Universidade Federal Rural de Pernambuco
Licenciatura plena em matemática

Caio Vinícius de Araújo Barbosa

Noções de dinâmica unidimensional e Teorema de Lie-York

Recife - PE
Fevereiro de 2022

Noções de dinâmica unidimensional e Teorema de Lie-York

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eberson Ferreira

Recife - PE
Fevereiro de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C135n Barbosa , Caio Vinícius de Araújo Barbosa
Noções de dinâmica unidimensional e o teorema de Li-York / Caio Vinícius de Araújo Barbosa Barbosa . - 2022.
40 f. : il.

Orientador: Eberson Ferreira da .
Inclui referências e anexo(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2022.

1. Funções contínuas . 2. Órbitas . 3. Noções de sistema unidimensional . I. , Eberson Ferreira da, orient. II. Título

CDD 510

Caio Vinícius de Araújo Barbosa

Noções de dinâmica unidimensional e Teorema de Lie-York

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Aprovado em: //2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eberson Ferreira (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Clessius Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Drª. Islanita Cecília Alcântara de Albuquerque Lima
Universidade de Pernambuco- UPE- Campus Mata Norte

Recife - PE
Fevereiro de 2022

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu oportunidade diária dar prosseguimento ao estudo e ao trabalho. Agradeço a meus pais por sempre apoiarem meus estudos, sempre incentivando e ajudando da melhor forma possível, nunca deixando faltar nada nessa caminhada. Agradeço a meu avô, que Deus o tenha, que quando eu era pequeno gostava de mostrar a todos que eu sabia fazer contas rápido, mesmo sendo contas simples de soma e subtração, significa muito para mim ate hoje. Agradeço ao meu orientador, professor Eberson Ferreira, que topou o desafio de orientar este trabalho em um curto período de tempo, e ao professor Clessius Silva, que foi o primeiro professor que tive aula no departamento de Matemática na disciplina de Funções e o último na disciplina de Análise, e ajudou bastante nessa etapa final para adiantamento dos documentos para finalização do curso e posse do concurso. Agradeço a minha namorada por aguentar os estresses e tempos offline para foco no trabalho, e por apoiar sempre minhas decisões e entrar fundo junto comigo nesta caminhada. Agradeço ao melhor grupo de amigos que a UFRPE me deu, os intitulados "snakes", que sempre estão juntos para se ajudar em qualquer dificuldade, seja ela na universidade, ou na vida fora dela. Resumindo, agradeço a todos que me abraçaram e estiveram comigo nesta caminhada difícil, e bote difícil nisso, mas farei por onde orgulhar a todos vocês.

Resumo

Neste trabalho apresentamos noções de sistemas dinâmicos unidimensionais e um resultado conhecido como Teorema de Li-Yorke. Para isso, tratamos inicialmente sobre funções contínuas e resultados de análise da reta. Em seguida, falamos sobre pontos fixos e periódicos e suas relações com as órbitas de pontos próximos.

Palavras-Chave: Funções contínuas, sistemas dinâmicos unidimensionais, órbitas, pontos fixos, pontos periódicos.

Abstract

In this work we present notions of one dimensional dynamical systems and a result known as Li-Yorke's Theorem. For this, we initially deal with continuous functions and analysis results of the line. Then we talk about fixed and periodic points and their relationships with the orbits of nearby points.

Key-Words: Continuous functions, one dimensional dynamical systems, orbits, fixed points, periodic points.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo introduzir conceitos iniciais de sistemas dinâmicos unidimensionais e apresentar um resultado denominado Teorema de Li-York [5]. Sistemas dinâmicos é uma área da matemática que estudam as transformações ou aplicações que alteram sua configuração com o tempo. O estudo da evolução de um sistema pode ser feito de maneira contínua ou discreta. Os sistemas dinâmicos não se limitam só na matemática, mas se expandem pelas diversas áreas da ciência. Segue daí a importância de seu estudo e aplicações. Já o Teorema de Li-York é interessante na teoria dos sistemas dinâmicos, pois introduz uma nova terminologia matemática chamada **Caos**. A definição de caos pode variar na literatura. Para nós um sistema é caótico quando não conseguimos prever o comportamento de suas órbitas quando fazemos pequenas variações nos parâmetros que definem o sistema.

No ano de 1975 Tien-Yien Li e James A. Yorke publicaram um artigo em uma revista científica chamada *American Mathematical Monthly*, o qual foi denominado de *Period three implies chaos*, nele usaram pela primeira vez a palavra "caos"para definir matematicamente a sensível dependência das condições iniciais de um sistema e a incerteza do comportamento das órbitas dos pontos na dinâmica resultante. A publicação de Tien-Yien Li e James A. Yorke é uma das mais citadas na Matemática e na Física, e revelou-se de enorme importância no estudo do Caos. Nela encontramos a prova de um resultado surpreendente:

Teorema 0.1. *Se uma função f contínua na reta tem um ponto de período três, então f tem pontos de qualquer período.*

Yorke afirmou que os primeiros a compreender na totalidade a dinâmica caótica de uma função de um intervalo em si mesmo foram Robert May e George Oster. Contudo, York estava equivocado em sua afirmação, pois não tinha conhecimento de um trabalho desenvolvido anos antes na União Soviética. O artigo, publicado em 1964 na revista *"Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal"* e com título *"Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself"* [6], escrito por Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky, ficou conhecido como o **Teorema de Sharkovsky** e é um caso geral de onde Yorke trabalhou num caso particular.

Graças a Li e Yorke, o trabalho de Sharkovsky foi reconhecido como sendo de grande importância. Desde então, muitos estudiosos voltaram sua atenção para o resultado desse teorema. No decorrer dos anos, vários estudiosos buscaram possibilidades de simplificar ou detalhar mais, o resultado do teorema.

Neste trabalho nos concentraremos apenas no resultado de Lie-York.

0.1 Estrutura da monografia

No Capítulo 1, daremos as definições e resultados de Análise da Reta que serão importantes para estabelecermos notação e para a demonstração dos resultados dos capítulos posteriores. Aqui ressaltamos a importância do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema do Valor Médio em nosso estudo.

No Capítulo 2, introduziremos noções de sistemas dinâmicos unidimensionais discretos. Definiremos órbitas de um sistema, pontos fixos e pontos periódicos. Provaremos alguns resultados importantes com relação a existência e estabilidade de pontos fixos e periódicos.

Por fim, no Capítulo 3, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Lie-York [5], bem como apresentaremos o enunciado do Teorema de Sharkovisky.

Capítulo 1

Preliminares de Análise na Reta

Neste capítulo iremos tratar sobre conceitos de análise na reta. Nosso objetivo será apenas fornecer os conceitos e resultados principais que serão utilizados neste trabalho. Iniciaremos com o conceito de Funções Contínuas e demonstraremos o importante Teorema do Valor Intermediário. Posteriormente, definiremos derivadas e o que significa uma função ser de classe C^1, além de apresentar o Teorema do Valor Médio. Partiremos do principio que o leitor tenha familiaridade com os conceitos de limite de sequências e limite de funções e suas propriedades básicas. Para mais detalhes sobre limites de funções, funções contínuas e derivadas sugerimos ao leitor as referências [1] e [2].

1.1 Funções Contínuas

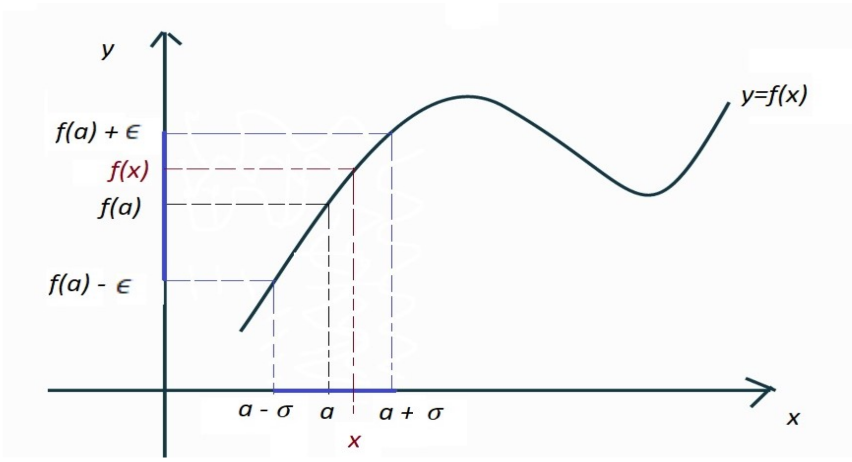
Definição 1.1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $x \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in X$. Diremos que f é contínua em a quando dado $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ou de forma equivalente:

$$x \in X \cap (a-\delta, a+\delta) \Longrightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \epsilon).$$

Figura 1.1: ilustração da definição de uma função contínua em $x = a$



Fonte: autor 2021

Exemplo 1.2. Vamos provar, por definição, que $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para isso, queremos que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ fixado, tenhamos

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Note que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |ax + b - (ay + b)| \\ &= |ax + b - ay - b| \\ &= |ax - ay| \\ &= |a.(x - y)| \\ &= |a|.|x - y| \end{aligned}$$

Então como queremos $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, temos

$$|a|.|x - y| = f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$|a|.|x - y| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x - y| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Tomamos então $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ e segue o resultado.

Dizemos que a $\in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ quando:

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X - \{a\} \neq \varnothing, \forall\, \varepsilon > 0$$

Usaremos X' para denotar o conjunto de todos os pontos de acumulação de X. Caso $a \in X'$ na Definição 1.1, teremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1.1}$$

Exemplo 1.3. Mostremos que $f(x) = \sin(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

1. Inicialmente, vamos ver que f é contínua em 0. De fato,

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(0)| &= |\sin(x) - 0| \\ &= |\sin(x)| < |x| = |x - 0| \end{aligned}$$

para x próximo de 0. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$.

$$|x - 0| < \delta \Longrightarrow |\sin(x) - \sin(0)| < |x - 0| < \delta = \varepsilon.$$

2. Agora vamos considerar que $a \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a))$$

Tome $x = a + h$, com h pequeno. Podemos reescrever da seguinte forma, h= $x - a$. Então;

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \sin(x) = \lim_{h \to 0} \sin(a + h) &= \lim_{h \to 0} (\sin(a).\cos(h) + \sin(h).\cos(a)) \\ &= \lim_{h \to 0} \sin(a).\cos(h) + \lim_{h \to 0} \sin(h).\cos(a) \\ &= \sin(a) \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos provar que a função $f(x) = \cos(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Observação 1.4. Podemos observar que se a $\notin X'$, então existe $\varepsilon' > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon', a + \varepsilon') \cap X - \{a\} = \varnothing$$

Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in$ X e $a \notin$ X' então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe ε' > 0 tal que

$$(a - \varepsilon', a + \varepsilon') \cap X - \{a\} = \varnothing.$$

Neste caso, temos

$$x \in X, |x - a| < \varepsilon' \Longrightarrow x = a \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

Ou seja, por definição, sempre teremos $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em a.

O contexto deste trabalho se dará para X sendo um intervalo ou união de intervalos. Assim, para nós, continuidade implicará sempre na igualdade (1.1).

Observação 1.5. Quando uma função f for contínua em todos os pontos de X, diremos que f é contínua em X. Quando f não for contínua em algum ponto $a \in X$, então diremos que f é **descontínua** em a.

Observação 1.6. A fim de que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in \mathbb{R}$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.

Podemos provar de forma semelhante às propriedades operatórias de limites de funções que soma de funções contínuas são contínuas, produto de funções contínuas são funções contínuas e quociente de funções contínuas também são contínuas em seu domínio. Mas especificamente, temos:

Teorema 1.7. *Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções são contínuas em a.*
1- $f + g$
2- f - g
3- c . f
4- f . g
5- $\frac{f}{g}$, se $g(a) \neq 0$

Demonstração. Veja [1]. □

Exemplo 1.8. De posse do Teorema 1.7, podemos mostrar que funções polinomiais dadas por $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{R}$ é constante, são funções contínuas em todo $\mathbb{R}$. Funções racionais $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios também são funções contínuas em seus domínios, isto é, nos pontos x em que $q(x) \neq 0$. Por exemplo, $f(x) = 3x^3 - \pi x^6$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Observação 1.9. De maneira geral, as funções a seguir são contínuas em todo número do seu domínio:

1. Funções trigonométricas;
2. Funções Raízes;
3. Funções Exponenciais;
4. Funções Logarítmicas.

Exemplo 1.10. Sejam as funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ contínuas em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 1.7 a função $h(x) = \sin(x)\cos(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois notamos que $h(x) = f(x).g(x)$.

Teorema 1.11. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(X) \subset Y$, f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $b = f(a) \in Y$. Então a composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.*

Demonstração: Precisamos verificar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon.$$

Como g é contínua em b, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, exite um número δ' > 0, tal que, se $|y - b| < \delta'$ então $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.
Temos também que $f(X) \subset Y$ e f é contínua em a, escrevendo $y = f(x)$, segue que em particular para $\delta' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = |y - b| < \delta'$$

e portanto, temos $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$.
Concluindo que a composta de duas funções contínuas, é uma função contínua. ∎

Exemplo 1.12. Tome $h(x) = \sin(x^2)$. Então temos $h(x) = f(g(x))$, onde

$$g(x) = x^2, f(x) = \sin(x)$$

Agora perceba que g é continua em $\mathbb{R}$, pois trata-se de um polinômio, e f também é contínua, como vimos no exemplo 1.3. Desse modo, $h = f \circ g$ é contínua em todo $\mathbb{R}$ pelo Teorema 1.11.

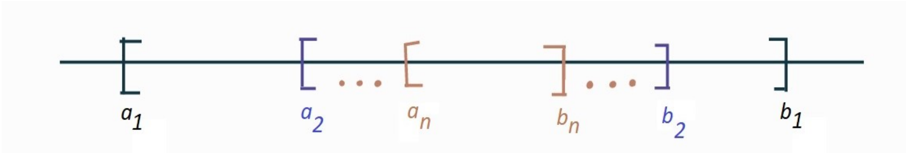
1.2 Teorema do Valor Intermediário

Nesta seção provaremos o **Teorema do Valor Intermediário (TVI)** que será importante na demonstração do resultado principal deste trabalho. Antes, iremos dar algumas definições e provar alguns resultados que julgamos ser importantes para o entendimento da prova que escolhemos.

Teorema 1.13. ***(Intervalos Encaixados)*** *Seja $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ... uma sucessão de intervalos fechados tais que $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset$... e cuja sucessão dos comprimentos, $|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|$,..., tende para zero. Então existe um só número real pertencente à interseção de todos esses intervalos.*

Demonstração: Veja a referência [1] ou [2]. ∎

Figura 1.2: Intervalos Encaixados



Fonte: autor 2021

Definição 1.14. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diremos que um número $a \in \mathbb{R}$ é aderente à X, quando existir uma sequência de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tais que $\lim\limits_n x_n = a$. O conjunto de todos os pontos aderentes à X é chamado de fecho de X e será denotado por $\overline{X}$. Um conjunto X é dito **fechado** quando $X = \overline{X}$.

Exemplo 1.15. O fecho do intervalo aberto $X = (a, b)$ é $\overline{X} = [a, b]$. De fato, tomando $x_n = a + \dfrac{1}{n}$ e $y_n = b - \dfrac{1}{n}$, vemos que $x_n, y_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ grande e além disso $\lim\limits_n x_n = a$ e $\lim\limits_n x_n = b$. Para qualquer outro $x \in X$ tome a sequência $x_n = x + \dfrac{1}{n}$, com n suficientemente grande. Teremos $x_n \in X$ e $\lim\limits_n x_n = x$. Notemos ainda que o conjunto $[a, b]$ é fechado.

Definição 1.16. Uma **Cisão** de um conjunto $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $\mathrm{X} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ tal que $\mathrm{A} \cap \bar{B} = \varnothing$ e $\bar{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A. A decomposição $\mathrm{X} = \mathrm{X} \cup \varnothing$ é chamada **cisão trivial**.

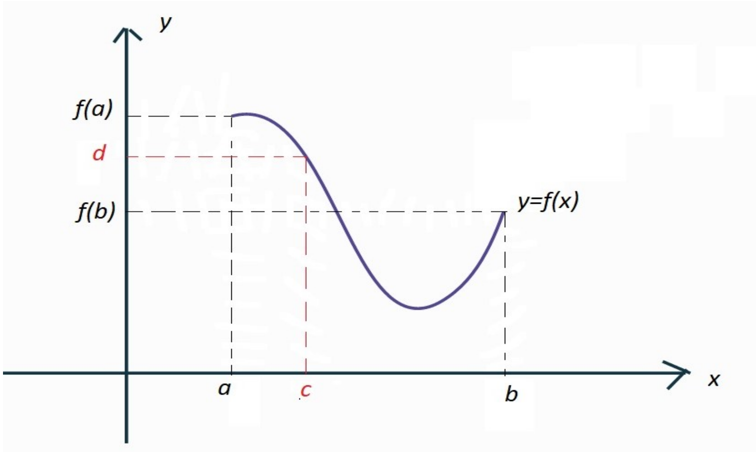
Proposição 1.17. ***Um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ só admite a cisão trivial.***

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que um intervalo I admita uma cisão não trivial $I = A \cup B$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$, e consideremos, sem perda de generalidade, que $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Iremos considerar c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Como $c \in [a, b] \subset I = A \cup B$, logo $c \in A$ ou $c \in B$. Se $c \in B$, escrevemos $a_1 = a$ e $b_1 = c$. Se $c \in A$, escrevemos $a_1 = c$ e $b_1 = b$. Em qualquer caso, obteremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ de comprimento $\frac{b-a}{2}$ com $a_1 \in A$ e $b_1 \in B$. Procedendo da mesma maneira, obteremos um intervalo $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ de comprimento $\frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$ com $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Indutivamente, construiremos uma sequência de intervalos encaixados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$ com $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, a_n \in A, b_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O ponto $d \in I = A \cup B$ não pode estar em A pois $d = \lim b_n \in \overline{B}$, nem pode estar em B pois $d = \lim a_n \in \overline{A}$. Contradição. □

Usaremos o resultado da Proposição 1.17 para demonstrar então o Teorema do Valor Intermediário:

Teorema 1.18. *(**Teorema do Valor Intermediário**): Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $(f(b) < d < f(a))$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Figura 1.3: ilustração do Teorema do Valor Intermediário



Fonte: autor 2021

Demonstração: Vamos supor que $f(a) < d < f(b)$ e consideremos os conjuntos

$$X = \{x \in [a,b]; f(x) \leq d\} \text{ e } \; Y = \{x \in [a,b]; f(x) \geq d\}.$$

Afirmação 1. $\overline{X} = X$ *e* $\overline{Y} = Y$.

Prova da Afirmação 1. Notemos que sempre vale $X \subset \overline{X}$(basta tomar a sequência constante para cada $x \in X$). Assim, vamos provar apenas a seguinte inclusão $\overline{X} \subset X$. Seja $x_0 \in \overline{X}$. Existe então uma sequência $(x_n)_n$ em X tal que $\lim_n x_n = x_0$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $f(x_n) \leq d$ e f é contínua, segue que

$$f(x_0) = \lim_n (f(x_n)) \leq d \;\; \text{(observe que } \overline{X} \subset [a,b]).$$

Assim, $x_0 \in X$, isto é, $\overline{X} \subset X$ como queríamos mostrar. De forma análoga provamos que $\overline{Y} = Y$. □

Usando a afirmação, vale que $\overline{X} \cap Y = X \cap Y = X \cap \overline{Y}$. Afirmamos que $X \cap Y \neq \varnothing$. De fato, se tivéssemos $X \cap Y = \varnothing$, então $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = X \cap Y = \varnothing$. Além disso, notamos que $[a,b] = X \cup Y$, e como $a \in X$ e $b \in Y$, então $[a,b] = X \cup Y$ seria uma cisão não trivial do intervalo $[a,b]$, o que seria um absurdo. Portanto $X \cap Y \neq \varnothing$. Sendo assim, existe $c \in X \cap Y$, isto é, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) \leq d$ e $f(c) \geq d$, ou seja, $f(c) = d$. Concluindo assim nossa demonstração. ■

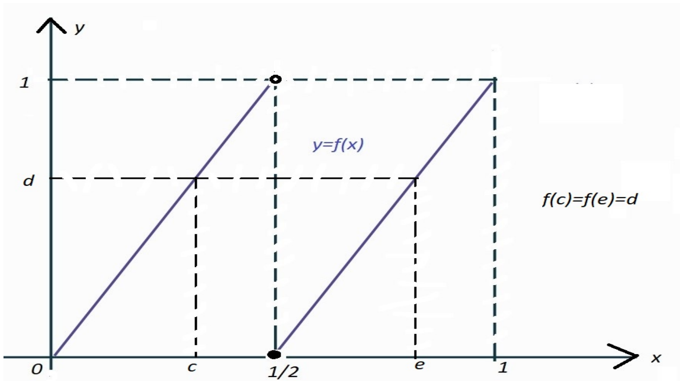
Observação 1.19. Dizemos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tem a **propriedade do valor intermediário**, se dado $d \in \mathbb{R}$ com $f(a) < d < f(b)$ implica que existe $c \in (a,b)$ tal que

$f(c) = d$. O que o **TVI** nos diz é que continuidade implica na propriedade do valor intermediário, em contrapartida é possível que uma função tenha a propriedade do valor intermediário, mas não seja contínua. Como ilustramos no exemplo a seguir: Considere a função $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & se \;\; x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & se \;\; x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Notemos que f é descontínua em $x_0 = \frac{1}{2}$. Além disso, dado qualquer $d \in (0, 1)$ existem dois elementos $c \in (0, \frac{1}{2})$ e $e \in (\frac{1}{2}, 1)$ tais que $f(c) = f(e) = d$. Ou seja, f tem a propriedade do valor intermediário, mas não é contínua.

Figura 1.4: gráfico de $y = f(x)$



Fonte: autor 2021

Exemplo 1.20. Vamos mostrar, usando o Teorema1.18, que a equação $\cos(x) = x$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$. Considere $f : [0, 1] \to [0, 1]$ e $f(x) = \cos(x) - x$. Aplicando $f(0)$ teremos que;

$$f(0) = \cos(0) = 1 > 0$$

Agora aplicando $f(1)$, teremos que;

$$f(1) = \cos(1) - 1$$

Como sabemos, o $\cos(1)$ é menor do que 1, e tirando 1 novamente, teremos que $f(1) < 0$. Podemos concluir que

$$f(0) < 0 < f(1)$$

Usando o TVI, existe $x_0 \in [0,1]; f(x_0) = 0$. Concluindo assim que $f(x_0) = \cos(x_0) - x_0 = 0$.

Teorema 1.21. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração: Caso f seja constante, então $f(I)$ é um conjunto unitário, e nada mais temos a demonstrar. Consideremos agora o caso em que $f$não é constante. Iremos denotar $\alpha =$ inf $f(I)$ e $\beta =$ sup $f(I)$ (caso $f(I)$ não seja limitado inferiormente, então $\alpha =$ - ∞; similarmente, caso $f(I)$ não seja limitado superiormente, então $\beta = \infty$). Provaremos que $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β. Primeiro vamos mostrar que (α,β) $\subset f(I)$, ou seja, "se $\alpha <$ d $< \beta$, então d$=$ f(c) para algum c $\in I$". De fato, se $\alpha <$ d $< \beta$ então, pela definição de ínfimo e supremos, existem f(a), f(b) $\in f(I)$ com a,b $\in I$ tais que;

$$\alpha < f(a) < d < f(b) < \beta$$

logo, pelo TVI, existe c $\in$ (a,b) tal que d $=$ f(c). Portanto

$$(\alpha, \beta) \subset f(I).$$

Além disso, como $\alpha =$ inf $f(I)$ e $\beta =$ sup $f(I)$, logo nenhum número menor que α ou maior que β pertence a $f(I)$. Sendo assim, $f(I)$ é intervalo com extremos α e β. ■

Exemplo 1.22. A função seno, que é contínua, leva o intervalo (0,2π), no intervalo [-1,1] e [0, $\frac{3\pi}{2}$) em (-1,1].

Exemplo 1.23. A função $f(x) =$ tan(πx - $\frac{\pi}{2}$) leva o intervalo (0,1] em (-∞, ∞); por fim, a função $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ leva o intervalo [0, ∞) em (0,1].

Por fim, o resultado a seguir nos diz que a imagem de um conjunto fechado e limitado é um conjunto fechado e limitado.

Teorema 1.24. *Se f é uma função contínua, então $f([a,b]) = [c,d]$.*

Demonstração: Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e $[a,b] \subset X$. Usando o Teorema 1.21, temos que o conjunto imagem de $[a,b]$ é um intervalo I. Escreveremos $f([a,b]) = I$.

Afirmação 2. *I é um intervalo fechado.*

Prova da Afirmação 2. Suponha , por absurdo, que I não é fechado. Logo, existe $y_0 \in \overline{I}$ tal que $y_0 \notin I$. Como $y_0 \in \overline{I}$, existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $y_n \in I$, tal que $\lim_n(y_n) = y_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) = y_n$. Assim, temos uma sequência limitada em

$[a, b]$ que é fechado. Concluímos que existe uma subsequência $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_k (x_{nk}) = x_0$ em que $x_0 \in [a, b]$. Agora, como f é contínua, usando a Observação 1.6, temos

$$y_0 = \lim_k f(x_{nk}) = f(x_0),$$

ou seja, $y_0 \in f([a, b]) = I$, o que é absurdo. $\square$

Afirmação 3. *I é limitado.*

Prova da Afirmação 3. Suponha, sem perda de generalidade, que I não seja limitado superiormente, Assim, podemos encontrar $y_1 \in I$ tal que $y_1 > 1$. Podemos tomar $y_2 \in I$ tal que $y_2 > 2$. Procedendo sempre desta forma, podemos então tomar uma sequência de pontos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em I tal que $y_n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, a sequencia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite nenhuma subsequência limitada. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) = y_n$, segue que existe uma subsequência $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que o limite $\lim_k f(x_{nk}) = \lim_k y_{nk}$ existe, o que é absurdo. $\square$

Portanto, usando as Afirmações 2 e 3, segue que $I = [c, d]$. $\blacksquare$

1.3 Funções Diferenciáveis

Nesta sessão, iremos falar brevemente sobre diferenciabilidade de uma função em $\mathbb{R}$.

Definição 1.25. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável no ponto a quando existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fx) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Nesse caso, o número $f'(a)$ é chamado derivada de f em a.

Dizemos que f é derivável no conjunto X quando f é derivável em todos os pontos $x \in X \cap X'$ nesse caso, definimos a função $f' : X \cap X' \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $x \longmapsto f'(x)$, que é chamada **função derivada de** f.

Definição 1.26. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$, derivável em X, é de classe C^1 em X quando a função f' é contínua.

Teorema 1.27. *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável num ponto $a \in X \cap X'$, então f é contínua em a.*

Demonstração: *Observe que para $x \in X - a$, temos*

$$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$$

Tomando o limite quando $x \longrightarrow a$ em ambos os lados da equação, obtemos;

$$\lim_{x \to a} f(x) = f'(a).0 + f(a) = f(a)$$

■

Apresentamos agora dois resultados importantes, a demonstração do Teorema 1.28 pode ser encontrada em [1], [2] ou [3].

Teorema 1.28. ***(Regra da cadeia)****:Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, g : Y \longrightarrow \mathbb{R}, a \in X \cap X', b = f(a) \in Y \cap Y'$ e $f(X) \subset Y$. Se f é derivável em a e g em $f(a)$, então $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a, com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Teorema 1.29. ***(Teorema do Valor Médio)****: Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demonstração: Consideremos a função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(x) - dx$, com $d = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. Como f é a soma da função g com uma função polinomial de grau 1, logo f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Além disso, podemos notar que;

$$\begin{aligned}
f(a) &= g(a) - d.a \\
&= g(a) - a\frac{[g(b) - g(a)]}{b - a} \\
&= g(a) + (-a + b - b)\frac{[g(b) - g(a)]}{b - a} \\
&= g(a) + (-a + b)\frac{[g(b) - g(a)]}{b - a} - b\frac{[g(b) - g(a)]}{b - a} \\
&= g(a) + [g(b) - g(a)] - b.d \\
&= g(b) - d.b \\
&= f(b)
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$. Alem disso, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Por fim, observe que;

$$f'(x) = g'(x) - d$$

logo

$$0 = f'(c) = g'(c) - d$$

,
isto é

$$g'(c) = d = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Concluindo assim a nossa demonstração. ■

Capítulo 2

Noções de Dinâmica Unidimensional

Neste capítulo, iremos abordar conceitos de Dinâmica Unidimensional. Teremos como objetivo apresentar conceitos e alguns resultados que serão importantes para compreensão do principal teorema do nosso trabalho. Então, iremos iniciar com a ideia de sistema dinâmicos discretos, passando em seguida pela definição de pontos fixos e pontos periódicos.

2.1 Sistemas Dinâmicos Discretos

Definição 2.1. Considere $T : X \to X$, em que $X \subset \mathbb{R}$. Dado $x \in X$, denotaremos por

$$\begin{array}{rcl} T^0(x) & = & x \\ T^1(x) & = & T(x) \\ T^2(x) & = & T(T(x)) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T^n(x) & = & \underbrace{T(T(\ldots(T(x))\ldots))}_{n \text{ vezes}} \end{array}$$

com $n \in \mathbb{N}$. $T^n(x)$ é dito n-ésima interação de x pela aplicação T.

Exemplo 2.2. Seja $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por $T(x) = \dfrac{x}{2}$. Então para para $x_0 = 0$, note que $T^0(x_0) = 0,\ T^1(x_0) = \dfrac{0}{2} = 0,\ T^2(x) = T(T(x_0)) = 0, \ldots, T^n(x_0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Observe agora que para $x_1 = \dfrac{1}{2}$, temos

$$\begin{array}{rcl} T^0(x_1) & = & \dfrac{1}{2}, \\ T^1(x_1) & = & \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2}, \\ T^2(x_1) & = & T(T(x_1)) = T(\dfrac{1}{8}) = \dfrac{1}{2^3}. \end{array}$$

Perceba que $T^n(x_1) = \frac{1}{2^{n+1}}$

Qualquer aplicação $T : X \to X$ em que estejamos interessados em descrever o comportamento da sequência $x, T(x), T^2(x), ..., T^n(x), ...$ definirá um **Sistema dinâmico de tempo discreto.**

Definição 2.3. Dados $T : X \to X$ e $x \in X$, a órbita futura de x é o conjunto

$$O_+^T(x) = \{T^n(x); n \geq 0\}$$

Assim, em um sistema dinâmico de tempo discreto estamos interessados em descrever o comportamento das órbitas dos pontos do domínio do sistema.

Exemplo 2.4. Voltemos ao exemplo 2.2 onde $T : [0,1] \to [0,1]$ é dado por $T(x) = \frac{x}{2}$, temos

$$\begin{array}{rcl} O_+^T(0) & = & \{0\} \\ O_+^T(\frac{1}{2}) & = & \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\} \\ O_+^T(1) & = & \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\} \end{array}$$

Exemplo 2.5. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x(1-x)$. A órbita futura de $x = 0,01$ sobre g é

$$O_+^g(x) = \{0,01; 0,0198; 0,0388; ...\}$$

2.1.1 Pontos fixos

Definição 2.6. Seja $T : X \to X$ e $p \in X$. Diremos que p é um **ponto fixo** de T quando $T(p) = p$.

Observação 2.7. Denotaremos o conjunto de pontos fixos de T por

$$Fix(T) = \{x \in X; T(x) = x\}$$

Note que se $p \in Fix(T)$, então

$$O_+^T(p) = \{p\}$$

Exemplo 2.8. Voltando aos exemplos anteriores, temos

$$T(x) = x \iff \frac{x}{2} = x \iff x = 0$$

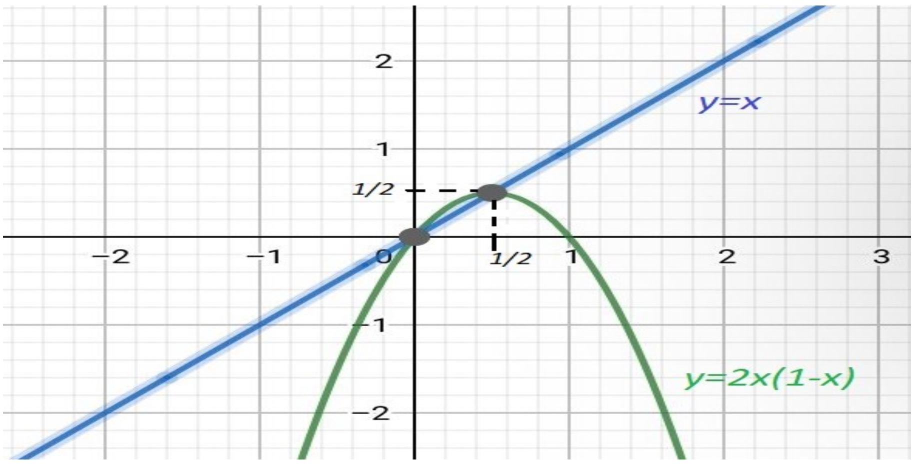
Ou seja, $Fix(T) = \{0\}$. Para g temos

$$\begin{aligned} g(x) = x \Longleftrightarrow 2x(1-x) &= x \\ 2x - 2x^2 &= x \\ 2x - x - 2x^2 &= 0 \\ x - 2x^2 &= 0 \\ x(1-2x) &= 0 \\ x = 0; x = \frac{1}{2} & \end{aligned}$$

Assim, $Fix(g) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

Ao analisarmos o gráfico de uma aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos encontrar os pontos fixos de T fazendo a interseção do gráfico de T com o gráfico de $y = x$, pois para estes pontos temos $x = T(x)$.

Figura 2.1: gráficos de $y = g(x)$ e $y = x$



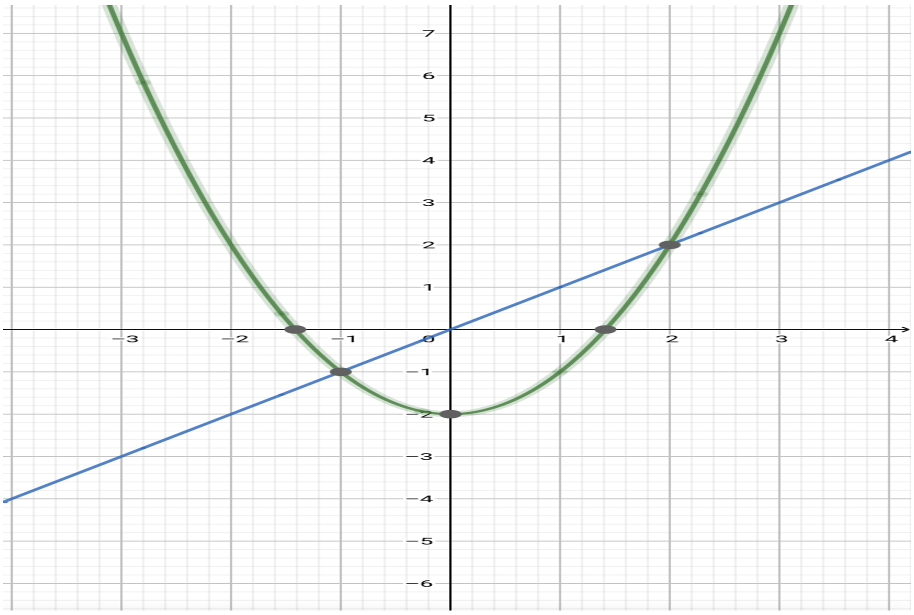
Fonte: autor 2021

Exemplo 2.9. Encontremos os pontos fixos da função $f(x) = x^2 - 2$. Para encontrar os pontos fixos façamos $f(x) = x$, logo;

$$f(x) = x \Longrightarrow x^2 - 2 = x \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x' = 2 \quad \text{e} \quad x'' = -1$$

Logo os pontos fixos são $\{-1, 2\}$.

Figura 2.2: gráfico de $f(x) = x^2 - 2$ e $y = x$



Fonte: autor 2021

O Teorema a seguir nos fornece uma condição necessária para a existência de pontos fixos.

Teorema 2.10. *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ contínua. Então f tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Considere $g : [a, b] \to [a, b]$ e $g(x) = f(x) - x$. Note que g é contínua. Tomaremos $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$, pois se forem iguais nada teria a se provar. Note que

$$g(a) = f(a) - a > 0$$

$$g(b) = f(b) - b < 0$$

, ja que $g(b) < 0 < g(a)$ então, pelo Teorema 1.18, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g(x_0) = 0$. Então temos que

$$f(x_0) - x_0 = 0$$

$$f(x_0) = x_0$$

■

Definição 2.11. Uma aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma contração de X quando existe $0 < k < 1$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$, vale que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Exemplo 2.12. A aplicação $T(x) = \frac{x}{2}$ é tal que

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= |\frac{1x}{2} - \frac{1y}{2}| \\ &= \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

Aqui $K = \frac{1}{2}$.

Observação 2.13. Vimos também que $Fix(T) = \{0\}$, ou seja, T **possui um único ponto fixo**. Veremos que isso, na verdade, é uma característica de contrações quando definidas em intervalos $[a, b]$.

Observe ainda que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contração, então f é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e qualquer ponto $x_0 \in [a, b]$ temos

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|.$$

Basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$.

Teorema 2.14. *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Por f se contração, temos f contínua em $[a, b]$ e pelo teorema 2.10, existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Mostremos então que x_0 é único. Suponha que exista outro $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = x_1$. Assim,

$$\begin{aligned} |x_0 - x_1| &= |f(x_0) - f(x_1)) \\ &\leq k|x_0 - x_1| \\ (1 - k)(|x_0 - x_1|) &\leq 0 \end{aligned}$$

Como $(1 - k) > 0$, segue que $|x_0 - x_1| = 0$. Ou seja $x_0 = x_1$ □

Exemplo 2.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$, vamos mostrar que f tem um único ponto fixo. Inicialmente note que se existir algum ponto fixo para f, este deve pertencer ao intervalo $[-1, 1]$, pois $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Assim vamos considerar

$$f : [-1, 1] \to [-1, 1] \text{ dada por } f(x) = \cos(x).$$

Utilizaremos o Teorema 1.29 para provar que f é uma contração em $[-1,1]$. Considere x diferente de y em $[-1,1]$. Sem perda de generalidade, seja $x < y$. Uma vez que f é contínua em $[-1,1]$ e derivável em $(-1,1)$, usando o Teorema 1.29, existe $c \in (x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ \Longrightarrow |f'(c)| &= \frac{|\cos(y)-\cos(x)|}{|y-x|} \\ \Longrightarrow |-\sin(c)| &= \frac{|\cos(y)-\cos(x)|}{|y-x|} \\ \Longrightarrow |\sin(c)|.(|y-x|) &= |\cos(y)-\cos(x)| \end{aligned}$$

Tome $k = |\sin(c)|$ e note que $k \leq \max\{|sen(-1)|, |sen(1)|\} < 1$. Assim,

$$|\cos(y)-\cos(x)| \leq k|x-y|.$$

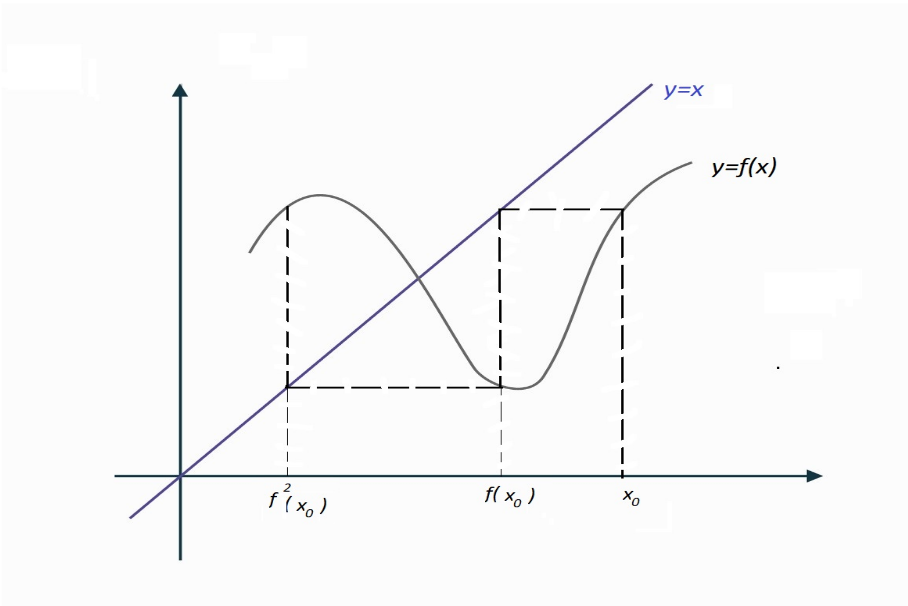
Agora basta aplicar o Teorema 2.14.

2.2 Análise gráfica de uma órbita

Representando a função f graficamente, podemos usar um recurso geométrico bem prático para nos ajudar a determinar a dinâmica de f. Como observamos anteriormente, a interseção entre a reta $y = x$ e o gráfico da função f fornecem os pontos fixos de f. Nesses pontos, temos $f(x) = x$. A partir dessa ideia, iremos fornecer um método para encontrar a órbita de um ponto x_0 no domínio de f. Iremos dar início com a reta $y = x$. Daqui iremos traçar uma reta paralela ao eixo das ordenadas que intersectará o gráfico de f no ponto $(x_o, f(x_o))$. A partir disso, iremos ao nosso segundo passo em que traçaremos uma reta horizontal, mas agora paralela ao eixo das abcissas desde o ponto anterior, até intersectarmos a nossa reta $y = x$. Com isso, observaremos que a intersecção é o ponto $(f(x_o), f(x_o))$. Novamente, se traçarmos uma reta vertical, intersectamos o gráfico de f em $(f(x_o), f^2(x_o))$, e logo em seguida traçamos uma reta horizontal até à diagonal $y = x$ e obtemos o ponto de intersecção $(f^2(x_o), f^2(x_o)$. Então, observamos que se repetirmos o procedimento sucessivamente, iremos obter graficamente a órbita de x_o. Ou seja, teremos determinados os pontos

$$x_o, f(x_o), f^2(x_o), f^3(x_o)....$$

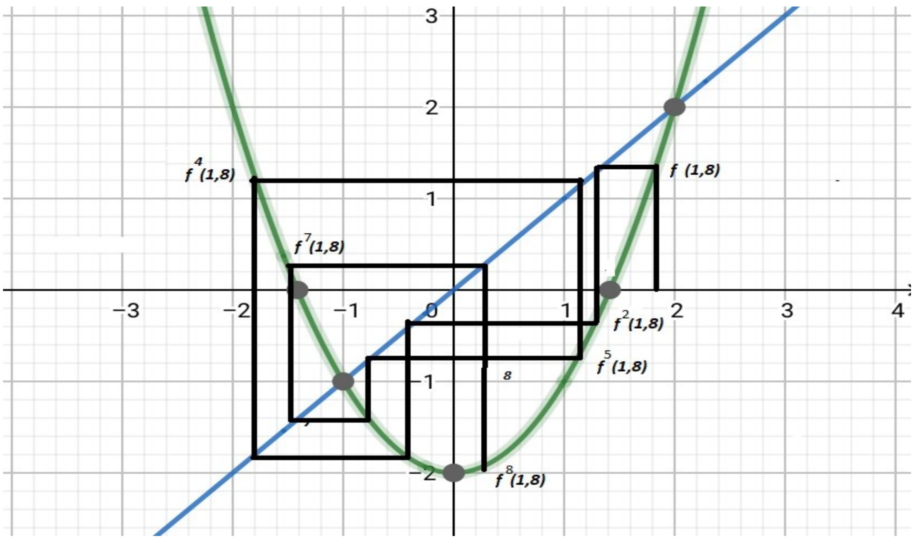
Figura 2.3: Órbita de x_0.



Fonte: autor 2021

Exemplo 2.16. Considere a função $f(x) = x^2 - 2$. Podemos obter graficamente a oitava iteração de $1, 8$ por f, ou seja, $f^8(1, 8)$.

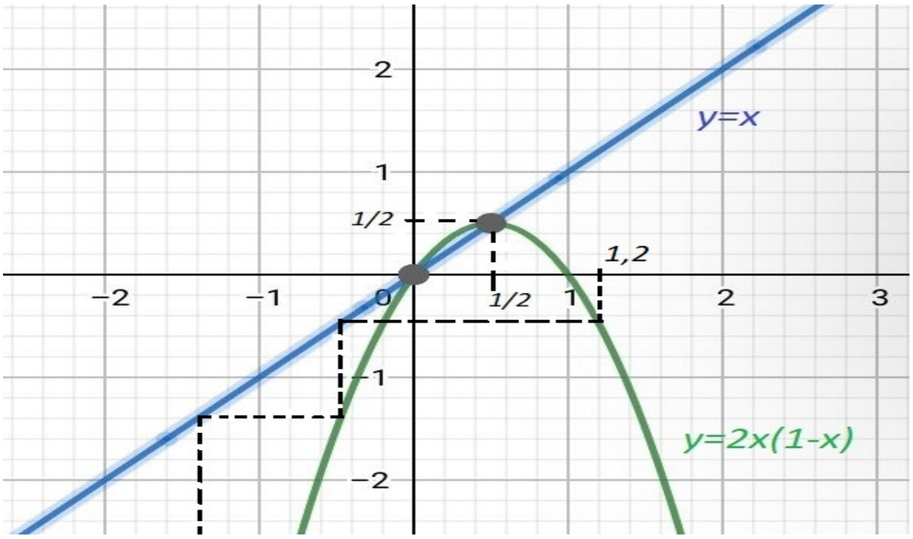
Figura 2.4: Oitava iteração de 1,8 por f.



Fonte: autor 2021

Exemplo 2.17. Fazendo a análise do gráfico da função $f(x) = 2x(1-x)$, podemos observar o comportamento da órbita de $x_0 = 1,2$ é tal que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

Figura 2.5: Órbita de x_0.

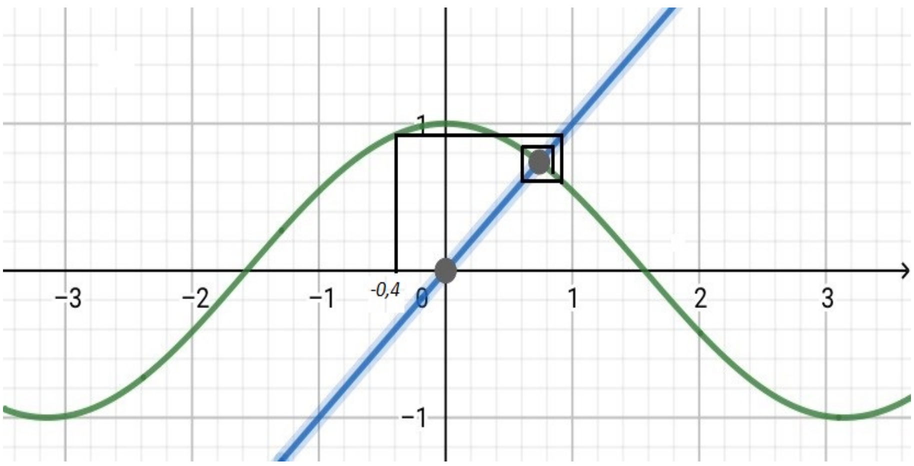


Fonte: autor 2021

Exemplo 2.18. Consideremos a função $f(x) = \cos(x)$. Observe que tomando $x_0 = -0,4$, temos que a órbita de x_0 por f converge para o único ponto fixo de f. Isto é, se $p \in \mathbb{R}$ é tal que $\cos(p) = p$, então

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = p.$$

Figura 2.6: Órbita de $-0,4$ por $f(x) = cos(x)$



Fonte: autor 2021

2.3 Estabilidade de pontos fixos

Como observamos nos exemplos 2.17 e 2.18 , há duas diferentes ações, uma onde o ponto fixo repulsa e a outra onde o ponto fixo atrai os pontos para si. Com isso, podemos perceber que nem todos pontos fixos são iguais.Um ponto fixo é do tipo **atrator**, quando por propriedade ele move os pontos próximos a ele para mais perto, e é do tipo **repulsor** quando por propriedade ele afasta pontos que estão próximos a ele. Em termos mais precisos, temos

Definição 2.19. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação e $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) = p$. Diremos que p é um ponto fixo atrator quando existir $\epsilon > 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = p$ para todo $x \in N_\epsilon(p) = (p-\epsilon, p+\epsilon)$. E diremos que p é ponto fixo repulsor existir $\epsilon > 0$ tal que para cada ponto $x \in N_\epsilon(p)$ (exceto eventualmente o próprio p), temos $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) \notin N_\epsilon(p)$(se existir o limite).

Essa noção de estabilidade de pontos próximos a um ponto fixo pode ser estudada tomando a derivada do ponto fixo p. Se f é uma aplicação de classe C^1 podemos perceber que a distância entre $f(p)$ e $f(x)$, onde x é um ponto próximo de p, é ampliada ou encolhida por f à uma taxa aproximada de $|f'(p)|$.

Teorema 2.20. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então:*

1. *Se p é um ponto fixo de f com $|f'(p)| < 1$, então p é ponto fixo atrator de f.*

2. *Se p é um ponto fixo de f com $|f'(p)| > 1$, então p é ponto fixo repulsor de f.*

Demonstração. **(1)** Tome a como um número qualquer entre $|f'(p)|$ e 1; por exemplo, tomemos $a = \dfrac{1 + |f'(p)|}{2}$. Uma vez que

$$\lim_{x\to p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x-p|} = |f'(p)|$$

e f' é contínua, segue que existe uma vizinhança $N_\varepsilon(p)$ para algum $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x-p|} < a \tag{2.1}$$

em que $x \in N_\varepsilon(p)$ e $x \neq p$. Note aqui que, por (2.1), vale que $f(x) \in N_\varepsilon(p)$. Vamos mostrar que a inequação

$$|f^k(x) - p| \leq a^k |x-p|$$

é verdade para todo $k \geq 1$.

Vemos por (2.1) que é válida para $k = 1$. Suponha que $|f^k(x) - p| \leq a^k|x-p|$ para algum $k > 1$ e para todo x próximo de p ($x \in N_\varepsilon(p)$), daí temos

$$|f^{k+1}(x) - p| = |f^k(f(x)) - p| = |f^k(f(x)) - f(p)|$$

Como $f(x) \in N_\varepsilon(p)$, segue que

$$\begin{aligned} |f^{k+1}(x) - p| = |f^k(f(x)) - f(p)| &\leq a^k|f(x) - f(p)| = a^k|f(x) - p| \\ &\leq a^k a|x - p| = a^{k+1}|x - p| \end{aligned}$$

Agora, como $0 < a < 1$, segue que $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = f(p) = p$ para todo $x \in N_\varepsilon(p)$.

(2) Semelhante a primeira parte. □

Observação 2.21. No exemplo $f(x) = -x$, o 0 é o único ponto fixo, mas não é um ponto atrator e nem um ponto repulsor, pois o módulo da derivada é 1. Isso é chamado de **Ponto indiferente**.

Exemplo 2.22. Tome $f(x) = \cos(x)$. Como $|f'(x)| = |sen(x)|$, e como o seno é limitado estritamente por 1, segue que o ponto fixo de f é do tipo atrator.

Exemplo 2.23. Seja $f(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 0$.

(1) Para encontrar os pontos fixos, temos que fazer $f(x) = x$, então temos:

$$\begin{aligned} \mu x(1 - x) &= x \\ \mu x - \mu x^2 - x &= 0 \\ x(\mu - \mu x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Então, $x = 0$ ou $x = \dfrac{-1 + \mu}{\mu}$.

(2) Temos como derivada $f'(x) = -2\mu x + \mu$. Aplicando os pontos fixos, teremos: Para $x = 0$,temos

$$f'(0) = -2\mu 0 + \mu = \mu.$$

Para $x = \dfrac{-1 + \mu}{\mu}$, temos

$$\begin{aligned} f'(\frac{-1 + \mu}{\mu}) &= -2\mu(\frac{-1 + \mu}{\mu}) + \mu \\ &= \frac{2\mu - 2\mu^2}{\mu} + \mu \\ &= 2 - 2\mu + \mu \\ &= -\mu + 2 \end{aligned}$$

Com isso,

1. Se $\mu < 1$, então 0 é ponto fixo atrator;
2. Se $\mu > 1$, então 0 é ponto fixo repulsor;

3. Se $\mu < 1$ ou $\mu > 3$ então $\dfrac{-1+\mu}{\mu}$ é ponto fixo repulsor;

4. Se $1 < \mu < 3$ então $\dfrac{-1+\mu}{\mu}$ é ponto fixo atrator.

Exemplo 2.24. Seja $f(x) = x - x^2$. Essa função tem como ponto fixo 0. Mas nesse caso, $|f'(0)| = 1$ e não podemos usar o Teorema 2.20. Ainda assim é possível analisar as órbitas dos pontos que estão próximos de 0. Seja $0 < x_0 < 1$, notemos que $f(x_0) = x_0 - x_0^2 > 0$ pois $x_0^2 < x_0$. Além disso, $0 < f^2(x_0) = f(x_0) - [f(x_0)]^2 < f(x_0)$. De maneira geral, temos

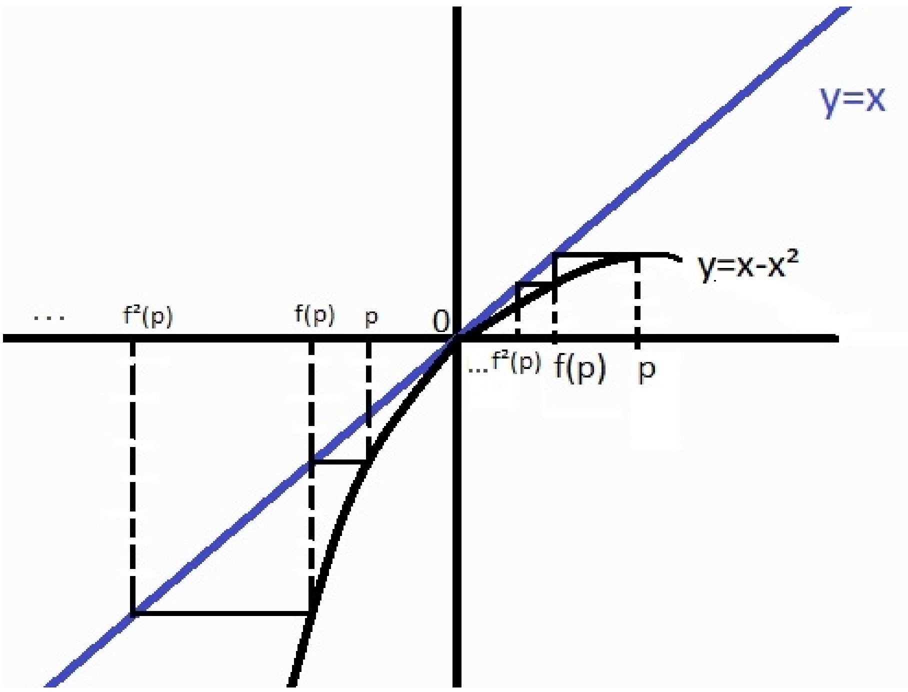
$$0 < ... < f^{n+1}(x_0) < f^n(x_0) < ... < f^2(x_0) < f(x_0) < x_0.$$

Ou seja, a sequência $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ é monótona decrescente e limita inferiormente por 0. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$. Seja agora $x_0 < 0$. Temos ainda a sequência $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ monótona decrescente, porém ilimitada inferiormente. Segue então que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty.$$

Assim, vemos que o ponto fixo 0 atrai a órbita dos pontos localizados à direita e repulsa os pontos localizados à esquerda.

Figura 2.7: Órbitas de $p < 0$ e $0 < p < 1$ por $f(x) = x - x^2$



Fonte: autor 2021

2.4 Pontos Periódicos

Tão importantes quanto os pontos fixos na análise de convergência de órbitas são os pontos periódicos.

Definição 2.25. Seja $f : X \longrightarrow X$. Dizemos que $x_0 \in X$ é ponto periódico de f com período n, se

$$\begin{cases} f^n(x_0) & = x_0 \\ f^k(x_0) & \neq x_0; \quad k = 1, 2, .., n-1 \end{cases}$$

Observação 2.26. Note que se p é ponto periódico de período n, então

$$O_+^f = \{p, f(p), f^2(p), ..., f^{n-1}(p)\}.$$

Observação 2.27. Os pontos fixos de $f(x)$ são também pontos periódicos de período 1 de f. Com isso, os pontos periódicos de f de período n são os pontos fixos da função $f^n(x)$

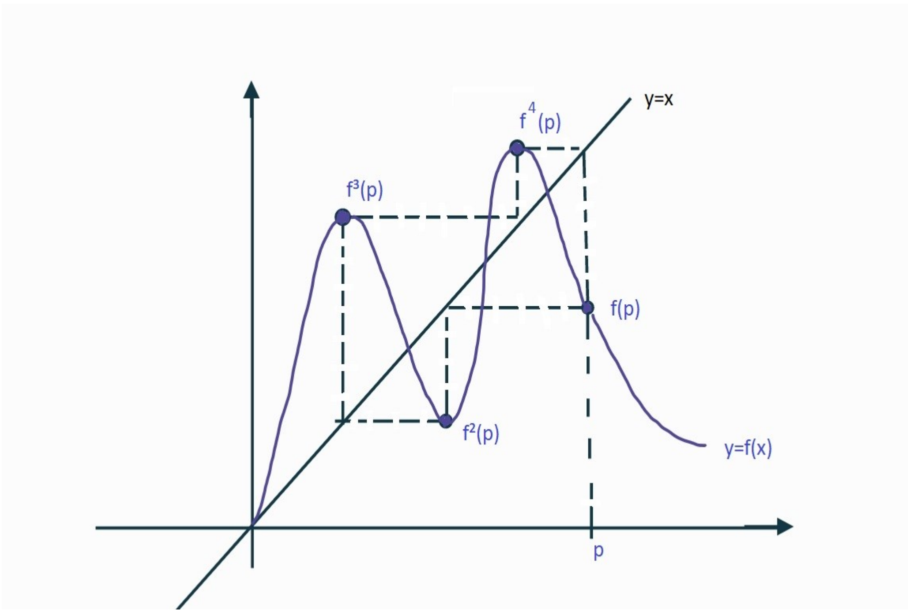
Exemplo 2.28. Vejamos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que está definida por $f(x) = x^2 - 2$. Com isso, para $f(x) = x$, temos $x^2 - 2 - x = 0$. Logo $x = -1$ e $x = 2$ são os pontos fixos de f. Vamos agora achar os pontos periódicos de período 2 de f. Para isso temos que $f^2(x) = x$, então temos $(x^2 - 2)^2 - 2 = x$, que organizando temos, $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$. Logo, $x = -1, x = 2, x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ são pontos fixos de f^2, e consequentemente, são pontos periódicos de período 2 de f. Mas ja vimos que -1 e 2 são pontos fixos de f, então para se confirmar que $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ são pontos periódicos de período 2, precisamos verificar que $f(x) \neq x$. De fato;

$$\begin{aligned} f(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}) &= (\frac{-\sqrt{5}-1}{2})^2 - 2 \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ f(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) &= (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 - 2 \\ &= \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

Definição 2.29. (**Ciclo de período n**): Chamamos de ciclo a uma órbita que se repete a ela própria a cada n interações.

Abaixo vemos um exemplo de órbita de um ponto periódico com ciclo de período 5.

Figura 2.8: Órbita de período 5



Fonte: autor 2021

Exemplo 2.30. Tome $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos;

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

A órbita de 0 é $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$. Então vamos dizer que 0 pertence a um ciclo de período 2 para $f(x)$.

Observação 2.31. Se x_0 se encontrar em uma órbita de período k, então todos os pontos da órbita de x_0 têm também período k. Chamamos essa órbita de **órbita invariante** de f.

No que vem a seguir, considere f uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$. Podemos estender as noções que vimos sobre estabilidade de pontos fixos para pontos periódicos, pois como já foi dito se p é um ponto de período k para uma função f, então ele é um ponto fixo para a função f^k. Temos o seguinte:

Definição 2.32. Seja f uma função e vamos assumir que p é um ponto periódico de período k. Diremos que p é um ponto **periódico atrator**, se p for um ponto fixo atrator para f^k. E p é chamado de ponto **periódico repulsor**, se p for ponto fixo repulsor de f^k.

Observação 2.33. É comum também dizer que o ciclo de período k de um ponto periódico p (de período k) é atrator ou repulsor, pois se por exemplo p for ponto fixo atrator de

f^k então existe uma vizinhança de p tal que todos os pontos são atraídos para a seguinte órbita $\{p, f(p), ..., f^k(p)\}$.

Considere $\{p_1, ..., p_k\}$ um ciclo de período k em f. Usando a Regra da Cadeia (veja o Teorema 1.28) , temos que

$$\begin{aligned}
(f^k)'(p_1) &= (f(f^{k-1}))'(p_1) \\
&= f'(f^{k-1}(p_1))(f^{k-1})'(p_1) \\
&= f'(f^{k-1}(p_1))f'(f^{k-2}(p_1))...f'(p_1) \\
&= f'(p_k)f'(p_{k-1})...f'(p_1)
\end{aligned}$$

Desta forma, usando o Teorema 2.20, podemos obterr um teste para determinar se um ciclo de período k é atrator ou repulsor. Mais precisamente, temos:

Teste de estabilidade para órbitas periódicas

A órbita periódica $\{p_1, ..., p_k\}$ é atrator se

$$|f'(p_k)...f'(p_1)| < 1,$$

e repulsor se

$$|f'(p_k)...f'(p_1)| > 1.$$

Capítulo 3

Teorema de Li-York

Chegamos a parte principal do nosso trabalho, onde falaremos sobre o teorema de Li-York. Tal resultado nos garante condições necessárias para a existência de pontos periódicos de todos os períodos em um sistema. Antes de enunciar e demonstrar o resultado, vamos provar 3 lemas que serão úteis na prova do teorema principal..

Lema 3.1. *Seja $f : M \longrightarrow M$ contínua e $I, J \subset M$. Suponha que I e J são dois intervalos fechados, tais que, $f(I) \supset J$, então existe $K \subset I$ tal que $f(K) = J$*

Demonstração: Escreva $J = [b_1, b_2]$. Como $f(I) \supset J$, existem $a_1 < a_2$ em I tais que $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$. Definimos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \inf\{x \in [a_1, a_2]; f(x) = b_1\} \\ x_2 &= \sup\{x \in [a_1, a_2]; f(x) = b_2\}. \end{aligned}$$

e tomamos $K = [x_1, x_2]$. Segue que $f(K) = J$. ■

O Lema a seguir é um caso mais geral do que o Teorema 2.10.

Lema 3.2. *Seja $g : J \longrightarrow J$ contínua em um intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Se $K \subset J$ é fechado e limitado, tal que $g(K) \supset K$, então g tem um ponto fixo em K.*

Demonstração: Como $K = [\alpha_1, \alpha_2]$ e $K \subset g(K)$, existem $a, b \in K$ tais que;

$$\begin{aligned} g(a) &= \alpha_1 \leq a \\ g(b) &= \alpha_2 \geq b \end{aligned}$$

ou seja, $g(a) - a \leq 0$ e $g(b) - b \geq 0$. Como g é contínua, segue que a função $h : K \longrightarrow K$ dada por $h(x) = g(x) - x$ é contínua e pelo Teorema 1.18, existe $x_0 \in K$ tal que

$$h(x_0) = 0,$$

isto é,

$$g(x_0) = x_0.$$

■

Antes do próximo Lema, vamos dar a seguinte definição:

Definição 3.3. Seja $f : I \longrightarrow I$ contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se para os intervalos $J, K \subset I$ tivermos $f(J) \supset K$, então diremos que J cobre K e denotaremos por $J \longrightarrow K$.

Lema 3.4. *Seja $f : I \longrightarrow I$ uma aplicação contínua em um intervalo fechado e limitado $I \subset \mathbb{R}$. Se existem intervalos fechados $I_0, I_1, ..., I_{n-1} \subset I$ tais que;*

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$$

então f^n tem um ponto fixo $x_0 \in I$ tal que $f^m(x_0) \in I_m$ para $m = 0, 1, ..., n-1$.

Demonstração: Como $f(I_0) \supset I_1$, usando o Lema 3.1, existe $J_0 \subset I_0$ tal que $f(J_0) = I_1$. Mas ainda, temos o seguinte:

Afirmação 4. *Existem Intervalos fechados $I_0 \supset J_0 \supset J_1 ... \supset J_{n-1}$ tais que $f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}$, para $k = 0, ..., n-1$.*

Prova da Afirmação 4: Vamos usar indução nesta demonstração. Note que para $k = 0$ já provamos. Suponha então que existam intervalos fechados $J_0 \supset J_1 \supset ... \supset J_{m-1}$ contidos em I_0 para algum $m < n$ tais que $f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}$, para $k = 0, ..., m-1$. Temos assim, por hipótese de indução, que para $k = m-1$, vale

$$f^m(J_{m-1}) = I_m \tag{3.1}$$

Daí, aplicando f em 3.1 e notando que $I_m \to I_{m+1}$, temos

$$f^{m+1}(J_{m-1}) = f(I_m) \supset I_{m+1}. \tag{3.2}$$

Usando mais uma vez o Lema 3.1, agora para a aplicação f^{m+1}, segue que existe $J_m \subset J_{m-1}$ tal que $f^{m+1}(J_m) = I_{m+1}$, o que prova a afirmação. □

Prosseguimos com a demonstração do Lema 3.4. Note que $I_n = I_0$. Observe ainda que, pela Afirmação 4, temos

$$f^n(J_{n-1}) = I_0 \supset J_{n-1} \tag{3.3}$$

e cada $x \in J_{n-1}$ satisfaz

$$f^m(x) \in f^m(J_{n-1}) \subset f^m(J_{m-1}) = I_m$$

para $m = 0, ..., n-1$. Usando (3.3) e o Lema 3.2, segue que, f^n tem um ponto fixo em J_{n-1}, isto é, existe $x_0 \in J_{n-1}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$ e por $x_0 \in J_{n-1}$, vimos que $f^m(x_0) \in I_m$, $m = 0, ..., n-1$. ■

Chegamos então no resultado principal deste capítulo. O teorema a seguir nos diz que se estivermos em um sistema formado por uma função contínua em um intervalo fechado e limitado e, se este admite um ponto periódico de período 3, então estas são as condições para a existência de pontos periódicos de todos os períodos.

Teorema 3.5. ***(Lie-York)*** *Se $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ é contínua e tem um ponto periódico de período 3, então f tem pontos periódicos com todos os períodos.*

Demonstração. O Teorema 2.10 garante a existência de um ponto fixo em $[a,b]$, isto é, existe um ponto periódico de período 1. Sejam $x_1 < x_2 < x_3$ os elementos da órbita de um ponto periódico de período 3. Suponha que $f(x_2) = x_3$. Temos então $f^2(x_2) = x_1$, e escrevendo $I_1 = [x_1, x_2]$ e $I_2 = [x_2, x_3]$, teremos

$$f(I_1) \supset I_2 \quad \text{e} \quad f(I_2) \supset I_1 \cup I_2. \tag{3.4}$$

Caso tenhamos $f(x_2) = x_1$, então $f^2(x_2) = x_3$ e escrevendo $I_1 = [x_2, x_3]$ e $I_2 = [x_1, x_2]$, também teremos, $f(I_1) \supset I_2$ e $f(I_2) \supset I_1 \cup I_2$. Em qualquer caso acima, para um inteiro $n \geq 2$ com $n \neq 3$, podemos escrever

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_3, \tag{3.5}$$

com $n+1$ elementos. Usando o Lema 3.4, existe $x_0 \in I_1$ tal que x_0 é ponto fixo de f^n, isto é, $f^n(x_0) = x_0$.

Afirmação 5. *n é o período de x_0.*

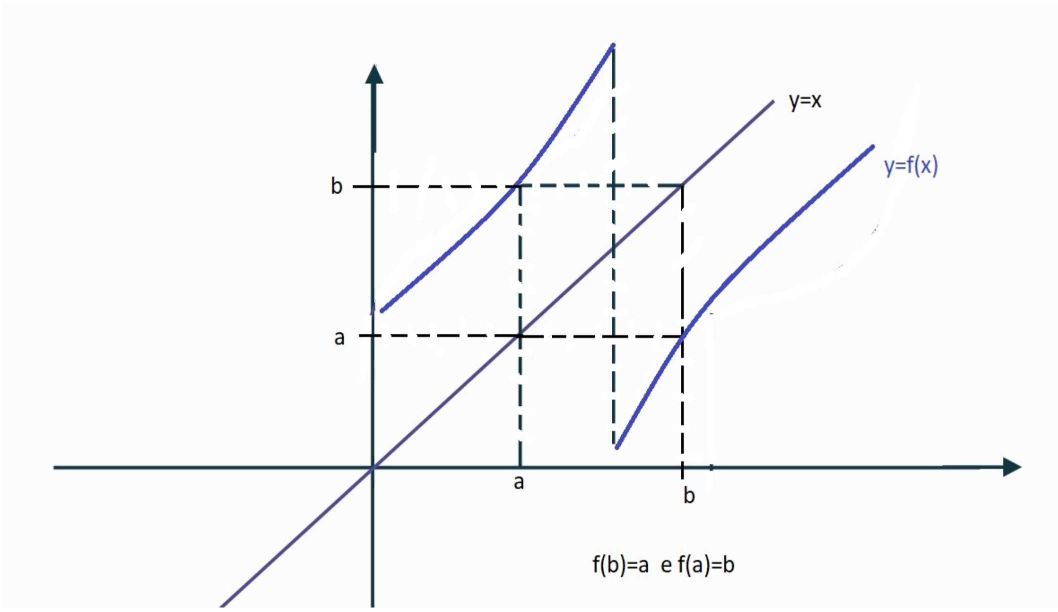
De fato, suponha por absurdo que $f^m(x_0) = x_0$ para $m < n$. Teremos então $f^m(x_0) = x_0 \in I_2$ ou seja, $x_0 \in I_1 \cap I_2 = \{x_2\}$. Note que a órbita de x_2 pertence sucessivamente aos intervalos

$$I_1, I_2, I_2, I_1, I_2, I_2, I_1, ..,$$

mas isso não ocorre, pois consideramos $n \neq 3$ em (3.5). Essa contradição prova a afirmação. Portanto, x_0 é um ponto periódico de período n, para todo $n \geq 2$ e $n \neq 3$. Como ja havíamos provado a existência de pontos fixos e por hipótese existe ponto periódico de período 3, temos o resultado para todo n inteiro positivo. □

Notemos agora que não é difícil encontrar um exemplo em que f é descontínua e o Teorema 3.5 não vale .

Figura 3.1: f não tem pontos fixos, mas contém um ciclo de período 2.



Fonte: autor 2021

Observação 3.6. O Teorema 3.5 pode ser visto ainda como consequência de um teorema mais geral conhecido como Teorema de Sharkovsky.

Considere a seguinte relação de ordem $\lhd$ em $\mathbb{N}$ definida por

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd ... \lhd 2^m \lhd ...$$

$$\lhd ... \lhd 2^m(2n+1) \lhd ... \lhd 2^m 7 \lhd 2^m 5 \lhd 2^m 3 \lhd ...$$

$$\lhd ... \lhd 2(2n+1) \lhd ... \lhd 2.7 \lhd 2.5 \lhd 2.3 \lhd ...$$

$$\lhd ... \lhd 2n+1 \lhd ... \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.$$

De posse desta relação de ordem é possível provar o seguinte:

Teorema 3.7. *(**Sharkovsky**) Seja $f : I \longrightarrow I$ uma transformação contínua em um intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Se f tem um ponto periódico com período p e $q \lhd p$, então f tem um ponto periódico com período q.*

Observe que se o Teorema 3.7 vale, então ter um ponto periódico de período 3 implica ter um ponto periódico de qualquer período n, pois $n \lhd 3$ para todo n inteiro positivo. Assim o Teorema de Li-Yorke se torna apenas um corolário do Teorema de Sharkovsky. A prova do Teorema de Sharkovsky é um pouco mais elaborada e pode ser encontrada nas referências [4], [6], [7] e [8].

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. Introdução á análise real. São Paulo,Blucher,1999.

[2] LIMA,Elon Lages. Análise real. Impa,2004.

[3] LIMA, Elon Lages. Análise Real volume 1. Projeto Euclides,2008. 1.55

[4] Robert L Devaney. A first course in chaotic dynamical systems. Westview Press, 1992. 22

[5] Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos. The American Mathematical Monthly, 82(10):985-992, 1975. 2,15

[6] Alexander N. Sharkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, 16:61-71, 1964. 2

[7] Barreira, L., Valls, C. Teoria dos Sistemas Dinâmicos: uma introdução. Editora Livraria da Física, 2012. 1ª edição.

[8] Brás, João Carlos Teodoro.Dinâmica de funções contínuas na reta. Editora, Universidade da Beira Interior,out-2013

[9] Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer , James A. Yorke , Springer-Verlag, 1997