UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Alexandre César Bispo Lima

A compacidade em alguns universos topológicos

Recife-PE
Julho de 2021

A compacidade em alguns universos topológicos

por

Alexandre César Bispo Lima

Sob orientação de

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho (orientador)

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Recife-PE
Julho de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L732c Lima, Alexandre César Bispo
A compacidade em alguns universos topológicos / Alexandre César Bispo Lima. - 2021.
76 f. : il.

Orientador: Gilson Mamede de Carvalho.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Espaços topológicos. 2. Compacidade. 3. Espaços métricos. 4. Topologia fraca. 5. Topologia fraca*. I. Carvalho, Gilson Mamede de, orient. II. Título

CDD 510

Alexandre César Bispo Lima

A compacidade em alguns universos topológicos

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 13/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Recife-PE
Julho de 2021

À minha família, por todo apoio e aos meus amigos, que foram compreensivos em meus momentos de ausência.

Agradecimentos

- À minha mãe Verônica, ao meu pai Roberto e aos meus irmãos, Caio e Rodolfo, por todo amor e pelos momentos de apoio durante a minha vida, em particular durante a graduação, sendo um suporte fundamental para as minhas realizações.

- Ao meu orientador, que se tornou amigo, Gilson Carvalho, pelo esforço, dedicação e paciência para a elaboração deste trabalho (e diversos outros), assim como o suporte durante a minha trajetória na graduação.

- Aos professores Rodrigo Clemente e Nacib Gurgel por aceitarem o convite para compor a banca deste trabalho, trazendo contribuições primordiais.

- Aos professores e professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, que, sem dúvidas, contribuíram positivamente para a minha formação.

- Aos amigos e amigas de curso, que em todos os momentos me apoiaram nas minhas escolhas e nas minhas realizações. Em particular aos amigos de graduação que viraram amigos para a vida: Túlio José, João Pedro, Yasmin Lira, Jamerson Lira, Vitória Nascimento, Alaíde Lima e Antônio Ferreira.

- A todos e todas que, direta ou indiretamente, contribuíram de forma positiva para a minha graduação, em particular para a realização deste trabalho.

- À FACEPE pelo apoio financeiro durante os estudos de iniciação científica que resultaram na elaboração deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar e estabelecer relações entre conjuntos compactos e topologia, dando ênfase à compacidade da bola fechada unitária em diferentes contextos. Para isto, inicialmente tratamos de espaços topológicos no Capítulo 1, desenvolvemos conceitos básicos e ferramentas que serão úteis até chegarmos ao tema central de compacidade. Em seguida, no Capítulo 2, focamos o estudo no ambiente mais particular dos espaços métricos, onde desenvolvemos conceitos e resultados com o objetivo de finalizar o capítulo com uma caracterização de compacidade da bola fechada unitária do espaço. Por fim, no Capítulo 3, estudamos as topologias fraca e fraca*, visando apresentar como resultado final o célebre Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que nos diz que a bola fechada unitária no dual topológico de um espaço de Banach é fraca* compacta.

Palavras-Chave: Espaços topológicos; Compacidade; Espaços métricos; Topologia fraca; Topologia fraca*.

Abstract

This work aims to study and establish relationships between compact sets and topology, emphasizing the compactness of the unitary closed ball in different contexts. For this, initially we dealt with topological spaces in Chapter 1, we developed basic concepts and tools that will be useful until we get to the central theme of compactness. Then, in Chapter 2, we focus the study on the more particular environment of metric spaces, where we develop the concepts and results in order to end the chapter with a compactness characterization of the unitary closed ball of space. Finally, in Chapter 3, we study how weak and weak* topologies, drawing as a final result the famous Banach-Alaoglu-Bourbaki Theorem, which tells us that the unitary closed ball in the topological dual of a space of Banach is weak* compact.

KeyWords: Topological spaces; Compactness; Metric spaces; Weak topology; Weak* topology.

Sumário

Lista de Notações

- τ_0 representa a topologia discreta e τ_1 representa a topologia caótica;
- $\mathbb{R}^N$ denota o produto cartesiano de N fatores iguais a $\mathbb{R}$;
- τ_X denota, quando houver perigo de confusão, a topologia do conjunto X;
- $\operatorname{int} X$ denota o conjunto dos pontos interiores de X;
- $\overline{X}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a X;
- $\operatorname{fr} X$ denota o conjunto dos pontos de fronteira de X;
- $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ representa o gráfico da função $f : X \to Y$;
- $d(x, y)$ indica a distância de x para y;
- $|\cdot|$ representa o valor absoluto em $\mathbb{R}$;
- $\|\cdot\|$ representa uma norma;
- d_M e d_S representam as distâncias do máximo e da soma em $\mathbb{R}^N$, respectivamente;
- $\|\cdot\|_M$ e $\|\cdot\|_S$ representam as normas do máximo e da soma em $\mathbb{R}^N$, respectivamente;
- d_X denota, quando houver perigo de confusão, a métrica do conjunto X;
- $\|\cdot\|_X$ denota, quando houver perigo de confusão, a norma no conjunto X;
- $B(a; r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r;
- $B[a; r]$ denota a bola fechada de centro a e raio r;
- $S[a; r]$ denota a esfera de centro a e raio r;
- $\operatorname{diam} X$ denota o diâmetro de X;
- $\mathfrak{F}(X; M) = \{f : X \to M : f \text{ é uma função}\}$;
- $\mathfrak{B}(X; M) = \{f : X \to M : f \text{ é uma função limitada}\}$;

- ε e δ denotam constantes positivas;
- $x_n \to x$ indica que a sequência (x_n) converge para x na topologia proveniente da métrica;
- $\mathbb{S}^{N+1}$ indica a esfera unitária centrada na origem em $\mathbb{R}^N$;
- $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \to F : f$ é linear e contínua$\}$;
- $E^\star$ denota o dual topológico de um espaço normado E;
- $E^{\star\star}$ denota o bidual topológico de um espaço normado E;
- Se $f \in E^\star$ e $x \in E$, escrevemos $\langle f, x\rangle$ para representar $f(x)$;
- $J : E \to E^{\star\star}$ denota a injeção canônica de E em $E^{\star\star}$;
- $\sigma(E, E^\star)$ denota a topologia fraca em E;
- $\sigma(E^\star, E)$ denota a topologia fraca* em $E^\star$;
- $x_n \rightharpoonup x$ indica que a sequência (x_n) converge para x na topologia fraca;
- $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ indica que a sequência (f_n) converge para f na topologia fraca*;
- B_E denota a bola fechada unitária num espaço normado E.

Introdução

O estudo da Análise Funcional surgiu da necessidade de se trabalhar com espaços vetoriais de dimensão infinita, como por exemplo, os espaços das funções, em particular os espaços das sequências. Mas qual a importância de estudar espaços vetoriais em que seus elementos são funções? As equações diferencias, que são equações que envolvem funções e suas derivadas, possuem funções como solução. Tais equações são capazes de modelar diversos problemas na física, na economia, na biologia, dentre muitos outros ramos do conhecimento.

Na Análise Matemática, o conceito de compacidade é de extrema importância, visto que, por exemplo: aplicações contínuas definidas num conjunto compacto atingem máximo e mínimo globais; e toda sequência definida num conjunto compacto admite subsequência convergente. Sendo assim, o intuito deste trabalho é estudar a compacidade em alguns diferentes contextos, sendo possível constatar que a noção de compacidade está inteiramente ligada com a topologia definida no espaço, isto é, um conjunto pode ser ou não compacto, a depender da topologia considerada neste conjunto.

O principal resultado do nosso trabalho nos garante que a bola fechada unitária no dual de um espaço de Banach é sempre compacta, considerando, neste espaço, ao invés da topologia usual proveniente da norma deste espaço, uma topologia um pouco mais fraca: a topologia fraca*. Para sermos capazes de concluir este resultado, precisamos de alguns conceitos preliminares visando fortalecer as noções topológicas.

No primeiro capítulo vamos definir o que vem a ser uma topologia em um conjunto não vazio X, visando generalizar as noções de conjuntos abertos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ para um conjunto qualquer, sem que se tenha uma distância bem definida neste conjunto. Em seguida, definiremos continuidade de uma aplicação $f : X \to Y$, em que X e Y são espaços topológicos, utilizando apenas as imagens inversas dos elementos da topologia de Y, verificando que, não precisamos ter uma distância bem definida nestes espaços para podermos compreender o conceito de continuidade. Posteriormente, estudaremos diversos conceitos topológicos visando definir compacidade em espaços topológicos.

No segundo capítulo, vamos introduzir a noção de distância (métrica) visando definir espaços métricos, que nada mais é do que um espaço cuja noção de distância faz sentido. Atrelado a isso, vamos estudar também os espaços vetoriais normados, a fim de verificar que todo espaço vetorial normado é também um espaço métrico. O estudo de bolas e esferas servirá de auxílio para compreender a noção de continuidade em espaços métricos, onde agora passamos a ter uma distância bem definida, assim como vai nos dar ferramentas para definir conjuntos abertos em espaços métricos. Com isso, vamos ser capazes de concluir que todo espaço métrico é um espaço topológico. Posteriormente, vamos estudar as sequências nos espaços métricos, visando estabelecer uma conexão importante entre sequências e compacidade, a saber, se (x_n) é uma sequência em um compacto K, então existem uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) e $a \in K$ tais que $x_{n_k} \to a$. No fim deste capítulo vamos ver que, quando consideramos a topologia gerada pela norma, a bola fechada unitária em um espaço de Banach é compacta se, e somente se, a dimensão desse espaço é finita.

No terceiro capítulo vamos estudar duas topologias especiais: as topologias fraca e fraca*. Para isto, vamos estabelecer definições e estudar resulatados clássicos e importantes da Análise Funcional, como os teoremas de Hanh-Banach, formas analítica e geométricas, para que possamos obter resultados a respeito de tais topologias. Por fim, concluimos este trabalho provando que a bola fechada unitária no espaço dual de um espaço de Banach é fraca* compacta.

Capítulo 1

Espaços topológicos

Quando pensamos nos aspectos topológicos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, a noção de distância (através da norma euclidiana) está bastante presente. Então a pergunta que fazemos é a seguinte: podemos estender tais conceitos para espaços mais gerais, sem que se tenha uma noção de distância definida nesses espaços? Para responder esta pergunta, vamos fazer um breve passeio acerca da *Topologia Geral.*

1.1 Conceitos iniciais

Definição 1.1. Uma *topologia* num conjunto não vazio X é uma coleção τ de subconjuntos de X (tais subconjuntos são chamados de *abertos de X segundo a topologia τ*, ou simplesmente *abertos*) satisfazendo as seguintes condições:

(i) O vazio $\emptyset$ e o próprio conjunto X são abertos;

(ii) A união arbitrária de uma família de subconjuntos abertos é um aberto;

(iii) A interseção finita de abertos é um aberto.

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) em que X é um conjunto e τ é uma topologia em X. Quando não houver perigo de confusão, diremos apenas "o espaço topológico X", sem mencionar a topologia τ associada à X.

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto qualquer. Podemos definir em X uma topologia τ_0, chamada de *topologia discreta*, tomando todos os subconjuntos de X como abertos, isto é, $\tau_0 = \{M : M \subset X\}$. Em outro extremo, podemos definir em X uma topologia τ_1, chamada de *topologia caótica*, considerando apenas o vazio $\emptyset$ e o próprio X como abertos, isto é, $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$.

Exemplo 1.3. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é um espaço topológico quando munido com a topologia τ, formada por todos os abertos de $\mathbb{R}^N$ com respeito à norma euclidiana

$$\|(x_1, \dots, x_N)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}.$$

(i) Por construção, $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \tau$.

(ii) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma coleção arbitrária de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$ e considere $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Dado $a \in A$, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Sendo A_{λ_0} aberto, então existe $r_{\lambda_0} > 0$ tal que $B(a; r_{\lambda_0}) \subset A_{\lambda_0}$. Como $A_{\lambda_0} \subset A$, segue que $B(a; r_{\lambda_0}) \subset A$, portanto A é aberto em $\mathbb{R}^N$.

(iii) Sejam $A_1, \ldots, A_k$ abertos de $\mathbb{R}^N$ e considere $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$. Dado $a \in A$, segue que $a \in A_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Sendo cada A_i aberto, então existem $r_i > 0$ tais que $B(a; r_i) \subset A_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Tomando $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\} > 0$, encontramos $B(a; r) \subset B(a; r_i) \subset A_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$, logo $B(a; r) \subset A$ e, portanto, A é aberto em $\mathbb{R}^N$.

Com isso, mostramos que $(\mathbb{R}^N, \tau)$ é um espaço topológico.

Mesmo sem ter uma noção de distância bem definida é possível estabelecer uma boa definição do que vem a ser uma aplicação contínua entre espaços topológicos, como veremos na definição abaixo.

Definição 1.4. Sejam $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é *contínua* quando a imagem inversa de todo aberto de Y for um aberto de X, isto é, quando para todo $B \in \tau_Y$, tem-se que $f^{-1}(B) \in \tau_X$.

Proposição 1.5. *Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas então $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

Demonstração. Sendo g contínua, então dado um aberto $C \subset Z$, têm-se que $B = g^{-1}(C) \subset Y$ é um aberto de Y. Assim, sendo B aberto em Y, pela continuidade de f segue que $A = f^{-1}(B) \subset X$ é um aberto de X. Daí,

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) = f^{-1}(B) = A,$$

que é aberto em X. Portanto $g \circ f$ é contínua. □

Definição 1.6. Dizemos que f é *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para cada aberto $B \subset Y$ contendo $f(a)$, existir um aberto $A \subset X$ contendo a, tal que $f(A) \subset B$.

Proposição 1.7. *Sejam X, Y espaços topológico. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, f for contínua em todos os pontos $a \in X$.*

Demonstração. Seja f contínua. Dados um ponto $a \in X$ e um aberto $B \subset Y$ contendo $f(a)$, o conjunto $A = f^{-1}(B)$ é aberto em X. Como $f(a) \in B$, então $a \in A$. Além disso, $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, resultando na continuidade de f em a. Reciprocamente, considere f contínua em todos os pontos de X. Dado $B \subset Y$ aberto, seja $A = f^{-1}(B) \subset$

X. Para cada $x \in A$, tem-se $f(x) \in B$ e, como f é contínua no ponto x, existe um aberto $A_x \subset X$, tal que $x \in A_x$ e $f(A_x) \subset B$. Segue que $A_x \subset f^{-1}(f(A_x)) \subset f^{-1}(B) = A$. Daí, para cada $x \in A$, tem-se

$$\{x\} \subset A_x \subset A \Rightarrow \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A.$$

Mas $\bigcup\limits_{x \in A} \{x\} = A$, sendo assim, encontramos $A = \bigcup\limits_{x \in A} A_x$, implicando em $A = f^{-1}(B)$ ser aberto, pois é escrito como união de subconjuntos abertos. Portanto f é contínua. $\square$

A seguir, definimos um objeto de importância relevante dentro deste estudo, que são os *homeomorfismos*, pois com um olhar um pouco mais concentrado sobre eles, vemos que tais objetos "preservam", em certo sentido, a topologia entre espaços topológicos.

Definição 1.8. Um homeomorfismo $h : X \to Y$ é uma aplicação bijetiva e contínua que possui inversa $h^{-1} : Y \to X$ também contínua. Quando $h : X \to Y$ for um homeomorfismo, dizemos que os espaços X e Y são *homeomorfos*.

Observação 1.9. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação bijetiva. Para que f seja um homeomorfismo é necessário e suficiente que dado $P \subset X$, tenha-se que $f(P)$ é aberto em Y se, e somente se, P é aberto em X.

Exemplo 1.10. A bola aberta $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ é homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Com efeito, as aplicações

$$\begin{aligned} f : B &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^N &\to B \\ y &\mapsto g(y) = \frac{y}{1 + \|y\|} \end{aligned}$$

são ambas contínuas e, além disso, f e g são inversas uma da outra.

Definição 1.11. Sejam τ e τ' duas topologias num mesmo conjunto X. Dizemos que τ é *mais fina* do que τ' quando $\tau \supset \tau'$, isto é, quando todo aberto de τ' for necessariamente um aberto de τ. Analogamente, dizemos que τ é *menos fina* (ou *mais grosseira*) do que τ' quando $\tau \subset \tau'$. Dizemos que as topologias τ e τ' em X são *equivalentes* quando $\tau = \tau'$.

Observação 1.12. Note que toda topologia num conjunto X sempre é mais grosseira do que a topologia discreta e sempre é mais fina do que a topologia caótica.

Definição 1.13. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é um *espaço de Hausdorff* (ou *espaço separado*) quando dados dois pontos arbitrários $a, b \in X$, com

$a \neq b$, existem $A, B \in \tau$ tais que $a \in A, b \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Em outras palavras, um espaço topológico é Hausdorff quando podemos separar quaisquer dois pontos distintos por dois abertos disjuntos.

Exemplo 1.14. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é de Hausdorff (ver Exemplo 2.57).

Abordaremos agora um método de construir novos espaços topológicos a partir de um espaço topológico conhecido previamente. Ou seja, dado um conjunto S (sem qualquer estrutura), vamos definir uma topologia em S a partir dos abertos de um espaço topológico X. Tal topologia atribuida a este conjunto é chamada de *topologia induzida* em S pela aplicação f. Seja $f : S \to X$ uma aplicação de um conjunto arbitrário S num espaço topológico X e considere $\tau = \{f^{-1}(A) : A \subset X \text{ é aberto}\}$. Afirmamos que τ é uma topologia em S. Primeiramente observamos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(X) = S$. Além disso, dada uma família qualquer de abertos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de X, tem-se que $f^{-1}(A_\lambda) \in \tau$, para todo $\lambda \in L$. Como X é um espaço topológico e cada A_λ é um aberto de X então $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ também é um aberto de X. Pela igualdade

$$\bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right)$$

segue que $\bigcup\limits_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda) \in \tau$. Por fim, dada uma família finita de abertos $(A_i)_{i=1}^k$ de X, tem-se que $f^{-1}(A_i) \in \tau$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Como X é um espaço topológico e cada A_i é um aberto de X, segue que $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ também é um aberto de X. Pela igualdade

$$f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_k) = f^{-1}(A_1 \cap \cdots \cap A_k),$$

segue que $f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_n) \in \tau$. Observe que com isso mostramos que:

(i) O vazio $\emptyset$ e o próprio S são elementos de τ.

(ii) A união arbitrária de elementos de τ também é um elemento de τ.

(iii) A interseção finita de elementos de τ também é um elemento de τ.

Portanto (S, τ) é um espaço topológico.

Pela definição de continuidade de uma aplicação, a imagem inversa de qualquer aberto do contradomínio deve ser um aberto do domínio. Além disso, se S tem a topologia induzida por uma aplicação $f : S \to X$ então, pela própria definição, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de cada aberto $A \subset X$ é aberto em S. Segue daí que a aplicação que induz tal topologia é sempre contínua. Mais ainda, qualquer outra topologia tomada em S que torne a aplicação $f : S \to X$ contínua, deve conter pelo menos as imagens inversas dos abertos de X. Com isso, concluímos que a topologia induzida em S pela aplicação f é sempre a topologia mais grosseira que torna f contínua. Esta propriedade caracteriza a topologia induzida.

Um caso particular muito importante é quando $S \subset X$ possui a topologia induzida pela aplicação inclusão $i : S \to X$, definida por $i(x) = x$, para todo $x \in S$. Neste caso, dado $A \subset X$ aberto, tem-se que $i^{-1}(A) = A \cap S$, ou seja, a topologia induzida por i em S tem como os seus abertos, chamados de *abertos relativos*, as interseções $A \cap S$ dos abertos $A \subset X$. Quando munido com essa topologia, o conjunto S é chamado de *subespaço* do espaço topológico X e. Em geral, quando se considera um subconjunto S de um espaço topológico X, toma-se S como subespaço de X.

Proposição 1.15. *Seja X espaço topológico e S um subespaço de X. Se X é um espaço de Hausdorff então S também é.*

Demonstração. Se (X, τ) é espaço de Hausdorff e $S \subset X$, então dados $x, y \in S$, com $x \neq y$, existem $A, B \in \tau$, tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Resulta daí que $U = A \cap S$ e $V = B \cap S$ são abertos em S, com $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Portanto S é espaço de Hausdorff. □

Muitas vezes, para estudar um espaço topológico X, não é necessário descrever todos os abertos de X, mas apenas os abertos "básicos".

Definição 1.16. Uma *base de abertos*, ou simplesmente uma *base*, num espaço topológico X é uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos abertos de X tal que todo subconjunto aberto $A \subset X$ pode ser expresso como a união $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} B_\lambda$ dos abertos $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ de $\mathfrak{B}$. Os elementos de $\mathfrak{B}$ são chamados de *abertos básicos*.

Observação 1.17. Note que, de maneira equivalente, para que $\mathfrak{B}$ seja uma base de uma topologia em X é necessário e suficiente que:

(i) para cada $x \in X$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$;

(ii) se $x \in B_1 \cap B_2$, em que $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, então existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Exemplo 1.18. As bolas abertas constituem uma base de abertos de $\mathbb{R}^N$ (vide Proposição 2.39).

Definição 1.19 (Topologia produto)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_k$ espaços topológicos. No conjunto $X = X_1 \times \cdots \times X_k$, consideramos a coleção $\mathfrak{B}$ formada pelos abertos $A = A_1 \times \cdots \times A_k$, em que A_i é um aberto de X_i, para todo $i = 1, \ldots, k$. Como

$$(A_1 \times \cdots \times A_k) \cap (B_1 \times \cdots \times B_k) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_k \cap B_k),$$

segue da Observação 1.17 que $\mathfrak{B}$ é base de uma topologia em X. Tal topologia é chamada de *topologia produto* e é a topologia usual que se toma em um espaço formado pelo produto cartesiano de outros espaços topológicos.

1.2 Interior, fronteira e vizinhança

Definição 1.20. Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $a \in S$ chama-se *ponto interior* quando existe um aberto $A \subset X$ tal que $a \in A \subset S$. O conjunto de todos os pontos interiores de S é chamado de *interior* de S e é denotador por $\operatorname{int} S$.

Observação 1.21. Note que num espaço topológico X tem-se sempre que $\operatorname{int} S \subset S$, para qualquer que seja $S \subset X$.

A proposição abaixo nos mostra que $\operatorname{int} S$ é o maior subconjunto aberto de X contido em S.

Proposição 1.22. *Seja X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto qualquer. O interior de S é a reunião de todos os abertos de X que estão contidos em S. Em particular, $\operatorname{int} S$ é aberto em X.*

Demonstração. Considere $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ a coleção formada por todos os abertos de X de modo que $A_\lambda \subset S$, para todo $\lambda \in L$, e defina

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Inicialmente note que A é um aberto de X, pois A é escrito como uma união de abertos de X. Afirmamos que $A = \operatorname{int} S$. Como $A_\lambda \subset S$, para todo $\lambda \in L$, então $A \subset S$. Logo, se $x \in A$, por $A \subset S$ e A ser aberto, segue que $x \in \operatorname{int} S$. Reciprocamente, se $x \in \operatorname{int} S$, então existe um aberto $B \subset X$ tal que $x \in B \subset S$. Como B é um aberto de X contido em S, então existe λ_0 tal que $B = A_{\lambda_0}$. Daí segue que

$$B = A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A.$$

Além disso, como $x \in B$, segue que $x \in A$ e daí tem-se que $\operatorname{int} S \subset A$. Portanto $\operatorname{int} S = A$. □

Corolário 1.23. *Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto qualquer. Então S é aberto em X se, e somente se, $S = \operatorname{int} S$.*

Demonstração. Suponha que S seja aberto em X e considere $x \in S$. Como S é aberto em si próprio, segue que $x \in \operatorname{int} S$. Reciprocamente, como $\operatorname{int} S = \bigcup_\lambda A_\lambda$, tal que $A_\lambda \in \tau$ e $A_\lambda \subset S$, segue que $\operatorname{int} S \in \tau$. Mas, por hipótese, $\operatorname{int} S = S$, logo $S \in \tau$ e, portanto, S é aberto em X. □

Definição 1.24. Num espaço topológico X, diz-se que V é uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ quando $x \in \operatorname{int} V$. Isto significa que V contém um aberto que contém x.

Observação 1.25. As propriedades abaixo seguem imediatamente das definições.

(i) Um conjunto A é aberto no espaço topológico X se, e somente se, A é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.

(ii) Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para cada vizinhança V do ponto $f(a) \in Y$ existe uma vizinhança U do ponto $a \in X$ tal que $f(U) \subset V$.

Definição 1.26. Seja X um espaço topológico e $S \subset X$. A *fronteira* de S é o conjunto $\operatorname{fr} S$ formado pelos pontos $x \in X$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de S e de $X \backslash S$. Ou seja, um ponto $x \in \operatorname{fr} S$ se, e somente se, $x \notin \operatorname{int} S$ e $x \notin \operatorname{int}(X \backslash S)$.

Exemplo 1.27. Seja (X, τ) um espaço topológico e $S \subset X$. Então

(a) $S \backslash \operatorname{int} S \subset \operatorname{fr} S$;

(b) $\operatorname{int} S = \emptyset \Leftrightarrow S \subset \operatorname{fr} S$;

(c) $\operatorname{int} S = S \Leftrightarrow S \cap \operatorname{fr} S = \emptyset$.

Com efeito, vamos mostrar os três itens abaixo.

(a) Seja $x \in S \backslash \operatorname{int} S$, isto é, nenhum aberto $A \subset X$ contendo x é tal que $A \subset S$. Ou seja, todo aberto $A \subset X$ contendo $x \in S$ contém pontos de $X \backslash S$, portanto $x \in \operatorname{fr} S$.

(b) Segue do item (a).

(c) Suponha que $\operatorname{int} S = S$, ou seja, dado $x \in S$, existe um aberto $A \subset X$ contendo x tal que $A \subset S$. Ou seja, existe um aberto de X que não contém nenhum ponto de $X \backslash S$, logo $x \notin \operatorname{fr} S$. Reciprocamente, seja $x \in S$ e suponha que $S \cap \operatorname{fr} S = \emptyset$. Daí, segue que existe um aberto $A \subset X$ contendo x tal que $A \subset S$, logo $x \in \operatorname{int} S$ e, portanto, $\operatorname{int} S = S$.

Exemplo 1.28. No espaço $\mathbb{R}^N$, a fronteira de uma bola (aberta ou fechada) é a esfera de mesmo centro e mesmo raio. As fronteiras de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ são toda a reta real, pois $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ são densos na reta.

Observação 1.29. Assim como a noção de conjunto aberto, os conceitos de ponto interior e ponto de fronteira de um conjunto são *relativos*. Se S é um subconjunto de um espaço topológico X e X é subespaço de um espaço "maior" Y, o interior de S em X e a fronteira de S em X podem não coincidir com o interior e a fronteira de S em Y, respectivamente. De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, considere $S = [a, b] \subset \mathbb{R}$. O interior de S na reta é o intervalo (a, b) e sua fronteira é o conjunto $\{a, b\}$. Considerando $\mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ como subespaço de $\mathbb{R}^2$, o interior de S é vazio e a fronteira de S é o próprio conjunto S. Ou seja, dados dois espaços topológicos X e Y, se $S \subset X \subset Y$ então não é verdade que $\operatorname{int}_X S = X \cap \operatorname{int}_Y S$ e nem que $\operatorname{fr}_X S = X \cap \operatorname{fr}_Y S$.

1.3 Conjuntos fechados

Definição 1.30. Seja X um espaço topológico e $F \subset X$. Dizemos que F é *fechado* em X quando o seu complementar $X \backslash F$ é aberto. Podemos reescrever esta definição da seguinte forma: F é fechado em X se para cada $x \in X \backslash F$ existe um aberto U_x de X tal que $x \in U_x \subset X \backslash F$, isto é, $x \in U_x$ e $U_x \cap F = \emptyset$.

Proposição 1.31. *Os subconjuntos fechados de um espaço topológico X satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço inteiro X são fechados;

(ii) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X$ então $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado em X;

(iii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são subconjuntos fechados de X então $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é um subconjunto fechado de X.

Demonstração.

(i) Observe que X e o vazio $\emptyset$ são os complementares dos conjuntos $\emptyset$ e X, respectivamente, logo são fechados.

(ii) Considere $A_\lambda = X \backslash F_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. Como cada F_λ é fechado segue que cada A_λ é aberto, logo $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Mas, note que

$$F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (X \backslash A_\lambda) = X \backslash \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = X \backslash A.$$

Portanto F é fechado.

(iii) Considere, para cada $i = 1, \ldots, n$, os conjuntos $A_i = X \backslash F_i$. Como cada F_i é fechado, segue que cada A_i é aberto. Mas, note que

$$F = F_1 \cup \cdots \cup F_n = (X \backslash A_1) \cup \cdots \cup (X \backslash A_n) = X \backslash (A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Como cada A_i é aberto, $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ é aberto e, portanto, F é fechado.

□

Observação 1.32. Nem sempre a união qualquer de conjuntos fechados é fechado. Por exemplo, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ é um conjunto fechado na reta (pois seu complementar é aberto), mas

$$\bigcup_{0<x<1} \{x\} = (0, 1)$$

não é fechado na reta.

Proposição 1.33. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para cada $G \subset Y$ fechado, sua imagem inversa $F = f^{-1}(G)$ é fechada em X.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ contínua. Dado $G \subset Y$ fechado, segue que $Y \backslash G$ é aberto. Daí, $f^{-1}(Y \backslash G) = X \backslash f^{-1}(G)$ é aberto em X e, portanto, $f^{-1}(G)$ é fechado em X. Reciprocamente, se para cada fechado de Y, sua imagem inversa é um fechado de X, então dado $B \subset Y$ aberto, $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$ é fechado em X e, consequentemente, $f^{-1}(B)$ é aberto em X. Portanto f é contínua. □

Corolário 1.34. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação bijetiva. Para que f seja um homeomorfismo é necessário e suficiente que dado $P \subset X$, tenha-se que*

$$f(P) \text{ é fechado em } Y \Leftrightarrow P \text{ é fechado em } X.$$

Demonstração. Segue diretamente da definição de homeomorfismo e da Proposição anterior. □

Exemplo 1.35. Os intervalos $(-\infty, a] = \mathbb{R} \backslash (a, +\infty)$, $[b, +\infty) = \mathbb{R} \backslash (-\infty, b)$ e $[a, b] = \mathbb{R} \backslash [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]$ são subconjuntos fechados da reta, pois são complementares de conjuntos abertos.

Exemplo 1.36. Num espaço de Hausdorff X, todo conjunto unitário $\{x\} \subset X$ é um conjunto fechado. Com efeito, dado $y \in X$, com $y \neq x$, existem abertos $A_y, B_y \subset X$ tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Ou seja, como $x \notin B_y$, segue que $B_y \subset X \backslash \{x\}$. Daí concluímos que B_y é um aberto de X tal que $y \in B_y \subset X \backslash \{x\}$. Logo $X \backslash \{x\}$ é aberto e, portanto, $\{x\}$ é fechado em X. Daí segue que todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ é fechado.

Observação 1.37. Na linguagem usual, as palavras *aberto* e *fechado* têm significados opostos, porém, num espaço topológico X, um subconjunto de X pode ser aberto e fechado simultaneamente. Por exemplo, o próprio espaço X e o conjunto vazio $\emptyset$ são subconjuntos abertos e fechados de X simultaneamente. Na topologia discreta τ_0 em um espaço topológico X, todos os subconjuntos de X são abertos e fechados. Um exemplo menos simples é considerando $M = P \cup Q$ como subespaço de $\mathbb{R}$, em que $P = (-\infty, 0)$ e $Q = (0, +\infty)$. Note que $P, Q \subset M$ são abertos. Além disso, P e Q também são fechados, pois $Q = M \backslash P$ e $P = M \backslash Q$ são abertos.

Exemplo 1.38. Sejam X e Y dois espaços topológicos, em que Y é de Hausdorff. Afirmamos que se f é contínua então o gráfico de f, $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$, é um subconjunto fechado de $X \times Y$. Com efeito, seja $(x_0, y_0) \in (X \times Y) \backslash G(f)$, então $y_0 \neq f(x_0)$. Como Y é um espaço de Hausdorff, existem abertos $V, W \subset Y$ tais que

$y_0 \in V$, $f(x_0) \in W$ e $V \cap W = \emptyset$. Sendo f contínua (em particular contínua em x_0), existe um aberto $U \subset X$ tal que $x_0 \in U$ e $f(U) \subset W$. Logo $f(U) \cap V = \emptyset$, isto é, se $x \in U$ então $f(x) \notin V$. Portanto $U \times V$ é um aberto de $X \times Y$ contendo (x_0, y_0) e sem pontos em comum com $G(f)$. Isto prova que $G(f)$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

Definição 1.39. Sejam $X_1, \ldots, X_k$ espaços topológicos e considere $X = X_1 \times \cdots \times X_k$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_i : X &\to X_i \\ x &\mapsto \pi_i(x) = x_i, \end{aligned}$$

com $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X$, é chamada de *projeção* de X em X_i.

Exemplo 1.40. Para cada $i = 1, \ldots k$, considere $F_i \subset X_i$ um subconjunto fechado do espaço topológico X_i. Então $F_1 \times \cdots \times F_k$ é um subconjunto fechado de $X_1 \times \cdots \times X_k$. Com efeito, $F_1 \times \cdots \times F_k = \pi_1^{-1}(F_1) \cap \cdots \cap \pi_k^{-1}(F_k)$ e, cada projeção π_i, $i = 1, \ldots, k$, é contínua (ver Exemplo 2.30).

Exemplo 1.41. Seja X um subespaço do espaço topológico Y. Os subconjuntos fechados de X são as interseções $F_Y \cap X$ dos fechados $F_Y \subset Y$ com X. Com efeito, como a inclusão $i : X \to Y$ é contínua, então para cada fechado $F_Y \subset Y$, sua imagem inversa $i^{-1}(F_Y)$ é um fechado de X. Mas, $i^{-1}(F_Y) = F_Y \cap X$, logo os conjuntos $F_Y \cap X$ são todos fechados em X. Como a topologia induzida é a menos fina que torna i contínua, então apenas os conjuntos $F_Y \cap X$ são fechados em X. Em particular, se X é fechado em Y, então F é fechado em X se, e somente se, F é fechado em Y.

Definição 1.42. Seja S um subconjunto do espaço topológico X. Um ponto $x \in X$ é chamado de *ponto aderente* a S quando toda vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S. O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se *fecho* de S e é denotado por $\overline{S}$. Assim, $x \in \overline{S}$ se, e somente se, para todo aberto $A \subset X$ tem-se que

$$x \in A \Rightarrow A \cap S \neq \emptyset.$$

Observação 1.43. Num espaço topológico X, tem-se que $S \subset \overline{S}$, para qualquer que seja $S \subset X$.

Proposição 1.44. *Sejam X um espaço topológico e $F, G \subset X$ tais que $F \subset G$. Então $\overline{F} \subset \overline{G}$.*

Demonstração. Suponha que $F \subset G$ e considere $x \in \overline{F}$. Segue daí que

$$F \cap V \neq \emptyset,$$

em que V é uma vizinhança de x. Mas, sendo $F \subset G$, então $F \cap V \subset G \cap V$, o que nos diz que

$$G \cap V \neq \emptyset,$$

portanto $x \in \overline{G}$. $\square$

Proposição 1.45. *O fecho de um subconjunto S num espaço topológico X é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contém S.*

Demonstração. Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família de todos os fechados de X que contém S. Então, para cada $\lambda \in L$, tem-se que $A_\lambda = X \backslash F_\lambda$ são todos os abertos de X contidos em $X \backslash S$. Note que $x \in \overline{S}$ se, e somente se, $x \notin \operatorname{int}(X \backslash S)$. Mas, $\operatorname{int}(X \backslash S) = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, logo

$$\overline{S} = X \backslash \operatorname{int}(X \backslash S) = X \backslash \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (X \backslash A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda.$$

$\square$

Corolário 1.46. *Num espaço topológico X, $F \subset X$ é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.*

Demonstração. Como o fecho de um conjunto é uma interseção de conjuntos fechados, então o fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. Sendo assim, se $F = \overline{F}$, então F é fechado. Reciprocamente, se F é fechado, então F pertence à família dos fechados de X que contém F. Portanto a interseção dessa família é F, isto é, $F = \overline{F}$.

$\square$

Corolário 1.47. *O fecho de qualquer conjunto S num espaço topológico X é o menor subconjunto fechado de X que contém S. Ou seja:*

(i) $\overline{S}$ *é fechado em X;*

(ii) $S \subset \overline{S}$*;*

(iii) Se F é um fechado em X que contém S então $\overline{S} \subset F$.

Demonstração.

(i) Seja $x \in \overline{\overline{S}}$ e considere U uma vizinhança de x. Segue daí que $U \cap \overline{S} \neq \emptyset$, isto é, existe um ponto $y \in U \cap \overline{S}$. Como $y \in \overline{S}$ e U é uma vizinhança de y, então $U \cap S \neq \emptyset$, isto é, existe um ponto $z \in U \cap S$, o que nos diz que $U \cap S \neq \emptyset$. Logo $x \in \overline{S}$ e, portanto, $\overline{S}$ é fechado em X.

(ii) Não há nada para fazer.

(iii) Suponha que F seja um fechado de X tal que $F \supset S$. Segue daí que $\overline{S} \subset \overline{F}$ (pela Proposição 1.44) e como F é fechado concluímos que $\overline{S} \subset F$.

$\square$

Corolário 1.48. *Sejam Y espaço topológico, X um subespaço de Y e $S \subset X$. O fecho de S em X é a interseção do fecho de S em Y com o espaço X.*

Demonstração. Considere o fecho de S em X como $\overline{S}_X$ e em Y como $\overline{S}_Y$. Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família de todos os fechados de Y que contêm S. Segue daí que $(F_\lambda \cap X)_{\lambda \in L}$ é a família de fechados de X que contêm S. Assim,

$$\overline{S}_X = \bigcap_{\lambda \in L} (F_\lambda \cap X) = \left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \right) \cap X.$$

□

1.4 Compacidade em espaços topológicos

Definição 1.49. Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$. Uma *cobertura* de S é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tais que $S \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$. Dizemos que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma *cobertura aberta* (resp. *cobertura fechada*) quando C_λ for um conjunto aberto (resp. fechado), para todo $\lambda \in L$. De maneira similar, diz-se que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma *cobertura finita* (resp. *cobertura enumerável* ou *cobertura não-enumerável*) quando o conjunto L for finito (resp. enumerável ou não-enumerável).

Dizer que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura para o conjunto S significa que para cada $s \in S$, existe $\lambda_s \in L$ tal que $s \in C_{\lambda_s}$. Equivalentemente, pode-se considerar uma cobertura de S como uma coleção $\mathfrak{C}$ de subconjuntos de X tal que, para cada $s \in S$ existe $C_s \in \mathfrak{C}$ de modo que $s \in C_s$.

Definição 1.50. Seja $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de S. Uma *subcobertura* de $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma subfamília $\mathfrak{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, com $L' \subset L$. Ou seja, uma subcobertura de uma cobertura de S ainda é uma cobertura de S, isto é, tem-se ainda que $S \subset \bigcup\limits_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$.

Exemplo 1.51. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $O_n = (-n, n)$. A família $\mathfrak{C} = (O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta enumerável da reta $\mathbb{R}$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$, usando o fato de que o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > x > 0 > -n_0 \Rightarrow x \in O_{n_0}.$$

Se $x \leq 0$ então $-x \geq 0$. Segue daí que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > -x$, logo $-n_0 < x$ e, então

$$-n_0 < x \leq 0 \leq -x < n_0 \Rightarrow x \in O_{n_0}.$$

Definição 1.52. Um espaço topológico X é dito *compacto* quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita. Dizemos que um subconjunto S de um espaço topológico X é um *subconjunto compacto* quando, munido com a topologia induzida de X, S é também um espaço compacto. Isto significa que, se $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos abertos de S, com $\bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda = S$, então existe uma subfamília finita $(U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_k})$ tal que $S = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_k}$.

Proposição 1.53. *Sejam X um espaço topológico e $K, L \subset X$ compactos. Então $K \cup L$ é compacto. Mais geralmente, a união finita de conjuntos compactos é compacta.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{C}$ uma coleção de abertos cobrindo $K \cup L$. Em particular, $\mathfrak{C}$ é uma cobertura de K e de L e, sendo K e L compactos, existem $\mathfrak{C}_K \subset \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}_L \subset \mathfrak{C}$ tais que $\mathfrak{C}_K$ é uma subcobertura finita de K e $\mathfrak{C}_L$ é uma subcobertura finita de L. Segue daí que $\mathfrak{C}_K \cup \mathfrak{C}_L$ é uma cobertura finita de $K \cup L$, a qual constitui uma subcobertura de $\mathfrak{C}$. □

Observação 1.54. Embora a união finita de compactos seja compacta, uma união arbitrária de compactos não necessariamente é um compacto. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $G_n = [-n, n]$. Cada G_n é compacto, pois cada G_n é fechado e limitado [vide Teorema 1.61 (Borel-Lebesgue)], porém

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \mathbb{R},$$

que não é compacto.

Proposição 1.55. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e $K \subset X$ um conjunto compacto. Afirmamos que $f(K) \subset Y$ também é compacto. De fato, considere $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma coleção de abertos de Y tal que $f(K) \subset \bigcup_{\lambda\in L} V_\lambda$. Sendo f contínua, a coleção $(f^{-1}(V_\lambda))_{\lambda\in L}$ forma uma cobertura aberta de K e, pela compacidade de K, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $K \subset f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\lambda_n})$. Daí, segue que $f(K) \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n}$, o que nos diz que $f(K)$ é compacto. □

Corolário 1.56. *Sejam X um espaço topológico, $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e $K \subset X$ um conjunto compacto. Então, existem $x_0, y_0 \in K$ tais que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0), \quad \forall x \in K.$$

Para que os conjuntos U_λ, $\lambda \in L$, formem uma cobertura aberta de um espaço topológico X, é necessário e suficiente que os seus complementares $F_\lambda = X \backslash U_\lambda$ constituam uma família de fechados em X, cuja interseção $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ é vazia.

Definição 1.57. Dizemos que uma família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ tem a *propriedade da interseção finita* quando qualquer subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n})$ tem interseção não vazia.

Sendo assim, um espaço topológico é compacto se, e somente se, sempre que uma família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ possuir a propriedade da interseção finita, então

$$\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda \neq \emptyset.$$

Proposição 1.58. *O produto cartesiano $X\times Y$ é compacto se, e somente se, X e Y são espaços compactos. Mais ainda, produto cartesiano $X_1\times\cdots\times X_k$ é compacto se, e somente se, cada X_i, com $i=1,\dots k$, é compacto.*

Demonstração. Como as projeções $\pi_1 : X\times Y \to X$ e $\pi_2 : X\times Y\to Y$ são contínuas e sobrejetivas, então segue, da Proposição 1.55, que se $X\times Y$ é compacto então $\pi_1(X\times Y) = X$ e $\pi_2(X\times Y) = Y$ são compactos. Reciprocamente, seja $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de fechados de $X\times Y$ com a propriedade da interseção finita. Então $F_\lambda = B_\lambda\times C_\lambda$, em que B_λ é um fechado de X e C_λ é um fechado de Y, para cada $\lambda\in L$. Como X e Y são compactos e (F_λ) possui a propriedade da interseção finita, então

$$\bigcap_{\lambda\in L} B_\lambda \neq \emptyset \text{ e } \bigcap_{\lambda\in L} C_\lambda \neq \emptyset.$$

Sendo assim, existem $b\in B_\lambda$ e $c\in C_\lambda$, para todo $\lambda\in L$. Desta forma, $(b,c)\in F_\lambda$, para todo $\lambda\in L$, o que nos diz que

$$\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda \neq \emptyset,$$

portanto $X\times Y$ é compacto. □

Vamos demonstrar agora o Teorema de Borel-Lebesgue, que nos diz que para que um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ seja compacto, é necessário e suficiente que este seja fechado e limitado. Para isto, vamos precisar de um resultado prévio que garante que conjuntos fechados dentro de um compacto também são compactos.

Proposição 1.59. *Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração. Seja $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma cobertura aberta para o conjunto F. Tomando $U_{\lambda_0} = X\backslash F$, vemos que $(U_\lambda)_{\lambda\in L\cup\{\lambda_0\}}$ é uma cobertura aberta de X. Pela compacidade de X, existem $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in L$ tais que

$$X = U_{\lambda_0}\cup U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n}$$

é uma cobertura finita de X. Como $F\cap U_{\lambda_0}=\emptyset$, então $F\subset U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n}$ e, portanto, concluímos que F é compacto. □

Observação 1.60. Observe que na Proposição anterior nada foi pedido sobre o espaço X. Entretanto, vale valientar que, se X for Hausdorff então vale a recíproca, isto é, se F é um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff X, então F é fechado.

Teorema 1.61 (Borel-Lebesgue). *Um subconjunto S do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração. Suponha, inicialmente, que S é compacto. Sendo assim, considere, para cada $s \in S$, a bola aberta $B(s;r)$, para algum $r > 0$. Daí, segue que a coleção $(B(s;r))_{s\in S}$ é uma cobertura aberta para S, de modo que, por hipótese, admite subcobertura finita. Ou seja, existem $s_1, \ldots, s_k \in S$ tais que $S \subset B(s_1;r) \cup \cdots \cup B(s_k;r)$, o que nos diz que S é limitado, uma vez que S está contido em uma união finita de conjuntos limitados. Além disso, considere $x \in \mathbb{R}^N \backslash S$. Como o espaço $\mathbb{R}^N$ é de Hausdorff, então para cada $y \in S$,existem abertos $A_y, B_y \subset \mathbb{R}^N$ tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Desta forma, obtemos uma cobertura aberta $K \subset \bigcup\limits_{y\in S} B_y$, da qual, por hipótese, existem $y_1, \ldots, y_k \in S$ tais que $K \subset B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_k}$. Definindo $A = A_{y_1} \cap \cdots \cap A_{y_k}$, verificamos que A é um aberto contendo x tal que $A \subset \mathbb{R}^N \backslash S$, o que nos diz que $\mathbb{R}^N \backslash S$ é aberto, portanto S é fechado. Reciprocamente, suponha que S seja fechado e limitado. Por ser limitado, S está contido em um paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N] = P$, o qual é compacto, uma vez que é escrito como um produto cartesiano finito de conjuntos compactos. Sendo S fechado e $S \subset P$, segue, da Proposição 1.59, que S é compacto. □

O Teorema a seguir, conhecido como Teorema de Tychonoff, nos diz que o produto cartesiano qualquer (finito, infinito enumerável ou infinito não enumerável) de conjuntos compactos é ainda um compacto, quando considerada neste espaço a topologia produto. A demonstração deste resultado será omitida, pois é bastante delicada, porém pode ser encontrada em [4]. Além disso, para entender melhor a noção de um produto cartesiano arbitrário, precisamos definir o que vem a ser tal conceito.

Considere inicialmente os conjuntos A_1 e A_2, de modo que podemos escrever o produto cartesiano como $A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \text{ e } x_2 \in A_2\}$. Agora, defina $D = \{\psi : \{1,2\} \to A_1 \cup A_2 : \psi(1) \in A_1 \text{ e } \psi(2) \in A_2\}$ e observe que as aplicações

$$\begin{aligned} \sigma : D &\to A_1 \times A_2; \\ \psi &\mapsto \sigma(\psi) = (\psi(1), \psi(2)); \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma : A_1 \times A_2 &\to D; \\ (x_1, x_2) &\mapsto \gamma(x_1, x_2) = \psi; \quad \psi(1) = x_1 \text{ e } \psi(2) = x_2; \end{aligned}$$

são ambas contínuas e uma é inversa da outra. Então os espaços $A_1 \times A_2$ e D são homeomorfos e, portanto, podemos enxergar o produto cartesiano $A_1 \times A_2$ como o conjunto das aplicações $\psi : \{1,2\} \to A$ tais que $\psi(1) \in A_1$ e $\psi(2) \in A$. Desta forma, podemos estender este conceito para um produto cartesiano arbitrário.

Definição 1.62. O produto cartesiano de uma família qualquer $(X_\lambda)_{\lambda\in L}$, denotado por

$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$, é o conjunto das aplicações

$$\psi : L \to \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$$

tais que $\psi(\lambda) \in X_\lambda$, para todo $\lambda \in L$.

Teorema 1.63 (Tychonoff)**.** *Se* $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ *é uma coleção arbitrária de espaços topológicos compactos, então* $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ *é compacto, quando munido com a topologia produto.*

Capítulo 2

Espaços métricos e normados

A motivação do estudo sobre métricas deve-se principalmente à necessidade de formalizar o conceito de distância entre pontos, necessidade que surgiu a partir da indispensabilidade de aplicar tal conceito aos mais variados conjuntos, formalizando o conceito de distância entre pontos em ambientes mais gerais do que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$.

2.1 Espaços métricos e normados

Definição 2.1. Uma *métrica* num conjunto $M \neq \emptyset$ é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, chamado de *distância* entre os pontos $x, y \in M$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, para todos $x, y \in M$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in M$;

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in M$.

Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica.

Observação 2.2. A propriedade (iii) na definição acima é chamada de *desigualdade triangular*, pois exprime que cada lado de um triângulo não excede a soma dos outros dois lados.

Exemplo 2.3. Um exemplo importante de espaço métrico é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, munido da métrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2},$$

para quaisquer que sejam $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ (esta métrica é chamada de *métrica euclidiana*). Note que para $N = 1$, temos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da métrica $d(x, y) = |x - y|$, para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4. Uma *norma* num espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ (neste trabalho vamos utilizar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) é uma função que associa a cada vetor $x \in E$, um número real chamado *norma* do vetor x, denotada por $\|x\|$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, para todo $x \in E$;

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todos $x, y \in E$.

Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em E.

Exemplo 2.5. Um exemplo importante de espaço vetorial normado é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ munido da norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2}$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Esta norma é chamada de *norma euclidiana*. Outras normas que podemos introduzir no espaço $\mathbb{R}^N$ são

$$\|x\|_M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

e

$$\|x\|_S = |x_1| + \cdots + |x_N|,$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Essas normas são chamadas de *norma do máximo* e *norma da soma*, respectivamente.

É importante ressaltar que toda norma pode induzir uma métrica, se consideramos $d(x, y) = \|x - y\|$. Daí, todo espaço vetorial normado pode-se tornar um espaço métrico. Ou seja, podemos tornar $\mathbb{R}^N$ um espaço métrico se munirmos este espaço com as métricas

$$d_M(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_N - y_N|\}$$

e

$$d_S(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_N - y_N|,$$

para quaisquer que sejam $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Similarmente, essas métricas são chamadas de *métrica do máximo* e *métrica da soma*, respectivamente.

Exemplo 2.6. Seja M um conjunto não vazio qualquer. Podemos definir em M uma métrica d, chamada de *métrica zero-um*, da seguinte forma:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Isso nos mostra que qualquer conjunto não vazio pode se tornar um espaço métrico. O espaço métrico obtido através da métrica zero-um é bastante trivial e é geralmente usado em contra-exemplos.

Podemos definir, num espaço métrico (M, d), a distância de um ponto $x \in M$ a um subconjunto não vazio $A \subset M$ da seguinte forma

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Note que se $x \in A$, então $d(x, A) = 0$. Porém, a recíproca não é verdadeira. Com efeito, considerando $A = (1, 2) \subset \mathbb{R} = M$, tem-se que

$$d(1, A) = 0 = d(2, A),$$

mas $1, 2 \notin A$. Em geral, $d(x, A) = 0$ significa que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um elemento $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$, ou seja, existem pontos de A arbitrariamente próximos de x.

De maneira mais geral, dados os subconjuntos A e B do espaço métrico M, definimos a distância entre A e B como

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Definição 2.7. Uma aplicação $f : M \to N$, de um espaço métrico (M, d_M) em um espaço métrico (N, d_N), chama-se *imersão isométrica* quando

$$d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y)),$$

para quaisquer que sejam $x, y \in M$.

Observação 2.8. Note que uma imersão isométrica é sempre injetiva, pois dados $x, y \in M$ tais que $f(x) = f(y)$, tem-se que $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ e, portanto, $x = y$. Se f for sobrejetiva, então f é chamada de *isometria* entre M e N.

Observação 2.9. A partir de agora vamos escrever apenas "o espaço métrico M" para representar o espaço métrico (M, d). Se houver a menção de dois ou mais espaços métricos, vamos denotar por d as métricas de todos os espaços, mesmo que essas métricas não sejam iguais. Cabe ao leitor identificar em qual espaço estão os elementos e saber a qual espaço está sendo tratada a métrica em questão. Entretanto, em alguns casos, visando não haver confusão, vamos deixar claro quando métricas distintas forem abordadas.

Seja $f : X \to M$ uma aplicação injetiva de um conjunto X (sem qualquer estrutura) num espaço métrico M. Dados $x, y \in X$, defina $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Isto define uma métrica em X, relativamente à qual f é uma imersão isométrica. Esta métrica é chamada de *métrica induzida* em X pela aplicação f. Quando $X \subset M$, a métrica induzida em X é dada pela aplicação inclusão $f = i : X \to M$, definida por $i(x) = x$, para todo $x \in X$ e X é chamado de *subespaço* de M.

Exemplo 2.10. Seja E um espaço vetorial normado. Para cada $a \in E$, a *translação*

$$\begin{aligned} T_a : E &\to E; \\ x &\mapsto T_a(x) = x + a \end{aligned}$$

é uma isometria. De fato, dados $x, y \in E$, temos

$$\begin{aligned} d(T_a(x), T_a(y)) &= \|T_a(x) - T_a(y)\| \\ &= \|(x + a) - (y + a)\| \\ &= \|x + a - a - y\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Além disso, T_a é sobrejetiva, pois dado $y \in E$, basta fazer $T_a(y - a) = (y - a) + a = y$.

2.2 Bolas e conjuntos limitados

Agora, definiremos subconjuntos de um espaço métrico M. Veremos, mais adiante, que tais conjuntos são importantes para o estudo da estrutura topológica de um espaço métrico M.

Definição 2.11. Sejam M um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$.

(i) O conjunto $B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$ é chamado de *bola aberta* de centro a e raio r.

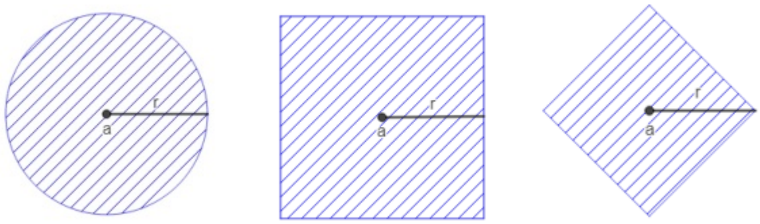
(ii) O conjunto $B[a; r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$ é chamado de *bola fechada* de centro a e raio r.

(iii) O conjunto $S[a; r] = \{x \in M : d(x, a) = r\}$ é chamado de *esfera* de centro a e raio r.

Observação 2.12. Note que para mostrar que uma certa propriedade métrica vale numa bola ou esfera de centro $a \in E$, em um espaço vetorial normado E, basta mostrar que tal propriedade vale em apenas um ponto (geralmente escolhe-se o ponto $a = 0 \in E$) pois a translação preserva distância entre os elementos do espaço.

Um fato interessante é que, a depender da métrica considerada, as bolas assumem características geométricas distintas. Por exemplo, considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido com as métricas euclidiana, do máximo e da soma, respectivamente. Então a bola aberta $B(a;r)$ são conjuntos distintos a depender da distância considerada em $\mathbb{R}^2$, como vemos na figura abaixo.

Figura 2.1: Bolas em $\mathbb{R}^2$ com as métricas euclidiana, do máximo e da soma, respecitvamente



Fonte: Autoria própria

Observação 2.13. No espaço métrico M munido da métrica zero-um, qualquer bola aberta de centro $a \in M$ e raio r, com $0 < r < 1$, é tal que $B(a;r) = \{a\}$, isto é, esta bola consiste em apenas o seu centro. Se $r \geq 1$, temos $B(a;r) = M$, pois $d(a,a) = 0$ e $d(x,a) = 1$, para todo $x \in M \backslash \{a\}$. Espaços cuja bola $B(a;r)$ é formada apenas pelo seu centro a, para algum $r > 0$, recebem uma nomenclatura especial, a qual veremos abaixo.

Definição 2.14. Sejam M espaço métrico e $a \in M$. Dizemos que a é um *ponto isolado* de M quando existe $r > 0$ tal que $B(a;r) = \{a\}$. Um espaço métrico chama-se *discreto* quando todos os seus pontos são pontos isolados.

Exemplo 2.15. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, visto como subespaço de $\mathbb{R}$, é um espaço métrico discreto.

Exemplo 2.16. Em um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, nenhum ponto $a \in E$ é isolado. Com efeito, seja $r > 0$ qualquer. Dado $x \in E$, $x \neq 0$, observe que o vetor $b = a + \dfrac{rx}{2\|x\|}$ é diferente de a e pertence à bola aberta $B(a;r)$, pois

$$\|b - a\| = \left\| a + \frac{rx}{2\|x\|} - a \right\| = \frac{r}{2} < r.$$

Com isso, mostramos que toda bola centrada em um ponto $a \in E$ contém um ponto de E diferente de a, o que nos diz que a não é um ponto isolado.

Definição 2.17. Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito *limitado* quando existe $r \geq 0$ tal que $d(x,y) \leq r$, para quaisquer que sejam $x, y \in X$. O menor dos números r tais que $d(x,y) \leq r$, para todos $x, y \in X$ chama-se o *diâmetro* de X e é denotado por diam X.

Exemplo 2.18. O diâmetro de um conjunto unitário é zero. Todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$ é limitado e seu diâmetro é o maior dos números $d(x_i, x_j)$, com $i, j = 1, \ldots, k$.

Exemplo 2.19. Em qualquer espaço métrico M a bola fechada $= B[a; r]$, a bola aberta $B(a; r)$ e a esfera $S[a; r]$ de centro $a \in M$ e raio $r > 0$ são subconjuntos limitados de M e seus diâmetros são menores que ou iguais a $2r$. Com efeito, se $x, y \in B[a; r]$, então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r.$$

Pode ocorrer o caso $\operatorname{diam} D < 2r$. Por exemplo, se $M = [0, 1)$, a bola fechada de centro 0 e raio 1 é o conjunto $B[0; 1] = \{x \in M : \|x - 0\| \leq 1\} = [0, 1)$, isto é, $\operatorname{diam} B[0; 1] = \operatorname{diam} [0, 1) = 1 < 2$.

Observação 2.20. Se A e B são limitados e $A \subset B$, então $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$. Logo, como $B(a; r), S[a; r] \subset B[a; r]$ então $\operatorname{diam} B(a; r) \leq 2r$ e $\operatorname{diam} S[a; r] \leq 2r$.

Exemplo 2.21. Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, o diâmetro da bola aberta, da bola fechada e da esfera de centro $a \in E$ e raio $r > 0$ são iguais a $2r$.

Definição 2.22. Sejam d e d' duas métricas em um mesmo conjunto não vazio M. Dizemos que a métrica d e d' são *métricas equivalentes* se existem $m, n > 0$ tais que $d(x, y) \leq nd'(x, y)$ e $d'(x, y) \leq md(x, y)$, para quaisquer que sejam $x, y \in M$.

Exemplo 2.23. As métricas euclidiana, do máximo e da soma são equivalentes em $\mathbb{R}^N$. Para simplificar as contas, tome $N = 2$. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - y_2)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= d_S(x, y). \end{aligned}$$

Em seguida, note que $|x_1 - y_1| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ e $|x_2 - y_2| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. Então

$$\begin{aligned} d_S(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\leq 2 \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ &= 2d_M(x, y). \end{aligned}$$

Por fim, se $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = |x_1 - y_1|$, temos

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &= |x_1 - y_1| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Analogamente para o caso em que $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = |x_2 - y_2|$. Com isso, concluímos que d, d_M e d_S são equivalentes.

Definição 2.24. Uma aplicação $f : X \to M$ de um conjunto X num espaço métrico M é dita uma *aplicação limitada* quando o subconjunto $f(X) \subset M$ for limitado em M. Em particular, se M possui uma métrica limitada, isto é, $\operatorname{diam} M < \infty$, então toda aplicação $f : X \to M$ é limitada.

Indicaremos com $\mathfrak{B}(X; M)$ o conjunto de todas as aplicações limitadas de X em M. Vamos definir uma métrica em $\mathfrak{B}(X; M)$ da seguinte forma:

$$d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

para quaisquer que sejam $f, g, \in \mathfrak{B}(X; M)$. Observe inicialmente que $d(f, g) < \infty$. Com efeito, fixe $x_0 \in X$. Como $f(X)$ e $g(X)$ são limitados com respeito à M, existem $A, B > 0$ tais que $d(f(x), f(x_0)) \leq A$ e $d(g(x), g(x_0)) \leq B$, para todo $x \in X$. Considere $d(f(x_0), g(x_0)) = C$. Então, para qualquer que seja $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x)) \\ &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x), g(x_0)) \end{aligned}$$

(desigualdade triangular). Daí, temos

$$d(f(x), g(x)) \leq A + B + C, \quad \forall x \in X.$$

Segue daí que $d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} \leq A + B + C$, o que nos diz que $d(f, g)$ é um número real bem definido. Não é difícil ver que os postulados de métrica são satisfeitos pela distância definida dessa forma.

Se E for um espaço vetorial normado, o conjunto $\mathfrak{B}(X; E)$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial, isto é,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x);$$

para todo $x \in X$ e λ um escalar. Se f, g são limitadas, $f + g$ e λf também são.

A métrica assim definida em $\mathfrak{B}(X; E)$ é proveniente da norma

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

que faz de $\mathfrak{B}(X; E)$ um espaço vetorial normado.

2.3 Funções contínuas

Definição 2.25. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é *contínua no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica em $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$. A função $f : M \to N$ é dita *contínua* quando for contínua em todos os pontos de M. Equivalentemente, podemos definir o conceito de continuidade usando bolas.

Uma aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola de centro $f(a)$, $B(f(a); \varepsilon)$, é possível encontrar uma bola de centro a, $B(a; \delta)$, tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon))$.

Definição 2.26. Seja $f : M \to N$ uma aplicação. Se existe $k > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

diremos que f é uma *aplicação lipschitziana* (a constante $k > 0$ acima é chamada de *constante de Lipschitz*).

Observação 2.27. Se $k = 1$, chamaremos esta aplicação de *contração fraca.* Se $k \in (0, 1)$, chamaremos esta aplicação de *contração.*

Exemplo 2.28. As imersões isométricas são contrações fracas (vide Definição 2.7).

Proposição 2.29. *Toda aplicação lipschitziana é contínua.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ uma aplicação lipschitziana, ou seja, existe $k > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Dado um ponto arbitrário $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$ e teremos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq kd(x, a) \\ &< k\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto f é contínua. $\square$

Exemplo 2.30. Decorre deste fato que são contínuas:

1. Para cada $i = 1, \ldots, k$, a aplicação projeção $\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_i \times \cdots \times M_k \to M_i$ definida por $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$ é uma contração fraca.

2. A norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ de um espaço vetorial normado E, pois $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Proposição 2.31. *Sejam* $(M, d_M), (N, d_N)$ *e* (P, d_P) *espaços métricos. Se* $f : M \to N$ *e* $g : N \to P$ *são contínuas então* $g \circ f : M \to P$ *é contínua.*

Demonstração. Sejam f, g tais que f é contínua em $a \in M$ e g contínua em $f(a) \in N$. Pela continuidade de g em $f(a)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que

$$d_N(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d_P(g(y), g(f(a)) < \varepsilon.$$

Pela continuidade de f em a, dado tal $\lambda > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \lambda.$$

Assim, dado inicialmente $\varepsilon > 0$, fomos capazes de encontrar $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \lambda$ e $d_N(f(x), f(a)) < \lambda$ implica $d_P(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$, logo $d_P(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$, desde que $d_M(x, a) < \delta$. Daí, segue que $g \circ f$ é contínua em $a \in M$ e, portanto contínua. □

Proposição 2.32. *Uma aplicação* $f : M \to N_1 \times N_2$ *é contínua se, e somente se, cada aplicação coordenada* $f_1 : M \to N_1$ *e* $f_2 : M \to N_2$ *é contínua.*

Demonstração. Suponha $f : M \to N_1 \times N_2$ contínua. Considere as projeções $p_1 : N_1 \times N_2 \to N_1$ e $p_2 : N_1 \times N_2 \to N_2$. Note que $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 : p_2 \circ f$. Como as projeções são contínuas, então $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ são contínuas. Para provar a recíproca, vamos considerar em $N_1 \times N_2$ a métrica $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, como f_1 e f_2 são contínuas no ponto a existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$$

e

$$d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon.$$

Sendo assim, temos

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon.$$

Portanto f é contínua no ponto a □

Definição 2.33. Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que $f : M \to N$ é um *homeomorfismo* quando f for uma bijeção contínua cuja inversa f^{-1} também é contínua.

2.4 Conjuntos abertos em espaços métricos

Definição 2.34. Um subconjunto A de um espaço métrico M é chamado de *aberto* quando todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta contida em A, isto é, para cada $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \subset A$. Em outras palavras, sempre que um conjunto aberto contém um ponto a, este conjunto deve também conter todos os pontos suficientemente próximos de a.

Proposição 2.35. *Toda bola aberta $B(a;r)$ num espaço métrico M é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Seja $x \in B(a;r)$. Daí, defina $\varepsilon = r - d(x,a) > 0$. Considere $B(x;\varepsilon)$. Vamos mostrar que $B(x;\varepsilon) \subset B(a;r)$. Seja $y \in B(x;\varepsilon)$, assim, $d(x,y) < \varepsilon$. Mas,

$$\begin{aligned} d(y,a) &\leq d(x,y) + d(x,a) \\ &< \varepsilon + d(x,a) \\ &= r - d(x,a) + d(x,a) \\ &= r. \end{aligned}$$

Portanto $y \in B(a;r)$. □

Exemplo 2.36. Um conjunto unitário $\{a\}$ num espaço métrico M é um subconjunto aberto de M se, e somente se, a for um ponto isolado de M. Além disso, M é discreto se, e somente se, qualquer subconjunto $X \subset M$ for aberto.

Exemplo 2.37. Em qualquer espaço métrico M, o complementar de cada ponto $a \in M$ é um subconjunto aberto de M. De fato, seja $x \in M\backslash\{a\}$ e considere $\varepsilon = d(x,a) > 0$. Sendo assim, $B(x;\varepsilon)$ não contém o ponto a, pois $B(x;\varepsilon) \subset M\backslash\{a\}$. Generalizando, o complementar $M\backslash F$ de qualquer conjunto finito $F = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset M$ é um subconjunto aberto de M. De fato, dado $x \in M\backslash F$, considere $\varepsilon = \min\{d(x,a_i) : 1 \leq i \leq k\} > 0$ e, desta forma, a bola aberta $B(x;\varepsilon)$ não contém nenhum dos pontos $a_1, \ldots, a_k$, isto é, $B(x;\varepsilon) \subset M\backslash F$.

Proposição 2.38. *Os subconjuntos abertos de um espaço métrico M satisfazem:*

(i) M e $\emptyset$ são subconjuntos abertos de M;

(ii) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma coleção arbitrária (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de M então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um subconjunto aberto de M;

(iii) Se $A_1, \ldots, A_n$ são subconjuntos abertos de M então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é um subconjunto aberto de M.

Demonstração.

(i) O conjunto M é aberto, pois toda bola em M está contida em M. Para um subconjunto $X \subset M$ não ser aberto, deve haver um elemento $x \in X$ tal que nenhuma bola de centro x esteja contida em X. Como não existe $x \in \emptyset$ então, por vacuidade, o conjunto vazio é aberto, pois não viola a condição de ser aberto.

(ii) Dado $x \in A$, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x;\varepsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Como $A_{\lambda_0} \subset A$, segue que $B(x;\varepsilon) \subset A$ e, portanto, A é aberto.

(iii) Seja $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $B(x;\varepsilon_i) \subset A_i$. Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, \ldots k\} > 0$. Como $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$, então $B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_i) \subset A_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Portanto $B(x;\varepsilon) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_k$. □

Corolário 2.39. *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto em M se, e somente se, A pode ser escrito como uma união de bolas abertas de M.*

Demonstração. Como bolas abertas são subconjuntos abertos de M, toda união de bolas abertas é um subconjunto aberto de M, pelo item 2 da proposição acima. Reciprocamente, se $A \subset M$ é aberto, então para cada $x \in A$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $\{x\} \subset B(x;\varepsilon_x) \subset A$. Logo, $\bigcup_{x\in A} \{x\} \subset \bigcup_{x\in A} B(x;\varepsilon_x) \subset A$. Como $\bigcup_{x\in A} \{x\} = A$, segue que $\bigcup_{x\in A} B(x;\varepsilon_x) = A$. □

Observação 2.40. Desta forma, dado um espaço métrico M, se considerarmos τ como a coleção de todos os abertos de M com respeito à métrica d, vemos que (M,τ) é um espaço topológico e, além disso, as bolas abertas formam uma base de abertos para (M,τ) (vide Definição 1.16).

Observação 2.41. A interseção de uma família infinita de subconjuntos abertos não é, em geral, um subconjunto aberto. Com efeito, considere os intervalos abertos $\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Todos os intervalos são subconjuntos abertos da reta, mas

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

que não é um subconjunto aberto da reta.

Proposição 2.42. *Sejam M espaço métrico e $X \subset M$ um subespaço. Um subconjunto $A' \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A' = A \cap X$, onde A é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Considere B' as bolas abertas em X e B as bolas abertas em M. Note que

$$B'(x;\varepsilon) = B(x;\varepsilon) \cap X,$$

para cada $x \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 2.39, A' é aberto em X se, e somente se, A' pode ser escrito como união de bolas abertas em X, isto é, para cada $x \in X$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$A' = \bigcup_{x\in X} B'(x;\varepsilon_x).$$

Mas,

$$\bigcup_{x \in X} B'(x; \varepsilon_x) = \bigcup_{x \in X} [B(x; \varepsilon_x) \cap X] = \left[\bigcup_{x \in X} B(x; \varepsilon_x)\right] \cap X = A \cap X,$$

em que $A = \bigcup_{x \in X} B(x; \varepsilon_x)$, que é um subconjunto aberto de M (pois é a reunião de bolas abertas em M). □

Corolário 2.43. *Seja $X \subset M$ aberto. Um subconjunto $A' \subset X$ é aberto em X se, e somente se, A' é aberto em M.*

Proposição 2.44. *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, para cada subconjunto A' aberto em N, sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é um subconjunto aberto de M.*

Demontração. Seja f contínua e $A' \subset N$ aberto. Para cada ponto $a \in A$, $f(a) \in A'$. Sendo A' aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua, dado tal ε, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Mas $f(B(a; \delta)) \subset A'$ significa que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A') = A$. Logo A é aberto. Reciprocamente, suponha que $f : M \to N$ seja uma aplicação tal que para todo $A' \subset N$ aberto, sua imagem inversa $A = f^{-1}(A') \subset M$ também é um subconjunto aberto. Seja $a \in M$ um ponto qualquer. Para todo $\varepsilon > 0$, a bola $B(f(a); \varepsilon) = A'$ é um subconjunto aberto de N, que contém $f(a)$. Logo, $A = f^{-1}(A')$ é um aberto de M contendo a. Por A ser aberto em M, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset A$. Logo, $f(B(a; \delta)) \subset f(A) \subset A' = B(f(a); \varepsilon)$, ou seja, f é contínua. □

De posse da Proposição 2.44, vemos que a continuidade entre espaços métricos é equivalente à continuidade entre espaços topológicos quando consideramos a topologia gerada pelos abertos dos espaços métricos com respeito à sua métrica.

Observação 2.45. A imagem direta $f(A)$ de um subconjunto aberto $A \subset M$ através de uma aplicação contínua $f : M \to N$ nem sempre é um conjunto aberto em N. Com efeito, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função real definida por $f(x) = x^2$ (que é contínua), considerando $A = (-1, 1)$ (que é aberto na reta), então $f(A) = [0, 1)$ (que não é aberto na reta).

2.5 Conjuntos fechados em espaços métricos

Definição 2.46. Sejam M um espaço métrico e X um subconjunto não vazio de M. Dizemos que $a \in M$ é um *ponto aderente* a X quando $d(a, X) = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a. Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Outras maneiras de dizer que a é aderente a X são:

(i) Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$;

(ii) Para todo aberto $A \subset M$ tal que $a \in A$, tem-se que $A \cap X \neq \emptyset$;

(iii) Toda vizinhança de a tem pontos em comum com X.

Seja M um espaço métrico. O *fecho* de um subconjunto $X \subset M$, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto de todos os pontos aderentes a X.

Observação 2.47. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Com efeito, sabemos que $d(a,a) = 0$, logo dado $\varepsilon > 0$, tem-se que

$$d(a,a) = 0 < \varepsilon.$$

Portanto $a \in \overline{X}$. Isso nos diz que, para qualquer que seja o subconjunto $X \subset M$, tem-se que $X \subset \overline{X}$.

Definição 2.48. Sejam M um espaço métrico e $F \subset M$. Dizemos que F é fechado em M quando $F = \overline{F}$.

Observação 2.49. Pela Observação 2.47, para mostrar que um conjunto é fechado, é suficiente mostrar apenas que $\overline{F} \subset F$.

Exemplo 2.50. Sejam E um espaço métrico normado, $a \in E$ e $r > 0$. Então

(a) $\overline{B(a;r)} = B[a;r]$.

(b) $\overline{B[a;r]} = B[a;r]$.

(c) $\overline{S[a;r]} = S[a;r]$.

Observação 2.51. Num espaço métrico M, um ponto a não é aderente a X se, e somente se, existir uma bola de centro a que não contenha nenhum ponto de X, ou seja

$$a \in M \backslash \overline{X} \Leftrightarrow a \in \operatorname{int}(M \backslash X).$$

Definição 2.52. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ de um espaço métrico M é *denso* em M quando $\overline{X} = M$. Isto significa que X é denso em M quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X.

Exemplo 2.53. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso na reta. O conjunto dos números irracionais $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ também é denso na reta.

Proposição 2.54. *Sejam M um espaço métrico e $F \subset X$. Então F é fechado se, e somente se, $A = M \backslash F$ é aberto.*

Demonstração. Suponha que F é fechado e considere $a \in A$. Segue daí que $a \notin F$, isto é, existe um aberto $U \subset M$ que contém a e $U \cap F = \emptyset$, o que nos diz que $U \subset A$, ou seja, $a \in \operatorname{int} A$, portanto A é aberto. Reciprocamente, suponha que A é aberto e considere $x \in \overline{F}$. Segue daí e da Observação 2.51 que $x \notin \operatorname{int} A$. Como A é aberto, então $\operatorname{int} A = A$, logo $x \notin A$, o que nos diz que $x \in F$. Segue daí que $\overline{F} \subset F$, portanto F é fechado. $\square$

2.6 Espaços topológicos metrizáveis

Definição 2.55. Um espaço topológico (X, τ) diz-se metrizável quando é possível definir uma métrica d em X tal que os abertos definidos por d coincidem com os abertos de τ.

Exemplo 2.56. O espaço topológico (X, τ_0), em que τ_0 é a topologia discreta é metrizável, pois a topologia τ_0 é induzida pela métrica zero-um. O espaço topológico (X, τ_1), em que τ_1 é a topologia caótica não é metrizável se X contiver pelo menos dois pontos distintos.

Proposição 2.57. *Todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Seja (X, τ) um espaço topológico metrizável, isto é, existe uma métrica d tal que, $A \subset X$ é aberto com respeito a d se, e somente se, $A \in \tau$. Assim, considere $x, y \in X$ pontos distintos e tome $\varepsilon = \dfrac{d(x,y)}{2} > 0$. Primeiramente, note que $x \in B(x;\varepsilon)$ e $y \in B(y,\varepsilon)$. Afirmamos que $B(x;\varepsilon) \cap B(y;\varepsilon) = \emptyset$. Suponha, por contradição, que existe $a \in B(x;\varepsilon) \cap B(y;\varepsilon)$. Daí, $d(x,a) < \varepsilon$ e $d(a,y) < \varepsilon$ e, assim,

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < 2\varepsilon \Rightarrow \frac{d(x,y)}{2} < \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto X é espaço de Hausdorff. $\square$

2.7 Sequências em espaços métricos

Definição 2.58. Uma *sequência* num conjunto não vazio X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to X$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $x(n) = x_n \in X$, chamado de n-ésimo termo da sequência. Indicamos uma sequência por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n) (sendo a última a forma mais usual, por praticidade).

Definição 2.59. Seja (x_n) uma sequência de um conjunto X. Uma *subsequência* de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Uma subsequência é representada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou (x_{n_k}).

Note que, a partir de uma análise rápida, uma subsequência não parece ser uma sequência em X, pois seu domínio não é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Entretanto, uma subsequência pode ser vista como uma aplicação que associa a cada $k \in \mathbb{N}$, um elemento $x_{n_k} \in X$, ou seja, uma sequência em X.

Definição 2.60. Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é limitada quando sua imagem for limitada.

Exemplo 2.61. Seja M um espaço métrico. Toda sequência $(x_n) \subset M$, cujo conjunto de seus valores $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, é limitada. Em particular, toda sequência constante é limitada.

Exemplo 2.62. Em um espaço vetorial normado E uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe $c > 0$ tal que

$$\|x_n\| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.63. Sejam M um espaço métrico e $(x_n) \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é *limite da sequência* (x_n) quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ que cumpre a seguinte propriedade:

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Usamos a notação $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim x_n = a$ ou $x_n \to a$ para representar que a é limite da sequência (x_n). Uma sequência que possui limite chama-se *convergente* e uma que não possui diz-se *divergente*.

Observação 2.64. Se o espaço métrico M possui pelo menos dois pontos distintos a e b, existem sequências em M que não possuem limite. Por exemplo, basta tomar $x_{2n-1} = a$ e $x_{2n} = b$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.65. *Num espaço métrico M, tem-se* $\lim x_n = x$ *se, e somente se, para todo subconjunto aberto A contendo o ponto x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in A$.*

Demonstração. Seja A um aberto de M tal que $x \in A$. Sendo A aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x;\varepsilon) \subset A$. Mas, por hipótese, $\lim x_n = x$. Então para tal $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Mas, observe que isto significa que $x_n \in B(x;\varepsilon) \subset A$, para todo $n > n_0$. Reciprocamente, se esta condição vale para todo aberto A de M, então vale em particular para as bolas abertas. Portanto $\lim x_n = x$. $\square$

Observação 2.66. Num espaço métrico M, $\lim x_n = x$ significa que toda bola $B(x;\varepsilon)$ contém todo termo x_n a partir de um certo natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$, ou seja, no máximo os n_0 primeiros termos da sequência (isto é, uma quantidade finita de termos) não estão em $B(x;\varepsilon)$.

Proposição 2.67 (Unicidade do limite)**.** *Num espaço métrico M, uma sequência convergente possui um único limite.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que uma sequência convergente (x_n) seja tal que $x_n \to a$ e $x_n \to b$, com $a \neq b$. Como M é um espaço de Hausdorff, existem abertos A e B de M tais que $a \in A$, $b \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Por um lado, sendo $\lim x_n = a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, para todo $n > n_1$. Por outro lado, sendo $\lim x_n = b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$

tal que $x_n \in B$, para todo $n > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então para todo $n > n_0$, deve-se ter simultaneamente $x_n \in A$ e $x_n \in B$, o que contradiz $A \cap B = \emptyset$. Portanto o limite de uma sequência é único. $\square$

O fato de existirem abertos $A, B \subset M$ tais que $a \in A$, $b \in B$ e $A \cap B = \emptyset$ não pode ser usado em um espaço topológico qualquer. De fato, considere $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq b$ e τ' a topologia formada por todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ contendo $\{a, b\}$, mais o vazio $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Assim, todo aberto de $(\mathbb{R}, \tau')$ não vazio contém a e b.

Proposição 2.68. *Se $x_n \to a$ então toda subsequência (x_{n_k}) de (x_n) converge para a.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a$ e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Sendo $x_n \to a$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

Sempre somos capazes de escolher $n_k > n_0$, logo

$$n_k > n_0 \Rightarrow \|x_{n_k} - a\| < \varepsilon.$$

Portanto $x_{n_k} \to a$. $\square$

Observação 2.69. Segue daí que se uma sequência (x_n) de um espaço métrico M possui duas subsequências convergindo para limites distintos, então (x_n) é divergente.

Definição 2.70. Seja (x_n) uma sequência de pontos num espaço vetorial normado E. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a sequência

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

A sequência (s_n) é chamada de sequência das *somas parciais* de (x_n). Se existir $\lim s_n$, dizemos que a *série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, ou simplesmente $\sum x_n$, é *convergente* e sua *soma* será, por definição, igual a $\lim s_n$. Se $\lim s_n$ não existir, diremos que $\sum x_n$ é divergente.

2.8 Espaços métricos completos

Definição 2.71. Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ que cumpre a seguinte propriedade:

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 2.72. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, então dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $d(x_m, x_n) < 1$. Segue daí que

$$x_n \in B(x_{n_0+1}, 1), \quad \forall n > n_0.$$

Daí, obtemos

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_1, \ldots, x_n\} \cup B(x_{n_0+1}, 1),$$

portanto (x_n) é limitada, pois $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $B(x_{n_0+1}, 1)$ são limitados. □

Proposição 2.73. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M e $x \in M$ tal que $\lim x_n = x$. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo assim, para $m, n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x_n, x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy. □

Proposição 2.74. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico M. Se alguma subsequência (x_{n_k}) converge para um ponto $x \in M$, então (x_n) também converge para x.*

Demonstração. Sendo (x_n) de Cauchy e (x_{n_k}) convergente para x, então dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$m, n > n_1 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n_k > n_2 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

respectivamente. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Se $n > n_0$, podemos escolher $n_k > n_0$ e teremos

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $x_n \to x$. $\square$

Num espaço métrico M, embora toda sequência convergente seja de Cauchy, nem toda sequência de Cauchy converge em M. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 2.75. Considere a sequência (x_n) dada por

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3,1 \\
x_2 &= 3,14 \\
x_3 &= 3,141 \\
x_4 &= 3,1415 \\
x_5 &= 3,14159 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observe que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que converge para $\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Definição 2.76. Dizemos que um espaço métrico M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.

Proposição 2.77. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, com a métrica usual $d(x, y) = |x-y|$, é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponha $X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ e $a_n = \inf X_n$. Observe que (x_n) é limitada, visto que (x_n) é de Cauchy e, além disso, $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \dots$. Daí, obtemos uma sequência limitada de números reais (a_n) tal que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \dots$$

(esta sequência claramente é limitada inferiormente, mas afirmamos também que (a_n) é limitada superiormente, pois $\sup X_1 \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Sendo assim, (a_n) é uma sequência monótona limitada, portanto convergente, digamos que $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. De fato, fixado $\varepsilon > 0$ e dado qualquer $n_1 \in \mathbb{N}$, existe $m > n_1$ de modo que

$$a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon.$$

Como $a_m = \inf X_m$, então $a_m < a + \varepsilon$ significa que existe $n > m$ (e por consequência $n > n_0$) tal que

$$a_m \leq x_n < a + \varepsilon,$$

isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Portanto $\lim x_n = a$. $\square$

Proposição 2.78. *O produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ é completo se, e somente se, M_i é completo, para cada $i = 1, \dots, k$.*

Demonstração. Se cada M_i é completo, então dada uma sequência de Cauchy (x_n) em M, cada uma das sequências coordenadas (x_{ni}) é de Cauchy em M_i, logo convergente em M_i. Segue daí que (x_n) converge em M e, portanto, M é completo. Reciprocamente, suponha, por contradição, que existe um dos fatores que não é completo (podemos supor que tal fator seja o M_1, para simplificar a escrita). Sendo assim, existiria uma sequência de Cauchy $(y_n) \subset M_1$ tal que (y_n) é não convergente em M_1. Fixe, arbitrariamente, pontos $a_2 \in M_2, \ldots, a_k \in M_k$. A sequência de pontos $x_n = (y_n, a_2, \ldots, a_k) \in M$ seria de Cauchy, pois $d(x_m, x_n) = d(y_m, y_n)$ e não convergiria em M, o que contradiz a completude de M. □

Corolário 2.79. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é completo.*

Demonstração. Como a reta é completa, então pela Proposição anterior segue que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é completo. □

2.9 Compacidade em espaços métricos

A definição de espaço métrico compacto é a mesma de espaço topológico compacto, considerando, é claro, a topologia induzida pela métrica. Entretanto, aqui podemos estabelecer uma relação entre compacidade e sequências, além de um termos um importante resultado à respeito da compacidade da bola fechada.

Definição 2.80. Um espaço topológico X chama-se *sequencialmente compacto* quando toda sequência em X possui uma subsequência convergente em X.

Definição 2.81. Um espaço métrico M chama-se *totalmente limitado* quando, para todo $\varepsilon > 0$, podemos escrever

$$M = X_1 \cup \cdots \cup X_k,$$

com $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Equivalentemente, M é totalmente limitado se para todo $\varepsilon > 0$ existem $a_1, \ldots, a_k \in M$ de modo que

$$M = B(a_1; \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_k; \varepsilon).$$

Lema 2.82. *Se M é sequencialmente compacto então M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M então, por M ser sequencialmente compacto, existem $x_0 \in M$ e $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tais que $x_{n_k} \to x_0$. Pela Proposição 2.73, segue que $x_n \to x_0$ e, portanto, M é completo. Afirmamos que M é totalmente limitado. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e $x_1 \in M$, considere $B(x_1; \varepsilon)$. Se $M = B(x_1; \varepsilon)$ não há nada para fazer. Caso contrário existe $x_2 \in M$ de modo que $x_2 \notin B(x_1; \varepsilon)$, ou seja, $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Se $M = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon)$ nada temos para fazer. Caso contrário, existe

$x_3 \in B(x_1;\varepsilon) \cup B(x_2;\varepsilon)$, ou seja, $d(x_3,x_2) \geq \varepsilon$ e $d(x_3,x_1) \geq \varepsilon$. Continuando com este procedimento, ou encontramos finitos termos $x_1,\ldots,x_k$ satisfazendo $M = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,\varepsilon)$ ou construímos uma sequência (x_n) de modo que $d(x_n,x_m) \geq \varepsilon$ sempre que $m \neq n$. Contudo, note que a segunda opção não pode ocorrer, pois caso contrário, a sequência (x_n) não possuiria subsequência de Cauchy e, desta forma, (x_n) não admitiria subsequencia convergente. Portanto M é totalmente limitado. $\square$

Proposição 2.83. *Um espaço métrico M é compacto se, e somente se, M é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Assuma que M é compacto e seja (x_n) uma sequência em M. Então, dado $\varepsilon > 0$, considere a seguinte cobertura aberta para M:

$$M \subset \bigcup_{a \in M} B(a;\varepsilon).$$

Como M é compacto, existem $a_1,\ldots,a_p \in M$ tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(a_i;\varepsilon)$. Segue daí que existe $i = 1,\ldots,p$ tal que $B(a_i;\varepsilon)$ contém uma infinidade de elementos de (x_n), digamos que $(x_{n_k}) \subset B(a_i,\varepsilon)$, ou seja, (x_{n_k}) é uma sequência de Cauchy em M, que por ser compacto, em particular completo, existe $x_0 \in M$ tal que $x_{n_k} \to x_0$, o que nos diz que M é sequencialmente compacto. Reciprocamente, suponha que M é sequencialmente compacto. Logo, pelo Lema 2.82, M é completo e totalmente limitado. Então suponha, por contradição, que M não é compacto. Sendo assim, existe uma cobertura aberta $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ que não admite uma subcobertura finita. Seja $0 < \varepsilon_1 < 1$, então existem $X_1,\ldots,X_{n_1}$ subconjuntos fechados de M com $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon_1$ de modo que $M = X_1 \cup \cdots \cup X_{n_1}$. Note que existe $i = 1,\ldots,n_1$ com a propriedade que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é uma cobertura para X_i que não admite subcobertura finita. Por simplicidade, suponha que $i = 1$. Por X_1 ser um subconjunto de um conjunto totalmente limitado segue que X_1 é totalmente limitado, então dado $0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2}$, podemos escrever $X_1 = X_2 \cup \cdots \cup X_{n_2}$ em que X_i é fechado e $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon_2$ para cada $i = 2,\ldots,n_2$. Então, ao menos um desses conjuntos $X_2,\ldots,X_{n_2}$, que vamos chamar de X_2, não admite subcobertura finita. Seguindo com este processo, construímos uma sequência de conjuntos fechados X_n satisfazendo

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots,$$

em que X_n não admite subcobertura finita e $\operatorname{diam} X_n < \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, cada X_n é não-vazio. Deste modo, pelo Teorema dos Intervalos Encaixados generalizado, existe um único $x_0 \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em contrapartida, existe $\lambda_0 \in L$ de modo que $x_0 \in A_{\lambda_0}$ e, por A_{λ_0} ser aberto, então $B\left(x_0, \dfrac{1}{n_0}\right) \subset A_{\lambda_0}$, para n_0 suficientemente grande. Uma vez que $x_0 \in X_n$ e $\operatorname{diam} X_n < \dfrac{1}{n}$ obtemos $X_n \subset B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right) \subset A_{\lambda_0}$, o que é um absurdo. Portanto M é compacto. $\square$

Observação 2.84. A Proposição 1.61 pode ser generalizada para espaços normados de dimensão finita quaisquer. Isto ocorre pois se V é um espaço de dimensão k, então V é homeomorfo ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$. Isso nos dá uma caracterização para compacidade em espaços de dimensão finita.

Sabemos que a bola fechada unitária no espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é sempre compacta, entretanto isto não é verdade em qualquer espaço. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 2.85. Considere o espaço normado $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, em que

$$\ell^2 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

e

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right]^{1/2}.$$

Defina as sequências

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ y_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ y_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que $\|y_k\|_2 = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(y_k) \subset B[0;1] \subset \ell^2$. Observe também que se $m \neq n$, então

$$\|y_m - y_n\|_2 = \sqrt{2},$$

ou seja, a sequência $(y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ de ℓ^2 não admite nenhuma subsequência de Cauchy, logo nenhuma subsequência converge (pela Proposição 2.73). Com isso, concluímos que a bola fechada unitária em ℓ^2 não é sequencialmente compacta, portanto não é compacta.

A partir deste momento vamos estabelecer alguns resultados auxiliares, os quais chamaremos de lemas, para que possamos obter o principal resultado desta seção, que aborda uma relação entre a compacidade da bola fechada de um espaço vetorial normado e a dimensão deste espaço.

Lema 2.86. *Sejam M um espaço métrico, $F \subset M$ um fechado não vazio e K um compacto não vazio tais que $F \cap K = \emptyset$. Então, $d(F, K) > 0$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $d(F,K)=0$. Então, existem $(x_n)\subset F$ e $(y_n)\subset K$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0.$$

Uma vez que K é compacto e, em particular, sequencialmente compacto, existem $y_0\in K$ e uma subsequência (y_{n_k}) de (y_n) tais que $y_{n_k}\to y_0$. Assim,

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k},y_0)=\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k},y_{n_k})=0.$$

Ou seja, $x_{n_k}\to y_0$ e por F ser fechado, segue que $y_0\in F$., o que é uma contradição, pois assim $y_0\in F\cap K$. Portanto, $d(F,K)>0$. □

Lema 2.87 (Riesz)**.** *Assuma que $(E,\|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado e que F é um subespaço fechado próprio de E. Então, dado $\varepsilon\in(0,1)$ existe $y\in E\backslash F$, com $\|y\|=1$, de modo que $d(y,F)\geq 1-\varepsilon$.*

Demonstração. Como $F\neq E$ existe $z\in E$, com $\|z\|=1$, de modo que $z\notin F$, então pelo Lema 2.86, temos $d(z,F)>0$. Se $d(z,F)\geq 1$, nada mais há para fazer. Então, suponha que $0<d(z,F)<1$. Dado $\varepsilon\in(0,1)$ existe $x\in F$ tal que

$$\|x-z\|-d(z,F)<C\varepsilon,\quad \text{com } 0<C<\frac{d(F,z)}{1-\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Então, dado $w'\in F$ considere $w=x+\|x-z\|w'$. Por F ser um subespaço de E então $w\in F$ e considerando $u=\dfrac{x-z}{\|z-x\|}$ observamos que $u\notin F$, $\|u\|=1$ e, por (2.1),

$$\|u-w'\|=\left\|\frac{z-x}{\|z-x\|}-\frac{w-x}{\|z-x\|}\right\|=\frac{\|z-w\|}{\|z-x\|}>\frac{d(z,F)}{d(z,F)+C\varepsilon}>1-\varepsilon.$$

Uma vez que w' foi tomado arbitrariamente em F, concluímos que $d(u,F)\geq 1-\varepsilon$. □

Proposição 2.88. *Seja $(E,\|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Então a bola fechada unitária $B_E=\{x\in E:\|x\|\leq 1\}$ é compacta se, e somente se, $\dim E<\infty$.*

Demonstração. Observe que se $\dim E<\infty$ então B_E é compacta pois é fechada e limitada (vide Observação 2.84). Reciprocamente, suponha que B_E é compacta. Então, seja $v_1\in E$, com $\|v_1\|=1$, e considere $F_1=\{\lambda v_1;\ \lambda\in\mathbb{R}\}$. Desta forma, F_1 é um subespaço de E tal que $\dim F_1=1$, logo F_1 é fechado. Se $E=F_1$, nada mais há para fazer, caso contrário, usando o Lema 2.87 com $\varepsilon=1/2$, existe $v_2\in E$ de modo que $v_2\notin F_1$, $\|v_2\|=1$ e $\|v_2-v_1\|\geq 1/2$. Defina agora $F_2=\{\lambda_1v_1+\lambda_2v_2:\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$. Desta forma, F_2 é um subespaço de E tal que $\dim F_2=2$, logo F_2 é fechado. Se $F_2=E$, não há nada mais para fazer, caso contrário, usando o Lema 2.87 com $\varepsilon=1/2$, existe $v_3\in E$ de modo que $v_3\notin F_2$, $\|v_3\|=1$, $\|v_3-v_1\|\geq 1/2$ e $\|v_3-v_2\|\geq 1/2$. Continuando com este processo, temos duas possibilidades: ou existem $v_1,\ldots,v_k\in E$ de modo que

$E = F_k = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ ou então construímos uma sequência (v_n) em B_E de modo que $\|v_m - v_n\| \geq 1/2$ sempre que $m \neq n$. Note que a segunda opção não pode ocorrer, pois caso contrário, (v_n) seria uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente, então B_E não seria sequencialmente compacto, logo B_E não seria compacto. Portanto $\dim E = k$.

$\square$

Capítulo 3

Topologias fraca e fraca*

3.1 Conceitos preliminares

Definição 3.1. Sejam E e F dois espaços vetoriais normados. Indicamos por $\mathcal{L}(E,F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F. O espaço $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\|f(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Dados $f \in \mathcal{L}(E,F)$ e $y \in E\backslash\{0\}$, tem-se que

$$\left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \leq \|f\|.$$

Sendo f linear, segue que

$$\frac{1}{\|y\|}\|f(y)\| \leq \|f\| \Rightarrow \|f(y)\| \leq \|f\|\|y\|$$

e $f(0) = 0$, logo $\|f(0)\| = \|f\|\|y\|$. Ou seja, para quaisquer que sejam $f \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$, tem-se que

$$\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|. \tag{3.1}$$

Observação 3.2. Precisamos tomar bastante cuidado com o seguinte: embora utilizamos apenas a notação $\|\cdot\|$, deve ficar claro que $\|x\|$ é tomado com a norma de E, $\|f(x)\|$ é tomado com a norma de F e $\|f\|$ é tomado com a norma de $\mathcal{L}(E,F)$.

Definição 3.3. Dizemos que E é um *espaço de Banach* quando E for um espaço vetorial normado completo.

Exemplo 3.4. O espaço $\mathbb{R}^N$ é um espaço de Banach. Em particular, a reta é um espaço de Banach.

Definição 3.5. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *funcional* é uma função definida em E, ou em algum subespaço de E, tomando valores em $\mathbb{R}$.

Definição 3.6. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *funcional sublinear* é um funcional $p : E \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \tag{3.2}$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \tag{3.3}$$

Veremos agora um resultado de extrema importância para o nosso estudo, o Teorema de Hahn Banach (forma analítica). Esse resultado nos diz que se um funcional linear definido num subespaço vetorial G de um espaço vetorial E é dominado por uma seminorma p, então este funcional pode ser estendido em todo o espaço E e ainda continua dominado por p. Embora esse Teorema seja de extrema importância e fundamental para demonstrar outros resultados, vamos omitir sua demonstração, que pode ser encontrada em [1].

Teorema 3.7 (Forma analítica de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $G \subset E$ um subespaço vetorial e $p : E \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear em E. Se $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que*

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G, \tag{3.4}$$

então existe um funcional linear f definido em todo E que estende g, isto é, $g(x) = f(x)$, para todo $x \in G$ e, além disso,

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.5}$$

Definição 3.8. Seja E um espaço vetorial. O espaço $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é chamado de *dual topológico* de E e é denotado por $E^\star$, ou seja, $E^\star$ é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos de E em $\mathbb{R}$. Podemos definir no dual topológico de E a seguinte norma:

$$\|f\|_{E^\star} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E}} f(x). \tag{3.6}$$

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos apenas $\|f\|$ ao invés de $\|f\|_{E^\star}$.

Observação 3.9. Dado $f \in E^\star$ e $x \in E$, vamos escrever frequentemente $\langle f, x \rangle$ para representar $f(x)$. Dizemos que $\langle\ ,\ \rangle$ é o *produto escalar* pela dualidade $E^\star, E$.

Corolário 3.10. *Sejam E um espaço vetorial normado e $G \subset E$ um subespaço vetorial. Se $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $f \in E^\star$ que estende g e que*

$$\|f\|_{E^\star} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in G}} |g(x)| = \|g\|_{G^\star}.$$

Demonstração. Afirmamos inicialmente que o funcional $p(x) = \|g\|_{G^\star}\|x\|$ é sublinear. De fato, dados $x, y \in E$ e $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} p(\lambda x) = \|g\|_{G^\star}\|\lambda x\| &= \|g\|_{G^\star}\left(|\lambda|\|x\|\right) \\ &= \lambda\left(\|g\|_{G^\star}\|x\|\right) = \lambda p(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p(x+y) = \|g\|_{G^\star}\|x+y\| &\leq \|g\|_{G^\star}\left(\|x\| + \|y\|\right) \\ &= \|g\|_{G^\star}\|x\| + \|g\|_{G^\star}\|y\| = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Além disso, a condição (3.4) é satisfeita (segue diretamente de (3.1)). Logo, pelo Teorema 3.7 (forma analítica de Hahn-Banach) existe um funcional linear $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in G$ e, além disso, $f(x) \leq p(x)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) \leq \|g\|_{G^\star}\|x\| &\Rightarrow \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} f(x) \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} \|g\|_{G^\star}\|x\| \\ &\Rightarrow \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} f(x) \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} \|g\|_{G^\star} \\ &\Rightarrow \|f\|_{E^\star} \leq \|g\|_{G^\star}. \end{aligned}$$

Além disso, por $G \subset E$, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{E^\star} &\geq \|f\|_{G^\star} \\ &= \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in G}} f(x) \\ &= \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in G}} g(x) \\ &= \|g\|_{G^\star}. \end{aligned}$$

Portanto $\|f\|_{E^\star} = \|g\|_{G^\star}$ □

Corolário 3.11. *Para todo $x_0 \in E$ existe $f_0 \in E^\star$ tal que*

$$\|f_0\|_{E^\star} = \|x_0\| \text{ e } \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

Demonstração. Dado tal $x_0 \in E$, considere o funcional

$$\begin{aligned} g : G = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\} &\to \mathbb{R}; \\ tx_0 &\mapsto g(tx_0) = t\|x_0\|^2. \end{aligned}$$

Observe que se $x_0 = 0$, não há o que provar, então suponha que $x_0 \neq 0$. Afirmamos que g é linear. De fato, dados $t_1x_0, t_2x_0 \in \mathbb{R}x_0$, temos

$$\begin{aligned} g(\lambda(t_1x_0)) &= g((\lambda t_1)x_0) \\ &= (\lambda t_1)\|x_0\|^2 \\ &= \lambda\left(t_1\|x_0\|^2\right) \\ &= \lambda g(t_1x_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(t_1x_0 + t_2x_0) &= g((t_1+t_2)x_0) \\ &= (t_1+t_2)\|x_0\|^2 \\ &= t_1\|x_0\|^2 + t_2\|x_0\|^2 \\ &= g(t_1x_0) + g(t_2x_0). \end{aligned}$$

Além disso, observe que g é contínuo, pois

$$\begin{aligned} |g(tx_0)| &= |t|\|x_0\|^2 \\ &= \|x_0\||t|\|x_0\| \\ &= \|x_0\|\|tx_0\|, \end{aligned}$$

o que implica em

$$|g(x)| = \|x_0\|\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Assim, pelo Corolário 3.10, existe $f_0 \in E^\star$ tal que $\|f_0\|_{E^\star} = \|g\|_{G^\star}$. Mas,

$$\begin{aligned} \|g\|_{G^\star} &= \sup_{\substack{\|tx_0\|\leq 1 \\ t\in\mathbb{R}}} |g(tx_0)| \\ &= \sup_{\substack{\|tx_0\|\leq 1 \\ t\in\mathbb{R}}} |t|\|x_0\|^2 \\ &= \sup_{\substack{\|tx_0\|\leq 1 \\ t\in\mathbb{R}}} \|tx_0\|\|x_0\| \\ &\leq \|x_0\|. \end{aligned}$$

Além disso, considere $y = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ e, observe que

$$\begin{aligned} g(y) &= g\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|x_0\|}g(x_0) \\ &= \frac{1}{\|x_0\|}\|x_0\|^2 \\ &= \|x_0\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|g\|_{G^\star} = \|x_0\|$. Ademais, como $x_0 = 1 \cdot x_0$, segue que $x_0 \in G$ e, como f_0 estende g segue que

$$\begin{aligned}\langle f_0, x_0\rangle &= g(x_0)\\ &= g(1\cdot x_0)\\ &= 1\|x_0\|^2\\ &= \|x_0\|^2,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 3.12. *Para todo $x \in E$, temos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|f\|\le 1\\ f\in E^\star}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{\|f\|\le 1\\ f\in E^\star}} |\langle f, x\rangle|. \tag{3.7}$$

Demonstração. Se $x = 0$, não há o que provar, então suponha que $x \neq 0$. Seja $f \in E^\star$ de modo que $\|f\| \le 1$, então por (3.1), sabemos que

$$f(x) \le \|f\|\|x\| \Rightarrow \sup_{\substack{\|h\|\le 1\\ h\in E^\star}} h(x) \le \|x\|.$$

Por outro lado, sabemos do Corolário 3.11 que existe $f_0 \in E^\star$ tal que $\|f_0\| = \|x\|$ e $f_0(x) = \|x\|^2$. Definindo $\hat{f}_0 = f_0/\|x\|$, encontramos

$$\|\hat{f}_0\| = 1 \text{ e } \hat{f}_0(x) = \|x\|.$$

Como o supremo é atingido, segue que $\|x\| = \max\limits_{\substack{\|f\|\le 1\\ f\in E^\star}} |f(x)|$. □

A proposição abaixo nos diz que para saber se um espaço $\mathcal{L}(E, F)$ é completo, é suficiente verificar que F seja completo. Em particular, como a reta é completa, o dual topológico $E^\star$ de qualquer espaço vetorial normado E é sempre completo (mesmo que E não seja).

Proposição 3.13. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Se F é completo então $\mathcal{L}(E, F)$ é completo.*

Demonstração. Seja $(f_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ uma sequência de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. Dado $x \in E$, temos

$$\begin{aligned}\|f_m(x) - f_n(x)\| &\le \sup_{y\in E} \|f_n(y) - f_n(y)\|\\ &= \|f_m - f_n\|\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Desta forma, $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em F, que por ser completo, para cada $x \in E$, existe $f(x) \in F$ tal que $f_n(x) \to f(x) \in F$. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$\|f_n(x+\lambda y) - f(x+\lambda y)\| < \frac{\varepsilon}{10}, \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{10} \quad \text{e} \quad \|f_n(y) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{10|\lambda|}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\| &= \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y) + f_n(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\| \\
&\leq \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y)\| + \|f_n(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\| \\
&= \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y)\| \\
&\qquad + \|f_n(x) + \lambda f_n(y) - f(x) - \lambda f(y)\| \\
&\leq \|f(x+\lambda y) - f_n(x+\lambda y)\| \\
&\qquad + \|f_n(x) - f(x)\| + |\lambda|\|f_n(y) - f(y)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10|\lambda|} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y) = 0 \Rightarrow f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y),$$

o que nos diz que f é linear. Para concluir a demonstração, resta-nos mostrar que f é contínua. Suponha, por contradição, que F não é contínua. Desta forma, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in E$ tal que

$$\|f(x_k)\| > k\|x_k\|, \quad \forall k \in N.$$

Tomando $y_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|}$, obtemos

$$\|f(y_k)\| > k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Contudo, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\|f_n(y_k) - f(y_k)\| < 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f(y_k)\| &= \|f(y_k) - f_{n_0}(y_k) + f_{n_0}(y_k)\| \\
&\leq \|f(y_k) - f_{n_0}(y_k)\| + \|f_{n_0}(y_k)\| \\
&\leq 1 + \|f_{n_0}\|\|y_k\| \\
&= 1 + \|f_{n_0}\|,
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que contradiz (3.8), logo f é contínua. Sendo f linear e contínua, segue que $f \in \mathcal{L}(E,F)$, portanto $\mathcal{L}(E,F)$ é completo. $\square$

Abordaremos agora alguns fatos preliminares acerca dos hiperplanos.

Definição 3.14. Dizemos que um subconjunto $C \subset E$ é convexo se

$$tx + (1-t)y \in C, \quad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1].$$

Definição 3.15. Um *hiperplano* afim é um subconjunto $H \subset E$ da forma

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

em que f é um funcional linear que não é identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante dada. Escreveremos $H = [f = \alpha]$ e dizemos que $f = \alpha$ é a equação de H.

Proposição 3.16. *O hiperplano $H = [f = \alpha]$ é fechado se, e somente se, f é contínuo.*

Demonstração. Se f é contínuo, então é H é fechado, pois, como $\{\alpha\}$ é fechado em $\mathbb{R}$, segue que $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ é fechado em E. Reciprocamente, suponha que H é fechado, logo $E\backslash H$ é aberto e, além disso, $E\backslash H$ é não vazio (pois f não é o funcional identicamente nulo). Considere $x_0 \in E\backslash H$, isto é, $f(x_0) \neq \alpha$, digamos $f(x_0) < \alpha$. Fixe $r > 0$ de modo que $B(x_0, r) \subset E\backslash H$ (tal $r > 0$ existe, pois $E\backslash H$ é aberto). Afirmamos que

$$f(x) < \alpha, \quad \forall x \in B(x_0, r). \tag{3.9}$$

Suponha, por contradição, que existe $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. Como $x_0, x_1 \in B(x_0, r)$ e as bolas são conjuntos convexos, então o segmento

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0,1]\}$$

está inteiramente contido em $B(x_0, r)$, logo $f(x_t) \neq \alpha$, para todo $t \in [0,1]$. Por outro lado, considere $t' = \dfrac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$. Note que $t' \in [0,1]$ e, além disso, temos

$$\begin{aligned} f(x_{t'}) &= f\left((1-t')x_0 + t'x_1\right) \\ &= (1-t')f(x_0) + t'f(x_1) \\ &= f(x_0) + t'[f(x_1) - f(x_0)] \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

que é uma contradição, o que prova (3.9). Em consequência de (3.9), temos

$$f(x_0 + rz) < \alpha, \quad \forall z \in B(0,1).$$

É claro que $f(0) \leq \|0\|$. Considere agora $w \in E\backslash\{0\}$ e $s < r$. Tomando $k = \dfrac{w}{\|w\|}$, vemos que $k \in B[0,1]$. Segue daí que

$$\begin{aligned} f(x_0 + sk) < \alpha \Rightarrow f(k) &< \frac{1}{s}[\alpha - f(x_0)] \\ \Rightarrow f(w) &< \frac{1}{s}[\alpha - f(x_0)] \cdot \|w\|, \end{aligned}$$

o que nos diz que f é contínuo e, além disso,

$$f(z) < \frac{1}{s}\left[\alpha - f(x_0)\right], \quad \forall z \in B(0,1) \Rightarrow \|f\| \leq \frac{1}{s}\left[\alpha - f(x_0)\right].$$

□

Definição 3.17. Sejam $A, B \subset E$. Dizemos que o hiperlano $H = [f = \alpha]$ *separa* A e B se

$$f(x) \leq \alpha, \quad \forall x \in A \text{ e } f(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in B.$$

Dizemos que H *separa estritamente* A e B se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \quad \forall x \in A \text{ e } f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \quad \forall x \in B.$$

Geometricamente a separação significa que A está em um dos semi-espaços determinados por H e B está no outro.

Vamos agora provar dois resultados muito importantes para o decorrer deste trabalho, os Teoremas de Hahn-Banach (forma geométrica). Para isto, precisaremos do lema abaixo, o qual vamos omitir a demonstração, que pode ser encontrada em [1].

Lema 3.18. *Seja $C \subset E$ um subconjunto convexo aberto não vazio e seja $x_0 \in E \backslash C$. Então, existe $f \in E^\star$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ e C.*

Teorema 3.19 (Primeira forma geométrica, Hahn-Banach)**.** *Sejam $A, B \subset E$ dois subconjuntos convexos não vazios de E tais que $A \cap B = \emptyset$. Assuma que um deles é aberto. Então, existe um hiperplano fechado que separa A e B.*

Demonstração. Suponha que A seja aberto. Defina $C = A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Afirmamos que C é convexo. De fato, sejam $z_1, z_2 \in C$, logo existem $x_1, x_2 \in A$ e $y_1, y_2 \in B$ tais que $z_1 = x_1 - y_1$ e $z_2 = x_2 - y_2$. Daí, para todo $t \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} (1-t)z_1 + tz_2 &= (1-t)(x_1 - y_1) + t(x_2 - y_2) \\ &= [(1-t)x_1 + tx_2] - [(1-t)y_1 + ty_2]. \end{aligned}$$

Como A e B são convexos então $(1-t)x_1 + tx_2 \in A$ e $(1-t)y_1 + ty_2 \in B$, logo $(1-t)z_1 + tz_2 \in C$ e, portanto, C é convexo. Afirmamos também que C é aberto. De fato, não é difícil perceber que $C = \bigcup_{y \in B} (A - \{y\})$. Então para cada $y \in B$, basta mostrar que o conjunto $A - \{y\}$ é aberto. Seja $z \in A - \{y\}$, logo existe $x \in A$ tal que $z = x - y$. Como A é aberto, então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Afirmamos que $B(z, r) \subset A - \{y\}$. De fato, seja $m \in B(z, r)$, logo

$$\begin{aligned} \|m - z\| < r &\Rightarrow \|m - (x - y)\| < r \\ &\Rightarrow \|(m + y) - x\| < r. \end{aligned}$$

Daí, segue que $m + y \in B(x, r)$, logo $m + y \in A$ e, portanto, $m \in A - \{y\}$. Com isso concluímos que C é aberto. Além disso, $0 \notin C$ (pois $A \cap B = \emptyset$). Pelo Lema 3.18, existe $f \in E^\star$ tal que

$$f(z) < f(0) = 0, \quad \forall z \in C,$$

isto é,

$$f(x - y) < 0, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B \Rightarrow f(x) < f(y), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Portanto o hiperplano $[f = \alpha]$ separa A e B. $\square$

Teorema 3.20 (Segunda forma geométrica, Hahn-Banach)**.** *Sejam $A, B \subset E$ dois subconjuntos convexos não vazios de E tais que $A \cap B = \emptyset$. Assuma que A é fechado e B é compacto. Então, existe um hiperplano fechado que separa estritamente A e B.*

Demonstração. Defina $C = A - B$, de modo que C é convexo e, além disso, $0 \notin C$ (basta usar os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 3.19). Afirmamos também que C é fechado. De fato, seja $(z_n) \subset C$ uma sequência que converge para z. Vamos mostrar que $z \in C$. Com efeito, sendo cada $z_n \in C$, segue que existem sequências $(x_n) \subset A$ e $(y_n) \subset B$ tais que $z_n = x_n - y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como B é compacto, então (y_n) possui uma subsequência (y_{n_k}) tal que $y_{n_k} \to y \in B$. Daí, segue que $x_{n_k} \to z + y$, donde $z + y \in A$, pois A é fechado. Tomando $x = z + y$, temos $z = x - y$. Como $x \in A$ e $y \in B$, segue que $z \in C$ e, portanto, C é fechado. Consequentemente, existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \cap C = \emptyset$. Pelo Teorema 3.19, existe um hiperplano fechado que separa $B(0, r)$ e C. Logo existe $f \in E^\star$, $f \neq 0$, tal que

$$f(x - y) \leq f(rz), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0, 1),$$

o que implica em

$$f(x - y) \leq -rf(-z), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Segue daí que

$$f(x-y) \le -r\|f\|, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2} r\|f\| > 0$, obtemos

$$f(x) + \varepsilon \le f(y) - \varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Escolhendo α de modo que

$$\sup_{x\in A} f(x) + \varepsilon \le \alpha \le \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon,$$

vemos que o hiperplano $[f = \alpha]$ separa estritamente A e B. $\square$

Observação 3.21. Assuma que $A, B \subset E$ são subconjuntos convexos não vazios tais que $A \cap B = \emptyset$. Se não for imposta nenhuma hipótese adicional, em geral não é possível separar A e B por um hiperplano fechado. Contudo, se E possui dimensão finita, pode-se sempre separar (não estritamente) dois conjuntos convexos não vazios A e B, em que $A \cap B = \emptyset$ (nenhuma suposição adicional é necessária).

Corolário 3.22. *Seja $F \subset E$ um subespaço vetorial, tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe $f \in E^\star$, com $f \neq 0$, tal que*

$$\langle f, x\rangle = 0, \quad \forall x \in F.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in E \backslash F$. Usando o Teorema 3.20, com $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$, achamos um hiperplano fechado $[f = \alpha]$ que separa estritamente $\overline{F}$ e $\{x_0\}$. Portanto temos

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle, \quad \forall x \in F.$$

Uma vez que F é um subespaço vetorial de E, então dado $x \in F$, segue que $\lambda x \in F$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$\lambda\langle f, x\rangle < \alpha, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in F.$$

Afirmamos que $\langle f, x\rangle = 0$, para todo $x \in F$. Caso contrário, existiria $y \in F$ tal que $\langle f, y\rangle \neq 0$ (digamos $\langle f, y\rangle > 0$). Daí, temos

$$\lambda\langle f, y\rangle < \alpha, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda < \frac{\alpha}{\langle f, y\rangle}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

o que contradiz o fato de $\mathbb{R}$ ser ilimitado (análogo para $\langle f, y\rangle < 0$). Portanto $\langle f, x\rangle = 0$, para todo $x \in F$. $\square$

Observação 3.23. O Corolário 3.22 é usado muitas vezes para provar que um subespaço vetorial é denso. Para isso ser feito, é suficiente mostrar que todo funcional linear contínuo de E que se anula em F deve se anular em todo o espaço E.

Definição 3.24. Sejam E um espaço vetorial normado e $E^\star$ o dual topológico de E com a norma

$$\|f\|_{E^\star} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} |f(x)|.$$

O *bidual topológico* de E (denotado por $E^{\star\star}$) é, por definição, o dual de $E^\star$, ou seja, $E^{\star\star} = \mathcal{L}(E^\star, \mathbb{R})$. Podemos definir em $E^{\star\star}$ a seguinte norma:

$$\|\xi\|_{E^{\star\star}} = \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f\in E^\star}} |\langle \xi, f\rangle|, \text{ com } \xi \in E^{\star\star}.$$

Existe uma aplicação injetiva $J : E \to E^{\star\star}$, chamada de *injeção canônica*, definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J : E &\to E^{\star\star}; \\ x &\mapsto J(x) = J_x : E^\star \to \mathbb{R}; \\ &\qquad\qquad f \mapsto \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Afirmamos que J é linear. De fato, dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, encontramos

$$\begin{aligned} \langle J_{x+y}, f\rangle &= \langle f, x+y\rangle \\ &= \langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle \\ &= \langle J_x, f\rangle + \langle J_y, f\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle J_{\lambda x}, f\rangle &= \langle f, \lambda x\rangle \\ &= \lambda\langle f, x\rangle \\ &= \lambda\langle J_x, f\rangle, \end{aligned}$$

para qualquer que seja $f \in E^\star$. Além disso, J é uma imersão isométrica, isto é, $\|J_x\|_{E^{\star\star}} = \|x\|_E$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \|J_x\|_{E^{\star\star}} &= \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f\in E^\star}} |\langle J_x, f\rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f\in E^\star}} |\langle f, x\rangle| \\ &= \|x\|_E \end{aligned}$$

(pelo Corolário 3.12).

Nem sempre J é sobrejetiva, entretanto é conveniente identificar E como subespaço de $E^{\star\star}$ usando J. Se J for sobrejetiva, dizemos que E é *reflexivo* e $E^{\star\star}$ é identificado como o próprio espaço E, visto que, neste caso, a injeção canônica é uma isometria.

Vamos ver agora um Teorema muito importante, mas que neste trabalho será utilizado apenas para demonstrar a Proposição 3.34, por isso vamos omitir sua demonstração.

Este Teorema é conhecido como Princípio da limitação uniforme e nos diz que se uma família de transformações lineares contínuas entre dois espaços de Banach E e F é limitada pontualmente, então esta família é limitada uniformemente.

Teorema 3.25 (Banach-Steinhaus, Princípio da limitação uniforme)**.** *Sejam E, F dois espaços de Banach e considere $(T_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de transformações lineares contínuas de E em F. Assuma que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Então

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Em outras palavras, existe uma constante c (que não depende de i) tal que

$$\|T_i x\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

3.2 Topologia fraca

Suponha que X seja um conjunto (sem qualquer estrutura) e $(Y_i)_{i\in I}$ é uma coleção de *espaços topológicos*. Para cada $i \in I$, considere as aplicações $\varphi_i : X \to Y_i$. O nosso objetivo inicial nesta seção é construir a topologia mais grosseira (com a menor quantidade de abertos) que torna todas as aplicações da família $(\varphi_i)_{i\in I}$ contínuas.

Note que se X for munido com a topologia discreta, então toda φ_i é contínua, uma vez que a imagem inversa de todo aberto de Y_i seria um subconjunto aberto de X com respeito à topologia discreta. Porém, já vimos anteriormente que esta topologia é, na verdade, a topologia mais fina dentre todas as topologias no conjunto X. Sendo assim, vamos construir uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X da seguinte forma:

Em cada Y_i considere todos os seus subconjuntos abertos e, em seguida, agrupe-os, formando uma coleção $(U_j)_{j\in J}$. Primeiramente observe que existe mais de um conjunto aberto em cada Y_i (pelo menos o vazio $\emptyset$ e o próprio Y_i), ou seja, a coleção $(U_j)_{j\in J}$ pode conter mais elementos do que $(Y_i)_{i\in I}$, isto é, o conjunto de índices J pode ter mais elementos do que o conjunto de índices I. Daí, agrupe em $\mathcal{T}$ as imagens inversas de cada U_j pelas aplicações que façam sentido, isto é, se $U \in (U_j)_{j\in J}$ e $U \in Y_{\hat{i}}$, para algum $\hat{i} \in I$, então a imagem inversa considerada será $\varphi_{\hat{i}}^{-1}(U)$, donde $\varphi_{\hat{i}}^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Para cada imagem inversa tomada, agrupe-as na família $(V_j)_{j\in J}$. Entretanto, esta família não precisa necessariamente ser uma topologia. Precisamos modificar um pouco a estrutura da família $(V_j)_{j\in J}$ para que possamos ter uma estabilidade pela interseção finita e por uma união arbitrária.

Adicione ao conjunto $\mathcal{T}$ todas as interseções finitas de elementos de $(V_j)_{j\in J}$ que ainda não estiverem em $\mathcal{T}$. Observe que, ao adicionar possíveis elementos à $\mathcal{T}$ que anteriormente não pertenciam à $\mathcal{T}$, obtemos uma família ainda "maior" de subconjuntos de X, digamos $(W_l)_{l\in L}$. Embora agora a família $(W_l)_{l\in L}$ seja estável para uma interseção finita, ela não necessariamente é estável para uma coleção arbitrária.

Por fim, considere agora todas as uniões arbitrárias de elementos de $(W_l)_{l\in L}$ e, em seguida, adicione-os à $\mathcal{T}$, que agora é estável para uma união arbitrária. O seguinte lema nos garante que ao fazer este último processo, a família $\mathcal{T}$ continua estável para uma interseção finita, o que nos permite concluir que $\mathcal{T}$ é, de fato, uma topologia no conjunto X.

Lema 3.26. *A família $\mathcal{T}$ é estável sob uma interseção finita.*

Observação 3.27. Não se pode inverter a ordem na construção de $\mathcal{T}$. Teria sido natural começar a construção com a união arbitrária e só depois considerar a interseção finita. O resultado é estável sob uma interseção finita, mas não é sob arbitrariedade. Para que fosse estável sob a arbitrariedade, seria necessário considerar este processo mais uma vez.

Observação 3.28. Para resumir esta discussão, descobrimos que os conjuntos abertos da topologia $\mathcal{T}$ são obtidos considerando primeiro a interseção finita de conjuntos da forma $\varphi_i^{-1}(U_i)$, em que U_i é um aberto de Y_i e, em seguida, a união arbitrária. Daí segue que para todo $x \in X$, obtemos uma base de vizinhanças (ver Definições 1.16 e 1.24) de x para a topologia $\mathcal{T}$ considerando da forma $\bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(V_i)$, em que V_i é a vizinhança de $\varphi_i(x)$ em Y_i.

A seguir, equipamos X com a topologia $\mathcal{T}$, que é a topologia mais grosseira associada à coleção $(\varphi_i)_{i\in I}$. Vamos ver agora duas propriedades acerca desta topologia.

Proposição 3.29. *Seja (x_n) uma sequência em X. Então $x_n \to x$ (em $\mathcal{T}$) se, e somente se, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, para todo $i \in I$.*

Demonstração. Se $x_n \to x$, então $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, pois cada φ_i é contínua com relação à topologia $\mathcal{T}$. Reciprocamente, seja A uma vizinhança de x. Pela discussão anterior, nós sempre podemos assumir que A é da forma

$$A = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i),$$

em que $J \subset I$ é finito. Para cada $i \in J$, existe algum N_i inteiro tal que $\varphi_i(x_n) \in V_i$, para todo $n \geq N_i$. Tomando $N = \max\{N_i : i \in J\}$, tem-se que $x_n \in A$, para todo $n \geq N$. $\square$

Proposição 3.30. *Sejam Z um espaço topológico e ψ uma aplicação de Z em X. Então ψ é contínua se, e somente se, $\varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i$ é contínua, para cada $i \in I$.*

Demonstração. Se ψ é contínua então $\varphi_i \circ \psi$ é também contínua, para todo $i \in I$, pois cada φ_i é contínua. Reciprocamente, temos que provar que $\psi^{-1}(A)$ é aberto (em Z) para todo conjunto aberto $A \subset X$. Mas nós sabemos que A é tal que

$$\psi^{-1}(A) = \bigcup_{\text{arbitrária}} \bigcap_{\text{finita}} \psi^{-1}[\varphi_i^{-1}(U_i)] = \bigcup_{\text{arbitrária}} \bigcap_{\text{finita}} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(U_i),$$

que é aberto em Z desde que $\varphi_i \circ \psi$ é uma aplicação contínua. $\square$

Seja E um espaço de Banach e considere, para cada $f \in E^\star$, o funcional linear $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in E.$$

Observe que com isso construímos uma família de aplicações de E em $\mathbb{R}$. Vamos agora ignorar a topologia usual em E (associada à $\|\cdot\|$) e vamos definir uma nova topologia em E.

Definição 3.31. A *topologia fraca* em E, denotada por $\sigma(E, E^\star)$, é a topologia mais grosseira que torna todas as aplicações de $(\varphi_f)_{f \in E^\star}$ contínuas.

Proposição 3.32. *A topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ é de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $x, y \in E$, com $x \neq y$. Por Hahn-Banach (segunda forma geométrica) existe um hiperplano fechado que separa estritamente x e y. Ou seja, existem $f \in E^\star$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle.$$

Defina

$$A = \{z \in E : \langle f, z \rangle < \alpha\};$$
$$B = \{z \in E : \langle f, z \rangle > \alpha\}.$$

Note que $A = \varphi_f^{-1}((-\infty, \alpha))$ e $B = \varphi_f^{-1}((\alpha, +\infty))$, logo A e B são abertos em E, visto que φ_f é contínua. Não é difícil perceber que $A \cap B = \emptyset$ e, além disso, $x \in A$ e $y \in B$. Portanto a topologia fraca é de Hausdorff. $\square$

Proposição 3.33. *Seja $x_0 \in E$. Obtemos uma base de vizinhanças de x_0 na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ ao considerar os conjuntos da forma*

$$V = V(f_1, \ldots, f_k, \varepsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, k\},$$

em que $\varepsilon > 0$ e $f_i \in E^\star$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Demonstração. Denote, para cada $i \in I$, $a_i = \langle f_i, x_0 \rangle$. Então

$$V = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon))$$

é um aberto da topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ que contém x_0. Além disso, se A é uma vizinhança de x_0 com respeito a $\sigma(E, E^\star)$, então existe $W \subset A$ tal que $x_0 \in W = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}(U_i)$, em que I é finito e $U_i \subset \mathbb{R}$ é um aberto contendo $a_i = \langle f_i, x_0 \rangle$. Sendo assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \subset U_i$, para todo $i \in I$. Segue daí que $x_0 \in V \subset W \subset A$. □

Para indicar que uma sequência $(x_n) \subset E$ converge para x na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$, escrevemos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Para evitar qualquer confusão, diremos, às vezes, $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E^\star)$. Para ficar totalmente claro, às vezes vamos enfatizar uma convergência forte dizendo $x_n \to x$ fortemente, significando que $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposição 3.34. *Seja (x_n) uma sequência em E. Então*

(i) $[x_n \rightharpoonup x$ *fracamente em* $\sigma(E, E^\star)] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in E^\star]$*;*

(ii) Se $x_n \to x$ fortemente então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E^\star)$;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E^\star)$ então $(\|x_n\|)$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E^\star)$ e $f_n \to f$ fortemente em $E^\star$ (isto é, $\|f_n - f\|_{E^\star} \to 0$) então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração.

(i) Segue da Proposição 3.29 e da definição de topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$.

(ii) Segue do item (i), desde que $|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\|$.

(iii) Por hipótese, $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E^\star)$, então pelo item (i), têm-se que $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, para todo $f \in E^\star$. Daí segue que $(\langle f, x_n \rangle)$ é uma sequência limitada. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $T_n : E^\star \to \mathbb{R}$, dado por

$$T_n(f) = \langle f, x_n \rangle.$$

Observe que daí temos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, x_n \rangle| \,.$$

Sendo $(\langle f, x_n\rangle)$ limitada, encontramos na equação acima

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f)| < \infty.$$

Pelo Teorema de Banach-Steinhauss, segue que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Mas, sabemos que

$$\|T_n\| = \sup_{\substack{f\in E^\star \\ \|f\|\leq 1}} |T_n(f)| = \sup_{\substack{f\in E^\star \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x_n\rangle| = \|x_n\|.$$

Portanto $(\|x_n\|)$ é uma sequência limitada. Ademais, temos

$$|\langle f, x_n\rangle| = \left|\left\langle f, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\rangle\right| \|x_n\| \leq \|f\|\|x_n\|,$$

logo

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|.$$

Portanto encontramos

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^\star \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf \|x_n\|.$$

(iv) Observe que

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\
&\leq \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\
&\leq \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle|.
\end{aligned}$$

Como $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E^\star)$, então pelo item (iii), a sequência $(\|x_n\|)$ é limitada e pelo item (i), $\|f_n - f\| \to 0$, logo

$$\|f_n - f\|\|x_n\| \to 0.$$

Pelo item (i), têm-se que

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Portanto $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

$\square$

Proposição 3.35. *Se E possui dimensão finita, a topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ e a topologia usual coincidem. Em particular, uma sequência (x_n) converge fracamente se, e somente se, converge fortemente.*

Demonstração. Seja τ a topologia proveniente da norma de E. Já sabemos que $\sigma(E, E^\star) \subset \tau$. Sendo assim, nos resta mostrar que se E tem dimensão finita então $\tau \subset \sigma(E, E^\star)$. Ou seja, dados $U \in \tau$ e $x_0 \in U$, mostraremos que existe uma vizinhança V de x_0 em $\sigma(E, E^\star)$ tal que $V \subset U$. Em outras palavras, precisamos encontrar $f_1, f_2, \ldots, f_k \in E^\star$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$V = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, k\} \subset U.$$

Fixe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset U$. Escolha uma base $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset E$ tal que $\|e_i\| = 1$, para todo $i = 1, \ldots k$. Sabemos que, para qualquer que seja $x \in E$, existem $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, tais que

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i.$$

Como $x_0 \in E$, então existem $x_{01}, \ldots, x_{0k}$ tais que

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} x_{0i} e_i.$$

Além disso, para cada $i = 1, \ldots, k$, a aplicação $f_i : E \to \mathbb{R}$, definida por $\langle f_i, x\rangle = x_i$, é um funcional linear contínuo. Observe também que

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{0i}) e_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \|(x_i - x_{0i}) e_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |x_i - x_{0i}| \|e_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |x_i - x_{0i}| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |\langle f_i, x - x_0\rangle|.
\end{aligned}$$

Mas, observe que queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \quad \forall x \in V, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Logo, queremos que

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < k\varepsilon, \quad \forall x \in V.$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{r}{k}$, temos

$$\|x - x_0\| < r, \quad \forall x \in V$$

e, portanto, encontramos $V \subset B(x_0, r) \subset U$, como queríamos. □

A partir de agora vamos denotar a bola fechada unitária no espaço X por B_X.

Observação 3.36. Conjuntos abertos (resp. fechados) na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ são *sempre* abertos (resp. fechados) na topologia forte. Em *qualquer espaço de dimensão infinita* a topologia fraca é *estritamente mais grosseira* que a topologia forte, isto é, existe um conjunto aberto (resp. fechado) na topologia forte que *não* é aberto (resp. fechado) na topologia fraca. Aqui vão dois exemplos.

Exemplo 3.37. Se E é possui dimensão infinita, então a esfera unitária $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ nunca é fechada na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$. Mais precisamente, temos

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^\star)} = B_E, \tag{3.10}$$

em que $\overline{S}^{\sigma(E,E^\star)}$ denota o fecho de S na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$. Primeiramente, vamos checar que a bola aberta $U = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ está contida em $\overline{S}^{\sigma(E,E^\star)}$. De fato, seja $x_0 \in U$ e considere V uma vizinhança de x_0 em $\sigma(E, E^\star)$. Temos que provar que $V \cap S \neq \emptyset$. Em virtude da Proposição 3.33, nós sempre podemos assumir que V é da forma

$$V = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, k\},$$

com $\varepsilon > 0$ e $f_1, \ldots, f_k \in E^\star$. Fixe $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$, tal que

$$\langle f_i, y_0\rangle = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Tal y_0 existe; caso contrário, a aplicação $\varphi : E \to \mathbb{R}^k$, definida por

$$\varphi(x) = (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_k, x\rangle),$$

seria injetiva e φ seria um isomorfismo de E em $\varphi(E)$ e então $\dim E \leq k$, o que contradiria a hipótese que E possui dimensão infinita. A função $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$ é contínua em $[0, +\infty)$, com $g(0) < 1$ e $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$. Consequentemente, pelo Teorema do Valor Intermediário na reta, existe $t_0 > 0$ tal que $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$. Segue daí que $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$

e, portanto, nós estabelecemos que

$$U \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^\star)}.$$

Além disso, sempre temos que $X \subset \overline{X}$, logo

$$S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^\star)}.$$

Com isso, concluímos que

$$B_E \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^\star)}.$$

Para completar a prova da equação (3.10) é suficiente mostrar que B_E é fechado na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$. Mas, não é difícil perceber que

$$B_E = \bigcap_{\substack{f \in E^\star \\ \|f\| \leq 1}} \{x \in E : |\langle f, x\rangle| \leq 1\},$$

que é a interseção de conjuntos fechados, portanto B_E é fechado na topologia fraca.

Exemplo 3.38. Se E possui dimensão infinita, então a bola aberta $U = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ nunca é aberta na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$. Suponha, por contradição, que U seja fracamente aberto. Então o complementar $E \backslash U = \{x \in E : \|x\| \geq 1\}$ é fracamente fechado. Daí, segue que $S = B_E \cap (E \backslash U)$ é fracamente fechado, o que contradiz o exemplo anterior.

Vimos que todo conjunto fracamente fechado é fortemente fechado, mas a recíproca é falsa em espaços de dimensão infinita. Entretanto, o resultado a seguir nos garante que em conjuntos convexos a recíproca é válida.

Teorema 3.39. *Seja C um subconjunto convexo de E. Então C é fechado na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ se, e somente se, for fechado na topologia forte.*

Demonstração. Assuma que C seja fortemente fechado e vamos mostrar que C também é fechado na topologia fraca. Para isso, vamos verificar que $E \backslash C$ é aberto na topologia fraca. De fato, seja $x_0 \in E \backslash C$. Por Hahn-Banach (2ª forma geométrica), existe um hiperplano fechado que separa estritamente $\{x_0\}$ e C, isto é, existem $f \in E^\star$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle, \quad \forall y \in C.$$

Defina $V = \{x \in E : \langle f, x\rangle < \alpha\}$. Observe que $x_0 \in V$, $V \cap C = \emptyset$ (isto é, $V \subset E \backslash C$) e V é aberto na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ (pois $V = f^{-1}((-\infty, \alpha))$, ou seja, V é fortemente aberto, logo é fracamente aberto). Com isso concluímos que $E \backslash C$ é fracamente aberto e, portanto, C é fracamente fechado. $\square$

3.3 Topologia fraca*

Até então temos duas topologias em $E^\star$, são elas:

(a) A topologia usual (topologia forte) associada à norma de $E^\star$;

(b) A topologia fraca $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$, obtida fazendo a construção anterior em $E^\star$.

Vamos agora definir uma terceira topologia em $E^\star$, chamada de *topologia fraca** e é denotada por $\sigma(E^\star, E)$ (usamos $\star$ aqui para lembrar que esta topologia é definida exclusivamente no dual topológico de E). Para cada $x \in E$, considere o funcional linear $\varphi_x : E^\star \to \mathbb{R}$, definido por

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle.$$

Como x percorre o espaço E, obtemos uma família $(\varphi_x)_{x\in E}$ de aplicações de $E^\star$ em $\mathbb{R}$.

Definição 3.40. A topologia fraca* $\sigma(E^\star, E)$ é a topologia mais grosseira em $E^\star$ que torna todas as aplicações de $(\varphi_x)_{x\in E}$ contínuas.

Observação 3.41. Vale salientar que, se quisermos construir a topologia fraca no dual topológico $E^\star$, devemos tomar, para cada $\xi \in E^{\star\star}$, a família de funcionais lineares $(\varphi_\xi)_{\xi\in E^{\star\star}}$, em que

$$\varphi_\xi(f) = \langle \xi, f\rangle, \quad \forall \xi \in E.$$

Isto é, enquanto na topologia fraca* em $E^\star$, x percorre o espaço E, na topologia fraca em $E^\star$, ξ percorre o bidual topológico $E^{\star\star}$. Com isso, como já sabemos que $E \subset E^{\star\star}$, então é claro que a topologia fraca* $\sigma(E^\star, E)$ é mais grosseira que a topologia fraca $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$, isto é, a topologia $\sigma(E^\star, E)$ tem menos conjuntos abertos (resp. conjuntos fechados) do que a topologia $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$, que por sua vez que tem menos conjuntos abertos (resp. conjuntos fechados) do que a topologia forte, oriunda da norma de $E^\star$.

Proposição 3.42. *A topologia fraca** *é de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $f, g \in E^\star$, com $f \neq g$. Segue daí que existe $x_0 \in E$ tal que $\langle f, x_0\rangle \neq \langle g, x_0\rangle$ (observe que aqui, diferentemente da demonstração de que a topologia fraca é Hausdorff, não foi necessário usar Hahn-Banach, pois isso já segue do fato que $f \neq g$). Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\langle f, x_0\rangle < \langle g, x_0\rangle$ e escolher $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle g, x_0\rangle.$$

Agora, defina

$$A = \{h \in E^\star : \langle h, x_0\rangle < \alpha\};$$
$$B = \{h \in E^\star : \langle h, x_0\rangle > \alpha\}.$$

Não é difícil perceber que $A = \varphi_{x_0}^{-1}((-\infty, \alpha))$ e $B = \varphi_{x_0}^{-1}((\alpha, +\infty))$, logo A e B são abertos em $E^\star$, de modo que $f \in A$, $g \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Proposição 3.43. *Seja $f_0 \in E^\star$. Dado um conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset E$ e $\varepsilon > 0$, considere*

$$V = V(x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \{f \in E^\star : |\langle f - f_0, x_i\rangle < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots k\}.$$

Então V é uma vizinhança de f_0 na topologia fraca* $\sigma(E^\star, E)$. Mais ainda, obtemos uma base de vizinhanças de f_0 na topologia fraca* variando ε, k e cada $x_i \in E$.

Demonstração. A demonstração é similar à da Proposição 3.33. $\square$

Se a sequência $(f_n) \subset E^\star$ converge para f na topologia fraca* escrevemos

$$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f.$$

Para não haver perigo de confusão, às vezes iremos enfatizar dizendo que $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E^\star, E)$, $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$ e $f_n \to f$ fortemente (esta última para expressar que f_n converge na topologia gerada pela norma de $E^\star$).

Proposição 3.44. *Seja (f_n) uma sequência em $E^\star$. Então*

(i) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^\star, E)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in E]$;

(ii) Se $f_n \to f$ fortemente em $E^\star$ então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$;
Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$ então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E^\star, E)$;

(iii) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E^\star, E)$ então $(\|f_n\|)$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;

(iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E^\star, E)$ e $x_n \to x$ fortemente em E então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. A demonstração dos itens (i), (iii) e (iv), assim como a primeira afirmação do item (ii), são inteiramente análogas às demonstrações dos quatro itens da Proposição 3.34. Sendo assim, vamos provar apenas que se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$ então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E^\star, E)$. De fato, se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$, então

$$\langle \xi, f_n\rangle \to \langle \xi, f\rangle, \quad \forall \xi \in E^{\star\star}.$$

Queremos mostrar que

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E.$$

Para cada $x \in E$, defina

$$\begin{aligned} \xi_x : E^\star &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \xi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Claramente ξ é linear e além disso,

$$|\xi_x(f)| = |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|\|f\|,$$

[pela desigualdade (3.1)], ou seja, $\xi \in E^{\star\star}$, assim se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$, então $\xi_x(f_n) \to \xi_x(f)$ e como $x \in E$ é qualquer, concluimos que $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$. □

Observação 3.45. Assuma que $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E^\star, E)$ (ou mesmo $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$) e $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E^\star)$. Em geral, não se pode concluir que $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Observação 3.46. Quando E é um espaço de dimensão finita, as três topologias (forte, fraca e fraca*) em $E^\star$ coincidem. De fato, a injeção canônica $J : E \to E^{\star\star}$ é sobrejetiva (desde que $\dim E = \dim E^{\star\star}$) e, portanto, $\sigma(E^\star, E) = \sigma(E^\star, E^{\star\star})$.

O Teorema a seguir é o principal resultado desse trabalho. Vimos anteriormente que a bola fechada unitária é compacta com a topologia da norma se, e somente se, o espaço possui dimensão finita. Entretanto, munindo o dual de qualquer espaço com a topologia fraca*, conseguimos concluir que a bola fechada unitária sempre é compacta.

Teorema 3.47 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *A bola fechada unitária*

$$B_{E^\star} = \{f \in E^\star : \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca* $\sigma(E^\star, E)$.

Demonstração. Para cada $x \in E$, defina $K_x = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq \|x\|\}$. Note que K_x é compacto em $\mathbb{R}$, para todo $x \in E$. Daí, defina

$$K = \prod_{x\in E} K_x.$$

Segue, pelo Teorema 1.63 (Tychonoff), que K é compacto. Considere em K a topologia mais grosseira de modo que as projeções π_x são contínuas, isto é, a topologia gerada pela família de aplicações $(\pi_x)_{x\in E}$. Além disso, cada elemento de K é uma função $f : E \to \mathbb{R}$ de modo que $|f(x)| \leq \|x\|$. Desta forma, a bola $B_{E^\star}$ é um subconjunto de K obtido pelas funções $f \in K$ que são lineares. Então, dado $f \in B_{E^\star}$, considere a família de vizinhanças básicas

$$V^\star(f, x, r) = \{h \in E^\star : |h(x) - f(x)| < r\}$$

e

$$U(f, r, x) = \{g \in K : |g(x) - f(x)| < r\},$$

obtidas variando $x \in E$ e $r > 0$. Então $V^\star(f, x, r)$ e $U(f, r, x)$ são vizinhanças básicas de

f em $B_{E^\star}$ na topologia fraca* e na topologia produto, respectivamente. Daí, note que

$$B_{E^\star} \subset K \cap E^\star \Rightarrow B_{E^\star} \cap V^\star(f, x, r) = B_{E^\star} \cap U(f, r, x),$$

isto é, em $B_{E^\star}$, as topologias fraca* e topologia produto coincidem. Logo, se $B_{E^\star}$ é fechado em K, que é compacto, concluímos que $B_{E^\star}$ é compacta em K e, como as topologias coincidem, $B_{E^\star}$ seria compacta em $E^\star$. Sendo assim, vamos mostrar que $B_{E^\star} = \overline{B_{E^\star}}$ em K. Considere $g \in \overline{B_{E^\star}}$, logo, como $g \in K$, temos

$$|g(x)| \leq \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Para que $g \in B_{E^\star}$, resta-nos mostrar que g é linear. Além disso, como $g \in \overline{B_{E^\star}}$, qualquer vizinhança U de g em K intersecta $B_{E^\star}$. Sendo assim, dados $x, y \in E$ e $\varepsilon > 0$, temos

$$A = U\left(g, x, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap U\left(g, x+y, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap U\left(g, y, \frac{\varepsilon}{3}\right) \neq \emptyset,$$

pois $g \in A$. Como A é aberto então existe $h \in B_{E^\star} \cap A$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
|g(x+y) - g(x) - g(y)| &= |g(x+y) - h(x+y) + h(x+y) - g(x) - g(y)| \\
&\leq |g(x+y) - h(x+y)| + |h(x+y) - g(x) - g(y)| \\
&= |g(x+y) - h(x+y)| + |h(x) + h(y) - g(x) - g(y)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, encontramos

$$|g(x+y) - g(x) - g(y)| = 0 \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Daí encontramos

$$g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0) \Rightarrow g(0) = 0.$$

Dados $x \in E$, $\varepsilon > 0$ e $\lambda \neq 0$, temos

$$A' = U\left(g, \lambda x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap U\left(g, x, \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right) \neq \emptyset,$$

pois $g \in A$. Como A é aberto então existe $u \in B_{E^\star} \cap A'$, logo

$$\begin{aligned}
|g(\lambda x) - \lambda g(x)| &= |g(\lambda x) - u(\lambda x) + u(\lambda x) - \lambda g(x)| \\
&\leq |g(\lambda x) - u(\lambda x)| + |u(\lambda x) - \lambda g(x)| \\
&= |g(\lambda x) - u(\lambda x)| + |\lambda u(x) - \lambda g(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, encontramos

$$|g(\lambda x) - \lambda g(x)| = 0 \Rightarrow g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Portanto g é linear, o que completa a demonstração. $\square$

O leitor provavelmente pode se perguntar o porquê é tão importante estudar as topologias fraca e fraca*. A razão é a seguinte: espera-se que uma topologia mais grosseira possua mais conjuntos compactos. Por exemplo, vimos que a bola fechada unitária $B_{E^\star} = \{f \in E^\star : \|f\| \leq 1\} \subset E^\star$ nunca é compacta com a topologia forte em espaços de dimensão infinita (vide Proposição 2.88), porém sempre é compacta na topologia fraca*.

Referências Bibliográficas

[1] Brezis, H.; **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Universitext (Berlin. Print), Springer, 2010.

[2] de Oliveira, César R.; **Introdução à Analise Funcional**, IMPA, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 2010.

[3] LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**: 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[4] G. F. Simmons, **Introduction to Topology and Modern Analysis**, Londres, McGraw-Hill.

[5] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.