além disso, por indução se prova que

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

Logo, temos

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left( 1 + \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right)$$

para todo  $\theta \neq 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Daí, pela fórmula de Euler segue

$$S_n(\theta) = \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right)}{2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)}.$$

Usando essa equação em (3.9), concluímos a demonstração.

Voltando a (3.8), usando (3.9) e (3.10) e fazendo a mudança de variável  $y = x - t$ , temos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x - y) f(y) dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t) f(x - t) dt.$$

Como  $D_n$  e  $f$  são periódicas de período  $2L$ , podemos escrever  $s_n$  como

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x - t) dt. \quad (3.11)$$

Além disso, como  $D_n(t)$  é par, fazendo uma mudança de variável  $\tilde{t} = -t$ , temos

$$\int_{-L}^0 D_n(\tilde{t}) f(x - \tilde{t}) dt + \int_0^L D_n(t) f(x - t) dt = \int_0^L D_n(t) [f(x + t) + f(x - t)] dt,$$

assim, (3.11) pode ser escrita como

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x + t) + f(x - t)] dt$$

disto, e do fato de que  $\int_0^L D_n(t)dt = \frac{1}{2}$ , a expressão  $e_n(x)$  dada em (3.7) ganha a seguinte forma

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt + \int_0^L D_n(t)dt(f(x+) + f(x-))$$

$\Rightarrow$

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x+)] + [f(x-t) - f(x-)]\}dt.$$

Daí, definimos a função

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x+)] + [f(x-t) - f(x-)],$$

para adiante, enunciarmos um resultado importante sobre a convergência da série de Fourier no ponto  $x$ , que é o Teste de Dini. Para demonstrarmos tal resultado precisamos do seguinte Lema de Riemann-Lebesgue, que é dado por

**Lema 3.6.** (Riemann-Lebesgue) *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{L}^1$  em um intervalo  $[a, b]$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0 \quad e$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0.$$

*Demonstração.* Dividiremos essa demonstração em duas partes, a primeira com  $f$  limitada e a segunda com  $f$  não limitada.

(Parte 1) Primeiramente, suponha que  $f$  seja limitada, daí, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M, \forall x \in [a, b]$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $\pi$  do intervalo  $[a, b]$  tal que

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

$$\text{onde } S[f, \pi] - s[f, \pi] < \frac{\epsilon}{2}.$$

$S[f, \pi]$  corresponde a soma superior da partição  $\pi$  em  $[a, b]$  e  $s[f, \pi]$  corresponde a soma inferior da partição  $\pi$  em  $[a, b]$ , isto é,

$$S[f, \pi] = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \quad e$$



$$s[f, \pi] = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j].$$

Considere a partição determinada pelos pontos  $x_j = a + \frac{j}{n(b-a)}$ , com  $j = 1, \dots, n$ . Então

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx. \quad (3.12)$$

Note que

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| \left[ \frac{-\cos(tx)}{t} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} \right| \leq \frac{2}{t}, \quad (3.13)$$

e que

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j. \quad (3.14)$$

Usando (3.13) e (3.14) em (3.12), e a limitação  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , obtemos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Portanto,

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + [S[f, \pi] - s[f, \pi]].$$

Lembre que

$$S[f, \pi] - s[f, \pi] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, como  $n$  é fixado, podemos escolher  $t_0$  tal que

$$\frac{2nM}{t_0} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , temos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

(Parte 2) Agora, suponha que  $f$  seja uma função  $\mathcal{L}^1$  qualquer. Daí, dado  $\epsilon > 0$ , usando o Teorema (3.3), tome uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.15)$$

Agora, como toda função contínua num compacto é limitada e integrável, podemos aplicar a Parte 1 da demonstração e concluir que existe  $t_0$  tal que, para  $t \geq t_0$ , temos

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.16)$$

Como

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx,$$

logo,

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx$$

Logo, de (3.15) e (3.16), dado  $\epsilon > 0$ , existe  $t_0$ , tal que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0.$$

De forma análoga, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0.$$

□

**Teorema 3.7.** (Teste de Dini) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e  $\mathcal{L}^1$  em  $[-L, L]$ . Seja  $x$  fixado em  $[-L, L]$ . Suponha que  $f(x+)$  e  $f(x-)$  existam e que exista  $\eta > 0$  tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty.$$

Então  $e_n(x) \rightarrow 0$  e  $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Inicialmente, vamos decompor  $e_n(x)$  em duas partes,

$$e_n(x) = \int_0^\delta D_n(t) g(x, t) dt + \int_\delta^L D_n(t) g(x, t) dt,$$

usando (3.10), obtemos,

$$e_n(x) = \int_0^\delta t \cdot D_n(t) \cdot \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \cdot \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} dt. \quad (3.17)$$

Note que, de (3.10),

$$|t D_n(t)| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}, \quad 0 < t \leq L. \quad (3.18)$$

Como a expressão direita de (3.18) é contínua e crescente em  $(0, L]$ , temos que (3.18) tem máximo em  $L$ , logo

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad t \in [0, L].$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta < \min(L, \eta)$  tal que

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t) \cdot \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\epsilon}{2} \quad (3.19)$$

Além disso, como  $\delta$  é fixado, para aplicarmos o Lema de Riemann-Lebesgue na segunda integral de (3.17), basta verificarmos se

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}, \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável. Isso é verdade, pois o denominador nunca se anula em  $[\delta, L]$  e  $g$  é integrável.

Portanto, para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\left| \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \cdot \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.20)$$

De (3.19) e (3.20), chegamos que, para  $n$  suficientemente grande

$$\left| \int_0^\delta t \cdot D_n(t) \cdot \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \cdot \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} dt \right| < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0, \quad \text{equivalentemente,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

□

**Teorema 3.8.** (Teorema de Fourier) *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  converge, em cada ponto de  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ , ou seja,*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

*Demonstração.* Suponha que  $f$  é uma função seccionalmente contínua e periódica de período  $2L$ , então  $f$  é  $\mathcal{L}^1$  em  $[-L, L]$ . De fato, como  $f$  é seccionalmente contínua então  $f$  é limitada e integrável. Logo, pela Propriedade 1 do início do capítulo,  $f$  é  $\mathcal{L}^1$ .

Além disso, como  $f$  é seccionalmente contínua,  $f(x+)$ ,  $f(x-)$  existem. E como  $f$  é seccionalmente diferenciável, então existe  $\eta > 0$  tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt = \int_0^\eta \left| \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \right| dt < \infty.$$

De fato, como  $f$  é seccionalmente diferenciável, temos que  $f'$  é seccionalmente contínua.

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} = f'_+(x),$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} = f'_-(x),$$

existem.

Logo,  $\frac{f(x+t) - f(x+)}{t}$  e  $\frac{f(x-t) - f(x-)}{t}$  são limitadas para  $t$  suficientemente pequeno. Isto implica que  $\frac{g(x, t)}{t}$  é limitada num intervalo  $(0, \eta)$  e é integrável, pois  $f$  é integrável. Daí, existe  $\eta > 0$  pequeno tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty.$$

Portanto, segue do Teste de Dini que

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

□

### 3.3 Desigualdade de Bessel

**Definição 3.2.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de *quadrado integrável* se  $f$  e  $|f|^2$  forem integráveis. Usaremos a nomenclatura função  $\mathcal{L}^2$  para designar tal função.

Temos algumas propriedades envolvendo as funções  $\mathcal{L}^2$ , que podem ser encontradas na Seção 3.5 de (3).

1. Se  $f$  for limitada e integrável, então  $f$  será de quadrado integrável e

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a),$$

onde  $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ .

2. Caso a função  $f$  não seja limitada,  $f$  pode ser  $\mathcal{L}^1$ , mas não  $\mathcal{L}^2$ . Por exemplo,

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} = 2; \int_0^1 |x^{-\frac{1}{2}}|^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = +\infty.$$

3. Seja  $f$ , definida em um intervalo limitado, uma função  $\mathcal{L}^2$ , então  $f$  é  $\mathcal{L}^1$ .

Vamos mostrar a propriedade 3. Para isso, usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais, provaremos esse resultado mais adiante. A desigualdade diz o seguinte: "Sejam  $f$  e  $g$  funções de quadrado integrável num intervalo  $[a, b]$ , então  $fg$  é absolutamente integrável e

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

*Demonstração.* Para demonstrarmos 3, usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais.

Daí, basta considerar  $g(x) \equiv 1$  em (3.21), assim temos

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

□

**Definição 3.3.** Uma sucessão  $(f_n)$  de funções de quadrado integráveis, em um intervalo  $[a, b]$ , converge em *média quadrática*, para uma função  $f$  de quadrado integrável se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Onde a expressão

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$

é chamada o *erro médio quadrático*, na aproximação de  $f$  por  $f_n$ .

**Proposição 3.9.** *Seja  $f$  uma função de quadrado integrável. Considere um polinômio trigonométrico arbitrário de ordem  $n$*

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( c_k \cdot \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + d_k \cdot \text{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right)$$

e denote por

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \quad e \quad \hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx,$$

em que  $s_n(x)$  denotam as reduzidas da série de Fourier de  $f$ . Então  $e_n \leq \hat{e}_n$ . Em outras palavras, as reduzidas  $s_n(x)$  da série de Fourier são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam  $f$  em média quadrática.

*Demonstração.* Inicialmente, vamos calcular  $\hat{e}_n$  usando as relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno e as expressões dos coeficientes de Fourier, daí

$$\hat{e} = \frac{L}{2}c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - La_0c_0 - 2L \sum_{k=1}^n (a_kc_k + b_kd_k) \quad (3.22)$$

Completando quadrados, temos que

$$\hat{e} = \frac{L}{2}c_0^2 - La_0c_0 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) - 2L \sum_{k=1}^n (a_kc_k + b_kd_k) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Logo,

$$\hat{e} = \frac{L}{2}(c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L}{2}a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Deste modo, o menor valor de  $\hat{e}_n$  será quando

$$c_0 = a_0, c_k = a_k, d_k = b_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Neste caso, vemos que  $\hat{e}_n$  coincide com  $e_n$ , pois seus coeficientes são iguais. Logo,  $e_n \leq \hat{e}_n$ . □

Chamamos de  $\mathcal{L}^2$  o espaço das funções  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  que são de quadrado integrável. Na seção seguinte mostraremos que se  $f$  e  $g$  são de quadrado integrável então  $f + g$  também é, este resultado é proveniente da desigualdade de Minkowski. Além disso, também mostraremos que se  $f$  for de quadrado integrável e  $\alpha$  for uma constante então  $\alpha f$  também será de quadrado integrável.

Com isso, temos que  $\mathcal{L}^2$  é um espaço vetorial. As funções  $1$ ,  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$  são de  $\mathcal{L}^2$ , pois são integráveis e limitadas em  $[-L, L]$ . Para cada  $n$ , as funções acima geram um subespaço vetorial  $E_n$  de  $\mathcal{L}^2$ .

Note que tanto  $s_n(x)$  como  $t_n(x)$  pertencem a  $E_n$ . No espaço  $\mathcal{L}^2$  podemos definir uma norma pela expressão

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Para garantir que é uma norma de fato, basta usar a desigualdade de Minkowski, que veremos na próxima seção. Assim,  $\mathcal{L}^2$  se torna um espaço normado, logo, temos uma relação de distância entre duas funções  $f, g \in \mathcal{L}^2$ :  $\|f - g\|_2$ .

Na Proposição 3.9 mostramos que  $s_n(x)$  é o elemento de  $E_n$  que mais se aproxima de  $f$ . De fato, em  $\mathcal{L}^2$  temos uma noção de ortogonalidade:  $f$  e  $g$  são ortogonais em  $\mathcal{L}^2$  se

$$\int_{-L}^L f(x)g(x)dx = 0.$$

Daí, usando essa noção, definimos a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $E_n$ , como sendo o elemento  $g \in E_n$ , de modo que  $f - g$  é ortogonal a todo  $h \in E_n$ . Assim, afirmamos que  $s_n$  é a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $E_n$ . Para tanto, note que temos

$$\int_{-L}^L (f - s_n)\varphi = 0,$$

onde  $\varphi = 1, \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right), j = 1, \dots, n$ .

Para estabelecer a desigualdade de Bessel, que é a desigualdade (3.23) enunciada a seguir, observe que  $\hat{e}_n \geq 0$ , para quaisquer que sejam os coeficientes  $c_n$  e  $d_n$ . Em particular, tomando  $c_n = a_n$  e  $d_n = b_n$ , então  $\hat{e}_n = e_n$  e (3.22) se torna

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Logo,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

Como a desigualdade acima vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , logo

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx, \quad (3.23)$$

onde a expressão (3.23) é conhecida como *desigualdade de Bessel*.

## 3.4 Desigualdade de Cauchy Schwarz

**Proposição 3.10.** *Sejam  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  dois vetores do  $\mathbb{R}^n$ . Então a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do  $\mathbb{R}^n$  tem a seguinte forma:*

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Demonstração.* Considere a expressão

$$\sum_{j=1}^n (a_j + tb_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^n a_j b_j + t^2 \sum_{j=1}^n b_j^2$$

Note que o termo do lado esquerdo da equação é maior ou igual a zero, para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso, o membro direito é um trinômio do segundo grau em  $t$ , temos que esse trinômio também é maior ou igual a zero, desta forma, seu discriminante da fórmula de Bháskara é menor ou igual a zero, logo

$$\begin{aligned} \left( 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 - 4 \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right) &\leq 0, \\ 4 \left( \sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 &\leq 4 \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right), \\ \left( \left( \sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| &\leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. □

**Proposição 3.11.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de quadrado integrável. Então a desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções de quadrado integrável tem a forma:*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Demonstração.* A demonstração é análoga a da Proposição anterior. Considere a expressão

$$\int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

Como o termo do lado direito da equação é um trinômio de grau 2 em  $t$ , e como esse trinômio é maior ou igual a zero, pois o termo do lado esquerdo é  $\geq 0$ . Segue que seu discriminante da fórmula de Bháskara é menor ou igual a zero. Logo

$$\left[ 2 \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - 4 \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_a^b |g(x)|^2 dz \right) \leq 0,$$



$$4 \left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq 4 \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right),$$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Como queríamos demonstrar.

□

### 3.5 Desigualdade de Minkowski

A seguinte desigualdade é conhecida como a desigualdade triangular ou desigualdade de Minkowski:

$$\left[ \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

O nome desigualdade triangular vem do fato de que

$$\|a\| = \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

é o módulo do vetor  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* (Desigualdade triangular no  $\mathbb{R}^n$ ) A demonstração segue da identidade

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j + \sum_{j=1}^n b_j^2.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2 \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n b_j^2 = \left( \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Portanto,

$$\left[ \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

que completa a demonstração

□

**Proposição 3.12.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções de quadrado integrável.*

*Então a desigualdade de Minkowski é válida:*

$$\left[ \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Demonstração.* Para demonstrar a desigualdade acima, vamos usar a seguinte identidade

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções de quadrado integrável, temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx &\leq \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b |g(x)|^2 dx \\ &= \left( \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[ \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

□

**Teorema 3.13.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de quadrado integrável. Então existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

*Demonstração.* (Parte 1) Primeiramente, suponha que  $f$  seja limitada. Como  $f$  é de quadrado integrável, temos que  $f$  é absolutamente integrável, pela desigualdade

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ com } g \equiv 1,$$

que é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Pelo Teorema 3.3, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\psi(a) = \psi(b) = 0$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \epsilon.$$

Pela construção da função  $\psi$  no Teorema 3.3, temos que  $|\psi(x)| \leq M$ , onde  $M \in \mathbb{R}$  é tal que

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Logo, pelas majorações de  $f$  e  $\psi$ , temos

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx \leq 2M \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < 2M\epsilon.$$

(Parte 2) Suponha que  $f$  não seja limitada. Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $f$  é ilimitada nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3} \quad e \quad (3.24)$$

$$\int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.25)$$

Usando a Parte 1 da demonstração, determine a função  $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tal que  $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$  e

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.26)$$

Daí, defina

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x < a + \delta \\ \psi(x), & \text{se } a + \delta \leq x \leq b - \delta \\ 0, & \text{se } b - \delta < x \leq b. \end{cases}$$

Por (3.24), (3.25) e (3.26), segue que

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Isto conclui a demonstração. □

**Corolário 3.14.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e de quadrado integrável em  $[-L, L]$ . Então existe uma sucessão  $(\psi_n)$  de funções contínuas  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódicas de período  $2L$ , com  $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

## 3.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier

Nesta seção, estudaremos condições suficientes sobre a função  $f$  periódica de período  $2L$  que garantam a convergência uniforme da sua série de Fourier. Para tanto, vamos aplicar o teste M de Weierstrass Teorema 1.3. Como

$$\left| a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |a_n| \quad e \quad \left| b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |b_n|,$$

pelo teste M de Weierstrass para

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left| a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| + \left| b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \right)$$

convergir, basta a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad (3.27)$$

convergir. Note que utilizando as desigualdades (2.15) da sessão sobre as estimativas dos coeficientes de Fourier, se a função  $f$  tem derivada primeira contínua e a segunda derivada seja  $\mathcal{L}^1$ , então a série (3.27) é majorada pela série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

como essa é uma série convergente, pelo critério da comparação, a série em (3.27) converge.

**Teorema 3.15.** (1º teorema sobre a convergência uniforme da série de Fourier) *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com primeira derivada  $\mathcal{L}^1$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  seja contínua e que a primeira derivada seja  $\mathcal{L}^1$ . Daí, usando as relações que vimos na seção das estimativas dos coeficientes de Fourier,

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad e$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

temos que

$$a_n = \frac{-L}{n\pi} b'_n \quad e \quad b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n,$$

em que  $a'_n$  e  $b'_n$  correspondem aos coeficientes de Fourier de  $f'$ . Portanto, temos que a reduzida de ordem  $n$  é dada por

$$\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|),$$

a qual, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, é majorada por

$$\frac{L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

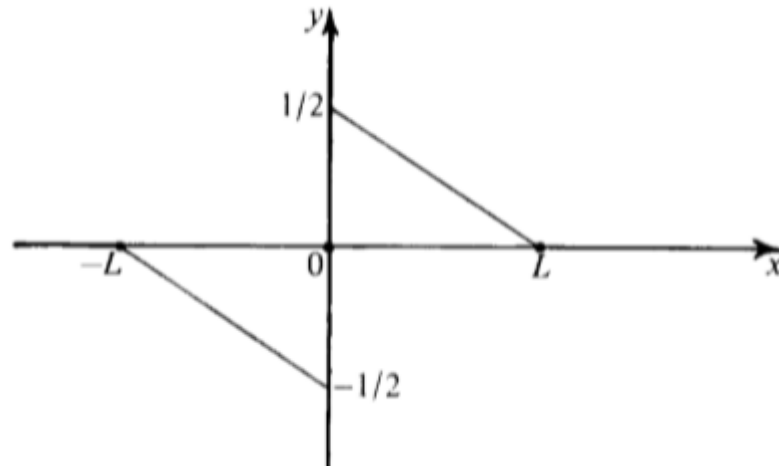


Figura 1 – Gráfico de  $\psi$  em  $[-L, L]$ , imagem retirada do (3)

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , usando-a no último somatório, temos a seguinte expressão, que majora a anterior,

$$\frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como é válido para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ , temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} (|a_j| + |b_j|) \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que a primeira série do lado direito é convergente, e a segunda série converge pela desigualdade de Bessel.

Portanto, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente.

□

**Lema 3.16.** *Seja  $\psi$  uma função periódica de período  $2L$ , definida da seguinte forma*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right), & \text{se } -L \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{se } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Então, a série de Fourier de  $\psi$  converge uniformemente para  $\psi$  em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma  $2Ln$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Inicialmente, vamos calcular a série de Fourier da função  $\psi$ . Como é uma função ímpar, pois  $\psi(-x) = -\psi(x)$ , para todo  $x \in [-L, L]$ , temos uma série de senos e os

coeficientes são calculados da seguinte forma:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{-L}{n\pi} \cdot \cos \left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{1}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{n\pi}.$$

Deste modo, a série de Fourier da função  $\psi$  é dada por

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.28)$$

Queremos mostrar que, para qualquer  $\delta > 0$ , a série acima converge uniformemente em  $x$  onde  $0 < \delta \leq |x| \leq L$ . Para tanto, basta mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta))$$

converge uniformemente para  $\theta \in [\epsilon, \pi]$ , com  $\epsilon > 0$  qualquer, pois a série de Fourier de  $\psi$  é obtida tomando-se a parte imaginária da série acima e fazendo  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ . Seja

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta},$$

assim,

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \cdot (E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)). \quad (3.29)$$

Reescalando o somatório, com  $j = k - 1$ , obtemos

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta) \quad (3.30)$$

Logo, de (3.29) e (3.30), segue que

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \cdot (E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)) = \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \quad (3.31)$$

Daí, usando um argumento semelhante ao que usamos para encontrar  $S_n(\theta)$  na demonstração de uma das propriedades do Núcleo de Dirichlet na seção 3.2, temos para  $0 < \theta < 2\pi$ , que o  $E_n(\theta)$  é dado por

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(m+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

daí,

$$|E_n(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}|} = \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Logo, de (3.31) segue que

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Assim, temos que, para  $0 < \epsilon \leq \theta \leq \pi$

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \cdot \text{sen} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)}.$$

Logo, pelo critério de Cauchy, temos que a série (3.31) converge uniformemente.

□

Note que o 1º teorema sobre a convergência uniforme da série de Fourier pede que a função seja contínua em toda reta. Porém, permite que a primeira derivada seja descontínua, mesmo que se torne ilimitada nas vizinhanças de pontos isolados. Se  $f$  for descontínua em um ponto  $x_0$ , a série de Fourier não pode convergir uniformemente, para  $f$  em nenhum intervalo que contenha  $x_0$ . Uma vez que temos que o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua. Logo, para se ter a convergência uniforme da série de Fourier em toda a reta, a função  $f$  tem que ser necessariamente contínua. Entretanto, vamos mostrar no seguinte teorema que, se  $f$  for contínua num intervalo  $[a, b]$  então a série de Fourier da  $f$  converge uniformemente para  $f$ .

**Teorema 3.17.** (*2º teorema sobre convergência uniforme da série de Fourier*) *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e com primeira derivada  $\mathcal{L}^1$ . Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidades de  $f$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x_1, \dots, x_n$  pontos do intervalo  $[-L, L)$ , onde  $f$  é descontínua, e sejam  $w_1, \dots, w_k$  os saltos da  $f$  nos pontos de descontinuidade, ou seja,  $w_j = f(x_j+) - f(x_j-)$ . Logo, a função  $w_j\psi(x - x_j)$  é descontínua em pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ , com  $n \in \mathbb{Z}_+$  e o salto nesses pontos é  $w_j$ . Então a função  $f(x) - w_j\psi(x - x_j)$  é contínua em  $x_j$  e em todos os pontos onde  $f$  é contínua.

Desse modo, temos uma função com menos descontinuidades que a função original  $f$ . Para eliminarmos todas as descontinuidades, repetimos o processo  $k$  vezes, daí, temos

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j)$$

que é contínua para todo  $x$ . Portanto, aplicamos o 1º teorema sobre a convergência uniforme da série de Fourier. Daí, temos que a série de Fourier de  $g$  converge uniformemente para  $g$ , para toda reta.

Pelo Lema (3.16), a série da função  $\psi(x - x_j)$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ .

Como a série de Fourier da função  $f$  é a soma das séries de Fourier de  $g$  e  $w_j\psi(x - x_j)$ , para  $j = 1, \dots, k$ , segue que ela converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ , com  $j = 1, \dots, k$  e  $n \in \mathbb{Z}_+$  que são justamente os pontos de descontinuidade da  $f$ .

□

O seguinte teorema trata a respeito da unicidade da Série de Fourier, por questão de brevidade, ele não será demonstrado aqui. Entretanto, sua demonstração pode ser encontrada em (3) no Capítulo 3, na Seção 3.7.

**Teorema 3.18.** (*Unicidade da Série de Fourier*) *Sejam  $f$  e  $g$  funções periódicas de período  $2L$  e de quadrado integrável em  $[-L, L]$ . Suponha que suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então  $f = g$ , isto é,  $f(x) = g(x)$ , para todo ponto de continuidade de  $f$  e  $g$ .*



## 4 Equação da onda

Neste capítulo, vamos aplicar os conceitos de séries de Fourier estudados nos capítulos 2 e 3 para solucionarmos problemas envolvendo a Equação da Onda.

### 4.1 Equação da Corda Vibrante

Nesta seção iremos estudar o problema das pequenas vibrações transversais de uma corda perfeitamente flexível. Tal fenômeno acontece em um plano  $(x, u)$  e supomos que a corda vibra em repouso ao longo do eixo  $x$ . Deste modo, temos a hipótese de que a corda se desloque apenas na direção do eixo  $u$ , daí temos a nomenclatura vibração transversal. Além disso, supomos também que tal corda não ofereça resistência ao ser dobrada, daí o nome flexível.

Para deduzirmos a Equação da Onda, suponha que uma corda elástica de comprimento  $L$  está esticada no mesmo nível horizontal com o eixo  $x$  ao longo da corda. Suponha ainda que a corda é colocada em movimento de modo que vibra em um plano vertical. Considere as forças que agem em um pequeno elemento da corda de comprimento  $\Delta x$ , entre os pontos  $x$  e  $x + \Delta x$ . Cada ponto da corda só se move em uma reta vertical. Denotamos por  $u(x, t)$  o movimento vertical no ponto  $x$  e no instante  $t$ . Além disso, denotaremos por  $T(x, t)$  a tensão na corda, e por  $\rho$  a massa da corda por unidade de comprimento. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao elemento  $\Delta x$  da corda, diz que a força externa total, tem que ser igual ao produto da massa do elemento pela aceleração de seu centro de massa.

**Componentes Horizontais:** uma vez que não há aceleração horizontal, as componentes horizontais satisfazem (ver figura 2)

$$T(x + \Delta x, t)\cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\cos(\theta) = 0.$$

Denote por  $H$  as componentes horizontais,  $H$  independe de  $x$ .

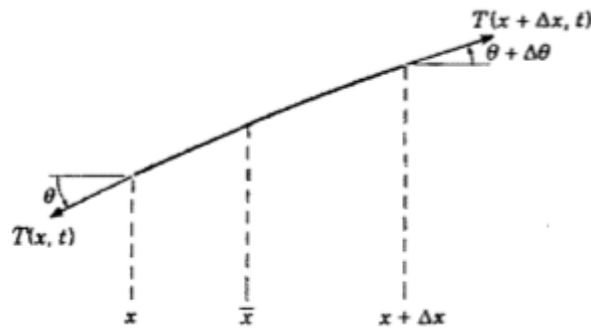


Figura 2 – Segmento da corda com condições dadas anteriormente. Imagem retirada do (1).

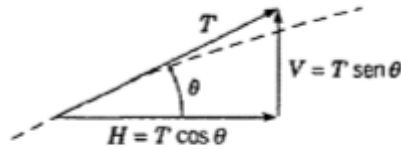


Figura 3 – Tensão em componentes. Imagem retirada do (1).

**Componentes verticais:** as componentes verticais satisfazem

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

O peso da corda, que age verticalmente para baixo é desprezado. Denote a componente vertical  $T$  por  $V$ , assim, podemos ver a equação da componente vertical como

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

Tomando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , temos

$$V_x(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t). \quad (4.1)$$

Note que

$$V(x, t) = H(t) \tan(\theta) = H(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), temos

$$\frac{\partial(H(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t))}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$

Como  $H$  independe de  $x$ , temos

$$H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Para movimentos pequenos, podemos substituir  $H = T \cos(\theta)$  por  $T$ . Assim, temos a equação da onda

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

O coeficiente constante  $c^2$  da equação da onda é dado por

$$c^2 = \frac{T}{\rho},$$

onde  $T$  é a tensão na corda e  $\rho$  corresponde a massa por unidade de comprimento do material da corda.

No caso em que a corda está sob a ação de forças externas, podemos ver a equação da onda da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t, u). \quad (4.3)$$

Exemplos de equação da onda apresentadas em (3) Seção 5.1, de acordo com o tipo de forças externas:

1. **Vibrações livres:** Suponha que as únicas forças que atuam na corda sejam as de tensão. Neste caso, a equação (4.3) se torna

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

com  $c$  constante.

2. **Vibrações forçadas:** Suponha que a corda esteja sujeita a uma força exterior que dependa do  $x$  e  $t$ . Então a equação (4.3) se torna

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t).$$

3. **Vibrações amortecidas:** Suponha que a corda esteja concentrada em um fluido, o qual opõe uma resistência ao movimento. Neste caso, temos uma força externa que depende da velocidade. Suponha que  $h(x, t) = -bu_t(x, t)$ , com  $b > 0$ . Assim, a equação (4.3) se torna

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - bu_t \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial t}.$$

4. **Vibrações sob a ação de uma força restauradora:** Suponha que exista uma força restauradora produzida por um dispositivo no qual faz a corda tender para a posição zero, e que essa força seja dada por  $h(x, t) = -au(x, t)$ . Então, temos que

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - au.$$

Agora, vamos tratar sobre a extensão da corda, sobre o tipo de articulação das extremidades e como ocorreu o início do processo vibratório da corda. Para tanto, consideremos alguns casos:

1. **Corda finita com extremidades fixas:** Suponha que uma corda tenha comprimento  $L$ , e que, quando em repouso, esteja sobre o eixo  $x$  entre 0 e  $L$  no plano  $(x, u)$ . Deste modo, a hipótese das extremidades fixas implica que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0,$$

essas condições são chamadas condições de fronteira. Além disso, temos o deslocamento inicial da corda, que é representado por  $u(x, 0)$ , assim como a velocidade inicial da corda, que é representada por  $u_t(x, 0)$ , logo

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) = g(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

que são chamadas de condições iniciais. O problema da corda vibrante finita, com extremidades fixas, consiste em determinar uma função  $u(x, t)$ , para  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ , que satisfaça a equação da onda, as condições de fronteira e as condições iniciais. Um problema deste tipo é conhecido como um problema de valor inicial e de fronteira (PVIF).

2. **Corda finita com extremidades livres:** Neste caso, a corda de comprimento  $L$ , tem suas extremidades forçadas a não se afastarem de trilhos colocados perpendicularmente a corda no plano  $(x, u)$  onde a corda vibra. Assim, temos

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

como condições de fronteira do problema. As condições iniciais permanecem as mesmas do problema anterior.

3. **Outras condições de fronteira:** Além dos dois casos anteriores, podemos ter outros casos, como o de vibrações de uma corda cujas extremidades se movem, de acordo com leis conhecidas. Por exemplo,

$$u(0, t) = a(t), u(L, t) = b(t), t \geq 0.$$

## 4.2 Resolução por séries de Fourier

Nesta seção, mostraremos como o método de separação de variáveis e como a teoria das séries de Fourier são utilizadas para solucionar o problema da corda vibrante com as extremidades fixas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{em } R, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (4.4)$$

em que  $c$  é uma constante e  $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L \text{ e } t > 0\}$ .

Vamos utilizar o método de Fourier, esse método consiste, inicialmente, em usar separação de variáveis para determinar funções  $u(x, t) = F(x)G(t)$  que satisfaçam a equação da onda e as condições de fronteira. Substituindo na equação da onda, temos

$$u_{tt}(F(x)G(t)) = c^2 u_{xx}(F(x)G(t)),$$

logo,

$$FG'' = c^2 F''G$$

portanto,

$$\frac{1}{c^2} \frac{G''}{G} = \frac{F''}{F}.$$

Repare que o lado direito da equação depende apenas de  $t$ , enquanto o lado esquerdo depende apenas de  $x$ . Logo, são iguais a um parâmetro  $\lambda$ , que independe de  $x$  e de  $t$ , o qual será determinado de modo que as condições de fronteira sejam satisfeitas por  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . Portanto, temos

$$\begin{cases} F'' - \lambda F = 0 \\ G'' = \lambda c^2 G. \end{cases} \quad (4.5)$$

As condições de fronteira  $0 = u(0, t) = F(0)G(t) = u(L, t) = F(L)G(t)$ , implicam que  $F(0) = F(L) = 0$ , pois não queremos  $G \equiv 0$  (não buscamos soluções triviais). Deste modo, temos que determinar os valores  $\lambda$ , que são chamados autovalores, de modo que o problema

$$\begin{cases} F'' - \lambda F = 0, & 0 < x < L, \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases}$$

tenha soluções  $F(x) \neq 0$ , chamadas autofunções. Assim, existem autovalores  $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$ , para  $n \in \mathbb{Z}_+$ , cujas autofunções correspondentes são  $F_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

De fato, note que  $F'' - \lambda F = 0$  é uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Logo, a solução tem a forma

$$F(x) = k_1 \cdot \text{sen}(\sqrt{\lambda}x) + k_2 \cdot \text{cos}(\sqrt{\lambda}x).$$

Aplicando a condição  $F(0) = 0$ , temos

$$F(0) = k_1 \cdot \text{sen}(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + k_2 \cdot \text{cos}(\sqrt{\lambda} \cdot 0) \Rightarrow k_2 = 0.$$

Além disso, aplicando a condição  $F(L) = 0$ , temos que

$$F(L) = k_1 \cdot \text{sen}(\sqrt{\lambda}L) \Rightarrow \text{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0,$$

pois caso  $k_1 = 0$  teríamos a solução trivial, daí

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}.$$

Logo, as autofunções, de fato, são  $F_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

Pelo mesmo motivo da  $F$ , temos que para  $G'' = \lambda c^2 G$ , de (4.5), para cada  $\lambda_n$  a solução geral da equação que depende de  $t$  é da forma

$$G_n(t) = a_n \text{cos}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são constantes arbitrárias. Logo, as funções

$$u_n(x, t) = a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{cos}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

são soluções da equação da onda e satisfazem as condições de fronteira. Agora, o próximo passo do método de Fourier é determinar as constantes  $a_n$  e  $b_n$ , de modo que a solução  $u(x, t)$  do PVIF seja dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{cos}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]. \quad (4.6)$$

Pela primeira condição inicial, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.7)$$

e, para que isso aconteça, é necessário que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.8)$$

Para determinar os  $b_n$ , obtemos  $u_t(x, t)$  derivando (4.6) termo a termo e usando a segunda condição inicial, temos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.9)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$\Rightarrow$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.10)$$

Para que as expressões anteriores sejam, de fato, soluções para a equação da onda, precisamos que elas satisfaçam algumas hipóteses. Para tanto, considere o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.** *Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções dadas em  $[0, L]$  tais que  $f, f', f'', g, g'$  sejam contínuas e  $f''', g''$  são seccionalmente contínuas. Além disso, suponha que  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ . Então*

1.  $a_n$  e  $b_n$  dadas por (4.8) e (4.10), respectivamente, estão bem definidas;
2. As igualdades (4.7) e (4.9) ocorrem;
3. A expressão (4.6) define uma função contínua em  $\bar{R}$ , de classe  $C^2$  em  $R$ , que satisfaz a equação da onda em  $R$ .

*Demonstração.* 1. Segue da continuidade de  $f$  e  $g$  em  $[0, L]$ , como as integrais em (4.8) e (4.10) convergem. Logo,  $a_n$  e  $b_n$  estão bem definidas.

2. Segue do fato de  $f$  e  $g$  serem de classe  $C^1$  em  $[0, L]$ , e como  $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$ , podemos estender  $f$  e  $g$  para toda a reta de forma a serem ímpares e periódicas de período  $2L$ . Logo, das hipóteses do teorema e pelo Teorema de Fourier, segue que (4.7) e (4.9) convergem.

3. Pelo Teorema de Fourier, (4.8) define uma função contínua em  $\bar{R}$ , basta mostrar a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ , pois ela majora a série (4.8).

De fato, note que podemos ver o termo geral da série (4.6) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \left| a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right| \leq \\ & |a_n| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \left| \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right| + |b_n| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right|, \end{aligned}$$

daí,

$$\left| a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Portanto, se garantirmos a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ , pelo Teste de M Weierstrass 1.3 a série converge uniformemente, e pela Proposição 1.6,  $u$  é uma função contínua. Vamos mostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$  converge.

Integrando por partes e das hipóteses  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0$  implica que

$$a_n = \left[ f(x) \frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right]_0^L - \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Daí, usando integração por partes novamente

$$a_n = \left[ \frac{-2L}{n^2\pi^2} f'(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right]_0^L + \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^L f''(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Logo,

$$a_n = \frac{-2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.11)$$

De forma análoga, integrando por partes, temos

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{-2L^2}{n^2\pi^2} \int_0^L g''(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.12)$$

De (4.11) e (4.12), e pelas estimativas dos coeficientes de Fourier, segue

$$|a_n| \leq \frac{k}{n^3} \quad e \quad |b_n| \leq \frac{\tilde{k}}{n^3}$$

em que  $k$  e  $\tilde{k}$  são constantes. Assim, as séries  $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$  e  $\sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n| + n|b_n|)$  convergem, pelo critério da comparação. Assim,  $u$  é contínua em  $\bar{R}$  e de classe  $C^1$  em  $R$ .

Também mostra que as primeiras derivadas de  $u$  podem ser obtidas derivando (4.8) termo a termo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{n\pi}{L} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \frac{n\pi}{L} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right), \quad (4.13)$$



e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right). \quad (4.14)$$

Além disso, ainda de (4.11) e (4.12) e pelas estimativas dos coeficientes de Fourier, obtemos

$$|a_n| \leq \frac{\bar{k}}{n^3} |c_n| \quad e \quad |b_n| \leq \frac{\hat{k}}{n^3} |d_n|$$

em que  $c_n$  e  $d_n$  são coeficientes de Fourier de  $f'''$  e  $g'''$ , respectivamente. Usando a desigualdade  $ab \leq \frac{(a^2+b^2)}{2}$ , temos

$$n^2 |a_n| \leq \frac{\bar{k}}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |c_n|^2 \right), \quad n^2 |b_n| \leq \frac{\hat{k}}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |d_n|^2 \right)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 |a_n| + n^2 |b_n|) \leq \frac{\bar{k} + \hat{k}}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \right).$$

Pela Desigualdade de Bessel, as duas últimas séries convergem. Portanto, a série no primeiro membro da expressão acima converge, o que implica que  $u$  é de classe  $C^2$  em  $R$ , e derivando termo a termo (4.13) e (4.14), obtemos a segunda derivada de  $u$ . Assim, verificamos que  $u$  satisfaz a Equação da Onda.

□

### 4.3 Vibrações forçadas e Ressonância

Considere o problema de vibração de uma corda com extremidades fixas e sujeita a forças externas. O deslocamento  $u(x, t)$  é a solução do PVIF:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + g(x, t), & \text{em } R, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0. & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) = f_0(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) = f_1(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (4.15)$$

Primeiramente, vamos tomar um candidato à solução tendo a forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

com coeficientes  $c_n(t)$  a determinar. Agora, suponha que, para cada  $t$ , a função  $g(x, t)$  possa ser escrita como uma série de Fourier do tipo

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

derivando termo a termo, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n'' \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Daí, segue da unicidade da série de Fourier que

$$c_n'' + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} c_n = g_n(t),$$

$\Rightarrow$

$$c_n'' + (2\pi\omega_n)^2 c_n = g_n, \forall t > 0, \quad (4.16)$$

onde  $\omega_n = nc/2L$  é a frequência do  $n$ -ésimo harmônico da corda livre. Além disso, usando as condições iniciais do PVIF anterior, temos que

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

daí, chegamos que

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad e$$

$$c_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Assim,  $c_n(t)$  é a solução de um problema de valor inicial para uma EDO de segunda ordem dada por (4.16). Logo, a solução geral da equação (4.16) é da forma

$$c_n(t) = a_n \cos(2\pi\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi\omega_n t) + \hat{c}_n(t)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são constantes arbitrárias dadas pelas condições iniciais, e  $\hat{c}_n(t)$  é uma solução particular de (4.16) que pode ser obtida pelo método de variação dos parâmetros.

**Exemplo 4.2.** Suponha que  $g(x, t)$  seja igual a uma constante  $A$ , em todo  $R$ .

Nesse caso

$$\hat{c}_n(0) = \frac{2A(1 - \cos(n\pi))}{n\pi(2\pi\omega_n)^2},$$

e da expressão de  $c_n(t)$ , segue que

$$c_n(0) = a_n + \hat{c}_n, \quad c'_n(0) = 2\pi\omega_n b_n.$$

Portanto,

$$c_n(t) = c_n(0)\cos(2\pi\omega_n t) + \frac{c'_n(0)}{2\pi\omega_n}\text{sen}(2\pi\omega_n t) + \hat{c}_n(1 - \cos(2\pi\omega_n t)),$$

daí

$$u(x, t) = v(x, t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \text{sen}^2(\pi\omega_n t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde  $v(x, t)$  é a solução do PVIF correspondente a corda livre, ou seja, com  $g = 0$

**Exemplo 4.3.** Suponha que  $g(x, t) = A\text{sen}(2\pi\omega t)$ , ou seja, que a corda vibre com uma força periódica de frequência  $\omega$ . Então uma solução particular da equação (4.16) é dada por

$$\hat{c}_n(t) = \frac{A(1 - \cos(n\pi))}{2n\pi^3(\omega_n^2 - \omega^2)} \text{sen}(2\pi\omega t), \quad \text{se } \omega \neq \omega_n;$$

$$\hat{c}_n(t) = \frac{A(1 - \cos(n\pi))}{2n\pi^2\omega} t \cos(2\pi\omega t), \quad \text{se } \omega = \omega_n.$$

Como  $c_n(0) = a_n$  e  $c'_n(0) = 2\pi\omega_n b_n + \hat{c}_n(0)$ , temos que

$$c_n(t) = c_n(0)\cos(2\pi\omega_n t) + \frac{c'_n(0)}{2\pi\omega} \text{sen}(2\pi\omega t) + R_n(t)$$

em que

$$R_n(t) = \hat{c}'_n(0) \left( \frac{\text{sen}(2\pi\omega t)}{2\pi\omega} - \frac{\text{sen}(2\pi\omega_n t)}{2\pi\omega_n} \right), \quad \text{se } \omega \neq \omega_n;$$

$$R_n(t) = \hat{c}'_n(0) \left( t \cos(2\pi\omega t) - \frac{\text{sen}(2\pi\omega t)}{2\pi\omega} \right), \quad \text{se } \omega = \omega_n.$$

Assim, vemos que se a frequência  $\omega$  da força externa for igual a uma das frequências próprias da corda livre ( $\omega = \omega_{n0}$ ), aparecerá na expressão de  $u(x, t)$  um termo da forma

$$c_{n0}(0) t \cos(2\pi\omega t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

que não é limitado quando  $t \rightarrow \infty$ . Como o restante da expressão de  $u$  é limitada, temos que as amplitudes de  $u$  crescem ilimitadamente. Nesse caso, dizemos que existe ressonância.

Entretanto, caso a frequência  $\omega$  da força externa for diferente de todas as frequências da corda livre, a expressão de  $u$  será da forma  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ , onde  $u(x, t)$  é a solução do PVIF correspondente a corda livre e  $w(x, t)$  da forma

$$w(x, t) = \frac{A}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\omega_n - \omega} \left( \text{sen}(2\pi\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \text{sen}(2\pi\omega t) \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right)$$

define uma função limitada, pois  $\omega_n$  se comporta como  $n$ . Daí, as vibrações se mantêm limitadas, logo não há ressonância, se  $\omega \neq \omega_n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ .

A ressonância em sistemas mecânicos em vibrações, em particular, no caso da corda vibrante, pode ser considerada uma tragédia, uma vez que implica que o sistema quebre. Logo, nesse caso deve ser evitada. Ao contrário, por exemplo, do que acontece em sistemas elétricos, em que a ressonância é benéfica ao sistema.

## 4.4 Corda Infinita

Agora, vamos estudar o problema de vibração de uma corda de comprimento infinito. Esse caso ilustra o problema com uma corda muito longa. Neste caso, não há condições de fronteira a satisfazer, deste modo, o problema consiste em buscar uma função  $u(x, t)$  definida no semiplano fechado,  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$  tal que

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.17)$$

onde  $f(x)$  e  $g(x)$  são condições iniciais. Esse problema é conhecido como um PVI (Problema de Valor Inicial) ou como um problema de Cauchy.

Adiante veremos que a equação da onda tem uma solução geral, ou seja, uma expressão que engloba todas as suas soluções. Esse caso é excepcional entre as EDP's, a existência de solução geral é mais comum nas EDO's.

**Teorema 4.4.** *Se  $u(x, t)$  satisfizer à equação da onda  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , onde  $c$  é uma constante, então existirão funções  $F$  e  $G$ , de modo que,  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que*

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (4.18)$$

*Demonstração.* Sejam  $\xi$  e  $\eta$  variáveis independentes dadas por

$$\xi = x + ct \quad e \quad \eta = x - ct,$$

e definimos a função  $v$  por

$$v(\xi, \eta) = v(x + ct, x - ct) = w(x, t).$$

Pela Regra da Cadeia, temos

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = v_{\xi\xi}c^2 - 2v_{\xi\eta}c^2 + v_{\eta\eta}c^2,$$

substituindo na Equação da Onda, temos que

$$v_{\xi\xi}c^2 - 2v_{\xi\eta}c^2 + v_{\eta\eta}c^2 = c^2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta})$$

$\Rightarrow$

$$c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) = c^2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta})$$

$\Rightarrow$

$$4v_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\xi\eta} = 0.$$

Esta expressão pode ser facilmente integrada. De fato, segue que  $v_\xi = F_1(\xi)$  e  $v = \int F_1(\xi)d\xi + G(\eta)$ . Resultado segue chamando  $F(\xi)$  uma das primitivas de  $F_1$  e voltando as variáveis  $x, t$ .

□

De acordo com a proposição anterior, a solução do PVIF deve ser da forma (4.18).

De fato, usando as identidades trigonométricas

$$\text{sen}(a)\cos(a) = \frac{1}{2}[\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)] \quad e$$

$$\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

obtemos na solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \text{sen} \left( \frac{n\pi(x + ct)}{L} \right) + a_n \text{sen} \left( \frac{n\pi(x - ct)}{L} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \cos \left( \frac{n\pi(x - ct)}{L} \right) + b_n \cos \left( \frac{n\pi(x + ct)}{L} \right) \right]$$

o que mostra que a solução é da forma  $F(x + ct) + G(x - ct)$ , com

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{L} \right) - b_n \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi\xi}{L} \right) \right) e$$

$$G(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\eta}{L} \right) + b_n \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi\eta}{L} \right) \right).$$

**Fórmula de d'Alembert:** Para obter a solução do problema de Cauchy para a Equação da Onda. Vamos precisar determinar funções  $F$  e  $G$ , usando as condições iniciais. Como  $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ , temos que

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \quad e$$

$$u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x).$$

Integrando a última expressão, temos

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + K$$

em que  $K$  é uma constante arbitrária, das condições iniciais, temos

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \frac{K}{2},$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \frac{K}{2}.$$

Logo,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds$$

$\Rightarrow$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

a expressão acima é conhecida como fórmula de d'Alembert.

## 4.5 Corda Semi-infinita

A existência de uma solução geral para a equação da onda, agora, será utilizada para resolver problemas de valores inicial e de fronteira para a corda semi-infinita. Considere

o problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(0, t) = h(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ e } u_t(x, 0) = g(x), & x > 0, \end{cases}$$

onde  $h, f, g$  são funções dadas. A resolução deste problema consiste em determinar as funções  $F$  e  $G$  da solução geral de modo que  $u$  satisfaça às condições iniciais e de fronteira acima. Assim, usando as condições iniciais, temos

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad x > 0;$$

$$cF'(x) - cG'(x) = g(x), \quad x > 0.$$

Integrando a última equação e repetindo o argumento usado na dedução da fórmula de d'Alembert, temos que

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k, \quad x > 0;$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds - k, \quad x > 0.$$

em que  $k$  é uma constante. Note que, para escrever  $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$  temos que conhecer  $G$  para argumentos negativos, uma vez que  $x - ct$  pode ser negativo. Daí, usamos a condição de fronteira, assim

$$F(ct) + G(-ct) = h(t), \quad t > 0$$

$\Rightarrow$

$$G(-y) = h\left(\frac{y}{c}\right) - F(y)$$

$\Rightarrow$

$$G(-y) = h\left(\frac{y}{c}\right) - \frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2c} \int_0^y g(s)ds - k, \quad y > 0.$$

Por fim, podemos escrever a solução  $u(x, t)$  do problema, que é dada por duas expressões distintas, dependendo do ponto estar na região  $x - ct \geq 0$  ou na região  $x - ct < 0$ . A solução é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, & \text{se } x - ct \geq 0 \\ \frac{f(ct+x)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s)ds + h\left(\frac{ct-x}{c}\right), & \text{se } x - ct < 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Quando  $h = 0$ , o problema é redutível ao da corda infinita. Isso se conclui da fórmula (4.19). De fato, o  $u(x, t)$  definido na fórmula é a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \tilde{f}(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = \tilde{g}(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

em que  $\tilde{f}(x)$  é a extensão de  $f(x)$  para  $x > 0$  de modo que  $\tilde{f}$  seja função ímpar, ou seja,  $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$ , seguimos um argumento análogo para  $\tilde{g}$ . Outra maneira de solucionarmos o problema é usando a fórmula de d'Alembert para  $h = 0$ , e, mais uma vez considerando  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  extensões ímpares para  $f$  e  $g$ , respectivamente.

**Exemplo 4.5.** Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = h(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = g(x), & x > 0. \end{cases}$$

Para solucionarmos este problema seguimos como nos casos anteriores. Primeiramente, vamos considerar a solução geral da equação da onda e daí encontrar as funções  $F$  e  $G$  que satisfaçam as condições dadas, pelas condições iniciais, temos

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad x > 0,$$

$$cF'(x) - cG'(x) = g(x), \quad x > 0.$$

Integrando e usando a fórmula de d'Alembert, temos

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k, \quad x > 0;$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds - k, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

Além disso, para descobrirmos a solução para a parte em que  $x - ct < 0$ , vamos usar a condição de fronteira, daí

$$cF'(ct) - cG'(-ct) = h(t), \quad t > 0$$

$\Rightarrow$

$$G'(-y) = F'(y) - \frac{1}{c}h\left(\frac{y}{c}\right)$$



$\Rightarrow$

$$G(-y) = h\left(\frac{y}{c}\right) - \frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2c} \int_0^y g(s)ds - \frac{1}{2c} \int_0^{-y} g(s)ds - \frac{k}{c}, \quad y > 0.$$

Logo, a solução do problema é dado por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, & \text{se } x - ct \geq 0 \\ \frac{f(ct+x)+f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{ct+x} g(s)ds + \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} g(s)ds = \int_0^{\frac{ct-x}{c}} h(s)ds, & \text{se } x - ct < 0. \end{cases}$$

**Exemplo 4.6.** Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = \alpha u(0, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = g(x), & x > 0. \end{cases}$$

Para resolvermos este problema utilizaremos o mesmo método do exemplo anterior. Note que, como as condições iniciais são as mesmas, temos que a solução para  $x - ct > 0$  é semelhante. Daí, vamos utilizar as condições de fronteira para encontrarmos a solução para  $x - ct < 0$ , daí

$$cF'(ct) - cG'(-ct) = \alpha F(ct) + \alpha G(-ct), \quad t > 0$$

$\Rightarrow$

$$F'(ct) - G'(-ct) = \frac{\alpha}{c}(F(ct) + G(-ct))$$

$\Rightarrow$

$$G(-y) = \frac{1}{2c} \int_0^y g(s)ds - \alpha e^{\alpha y} \int_0^y f(s)e^{\alpha s} ds + \frac{1}{c} e^{\alpha y} \int_0^y g(s)e^{\alpha s} ds.$$

Portanto, a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, & \text{se } x - ct > 0 \\ \frac{f(ct+x)+f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s)ds - \alpha e^{\alpha(x-ct)} \int_0^{ct-x} f(s)e^{\alpha s} ds + \\ \frac{1}{c} e^{\alpha(x-ct)} \int_0^{ct-x} g(s)e^{\alpha s} ds, & \text{se } x - ct < 0. \end{cases}$$

# Referências

- 1 BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 10 ed. JohnWiley e Sons. 2012.
- 2 DIACU, F. *Introdução à Equações diferenciais. Teoria e Aplicações*. 1 ed. LTC. 2004.
- 3 FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2014.
- 4 JÚNIOR, R.; IÓRIO, V. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2013.
- 5 LIMA, Elon Lages. *Análise Real volume 1*. Projeto Euclides, 2008.