UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Alessandra Arcanjo Lisboa de Oliveira

Espaços métricos: continuidade, completude e compacidade

Recife-PE
Fevereiro de 2021

Espaços métricos: continuidade, completude e compacidade

por

Alessandra Arcanjo Lisboa de Oliveira

Sob orientação de

Prof.ª Dra. Yane Lísley Ramos Araújo (orientadora)

e

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho (coorientador)

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Recife-PE
Fevereiro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A371 e de Oliveira, Alessandra Arcanjo Lisboa

Espaços métricos: : Continuidade, completude e compacidade / Alessandra Arcanjo Lisboa de Oliveira. - 2021.

64 f. : il.

Orientadora: Yane Lisley Ramos de Araujo.
Coorientador: Gilson Mamede de Carvalho.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Espaços métricos. 2. Continuidade. 3. Completude. 4. Compacidade. I. Araujo, Yane Lisley Ramos de, orient. II. Carvalho, Gilson Mamede de, coorient. III. Título

CDD 510

Alessandra Arcanjo Lisboa de Oliveira

Espaços métricos: continuidade, completude e compacidade

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 19/02/2021 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho (coorientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof.ª Dra. Pammella Queiroz de Souza
Universidade Federal de Campina Grande(UFCG)

Recife-PE
Fevereiro de 2021

"Consagre ao senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos"

BÍBLIA, Próverbios, 16,3.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, com a sua infinita misericórdia, por ter me dado graça e saúde para enfrentar todas as dificuldades. À minha família, e em especial, minha mãe, Ivone, por ser a minha força nos dias difíceis, pelo incentivo e apoio de sempre. Ao meu padrasto, Djair, que me acompanhou na trajetória acadêmica. À minhas primas, Deysiele por ter me acompanhado nas noites em claro de estudos para o mestrado e Izabelly pelo incentivo e apoio de sempre.

À minha orientadora, Prof.ª Yane Araújo, e amiga, pelo empenho e dedicação na elaboração deste trabalho, mesmo em momentos difíceis, e todo apoio profissional e emocional, principalmente, concedido ao longo de toda minha trajetória no curso.

A meu coorientador, Prof. Gilson Carvalho, pelo apoio e paciência na elaboração deste trabalho, por todos os ensinamentos matemáticos e incentivos na minha trajetória acadêmica.

A todos os professores do curso por todo apoio e ensinamentos científicos, políticos, pedagógicos e sociais, de forma especial, ao Prof. Renato Teixeira, pelos ensinamentos matemáticos e conselhos. Ao Prof. Danilo Santos, por proporcionar maravilhosas aulas, e está presente em todas as minhas apresentações acadêmicas. Ao professor Thiago Dias, por todos os ensinamentos, apoio nas seleções de Mestrado e pela oportunidade de participar do 15° PIC - OBMEP .

Aos membros da banca, professores Eudes Mendes e Pammella Queiroz, pelas formidáveis contribuições na correção deste trabalho.

Ao Prof. Reginaldo Junior pelo auxílio com o editor de LateX o qual contribuiu na formatação deste texto.

A Célio Silva, por todo apoio durante a criação deste trabalho e trajetória de vida.

A Victor Valente, por ser meu ponto de equilibrio no final de curso.

À Adrielly Calixto, por me ensinar a nunca desistir.

Por fim, aos meus amigos, os que compartilham, pelos momentos de estudo para o mestrado, de apoio emocional, principalmente a Washington Santos e Letiane Alves, por me auxiliarem na preparação da apresentação deste tabalho. Ao quinteto, pelos momentos de diversão, em especial, Léticia Rayane que esteve presente nas apresentações acadêmicas e Lyen Tower, pelo apoio emocional no último ano de graduação.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal estudar os conceitos de continuidade, completude e compacidade na teoria dos espaços métricos. Tais espaços são conjuntos não vazios nos quais a noção de distância entre seus elementos está bem definida. O presente estudo é interessante na medida em que os resultados aqui apresentados generalizam alguns resultados da teoria da continuidade e compacidade dos espaços Euclidianos, $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Além disso, tais resultados se mostram válidos em espaços mais abstratos como alguns espaços de sequências ou de funções, cuja noção de distância foge da intuição e acarreta em fatos intrigantes, como o fato de que bolas fechadas não necessariamente sejam compactas.

Palavras-Chave: Espaços métricos; Continuidade; Completude; Compacidade.

Abstract

This work has as main objective to study continuity, completeness and compactness in the theory of metric spaces. A metric space is a non-empty set in which the notion of distance between its elements is well defined. The present study is interesting because the results presented here generalize some of the results observed in the theory of continuity and compactness in Euclidean spaces, $\mathbb{R}^n$, with $n \geq 1$. Furthermore, these results are valid in more abstract spaces such as some sequence or function spaces, whose notion of distance escapes from intuition and entails intriguing facts, such as the fact that closed balls are not necessarily compact.

KeyWords: Metric spaces; Continuity; Completeness; Compactness.

Sumário

Lista de Siglas e Abreviaturas

$\inf X_n$ - Infimo de X_n;

$\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ - Conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$ limitadas;

$\mathcal{F}(X; M)$ - Conjunto de todas as funções $f : X \to M$, definidas num conjunto arbitrário X e tomando valores no espaço métrico M.

$\mathcal{L}(E, F)$ - Conjunto das aplicações lineares e contínuas de E em F;

$\overline{X}$ - Conjunto de todos os pontos aderentes de X;

∂X ou $Fr(X)$ - Conjunto de todos os pontos de fronteira de X;

diam F_n - Diâmetro de F_n;

$B(a; r)$ - Bola aberta de centro a e raio r;

$B[a; r]$ - Bola fechada de centro a e raio r;

$int(X)$ - Conjunto de todos os pontos interiores ao conjunto X;

$S(a; r)$ - Esfera de centro a e raio r;

X' - O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto X;

Lista de Figuras

Introdução

Dentre os objetos de estudo da análise matemática, estão os espaços métricos. Este conceito surgiu da necessidade de se estender o conceito de distância e continuidade a outros conjuntos além dos números reais. Mauricie Frechét (1878-1973) introduziu em sua tese de doutorado o conceito de espaços métricos e permitiu dar sentido às noções topológicas que se apresentam em muitos problemas de análise. Este trabalho dedica-se a estudar a continuidade, completude e compacidade nesses entes matemáticos.

Estruturamos o presente trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados preliminares dos espaços métricos, que auxiliarão no estudo dos capítulos subsequentes. Iniciamos com o conceito de métrica o qual trata-se de uma generalização do conceito de distância. Mais específicamente, uma métrica é uma função que associa um par ordenado de pontos de um conjunto, a um número real não negativo satisfazendo algumas condições. Ademais, definimos bolas e esferas, mostrando que, em $\mathbb{R}$, as bolas abertas são intervalos abertos, entretanto em $\mathbb{R}^2$, por exemplo, poderá ser um círculo, ou não dependendo da métrica considerada. Neste Capítulo, também introduzimos algumas noções topologicas que nos permitirão generalizar o conceito de continuidade. Além disso, a fim de abordarmos os espaços métricos completos apresentamos o conceito de sequências, em especial, as sequências de Cauchy que se destacam por possuírem características interessantes.

Posteriormente, no Capítulo 2, desenvolvemos algumas noções de convergência pontual e convergência uniforme que são muito importantes nos espaços de funções, bem como alguns exemplos interessantes de aplicações contínuas tais como homeomorfismos e aplicações Lipschitzianas. Sabe-se que conceitos topológicos estão naturalmente relacionados às ideias de continuidade e convergência, podendo ser expressos mediante limites de sequências. Neste sentido também abordamos alguns resultados que mostram essas relações. Com o intuito de generalizarmos o conceito de continuidade, finalizamos o capítulo discutindo em espaços mais gerais, a saber: os espaços topológicos, o que nos permite garantir que todo espaço métrico está munido de uma topologia. Para isso, basta apenas considerarmos os abertos do espaço métrico para compor a topologia.

Uma vez que algumas propriedades válidas na reta não valem em todos os espaços métricos, como, por exemplo, em $\mathbb{R}$ uma sequência (x_n) é convergente se, e somente, se é de Cauchy, porém isso não ocorre de maneira geral. Diante disto, no Capítulo 3 abordamos os espaços métricos completos nos quais essa propriedade é válida, atentando para dois importantes exemplos destes tipo de espaços, os espaços de Banach e os espaços de Hilbert.

O conceito de compacidade, que também foi introduzido por Fréchet, desempenha um papel importante no contexto da análise principalmente pela sua ligação com o conceito de continuidade. Em $\mathbb{R}$, por exemplo, funções contínuas com domínio compacto assumem valores de máximo e mínimo. Levando em consideração que a noção de conjuntos fechados e limitados serem compactos, não pode ser estendida para espaços mais gerais, mais um dos objetivos deste trabalho é compreender a noção de compacidade a partir de outros conceitos. Diante disto, no Capítulo 4, estudamos os espaços métricos compactos, assim como particularidades deste conceito nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$, caracterizando os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ (como os subconjuntos fechados e limitados deste espaço) através do teorema de Heine-Borel. Finalizamos o capítulo abordando a compacidade nos espaços normados, apresentando o teorema clássico de Riesz.

Desse modo, sumarizamos principais propriedades e resultados relacionados à continuidade, completude e compacidade em espaços métricos que são base para estudos que envolvem, a título de exemplo, equações diferenciais, ordinárias, parciais e funcionais que são ferramentas importantes no estudo da análise.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

O estudo de métricas deve-se principalmente à necessidade de formalizar o conceito de distância entre pontos, essa necessidade surgiu a partir da indispensabilidade de aplicar tal conceito aos mais variados conjuntos. Com isso, em meados do século XX, o matemático Mauricie Fréchet introduziu em sua tese de doutorado, as primeiras noções sobre uma nova estrutura em conjuntos, que veio a ser denominada posteriormente por *Espaços Métricos*. Esse termo introduzido por Hausdorff em 1904, associa à noção de distância entre quais dois pontos de um conjunto. Neste Capítulo, a fim de auxiliar o leito na compreensão e continuidade do trabalho, daremos algumas definições e resultados essenciais para esta teoria.

1.1 Espaços métricos

Definição 1.1. Uma métrica num conjunto M, não vazio, é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa cada par (x, y) a um número real $d(x, y)$ chamado de **distância entre os pontos** x **e** y que satisfaz as seguintes propriedades: para todo x, y e $z \in M$;

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; (Não-negativa)
2. $d(x, y) = d(y, x)$; (Simétrica)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Desigualdade triangular)

Definição 1.2. Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.

Desta forma, temos que em qualquer espaço métrico a noção de distância entre seus elementos está bem definida. De modo geral, podemos tornar qualquer conjunto M em um espaço métrico a partir da definição de métrica no mesmo, o que nos mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 1.3. **(Métrica zero-um)** Sejam M um conjunto qualquer, não vazio, e d : $M \times M$ um função definida por;

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \textbf{se } x = y \\ 1, \textbf{se } x \neq y \end{cases}$$

Observe que esta função, satisfaz as propriedades de métrica. Vejamos:

1. $d(x,y) = 0$ se $x = y$, por definição. Logo $d(x,x) = 0$.

2. $d(x,y) = 1$ para $x \neq y$, por definição. Como $1 > 0$ tem-se que $d(x,y) > 0$ se $x \neq y$.

3. Se $x \neq y$ então $d(x,y) = 1$, por definição. Ademais, $y \neq x \Rightarrow d(y,x) = 1$. Logo, $d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x, y \in M$.

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo x, y e $z \in M$. Devemos considerar os casos:

   (a) Se $x = z; d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$. Observe que, neste caso, independe o valor de y, pois 0 é menor ou igual que a soma de quaisquer dois números não negativos.

   (b) Se $x \neq z$, então temos que ou $x \neq y$ ou $z \neq y$ (pois, se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$ contrariando a hipótese). Assim, $d(x,y) + d(y,z) \geq 1 = d(x,z)$

Exemplo 1.4. **(Métrica induzida)** Se (M,d) é um espaço métrico, e seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto qualquer de M, pode-se considerar S como espaço métrico. Desde que, consideremos a restrição da função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ a $S \times S$, isto é, usando entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M. Neste caso, S chama-se subespaço de M e a métrica de S diz-se induzida pela de M.

Exemplo 1.5. Considere $(\mathbb{R}, d)$, em que $d(x,y) = |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, d)$ é espaço métrico e a métrica d é chamada métrica euclidiana. De fato, as condições (1)-(3) resultam imediatamente das propriedades do valor absoluto de números reais.

Definição 1.6. Sejam $(M_1, d_1), (M_2, d_2), (M_3, d_3), \cdots, (M_n, d_n)$, espaços métricos. O produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é o conjunto das listas $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$, onde $x_i \in M_i$, $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$. Tornamos M um espaço métrico munindo-o com qualquer uma das métricas abaixo:

Métrica Euclidiana:

$$d(x,y) = [d_1(x_1,y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n,y_n)^2]^{\frac{1}{2}};$$

Métrica da Soma:

$$d'(x,y) = d_1(x_1,y_1) + \cdots + d_n(x_n,y_n);$$

Métrica do Máximo:

$$d''(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}.$$

Exemplo 1.7. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, no qual podemos definir a distância entre quaisquer dois pontos $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ ultilizando uma das métricas: *Métrica Euclidiana*, *Métrica da Soma* ou a *Métrica do Máximo.*

Definição 1.8. Considere X um conjunto qualquer. Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada se existir $k \in \mathbb{R}$ de modo que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Representaremos como $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas.

Não é difícil ver que quaisquer operações de soma, diferença e produto de funções limitadas ainda é uma função limitada. De fato, sendo f e g limitadas, existem k_1, k_2 tais que $|f(x)| \leq k_1$ e $|g(x)| \leq k_2$. Como

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_1 + k_2.$$

Segue que a soma de funções limitadas ainda é uma função limitada. Analogamente, é possível mostrar a diferença. No caso do produto, basta notar que

$$|fg(x)| = |f(x).g(x)| = |f(x)|.|g(x).|$$

E o resultado segue.

Definiremos agora uma métrica em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, da seguinte forma: Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ funções arbitrárias. Definimos,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

onde $d(f, g)$ é denominada métrica da convergência uniforme em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

Verifiquemos que d satisfaz as condições de métrica.

1. Se $d(f, g) = 0$, isto é, $\sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0$, implica que $|f(x) - g(x)| = 0$, mas isto só ocorre quando $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

2. Se $f \neq g$, para todo $x \in X$, então $f(x) \neq g(x)$ implica que $f(x) - g(x) \neq 0$, então $|f(x) - g(x)| > 0$.

3. Note que d é simétrica pois,

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |-1||g(x)-f(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |g(x)-f(x)| \\ &= d(g,f). \end{aligned}$$

4. Para verificarmos a desigualdade triangular basta notarmos que dados f, g e $h \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup_{x\in X} |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} (|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|) \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x)-h(x)| + \sup_{x\in X} |h(x)-g(x)| = d(f,h)+d(h,g). \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação é uma métrica em $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Assim, $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d)$ é um espaço métrico.

De maneira geral, podemos definir a métrica da convergência uniforme no seguinte conjunto:

Definição 1.9. Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \to M$ uma aplicação. A notação $B_\alpha(X,M)$ representa o conjuntos das aplicações $f : X \to M$ tais que:

$$d(f,\alpha) = \sup_{x\in X} d(f(x),\alpha(x)) < \infty,$$

onde $d(f,\alpha)$ é chamada de métrica da convergência uniforme em $B_\alpha(X,M)$.

1.1.1 Espaço vetorial normado

Definição 1.10. Uma norma sobre o espaço vetorial real E é uma função que associa a cada vetor $x \in E$ um número real chamado *norma do vetor* x, denotada por $\|x\|$ que satisfaz as seguintes condições; para todo $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Se $x \neq 0$, então $\|x\| \neq 0$;
2. $\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$;
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

É possível observar que para todo $x \in E$ decorre que $||x|| > 0$ se, somente se, $x \neq 0$. De fato, note que quando tomamos $\lambda = 0$ e $x = 0$ no item 2, temos $||0|| = 0$

e Considerando $\lambda = -1$ obtemos $||-x|| = ||x||$ para todo $x \in E$. Ademais, tomando $y = -x$ no item 3 tem-se que

$$0 = ||0|| = ||x + (-x)|| \leq ||x|| + ||-x|| = ||x|| + |-1.||x|| = 2||x||,$$

ou seja, $||x|| \geq 0$ para todo $x \in E$.

Definição 1.11. Um espaço vetorial real E munido com uma norma é chamado espaço vetorial normado, denotado por $(E, ||\cdot||)$.

É importante ressaltar que toda norma pode induzir uma métrica, se consideramos $\|x - y\| = d(x, y)$. Daí todo espaço vetorial normado pode-se tornar um espaço métrico.

No exemplo a seguir, iremos considerar as normas a partir das métricas dadas na definição 1.6.

Exemplo 1.12. $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$; $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||')$; $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||'')$, onde para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos respectivamente:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}; \qquad ||x||' = \sum_{i=1}^{n}|x_i|; \qquad ||x||'' = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|.$$

Exemplo 1.13. O espaço $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ das funções limitadas é um espaço vetorial normado, onde consideramos $||f|| = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

1.1.2 Espaço vetorial com o produto interno

Definição 1.14. Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função $\langle\ ,\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores (x, y) ao número real $\langle x, y\rangle$ satisfazendo as seguintes condições; para $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

1. $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$;

2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda.\langle x, y\rangle$;

3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Definição 1.15. Um espaço vetorial com o produto interno é um par $(E, \langle\ ,\rangle)$, onde E é um espaço vetorial real e $\langle\ ,\rangle$, produto interno em E.

É possível definir uma norma por meio de um produto interno considerando

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, a partir do produto interno $\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n$, temos que $\|x\| = \sqrt{\sum (x_i)^2}$, e neste caso dizemos que a norma *provém de um produto interno*, quando isto ocorre, vale a *lei do paralelogramo*:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

No entanto, nem toda norma num espaço vetorial E provém de um produto interno. Como por exemplo a norma

$$||x||' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

não próvem do produto interno, pois não cumpre a lei do paralelogramo. (Basta considerar $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$).

Teorema 1.16. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Para quaisquer dois vetores u e v de um espaço vetorial com produto interno, se tem $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle . \langle v, v\rangle$.*

Demonstração: Ver Lima [2]. ■

Exemplo 1.17. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o produto interno canônico é dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

Similarmente, no espaço l^2 ou espaço das sequências de quadrados somáveis temos o produto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i . y_i. \tag{1.1}$$

Constituído por todas as sequências $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ de números reais tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty.$$

Com a seguinte norma:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}.$$

A fim de mostrarmos que l^2 é um espaço vetorial relativamente às operações $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots)$ e $\lambda . x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots)$ observa-se primeiro que caso $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ pertencem a l^2 então a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

é convergente. De fato, lembremos que a convergência de uma série é simplesmente a convergência de uma sequência de somas parciais. Assim, considerando a Desigualdade de Cauchy-Schartz e considerando para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \ y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}.$$

Além disso, pela definição dada em (1.1), podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \ y_i \leq ||x|| \ ||y||.$$

Portanto, a série é convergente.

Vejamos agora que l^2 é um espaço vetorial.

De fato, considerando $x, y \in l^2$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i.$$

Fazendo $n \to \infty$, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i.y_i.$$

Assim, como

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq ||x|| \ ||y||$$

obtemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \ ||y||$$

Como $||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \ ||y||$ é um número real, logo

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 < \infty.$$

Portanto, $x + y \in l^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, segue que $\lambda x \in l^2$. Consequentemente, l^2 é um espaço vetorial. Por (1.1),

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.y_i$$

cuja norma subjacente é,

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}.$$

1.2 Bolas e esferas

Para trazermos uma discussão sobre a topologia nos espaços métricos, nessa seção introduzimos a noção de bolas que é fundamental no estudo desses espaços.

Definição 1.18. Sejam M um espaço métrico e $a \in M$. A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $B(a; r)$, dos pontos de M cuja distância ao centro é menor do que o raio, isto é,

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

Definição 1.19. Uma bola fechada de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $B[a, r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a, ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 1.20. A esfera de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $S(a; r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x, a)$ é exatamente igual a r. Ou seja,

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

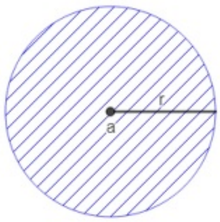
Exemplo 1.21. Note que se o espaço métrico em questão é a reta com a métrica usual, temos:

- $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)$
- $B[a; r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r \leq x \leq a + r\} = [a - r, a + r]$
- $S[a; r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| = r\} = \{x \in \mathbb{R} : x = a - r \text{ ou } x = a + r\} = \{a - r, a + r\}$

Exemplo 1.22. Um fato interessante é que a depender da métrica considerada, as bolas assumem características geométricas distintas. Vejamos os exemplos abaixo.

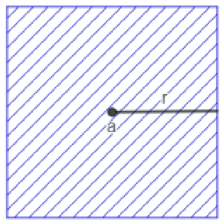
No espaço $\mathbb{R}^2$, se consideramos a métrica euclidiana, a bola aberta $B(a; r)$ é o interior de círculo de centro a e raio r, se a métrica considerada for a do máximo, teremos o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$ paralelo aos eixos, e ainda se a métrica for a da soma obtemos o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, com comprimento $2r$.

Figura 1.1: Bola (euclidiana).



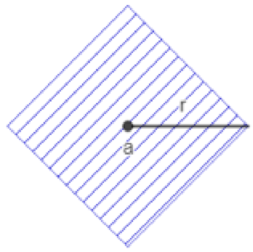
Fonte: Autoria própria

Figura 1.2: Bola (máximo).



Fonte: Autoria própria

Figura 1.3: Bola (soma).



Fonte: Autoria própria

Alguns espaços métricos possuem características interessantes como, por exemplo, os espaços métricos discretos.

Definição 1.23. Um espaço M é chamado discreto quando todo ponto em M é ponto isolado, isto é, quando existe um $r > 0$ tal que $B(a; r) = \{a\}$. Isto significa que, além do ponto a, não existe nenhum ponto em M que está a uma distância de a inferior a r.

Exemplo 1.24. O conjunto $\mathbb{Z}$, com a métrica induzida pela métrica usual da reta. Observe que todo ponto $n \in \mathbb{Z}$ é isolado, pois existe $r = 1$, tal que

$$B(n; 1) = \{m \in \mathbb{Z}; d(m, n) < 1\} = \{m \in \mathbb{Z} : |m - n| < 1\} = \{n\}$$

Exemplo 1.25. O conjunto $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ não é discreto, pois 0 não é um ponto isolado. Mas, $X' = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ e $\{0\}$ são conjuntos discretos. Isto ilustra o fato de que nem sempre a reunião de conjuntos discretos é um conjunto discreto.

Exemplo 1.26. Qualquer espaço com a métrica zero-um é discreto (ver Exemplo 1.3, pois todos os pontos são isolados. Basta considerar $r = \frac{1}{2} > 0$, e teremos que $B(a; \frac{1}{2}) = \{a\}$.

1.3 Noções de topologia

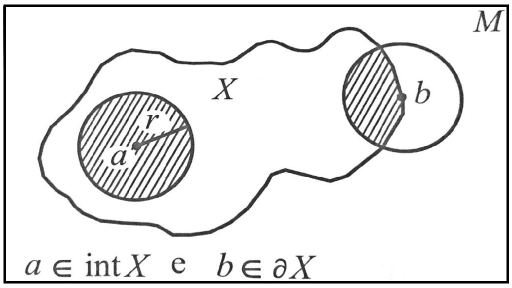
A fim de generalizarmos o conceito de limite e continuidade, introduziremos nesta seção algumas noções de topologia.

Definição 1.27. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Dizemos que um ponto $a \in X$ é um *ponto interior* de X quando existe $r > 0$ tal que a bola aberta $B(a; r) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado o interior de X e denotado por $int(X)$.

Negar o fato de b ser um ponto interior, nos sugere a seguinte definição:

Definição 1.28. Seja M um espaço métrico, $X \subset M$ e $b \in M$. Diremos que b é um *ponto de fronteira* do conjunto X se para todo $r > 0$ a bola $B(b,r)$ contém pelo menos um ponto de X e um ponto do seu complementar. O conjunto de todos os pontos de fronteira de um conjunto é denotado por ∂X ou $Fr(X)$.

Figura 1.4: Ponto interior e de fronteira.



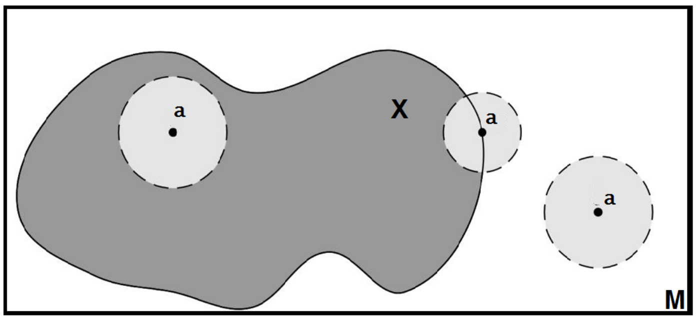
Fonte: LIMA,2017,p.69

Exemplo 1.29. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos números racionais. Note que $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$ pois dado qualquer intervalo aberto, vão existir pontos que não são racionais. Por outro lado, $\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$, já que qualquer intervalo aberto contém números irracionais e racionais.

A partir da definição de ponto interior e ponto de fronteira temos que dado um ponto $a \in M$, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou existe uma bola aberta de centro a contida em X, ou existe uma bola de centro a contida no complementar de X ou toda bola de centro a contém pontos de X e do seu complementar, segue daí que todo espaço métrico pode ser escrito como reunião:

$$M = int(X) \cup \partial X \cup int(M - X).$$

Figura 1.5: Espaço métrico como reunião.



Fonte: Autoria própria

Exemplo 1.30. Considerando $M = \mathbb{R}$ e $X = [0,1)$ temos que $\mathbb{R} = (0,1) \cup \{0,1\} \cup Y$ sendo $Y = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

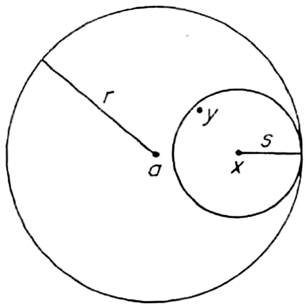
1.3.1 Conjuntos Abertos

Definição 1.31. Um conjunto $A \subset M$ é dito aberto quando $int(A) = A$, ou seja, quando todos os seus pontos são interiores.

Note que essa definição nos diz que para cada $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in M$ e $d(x, a) < \varepsilon$ então $x \in A$, isto é, se A contém o ponto a então A também contém todos os pontos suficientemente próximos do ponto a. Vale resaltar que da definição de conjunto interior, a inclusão $int(X) \subset X$ é sempre verdadeira, assim para que um conjunto seja aberto basta que $X \subset int(X)$. Um dos exemplos mais simples de conjunto aberto, a bola aberta, como veremos a seguir:

Proposição 1.32. *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto.*

Figura 1.6: Toda bola aberta é um conjunto aberto.



Fonte: LIMA,2017,p.71

Demonstração:

Para garantirmos esse resultado vamos considerar um ponto $x \in B(a; r)$ fixo porém arbitrário, $s = r - d(x, a) > 0$ e a bola aberta $B(x; s)$, a fim de mostrar que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Seja $y \in B(x; s)$ então

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \leq s + d(x, a).$$

Assim, $y \in B(a, r)$ e, consequentemente, $B(x; s) \subset B(x, r)$ como queremos demonstrar. ■

Deste resultado segue um exemplo bastante simples de conjunto aberto que é o fato de que todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$. Em contrapartida, ao considerarmos uma bola fechada, esta pode ou não ser um conjunto aberto, a depender do espaço que estamos trabalhando. Por exemplo, se estivermos considerando os espaços vetoriais normados diferente de $\{0\}$, a bola fechada nunca será um conjunto aberto. Já no intervalo $[0, 1]$, com a métrica induzida de $\mathbb{R}$, o intervalo $[0, 1]$ é aberto. Isto é justificável pelo item 1 da Proposição 1.33.

Dentre alguns resultados acerca dos conjuntos abertos, destacamos a seguinte proposição:

Proposição 1.33. *Os subconjuntos abertos de um espaço métrico M satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *M e $\varnothing$ são subconjuntos abertos de M;*

2. *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de M então $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um subconjunto aberto de M;*

3. *Se $A_1, \cdots, A_n \subset M$ são abertos então $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração:

1. M é aberto pois toda bola centrada em um ponto de M está contida em M. O conjunto $\varnothing$ é aberto, pois um subconjunto $X \subset M$ deixa de ser aberto se existir um ponto $x \in X$ tal que nenhuma bola de centro x está contida em X. Como não existe $x \in \varnothing$, o conjunto vazio não viola a condição que define os abertos.

2. Dado $x \in A$, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe uma bola aberta $B(x;\varepsilon)$ contida em A_{λ_0}. Logo $B(x;\varepsilon) \subset A$, pois $A_{\lambda_0} \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda = A$.

3. Seja $x \in \cap A_i$, com $i = 1, \cdots, n$. Como esses conjuntos são abertos para cada i, existe uma bola aberta $B(x;\varepsilon_i)$ contida em A_i. Tomando $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{\varepsilon_i\}$, temos que $\varepsilon > 0$ e $B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_i) \subset A_i$. Logo $B(x;\varepsilon) \subset \cap A_i$.

■

1.3.2 Conjuntos Fechados

Definição 1.34. Um ponto a diz-se aderente a um subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = inf\,\{x \in X \mid d(a, x)\} = 0$.

Isto quer dizer que existem pontos do conjunto X suficientemente próximos de a, ou ainda, dado $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.

Definição 1.35. O conjunto de todos os pontos aderentes de X é chamado de fecho de X e denotado por $\overline{X}$.

Definição 1.36. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\overline{X} = M$.

Podemos definir fechados a partir da noção de abertos.

Definição 1.37. Um conjunto é fechado quando seu complementar é aberto.

O próximo resultado nos dará uma caractericterização para os conjuntos fechados.

Proposição 1.38. *Um conjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes, isto é, $F = \overline{F}$.*

Demonstração: As seguintes afirmações são equivalentes: $F = \overline{F}$ então os pontos que não pertencem a F, não são aderentes a F. Assim, para todo $a \in M - F$, existe uma bola $B(a; r)$ que não contém pontos de F. Isto é equivalente a dizer que: para todo $a \in M - F$, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset M - F$, isto é, todo ponto $a \in M - F$ é ponto interior. Daí, $M - F$ é aberto. Portanto, F é fechado.

■

Vale salientar que ser fechado não é o contrário de ser aberto, pois existem conjuntos que não são nem fechados nem abertos como é o caso de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ou que são fechados e abertos ao mesmo tempo, como é o caso do conjunto vazio. Além disso, algumas propriedades de conjuntos fechados seguem análogas as dos conjuntos abertos, basta observar que se F é fechado então $M - F$ é aberto, diferenciando apenas pelo fato de que a interseção infinita de conjuntos fechados é fechados e a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado, o que já era de se esperar pela Proposição 1.33, itens 2. e 3.

Observamos que a interseção infinita de abertos nem sempre é um conjunto aberto.

Exemplo 1.39. O conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) = \{a\}$, não é aberto em $\mathbb{R}$.

Assim como a união infinita de fechados nem sempre é um conjunto fechado.

Exemplo 1.40. Temos que $\displaystyle\bigcup_{p\in(0,1)} \{p\} = (0, 1)$, que não é fechado em $\mathbb{R}$.

Um conceito importante, principalmente na definição de limites, são os pontos de acumulação.

Definição 1.41. Os pontos de acumulação de um conjunto $X \subset M$ são os pontos $a \in M$ tais que toda bola aberta centrada em a contém pontos do conjunto X diferente do ponto a.

Isto nos diz que um ponto de um conjunto pode ser aproximado tanto quanto se queira por infinitos outros pontos do conjunto. O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto X é denotado por X' e chamado de derivado do conjunto X. Podemos relacionar esta definição com a definição de ponto aderente da seguinte forma: para todo $X \subset M$, têm-se $\overline{X} = X \cup X'$ (reunião não necessariamente disjunta).

1.4 Sequências em espaços métricos

Definição 1.42. Uma sequência num espaço métrico M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um elemento de M que chamamos n-ésimo termo da sequência e denotamos por x_n.

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{N} & \rightarrow & M \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$

O conjunto dos termos da sequência será indicado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e a sequência, por (x_n).

Exemplo 1.43. Se definirmos $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $(x_n) = (-1)^n$ obtemos a sequência $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

Definição 1.44. Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$.

Notação: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$

Exemplo 1.45. A sequência $(4, 16, \dots, 4^k, \dots)$ é uma subsequência de $(2, 4, \dots, 2^n, \dots)$, na qual $\mathbb{N}'$ é o conjunto dos números pares.

Definição 1.46. Uma sequência é dita limitada em um espaço métrico M quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.47. Toda subsequência de uma sequência limitada é também limitada.

Um dos conceitos centrais da teoria de sequências é o conceito de convergência:

Definição 1.48. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M. Dizemos que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ temos que $d(x_n, a) < \epsilon$, e escrevemos $\lim x_n = a$. Quando existe $\lim x_n = a \in M$, diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente e converge para a.

Assim, dizer que $a \in M$ é limite da sequência (x_n) é equivalente a dizer que toda bola $B(a, \epsilon)$ contém termos x_n com índices n suficientemente grande.

Proposição 1.49. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Consideremos (x_n) uma sequência convergente. Então, seja $\lim x_n = a$ em um espaço métrico M. Em particular, tome $\varepsilon = 1$, assim obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, implica $x_n \in B(a, 1)$. Portanto, o conjunto dos valores da sequência estão contidos na reuinão $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$, isto significa que $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$ de dois conjuntos limitados. Portanto, é limitado. ■

Proposição 1.50. *(Unicidade do Limite) O limite de uma sequência convergente é único.*

Demonstração: Considere (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Suponhamos que existem $a, b \in M$ distintos tais que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \varepsilon$. Do mesmo modo, existe também $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1$ implica $d(x_n, b) < \varepsilon$. Tomemos agora $n = \max\{n_0, n_1\}$ e $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{4}$. Então,

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon = \frac{d(a, b)}{2}.$$

Absurdo! Logo, $d(a, b) = 0$, portanto $a = b$. Então, uma sequência não pode convergir para dois valores distintos. ■

Exemplo 1.51. Toda sequência constante é convergente. Consideremos $x_n = a$ uma sequência constante, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$. Portanto, é convergente e $\lim x_n = a$.

Proposição 1.52. *Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração: Considere $N' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como a sequência x_n tende para a, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ de modo que $d(x_n, a) < \varepsilon$. Tomemos k_0 tal que $n_{k_0} > n_0$, para todo $k > k_0$ tem-se que

$$n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$$

Portanto, toda subsequência de (x_n) também converga para a.

■

Diante dos resultados já vistos e a fim de compreendermos a completude dos espaços métricos que será apresentada posteriormente, no Capítulo 3, se faz necessário destacarmos conceito de sequência de Cauchy:

Definição 1.53. Uma sequência é dita de Cauchy em M quando a partir de um número natural, $n_0 \in \mathbb{N}$, os termos dessa sequência se tornam suficientemente próximos uns dos outros, ou seja, quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para todo $m, n \geq n_0$.

Desta forma, estas sequências possuem a característica interessante de que seus termos vão se aproximando uns dos outros tanto quanto se queira à medida que cresce o indice n. A propriedade de ser de Cauchy depende apenas dos seus termos e não da existência de outro ponto como o conceito de convergência, mas se os termos de uma sequência se aproximam de um ponto, então os seus termos se aproximam entre si e portanto toda sequência convergente é de Cauchy. Porém, nem sempre a volta é válida, como podemos citar a sequência definida por $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$, $x_4 = 1,414$ $, \cdots ,$ com

$\lim x_n = \sqrt{2}$ a qual é convergente em $\mathbb{R}$ mas não é convergente em $\mathbb{Q}$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, embora seja um sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

1.4.1 Sequências de funções

Diferentemente das sequências numéricas onde cada termo é um número real, no caso em que o espaço métrico é a reta, por exemplo as sequências de funções os termos são dados por funções que possuem o mesmo domínio, mais precisamente:

Definição 1.54. Uma sequência de funções, denotada por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(X; M)$, onde $\mathcal{F}(X; M)$ é o conjunto de todas as funções $f : X \to M$, definidas num conjunto arbitrário X e tomando valores no espaço métrico M.

Definição 1.55. Dizemos que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge pontualmente em X para aplicação $f : X \to M$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ tem limite $f(x)$ em M. Isto é, para cada $x \in X$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Exemplo 1.56. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n = \frac{x}{n} = 0$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função identicamente nula. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$. Então, para $n > n_0$ tem-se que $\frac{|x|}{n} < \varepsilon$.

Definição 1.57. Dizemos que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge uniformemente em X para aplicação $f : X \to M$ quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Vale ressaltar que se f_n converge uniformemente para f em X então f_n converge pontualmente para f em X. Mas por outro lado, se f_n converge pontualmente para f em X, então (f_n) pode não convergir uniformemente em X para outra aplicação que não seja f.

Exemplo 1.58. A sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge uniformemente para a função nula em qualquer subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$. De fato, se $|x| \leq c$ para todo $x \in X$, então dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > \frac{c}{\varepsilon}$. Assim, $n > n_0$ implica $|\frac{x}{n}| \leq \frac{c}{n} < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Por outro lado, esta sequência não converge uniformemente em $\mathbb{R}$, pois se tomarmos $\varepsilon = 1$, por exemplo, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$ escolhido, pode-se obter $n > n_0$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $|\frac{x}{n}| > 1$. Basta tomar primeiro $n > n_0$ e depois $x > n$. Portanto, $f_n = \frac{x}{n}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para nenhuma função.

Capítulo 2

Continuidade em espaços métricos

O conceito de continuidade é um dos pontos centrais no estudo de análise. Diante disto, neste capítulo apresentaremos tal conceito e verificaremos que a noção de continuidade pode ser generalizada para espaços nos quais não se necessita de uma distância definida. Para isto, faz-se necessário apresentarmos algumas definições preliminares que darão embasamento para o desenvolvimento do Capítulo. Ademais, abordaremos caracterizações e aplicações interessantes para uma melhor fixação das ideias, como funções Lipschitizianas e homeomorfismos, visando aprimorar a compreensão e interpretação da noção de continuidade nos espaços métricos.

2.1 Definição

Inicialmente abordaremos o conceito de continuidade para funções reais de uma variável real.

Definição 2.1. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$. Dizemos que f é contínua em a quando dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existir $\delta > 0$ tal que:

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

Mais precisamente,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Proposição 2.2. *Sejam $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são contínuas então $h = g \circ f : A \to C$ é contínua.*

Demonstração: Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tais que f é contínua em $a \in A$ e g é contínua em $b = f(a) \in B$. Pela continuidade de g em b, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $|y - b| < \lambda \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Pela continuidade de f em a, a partir do λ que foi dado, existirá $\delta > 0$ tal que $|x - a| \Rightarrow |f(x) - b| < \lambda$. Então, dado $\varepsilon > 0$ inicialmente, fomos capazes de achar $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em a.

■

Proposição 2.3. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que ambas são contínuas em $a \in X$. Então:*

1. *$f + g$ é contínua em a;*
2. *$f \cdot g$ é contínua em a;*
3. *$f - g$ é contínua em a;*
4. *$\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.*

Demonstração: Segue imediatamente das propriedades de limite. Ver Lima [4].

■

Podemos estender o conceito de continuidade para espaços métricos quaisquer.

Definição 2.4. Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica que $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$.

A função $f : M \to N$ é contínua quando for contínua em todos os pontos $a \in M$. Ao negarmos essa definição, temos que f é descontínua em $a \in M$, quando existe $\epsilon > 0$, para todo $\delta > 0$, de forma que podemos obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$. Equivalentemente, podemos definir o conceito de continuidade usando bolas:

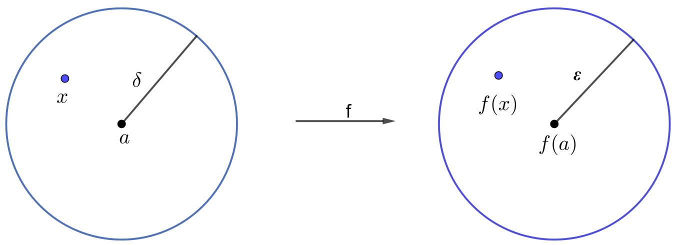
Definição 2.5. $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola em N de centro $f(a)$, $B' = B(f(a); \epsilon)$, é possível encontrar uma bola em M de centro a, $B = B(a; \delta)$, tal que $f(B) \subset B'$.

Proposição 2.6. *Sejam $M, N,$ e P espaços métricos. Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são contínuas então $g \circ f : M \to P$ é contínua.*

Demonstração: Sejam f, g tais que f é contínua em $a \in M$ e g contínua em $f(a) \in N$. Pela continuidade de g em $f(a)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$d_N(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d_P(g(y), g(f(a)) < \varepsilon$$

Figura 2.1: Continuidade usando bolas.



Fonte: Autoria própria

Pela continuidade de f em a, dado tal $\lambda > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \lambda$$

Assim, dado inicialmente $\varepsilon > 0$, fomos capazes de encontrar $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d_P(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$. Portanto $g \circ f$ é contínua em $a \in M$.

■

Proposição 2.7. *Uma aplicação $f : M \to N_1 \times N_2$ é contínua se, e somente se, cada aplicação coordenada $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ é contínua.*

Demonstração: Suponha $f : M \to N_1 \times N_2$ contínua. Considere as projeções $p_1 : N_1 \times N_2 \to N_1$ e $p_2 : N_1 \times N_2 \to N_2$. Considerando as aplicações coordenadas f_1 e f_2, note que $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 : p_2 \circ f$. Como as projeções são contínuas, pela Proposição 2.6, temos que $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ são contínuas. Para provar a recíproca, vamos considerar em $N_1 \times N_2$ a métrica $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. Como, por hipótese, f_1 e f_2 são contínuas para todo $a \in M$, então dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que a $d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \epsilon$ e $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \epsilon$. Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, a $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \epsilon$. Portanto, f é contínua no ponto a. Além disso, como consideramos a arbitrário em M, podemos concluir que f é contínua.

■

Proposição 2.8. *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial real normado, $f, g : M \to E$ α e $\beta : M \to \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$, para todo $x \in M$. Então, as aplicações*

1. *$f + g : M \to E$ definida como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*

2. *$\alpha.f : M \to E$ definida como $(\alpha.f)(x) = \alpha(x).f(x)$;*

3. *$\dfrac{\alpha}{\beta} : M \to \mathbb{R}$ definida como $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.*

também são contínuas.

Demonstração: Consideremos as seguintes funções contínuas auxiliares: $r : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $s : E \times E \to E$ e $m : \mathbb{R} \times E \to E$, dadas por : $r(x) = \dfrac{1}{x}$, $s(x, y) = x + y$ e $m(\lambda, x) = \lambda.x$. Notemos que podemos considerar as seguintes composições:

$$\begin{array}{rccccc} f + g := s \circ (f, g) : & M & \overset{(f,g)}{\longrightarrow} & E \times E & \overset{s}{\longrightarrow} & E \\ & x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & \longmapsto & f(x) + g(x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} \alpha \cdot f := m \circ (\alpha, f) : & M & \overset{(\alpha,f)}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \times E & \overset{m}{\longrightarrow} & E \\ & x & \longmapsto & (\alpha(x), f(x)) & \longmapsto & \alpha(x) \cdot f(x). \end{array}$$

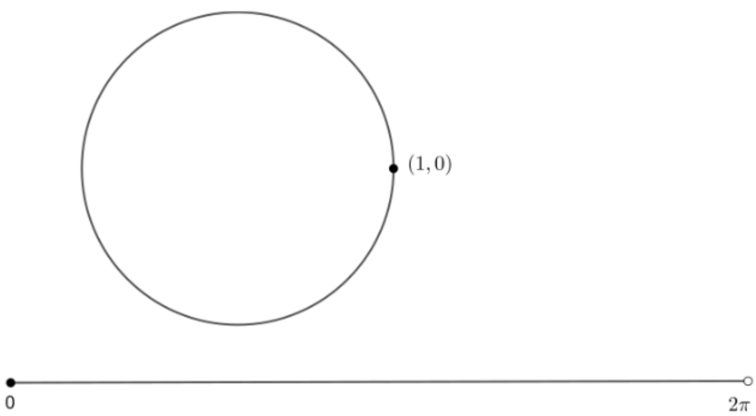
$$\begin{array}{rccccccc} \frac{\alpha}{\beta} := m \circ (id \times r) \circ (\alpha, \beta) : & M & \overset{(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) & \overset{(id \times r)}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \overset{m}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\alpha(x), \beta(x)) & \longmapsto & \left(\alpha(x), \frac{1}{\beta(x)}\right) & \longmapsto & \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \end{array}$$

Sabendo que $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação identidade, concluímos que $f + g$, $\alpha.f$ e $\frac{\alpha}{\beta}$ são contínuas, pelas Proposições 2.6 e 2.7. ■

Sabe-se que, na Álgebra linear uma transformação bijetiva contínua tem inversa contínua. Na teoria dos grupos e anéis, um homomorfismo bijetivo contínuo tem inverso contínuo. No entanto, isso nem sempre ocorre quando nos referimos à teoria dos espaços métricos. Vejamos:

Exemplo 2.9. Considere $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ a esfera unitária no plano euclidiano. A função $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é bijetiva e contínua, porém sua inversa $g = f^{-1}$ não é contínua. Intuitivamente, f consiste em enrolar o segmento semi-aberto $[0, 2\pi)$ sobre o círculo S^1 sem dobrar, de modo que o ponto $t = 0$ caia sobre o ponto $p = (1, 0) \in S^1$.

Figura 2.2: Descontinuidade da função inversa.



Fonte: LIMA,2009,p.44

Nos casos em que a continuidade da inversa é preservada, definimos os homeomorfismos, que serão trabalhados na Seção 2.3.

2.2 Funções Lipschitzianas

Definição 2.10. Seja $f : M \to N$ uma aplicação. Se existe $k > 0$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$$

para todos $x, y \in M$, diremos que f é uma *aplicação lipschitziana*, onde $k > 0$ é chamada de *constante de Lipschitz.*

Proposição 2.11. *Toda aplicação lipschitziana é contínua.*

Demonstração: Seja $f : M \to N$ uma aplicação Lipschitziana e $a \in M$. Dado ε, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ que teremos:

$$d(f(x), f(a)) \leq k \cdot d(x, a) < k \cdot \delta = k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Portanto f é contínua.

■

Definição 2.12. Seja $f : M \to N$ uma aplicação. Diremos que f é uma *contração fraca* se $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, para todos $x, y \in M$.

Observação 2.13. Note que uma contração fraca é uma aplicação Lipschitziana cuja constante é igual a 1.

Exemplo 2.14. Sejam M e N espaços métricos. As funções constantes $f : M \to N$, definida por $f(x) = c \in N$ são lipschitzianas.

Exemplo 2.15. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, a aplicação projeção $p_i : M_1 \times \cdots \times M_i \times \cdots \times M_n \to M_i$ definida por $p_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ é uma contração fraca, se tomarmos no produto cartesiano com a métrica do máximo.

Definição 2.16. Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. Diremos que f é uma *i*sometria se f é uma aplicação bijetiva que preserva a distância. Isto é, para todos $x, y \in M$:

$$d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y))$$

Proposição 2.17. *A composição de isometrias ainda é uma isometria.*

Demonstração: Sejam $f : M \to N$, $g : N \to P$ isometrias. Observe que, $d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y))$, para todos $x, y \in M$. Além disso, g também é isometria, logo $d_N(f(x), f(y)) = d_P(g(f(x)), g(f(y)))$. Daí, $d_M(x, y) = d_P(g(f(x)), g(f(y)))$, para todos $x, y \in M$. Portanto, $g \circ f$ é isometria. ■

Proposição 2.18. *A inversa de isometrias ainda é uma isometria.*

Demonstração: Sejam $f : M \to N$, isometria. Note que $d_M(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y)) = d_M(x, y)$. Como f é isometria, então

$$d_M(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y)) = d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y))$$

■

2.3 Homeomorfismos

Definição 2.19. Sejam M e N espaços métricos. Um *homeomorfismo* de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja a inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. Nesse caso, dizemos que M e N são *homeomorfos*.

Uma observação natural é que a inversa e uma composta de homeomorfismos ainda são homeomorfismos.
Um exemplo bastante instrutivo, é o da função $\tilde{f} : M \to G(f)$, onde $G(f)$ denota o conjunto gráfico da função f, cuja função $f : M \to N$ é contínua. O fato de $\tilde{f}$ ser um homeomorfismo, nos permite concluir que o gráfico de uma função contínua é homeomorfo ao domínio dessa função f. Para vermos isso, consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & M & \to & G(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)). \end{array}$$

Note que $\tilde{f}$ é contínua pois suas coordenadas são contínuas e bijetiva. Além disso, sua inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} g: & G(f) & \to & M \\ & (x, f(x)) & \mapsto & x, \end{array}$$

é contínua, pois considerando a projeção $p_1 : M \times N \to M$ temos que $g \equiv p_1|_{G(f)}$.
Assim, $\tilde{f} : M \to G(f)$ é um homeomorfismo. Este fato é interresante, uma vez que ele permite mostrar que dois conjuntos são homeomorfos mostrando apenas que um determinado conjunto é o gráfico de uma função contínua cujo domínio é um outro conjunto.

Exemplo 2.20. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é homeomorfo à hiperbóle $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$.

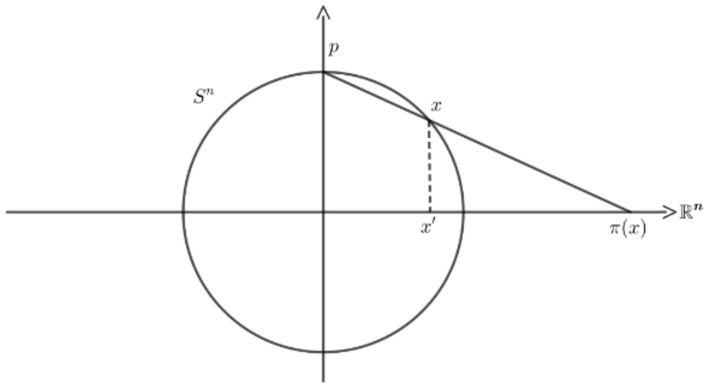
Note que H é o gráfico da função contínua $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemplo 2.21. O hemisfério norte $S^n_+ = \{y \in S^n; y_{n+1} > 0\}$ é homeomorfo à bola aberta unitária $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$.

Note que S^n_+ é o gráfico de $g : B \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$, contínua. Dentre os exemplos destacamos **a projeção estereográfica**, que projeta uma esfera unitária n-dimensional em um hiperplano de dimensão $n - 1$.

Exemplo 2.22. Considere $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ a esfera unitária n-dimensinonal e $p = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$, o seu polo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$, é definida da seguinte forma: dado um ponto $x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{p\}$, $\pi(x)$ é o ponto em que a semirreta $\overrightarrow{px}$ intercepta o hiperplano $x_{n+1} = 0$.

Figura 2.3: Projeção Estereográfica.



Fonte: LIMA,2009,p.46

Note que os pontos da semirreta $\overrightarrow{px}$ são da forma $p + t(x - p)$. Logo um ponto da semirreta está no hiperplano $x_{n+1} = 0$ se, e somente se, $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$, ou seja, quando $t = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}}$. Convencionamos por $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quando $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Daí, definimos

$$\pi(x) = \frac{x'}{1 - x_{n+1}}.$$

Da expressão acima temos que π é contínua e bijetiva. Além disso, considerando a aplicação contínua $\phi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{p\}$, definida por

$$\phi(y) = \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \cdots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

Segue que $\phi \circ \pi = id_{S^n \setminus \{p\}}$ e $\pi \circ \phi = id_{\mathbb{R}^n}$. Portanto π é um homeomorfismo.

2.4 Convergência e topologia

Proposição 2.23. *Sejam M e N espaços métricos. A aplicação $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, para todo subconjunto aberto $B \subset N$, a imagem inversa $f^{-1}(B)$ é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Seja f contínua e $B \subset N$ aberto. Vamos mostrar que $A = f^{-1}(B)$ é aberto em M. Para cada ponto $a \in A$, temos que $f(a) \in B$. Como B é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset B$. Pela continuidade de f, dado ε, existe $\delta > 0$ tal que

$f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset B$. Daí, temos que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(B) = A$. Logo A é aberto, pois dado $a \in A$, mostramos que existe uma bola aberta $B(a;\delta)$ contida em A.

Reciprocamente, suponha que $f : M \to N$ seja tal que, para todo aberto $B \subset N$, $A = f^{-1}(B)$ é aberto em M. Seja $a \in M$ um ponto qualquer. Mostraremos que f é contínua em a. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, a bola $B(f(a);\varepsilon) = B$ é um aberto de N, então $A = f^{-1}(B)$ é um aberto de M. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que a bola $B(a;\delta) \subset A$, então $f(B(a;\delta)) \subset f(A) = B = B(f(a);\varepsilon)$, o que nos diz que f é contínua.

■

Note que, pela proposição anterior, o fato de uma aplicação $f : M \to N$ ser contínua não depende dos números que exprimem as distâncias entre os pontos desses espaços, mas sim das coleções de subconjuntos abertos de M e de N. Porém, nem sempre a imagem direta $f(A)$ de um conjunto aberto A por uma aplicação contínua é um conjunto aberto, basta considerarmos a aplicação contínua

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Sendo $A = (-a, a)$ aberto, vemos que $f(A) = [0, a)$, que não é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$. A definição a seguir nos auxilia na demonstração da seguinte proposição que associa a noção de conjuntos abertos com a de homeomorfismos.

Definição 2.24. Uma aplicação *aberta* é uma aplicação tal que para cada aberto $A \subset M$, sua imagem direta $f(A) \subset N$ é aberto.

Proposição 2.25. *As seguintes afirmações São equivalentes:*

1. *$h : M \to N$ é um homeomorfismo;*

2. *Para cada $A \subset M, h(A)$ é aberto em N;*

3. *A é aberto em M.*

Demonstração: Basta observar que h é contínua se, e somente se, h^{-1} for aberta. ■

Esta proposição garante que uma bijeção é um homeomorfismo se, e somente se, transforma conjuntos abertos em abertos. Ademais, a Proposição acima é válida se os conjuntos em questão forem fechados. Nesse sentido, é possivel perceber que o valor da distância entre quaisquer dois pontos de um espaço métrico não é relevante quando nos referimos ao conceito de continuidade, o importante é a coleção de abertos que a métrica determina. Assim, a fim de verificarmos que a noção de continuidade pode ser abordada em espaços mais gerais, definimos os espaços topológicos.

2.4.1 Continuidade nos espaços topológicos.

Definição 2.26. Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $X, \varnothing \in \tau$.
2. Se $X_\lambda \in \tau$, para todo $\lambda \in L$, em que L é um conjunto de índices finito ou infinito, então $\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda \in \tau$.
3. Se $X_1, \cdots, X_n \in \tau$ então $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \tau$.

Esses subconjuntos de X são chamados de abertos de X com relação à topologia τ.

Definição 2.27. Um espaço topológico é um par (X, τ), em que X é um conjunto e τ uma topologia.

Diante dos resultados vistos neste espaço, destacamos o seguinte:

Definição 2.28. Sejam X, Y espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua quando para todo $B \subset Y$ aberto, temos que $f^{-1}(B)$ é um aberto em X.

Vale ressaltar que o fato de uma aplicação $f : M \to N$ ser contínua independe de uma distância bem definida, mas sim das coleções de subconjuntos abertos de M e N. Ademais, a coleção de subconjuntos abertos de um espaço métrico M forma uma topologia e, se munirmos M com esta topologia, podemos enxergar tal espaço métrico como um espaço topológico. Desta forma, o conceito de continuidade em espaços topológicos, os quais não foram objeto de estudo desse trabalho, generaliza a definição vista em espaços métricos. Para mais detalhes veja Lima[3].

Podemos relacionar os conceitos topológicos com convergência de modo que podem ser expressos mediante limites de sequências.

Proposição 2.29. *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, $\lim x_n = a$ em M implicar $\lim f(x_n) = f(a)$ em N.*

Demonstração: De fato, se $\lim x_n = a$ e f contínua no ponto a, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a, \delta) \cap M) \subset B(f(a), \epsilon).$$

A partir de δ, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ de modo que $d_M(x_n, a) < \delta$, o que implica $x_n \in B(a, \delta) \cap M$. E, portanto, $f(x_n) \in B(f(a), \epsilon)$, ou seja, $d_N(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Logo, o $\lim f(x_n) = f(a)$. Reciprocamente, suponha, por absurdo, que f não seja contínua no ponto a. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in M$ com $d_M(x_n, a) < \dfrac{1}{n}$ e $d_N(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Absurdo, pois teríamos uma sequência (x_n) convergindo para a sem que $f(x_n)$ convirja para $f(a)$. ■

Proposição 2.30. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Então, $a \in \overline{X}$ em M se, e somente se, a seja limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.*

Demonstração: Se $a \in \overline{X}$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter um ponto $x_n \in B\left(a; \frac{1}{n}\right) \cap X$. Assim, obtemos uma sequência de pontos $x_n \in X$, com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e portanto $\lim x_n = a$. Reciprocamente, se $\lim x_n = a$, com $x_n \in X$ então toda bola aberta de centro a contém pontos x_n pertencentes X. Logo $a \in \overline{X}$. ■

Corolário 2.31. *O subconjunto $F \subset M$ é fechado em M se, e somente se, contém o limite de cada sequência de pontos x_n de X que convirja em M.*

Demonstração: Ver Lima [2]. ■

Corolário 2.32. *Um conjunto A é aberto em M se, e somente se, cumpre a seguinte condição: $x_n \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande, para cada $a \in A$.*

Demonstração: Ver Lima [2]. ■

A continuidade uniforme é um importante conceito especialmente no estudo da análise. Diferentemente da continuidade simples, que é um caso local, a continuidade uniforme é uma noção global, isto é, se relaciona com o comportamento da aplicação em todo espaço simultaneamente.

Definição 2.33. Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é uniformemente contínua quando para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M, d_M(x, y) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Podemos relacionar as sequências de Cauchy com o conceito de continuidade uniforme.

Proposição 2.34. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração: Sejam M e N espaços métricos. Consideremos $f : M \to N$ uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Mostraremos que a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy em N. Para isso, suponhamos dado ϵ, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ (pois f é contínua). Como (x_n) é de Cauchy, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon.$$

■

Nesse contexto, temos a definição de homeomorfismos uniforme.

Definição 2.35. Uma bijeção $f : M \to N$ chama-se um homeomorfismo uniforme quando é uniformemente contínua e sua inversa $f^{-1} : N \to M$ também é.

Exemplo 2.36. Seja $\phi : M \to N$ uniformemente contínua. Se a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge uniformemente para $f : X \to M$, as aplicações $\phi \circ f_n : X \to N$ convergem uniformemente para $\phi \circ f : X \to N$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y, z \in M$ e $d(y, z) < \delta$, então $d(\phi(y), \phi(z)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{R}$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \delta$ para todo $x \in X$. Desta forma, $n > n_0$ implica $d(\phi f_n(x), \phi f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Logo, $\phi f_n \to \phi f$ uniformemente em X.

Como consequência, se $\phi : M \to N$ é um homeomorfismo uniforme, então $f_n : X \to M$ converge uniformemente para $f : X \to M$ se, e somente se, $\phi \circ f_n : X \to N$ convergem uniformemente para $\phi \circ f : X \to N$.

Capítulo 3

Completude em espaços métricos

3.1 Espaços métricos completos

Definição 3.1. Os espaços métricos M nos quais toda sequência de Cauchy é convergente são ditos *espaços métricos completos.*

Exemplo 3.2. A reta é um espaço métrico completo.

De fato, considerando (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pondo para cada $n \in N$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Tem- se que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e os conjuntos X_n são limitados, pois toda sequência de Cauchy é limitada. Seja $a_n = \inf X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b = \sup X_1$. Como toda sequência monótona limitada de números reais é convergente, assim existe $a = \lim a_n$.

Afirmação: $a = \lim x_n$.

Para provar isto, basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n). Seja $a = \lim a_n$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que para todo $m > n_0$, $d(a_m, a) < \epsilon$, ou seja, $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$. Para cada m, como $a_m = \inf X_m$, existe $n_m \geq m$ tal que $a_m < x_{n_m} < a + \epsilon$, $x_{n_m} \in X_m$. Assim, temos (x_{n_m}) uma subsequência de (x_n) tal que $a - \epsilon < x_{n_m} < a + \epsilon$, para todo $n_m > n_0$, ou seja, $d(x_{n_m}, a) < \epsilon$ e portanto $\lim x_{n_m} = a$.

Logo, $\lim x_n = a$. Concluímos então que $\mathbb{R}$ é completo.

Proposição 3.3. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Com efeito, considere $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy $(x_n) \in F$, existe $\lim x_n = a \in M$, pois M é completo. Como F é fechado em M, tem-se que $a \in F$, pois a é um ponto aderente a F. Logo F é completo, pois a sequência de Cauchy (x_n) em F é convergente. Por outro lado, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$, a sequência (x_n) é de Cauchy, pois toda sequência convergente é de Cauchy. Logo, existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b \in M$, pois M é completo. Pela unicidade do limite tem-se

$a = b \in M$ e portanto M é fechado em N (pois todo ponto de N é limite de uma sequência de pontos de M). ■

A próxima proposição generaliza um importante fato sobre números reais, o "Princípio dos Intervalos Encaixantes", e nos dá uma caracterização para a completude de espaços métricos.

Proposição 3.4. *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M$, com $\lim diam\, F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.*

Demonstração: Suponhamos que M seja completo e consideremos uma sequência (F_n) como acima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos um ponto $x_n \in F_n$. Isto define uma sequência $(x_n) \in M$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}$. Como para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que diam $F_{n_0} < \epsilon$. Então $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$, e portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Uma vez que M é completo, existe $a \in M$ tal $\lim x_n = a$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos que $x_n \in F_p$ para todo $n \geq p$, donde $\lim x_n = a \in F_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, ou seja , $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Note que não pode existir dois pontos $a \neq b$ nesta interseção, pois caso contrário teríamos $d(a, b) \leq$ diam F_n para todo n. Logo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Reciprocamente, se a interseção de toda sequência decrescente de fechados não vazios cujos diâmetros tedem a zero é um ponto de M, provaremos que M é completo. De fato, seja (x_n) uma sequência Cauchy em M. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Então $X_1 \supset X_2 \supset \cdots X_n \supset \ldots$ e, por conseguinte $(\overline{X_n})$ é uma sequência decrescente de fechados não vazios. Ademais, temos que $0 = \lim \text{diam}\, X_n = \lim \text{diam}\, \overline{X_n}$. Portanto, existe $a \in M$ tal que $\bigcap \overline{X_n} = \{a\}$. Como $a \in \overline{X_n}$, para todo n, segue-se que qualquer bola aberta de centro a contém pontos x_n com índices arbitrariamente grandes, ou seja, a é limite de uma subsequência de (x_n). Como esta sequência é de Cauchy, concluímos que $a = \lim x_n$. ■

Proposição 3.5. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $M \times N$ é completo. Mostraremos que M e N são completos. Fixe $b \in M$. Observe que a aplicação $x \mapsto (x, b)$ é uma isometria de M sobre um subespaço fechado $M \times b \subset M \times N$, pois

$$d(f(x), f(y)) = d((x, b), (y, b)) = d(x, y) + d(b, b) = d(x, y).$$

Daí, pela Proposição 3.3 tem-se que M é completo. De forma análoga, é possível mostrar que N é completo. Agora, suponhamos que M e N são completos. Assim, dada uma sequência de Cauchy $(z_n) \in M \times N$, seja $z_n = (x_n, y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$ são uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N, respectivamente. Logo, existem $\lim x_n = a \in M, \lim y_n = b \in N$. Pondo $c = (a, b) \in M \times N$, temos que $\lim z_n = c$. Como a sequência de Cauchy (z_n) é convergente segue que o produto cartesiano $M \times N$ é completo. ■

3.1.1 Espaços de Banach

As colaborações de Fréchet para a matemática foram de grande relevância, sendo este o primeiro a utilizar o termo espaços de Banach em 1928. Stephan Banach, foi outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento da Análise Funcional, ramo da Análise Matemática que trata do estudo de espaço de funções e faz uso de muitos conceitos da Álgebra Linear. A partir das novas descobertas no ramo da Análise Funcional, tornou-se possível dar sentido às noções topológicas que se apresentam em alguns dos problemas de análise. Em homenagem a Stephan Banach os espaços vetoriais normados completos recebem o nome de *espaços de Banach*.

Definição 3.6. Um espaço M é dito espaço de Banach quando M é um espaço vetorial normado e além disso toda sequência de Cauchy é convergente, isto é, é um espaço métrico completo.

Exemplo 3.7. A reta com a norma $|x - y| = d(x, y)$ é um espaço de Banach.

Exemplo 3.8. O espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$; $(\mathbb{R}^n, || \ ||')$; $(\mathbb{R}^n, || \ ||'')$, no qual para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos respectivamente:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}; \qquad ||x||' = \sum_{i=1}^{n}|x_i|; \qquad ||x||'' = \max_{1 \leq i \leq n}|x_i|$$

é um espaço de Banach, pelo fato da reta ser um espaço de Banach, pela Proposição 3.5.

3.1.2 Espaços de Hilbert

Os espaços de Hilbert possuem uma característica interessante e foram discutidos primeiramente por volta de 1912 pelo matemático Alemão David Hilbert, quando trabalhava em equações integrais.

Definição 3.9. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H munido de um produto interno e completo em relação à norma definida por esse produto interno.

Exemplo 3.10. O espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, d)$ em que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \qquad \text{e} \qquad d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2};$$

é um espaço de Hilbert.

Desta forma, vale resaltar que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach, com a norma proveniente do produto interno. Ademais, um exemplo importante é o espaço das sequências de quadrado somável, denotado por l^2.

Exemplo 3.11. O espaço l^2 ou espaço das sequências de quadrados somáveis é um espaço de Hilbert.

Para garantirmos que l^2 é um espaço de Hilbert resta mostrarmos que l^2 é um espaço métrico completo, isto é, que toda sequência de Cauchy em l^2 é convergente em l^2. Tem-se que a métrica usual é dada por $d(x,y) = ||x-y||$, logo pela definição da norma euclidiana,

$$||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}.$$

Seja então (x_n) uma sequência de Cauchy em l^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e fixando qualquer $i \in \mathbb{N}$ tem-se por definição que

$$||x_{mi} - x_{ni}|| = \sqrt{(x_{mi} - x_{ni})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{mi} - x_{ni})^2} = ||x_m - x_n||.$$

Logo $(x_{n_i})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Segue que, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe um número real $a_i = \lim x_{n_i}$ no qual $a = (a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots)$. Ainda, pela definição de sequência de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x_m - x_n|| < \epsilon$ para todo $m, n > n_0$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n > n_0$ tem-se

$$\sum_{i=1}^{k}(x_{mi} - x_{ni})^2 < \epsilon^2.$$

Fazendo k e n fixos e tomando $m \to \infty$, da última igualdade obtemos que para todo $n > n_0$ e $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - x_{ni})^2 \leq \epsilon^2.$$

Fazendo $k \to \infty$ tem-se que, para todo $n > n_0$,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - x_{ni})^2 \leq \epsilon^2.$$

Como l^2 é um espaço vetorial, pode-se escrever $a = a - x_n + x_n$, logo $a \in l^2$, pois $x_n \in l^2$.

Daí, da última desigualdade escreve-se que para $n > n_0$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - x_{ni})^2} \leq \sqrt{\epsilon^2}$$

ou ainda, $||x_n - a|| \leq \epsilon$, ou seja, $\lim x_n = a \in l^2$.

Assim, toda sequência de Cauchy em l^2 é convergente e portanto l^2 é um espaço de Hilbert.

3.2 Convergência em espaços métricos completos

Proposição 3.12. *Se o espaço métrico M é completo então $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \to M$.*

Demonstração: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$, logo esta sequência é limitada, então existe $c > 0$ tal que $d(f_n, \alpha) \leq c$ para todo $n \in N$. Como $d(f_n, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), \alpha(x)) < \infty$, temos que

$$d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c, \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$$

Como, M é completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente em M e desde que $(f_n(x))$ é de Cauchy em M, então existe para cada $x \in X$, o limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ em M. Escrevemos $\lim f_n(x) = f(x) \in M$. Como o limite é único, isto define uma aplicação $f : X \to M$ que é o limite pontual da sequência (f_n). Como $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in X$, e fazendo $n \to \infty$, concluímos que $d(f(x), \alpha(x)) \leq c, \forall x \in X$, pois $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$ e d é contínua. Logo, $f \in \mathcal{B}_\alpha(X, M)$.

Resta mostrarmos que $f_n \to f$ uniformemente em X. Como $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$. Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$ para todo $x \in X$. Ou seja, $f_n \to f$ uniformemente em X.

■

Os espaços normados possuem uma estrutura algébrica de espaço vetorial à qual está associada às transformações lineares, $\mathcal{L}(E, F)$, que indica o conjunto das aplicações lineares e contínuas de E em F, é um exemplo de espaço de Banach especial, como veremos a seguir:

Sejam E e F espaços vetoriais normados. O conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma:

$$||f|| = \sup_{||x||=1} \{||f(x)||; x \in E\}$$

Assim, para toda função $f \in \mathcal{L}(E,F)$, e todo $x \in E$ vale que $\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$, pois pela definição de norma $\|f(x)\| \leq \|f\|$, com $\|x\|= 1$. Por outro lado, para todo $x \in E$ com

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1, \text{assim} \left\|f\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\| \leq \|f\| \text{ , e sendo } f \text{ linear, temos} \left\|\frac{1}{\|x\|}f(x)\right\| \leq \|f(x)\|.$$

Donde segue

$$\left\|\frac{1}{||x||}\right\| ||f(x)|| \leq \|f\| \Rightarrow \|f(x)\| \leq \|f\| \ \|x\|.$$

Como isto também vale para $x = 0$, pois por hipótese f é uma transformação linear então $f(0) = 0$. Então, temos

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \ \|x\|, \text{para todo } x \in E.$$

Proposição 3.13. *Sejam E e F espaços vetorias normados, $f : E \to F$ uma aplicação linear e $S(0;1) = \{x \in E; ||x|| = 1\}$. Então, f é contínua se, e somente se, $f|_S$ é limitada.*

Demonstração: Suponhamos que f é contínua em E, ou seja, para todo $a \in E$ e para todo $\epsilon > 0$, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $||x - a|| < \delta$, então $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$. Em particular, f é contínua na origem, isto é, para $a = 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||x|| < \delta$ então $||f(x)|| \leq \epsilon$. Se $||x|| \leq 1, ||\delta x|| = |\delta| \ ||x|| \leq \delta$, logo

$$||f(\delta x)|| \leq \epsilon \Rightarrow ||\delta f(x)|| \leq \epsilon \Rightarrow |\delta| \ ||f(x)|| \leq \epsilon \Rightarrow ||f(x)|| \leq \frac{\epsilon}{|\delta|} = k.$$

Dessa forma, f é limitada em $B[0;1]$. Como $S(0;1) \subset B[0;1]$ então f é limitada em $S(0;1)$.

Seja $\sup\limits_{||x||=1} ||f(x)|| = L < \infty$. Portanto, pelo que vimos anteriormente tem-se que $||f(x)|| \leq ||f|| \, ||x||, \text{para todo } x \in E$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\delta = \dfrac{\epsilon}{L}$. Então se $||x|| \leq \delta$, temos que $||f(x)|| \leq ||x|| < L\delta = \epsilon$, então f é contínua na origem. Agora, considere $x_0 \in E$ qualquer. Para $||x - x_0|| < \delta, ||f(x - x_0)|| < \epsilon$. Como f é linear $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$, por consequência, $||f(x) - f(x_0)|| \leq \epsilon$. Logo, f é contínua em x_0.

■

Note que, por definição, $\lim f_n = f$ em $\mathcal{L}(E,F)$ significa que $\lim ||f_n - f|| = 0$, o que equivale a dizer que $f_n \to f$ uniformemente em $S(0;1)$.

Proposição 3.14. *Se F é completo, então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E,F)$ é completo.*

Demonstração: De fato, se (f_n) é um sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$ então as restrições $f_n|_S$ constituem uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(S,F)$. Como F é completo, pela Proposição 3.12, existe $f_0 : S \to F$ limitada, tal que $f_n \to f_0$ uniformemente em

$S(0;1)$. Indicaremos com $f : E \to F$ a extensão da aplicação $f_0 : S \to F$, definida por $f(\lambda u) = \lambda f_0(u)$, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in S(0;1)$. Mostremos que $f_n \to f$ simplemente em E. Não é difícil ver que, $f_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$. Agora, se $x \neq 0, x \in E$ então

$$\lim f_n(x) = \lim f_n(x)\frac{\|x\|}{\|x\|} = \|x\| \lim f_n(x)\frac{1}{\|x\|}.$$

Usando a linearidade de cada f_n, tem -se que

$$\|x\| \lim f_n(x)\frac{1}{\|x\|} = \|x\| \lim f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| f_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

pois $f_n \to f_0$ uniformemente em $S(0;1)$. Assim, pela definição de f, tomando $\|x\| = \lambda$, segue que

$$f\left(||x||\frac{x}{||x||}\right) = f(x) \Rightarrow \lim f_n(x) = f(x).$$

Ou seja, $f_n \to f$ simplesmente em E. Ademais, de $\lim f_n(x) = f(x)$ segue-se imediatamente que f é linear. Como $f|_S = f_0$ é limitada e, portanto, contínua. Além disso, pelo resultado anterior, tem-se que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ e como $f_n|_S \to f|_S$ uniformemente, temos $\lim f_n = f$ no espaço $\mathcal{L}(E,F)$, que é portanto completo.

$\blacksquare$

Proposição 3.15. *Seja $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \to N$, tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in N$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in X$, com x_n convergindo para a, tem-se $\lim f(x_n) = b$.*

Demonstração: Análoga à demonstração da Proposição 2.29. $\blacksquare$

Corolário 3.16. *Para que exista $\lim_{x\to a} f(x) \in N$ é suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com x_n convergindo para a, a sequência $(f(x_n))$ seja convergente em N.*

Demonstração: Observe que sejam quais forem as sequências de pontos $x_n, y_n \in X$, com $\lim x_n = \lim y_n = a$, devemos ter $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$, caso contrário, a nova sequência $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ cumpriria $\lim z_n = a$ mas $(f(z_n))$ teria duas subsequências com limites distintos e portanto não convergiria. Seja $b \in N$ o limite comum de todas as sequências $(f(x_n))$, onde x_n converge para a, $x_n \in X$. Segue-se da proposição anterior que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. $\blacksquare$

Proposição 3.17. *Sejam M, N espaços métricos , X subespaço de M e $f : X \to N$ uma aplicação contínua. Se, para cada ponto $a \in \overline{X}$, existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ então a aplicação $F : \overline{X} \to N$, definida por $F(x) = f(x)$ quando $x \in X$ e $F(a) = \lim_{x\to y} f(x)$, com $y \in \overline{X} - X$, é contínua.*

Demonstração: Como f é contínua em todo $a \in X$, segue que, seja qual for $a \in \overline{X}$, temos que $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Logo, dados $a \in \overline{X}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), F(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Vejamos agora que para todo $\overline{x} \in \overline{X}$, com $d(\overline{x}, a) < \delta$, temos $d(F(\overline{x}), F(a)) < \varepsilon$. Com efeito, $\lim x_n = \overline{x}$, onde $x_n \in X$ para todo n. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $d(x_n, a) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$(Aplicando o Corolário 2.32 ao aberto $B(a;\delta)$). Portanto, $d(f(x_n), F(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$F(\overline{x}) = \lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x_n).$$

Segue-se que

$$d(F(\overline{x}), F(a)) = \lim_{x\to\infty} d(f(x_n), F(a)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

■

A fim de abordarmos extensão de aplicações contínuas para garantirmos a unicidade do completamento de um espaço métrico, consideremos o seguinte resultado:

Proposição 3.18. *(Critério de Cauchy) Seja $f : X \to N$ uma aplicação definida no subconjunto X do espaço métrico M e tomando valores no espaço métrico completo N. Dado $a \in \overline{X}$, a fim de que exista $\lim_{x\to a} f(x)$, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, se possa obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $d(x,a) < \delta, d(y,a) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração: Suponha que exista $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{N}$, então dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $x \in X, d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, se $x, y \in X$ cumprem $d(x,a) < \delta$ e $d(y,a) < \delta$, temos

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), b) + d(f(y), b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciprocamente, se esta condição é satisfeita então, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy, e portanto convergente em N. Segue do Colorário 3.16, que existe $\lim_{x\to a} f(x)$. ■

3.2.1 Extensão de aplicações contínuas

Definição 3.19. Dados $X \subset Y$, uma aplicação $F : Y \to Z$ chama-se uma extensão de $f : X \to Z$ quando $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, quando $F|_X = f$.

Definição 3.20. Sejam agora M, N espaços métricos, $X \subset M$ e $f : X \to N$ uma aplicação contínua. Diremos que f se estende continuamente a M quando f possui uma extensão $F : M \to N$ contínua.

O teorema de extensão de aplicações uniformemente contínuas a seguir é um corolário do critério de Cauchy, vejamos:

Teorema 3.21. *Toda aplicação uniformemente contínua $f : X \to N$, definida num subconjunto denso de um espaço métrico M e tomando valores num espaço métrico completo N, possui uma única extensão contínua $F : M \to N$. A aplicação F também é uniformemente contínua.*

Demonstração: Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Dessa forma, temos que para todo $a \in M$, se $x, y \in X$ e $d(x, a) < \frac{\delta}{2}$, $d(y, a) < \frac{\delta}{2}$ então $d(x, y) < \delta$ e portanto $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pelo critério de Cauchy, existe $\lim_{x \to a} f(x) = F(a)$, para todo $a \in M$. A extensão $F : M \to N$, assim obtida, é contínua pela proposição 3.17. Agora, mostraremos que ela é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, como f é uniformemente contínua, obtem-se $\delta > 0$, tal que

$$x, y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Afirmação: Este δ atende ao ε dado para a continuidade uniforme de F. Com efeito, sejam $u, v \in M$ e $d(u, v) < \delta$. Então, $\lim x_n = u$ e $v = \lim y_n$, onde $x_n, y_n \in X$. Pela continuidade da função distância, vale que $d(x_n, y_n) < \delta$, para todo n suficientemente grande. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > n_0$. Daí, $u, v \in M$,

$$d(u, v) < \delta \Rightarrow d(F(u), F(v)) = d(\lim f(x_n), \lim f(y_n)) = \lim d(f(x_n), f(y_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

■

Corolário 3.22. *Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo uniforme entre subespaços densos $X \subset M$ e $Y \subset N$. Se M e N são completos, f se estende, de modo único, a um homeomorfismo uniforme $F : M \to N$.*

Demonstração: Com efeito, seja $g : Y \to X$ o inverso de f. Existem aplicações uniformemente contínuas $F : M \to N$ e $G : N \to M$ que se estendem f e g respectivamente. As aplicações contínuas $G \circ F : M \to M$ e $F \circ G : N \to N$ são tais que $(G \circ F)(x) = x$ para todo $x \in X$ e $(F \circ G)(y) = y$ para todo $y \in Y$. Como $X \subset M$ e $Y \subset N$ são densos, segue que $(G \circ F) = id_M$ e $(F \circ G) = id_N$. Logo, $G = F^{-1}$, consequentemente F é um homeomorfismo uniforme de M sobre N. ■

Corolário 3.23. *Seja $f : X \to Y$ uma isometria entre subespaços densos $X \subset M$ e $Y \subset N$. Se M e N são completos, f estende, de modo único, a uma isometria $F : M \to N$.*

Demonstração: Existe um único homeomorfismo uniforme $F : M \to N$ que estende f.

Dados $x, y \in M$, temos $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, com $x_n, y_n \in X$, para todo n. Logo,

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &= d(\lim f(x_n), \lim f(y_n)) \\ &= \lim d(f(x_n), f(y_n)) = \lim d(x_n, y_n) = d(x, y). \end{aligned}$$

Assim, F é uma isometria.

■

Ciente dos resultados apresentados de espaços métricos completos e sabendo que nem todo espaço métrico é completo, uma pergunta natural é: será possível tornar o espaço métrico completo?A resposta a esta pergunta: é sim! Mostraremos que todo espaço métrico M pode ser ampliado, acrescentando-lhe novos pontos, de modo a obter um espaço métrico completo $\widehat{M}$, que chamamos de completamento de M. Vale destacar que é possível garantir que todo espaço métrico possui um completamento e que este completamento é único.

Definição 3.24. Um completamento de um espaço métrico M é um par $(\widehat{M}, \phi)$, onde $\widehat{M}$ é completo e $\phi : M \to \widehat{M}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\phi(M)$ é densa em $\widehat{M}$.

Proposição 3.25. ***(Existência do completamento)*** *Todo espaço métrico possui um completamento.*

Demonstração: Dado um espaço métrico M, pelos resultados já vistos, sabe-se que existe uma imersão isométrica $\phi : M \to \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$, onde $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial normado constituído pelas funções limitadas $f : M \to \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.12, $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ é completo. Assim, basta considerarmos $\widehat{M} = \overline{\phi(M)}$ ■

Sabendo que o completamento para um espaço métrico qualquer existe, agora convém vericarmos se de fato ele é único.

Proposição 3.26. ***(Unicidade do completamento)*** *Sejam $(\widehat{M}, \phi)$ e $(\widetilde{M}, \psi)$ dois completamentos do mesmo espaço métrico M. Existe uma única isometria $f : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ tal que $f \circ \phi - \psi$.*

Demonstração: A condição $f \circ \phi = \psi$ já define f na imagem $\phi(M)$: para cada $y = \phi(x) \in \phi(M)$, $f_0(y) = \psi(x)$. Como ϕ é injetiva, isto define uma apliação $f_0 : \phi(M) \to \widetilde{M}$, que cumpre $f_0 \circ \phi = \psi$ e portanto é isometria de $\phi(M)$ sobre $\psi(M)$. Pelo Corolário 3.23, existe uma única isometria $f : \widehat{M} \to \widetilde{M}$.

■

Propriedade: Sabe-se que um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ainda completo, tem-se que o fecho de M em $\widetilde{M}$ é completo e contém M. Portanto, M é denso no seu complemento.

Capítulo 4

Compacidade em espaços métricos

4.1 Espaços métricos compactos

Nosso objetivo é compreender o conceito de compacidade no contexto dos espaços métricos mais gerais. Para isto, inicialmente relembramos o conceito e dois resultados a respeito de compacidade em $\mathbb{R}$:

Definição 4.1. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito compacto quando este é fechado e limitado.

Teorema 4.2. *(**Bolzano-Weirstrass**) Todo subconjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}$ possui ponto de acumulação.*

Demonstração: Pela Proposição 3.4, existe $x_0 \in \bigcap\limits_{n \geq 1} [a_n, b_n]$.

Afirmação: x_0 é ponto de acumulação de X. De fato, se $r \geq 0$, consideremos $B(x_0, r)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{2^n}$. Como X é limitado, existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < bx \geq 1$; tal que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Assim, cada intervalo $[a_n, b_n]$ contém uma infinidade de pontos de X.

■

Teorema 4.3. *(**Borel-Lebesgue**) Seja $[a, b] \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos abertos da reta. Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.*

Demonstração: Por hipótese, temos que para cada $t \in [a, b]$, existe algum índice $\lambda \in L$ tal que $t \in A_\lambda$. Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ está contido em alguma reunião finita $A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Temos:

$$X = \{x \in [a, b];\ \text{existe } \lambda_1, \ldots \lambda_n \in L \text{ tais que } [a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}\}.$$

Observe que X é um subconjunto não-vazio de $[a, b]$. De fato, para algum $\lambda \in L$ temos $a \in A_{\lambda_n}$. Como A_λ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b$ e $[\delta, a + \delta) \subset X$. Sabe-se que se $x \in X$ e $a \leq y < x$ então $y \in X$. Logo X é um intervalo, da forma $[a, c]$ ou da forma $[a, c)$ onde $c = \sup X$.

Afirmação: $c \in X$. Com efeito, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $c \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Pela definição de supremo, podemos encontrar $x \in X$, com $c - \varepsilon < x \leq c$. Ora, temos

$$[a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Logo, $[a, c] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}$. Portanto, $c \in X$. Assim temos $c = b$, pois caso contrário se $c < b$, poderíamos no último raciocínio, ter considerado ε tal que $c + \varepsilon < b$. Neste caso, teríamos $[a, c + \varepsilon) \subset X$, contrariando o fato de que $c = \sup X$. Portanto, $X = [a, b]$ o que queríamos demonstrar. ■

A fim de generalizar a noção de compacidade para quaisquer espaços métricos, vejamos algumas definições:

Definição 4.4. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Definição 4.5. Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ chama-se uma subcorbetura de $\mathcal{C}$.

Definição 4.6. Uma cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ diz-se aberta quando cada conjunto $A_\lambda, \lambda \in L$, é aberto em M.

Definição 4.7. Uma cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se finita quando L é um conjunto finito. Neste caso, temos $L = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ e escrevemos $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$.

Ciente dessas definições, temos o conceito de compacidade em espaços métricos:

Definição 4.8. Um espaço métrico M é compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita. Isto significa que, se $M = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ onde cada A_λ é aberto em M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in L$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Definição 4.9. Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se subconjunto compacto quando o subespaço métrico X é compacto. Isto é, toda cobertura aberta $X = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A'_\lambda$ onde cada A'_λ é aberto em X, se pode extrair uma subcobertura finita $X = A'_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A'_{\lambda_n}$.

Note que para cada $\lambda \in L$ os abertos relativos em X são da forma $A'_\lambda = X \cap A_\lambda$, onde A_λ é aberto em M. Daí, tem-se que $X = \cup A'_\lambda \Leftrightarrow X \subset \cup A_\lambda$. Logo $X \subset M$ é compacto se, e somente se, de cada cobertura $X \subset \cup A_\lambda$, por abertos $A_\lambda \subset M$, se pode extrair uma subcobertura finita $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Exemplo 4.10. Todo intervalo limitado e fechado da reta é compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue.

Exemplo 4.11. Todo espaço métrico finito é compacto, visto que toda cobertura contém apenas um número finito de subconjutos distintos.

Proposição 4.12. *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração: Seja M um espaço métrico compacto. Então, da cobertura aberta $\bigcup\limits_{x\in M} B\,(x;1)$ podemos extrair uma subcobertura finita, digamos

$$M = B(x_1;1) \cup \cdots \cup B(x_n;1).$$

Logo M é limitado, pois sabe-se que uma bola aberta é um conjunto limitado e como reunião finita de conjuntos limitados é limitado segue que M é limitado. ■

Proposição 4.13. *Se $K, N \subset M$ são subconjuntos compactos, então $K \cup N$ é compacto.*

Demonstração: Com efeito, dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de $K \cup N$. Então, se $K \cup N \subset \cup A_\lambda$, em particular, $K \subset \cup A_\lambda$ e $N \subset \cup A_\lambda$. Como K é compacto, existe uma subcobertura finita com $K \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ e analogamente, $L \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_p}$ e portanto, $K \cup L \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_p}$. ■

Segue, pelo resultado visto acima, que a união finita de subconjuntos compactos é compacto. Entretanto a reunião infinita de conjuntos compactos pode não ser compacta, já que todo conjunto pode ser visto como a reunião de seus pontos que são compactos.

Se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é uma família de abertos em M, os complementares $F_\lambda = M - A_\lambda$ formam uma família de $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos fechados de M. Assim, tem-se que

$$M = \cup A_\lambda \text{ se, e somente se, } \cap F_\lambda = \varnothing.$$

De fato, seja $M = \cup A_\lambda$ com A_λ aberto em M. Suponha $\cap F_\lambda \neq \varnothing$. Assim, $\cap F_\lambda = \cap(M - A_\lambda) \neq \varnothing$. Logo, existe $x \in \cap(M - A_\lambda)$. Ou seja, $x \in M$, mas x não pertence a nenhum A_λ, isto quer dizer $\cup A_\lambda$ não é uma cobertura de M. O que é um absurdo, pois $M = \cup A_\lambda$. Portanto, $\cup A_\lambda \subset M$. Reciprocamente, suponha que $\cap F_\lambda = \varnothing$. Suponha, por absurdo, que $M \subset \cup A_\lambda$. Assim,

$$\begin{aligned} x \in (M - A_\lambda), \text{ para todo } \lambda \quad &\Rightarrow \quad x \in \cap(M - A_\lambda) \\ &\Rightarrow \quad x \in \cap F_\lambda = \varnothing. \end{aligned}$$

Absurdo! Logo, $M = \cup A_\lambda$.

Assim, podemos formular a noção de compactos em termos de conjuntos fechados:

Proposição 4.14. *Um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda família $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia possui uma subfamília com interseção vazia: $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} = \varnothing$.*

Demonstração: Ver Lima[2]. ■

A noção de compacidade possui algumas propriedades interessantes que elencaremos a seguir:

Propriedade 1: Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.

Demonstração: De fato, sejam M um espaço métrico compacto e F um subconjunto fechado de M. Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de F, obtemos a cobertura aberta $M = (\cup A_\lambda) \cup (M - F)$, da qual extraímos a subcorbetura finita $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup (M - F)$. Como nenhum ponto de F pertence a $M - F$, então $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Logo, F é compacto.

Reciprocamente, seja $K \subset M$ um subconjunto compacto de um espaço métrico arbitrário M. Suponhamos que K não seja fechado em M. Neste caso, existe $x \in \overline{K} - K$. Pondo para cada $n \in \mathbb{N}, A_n = M - B\left(x; \frac{1}{n}\right)$, temos uma cobertura aberta $K \subset \cup A_n$, pois como $\bigcap_n B\left(x; \frac{1}{n}\right) = \{x\}$ tem-se que $K \subset \cup A_n = M - \{x\}$ já que $x \notin K$. Como $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, a reunião de um número finito de conjuntos A_n é igual ao conjunto de maior índice da coleção. Como nenhum A_n, contém K, pois como $x \in \overline{K}$, cada $B\left(x; \frac{1}{n}\right)$ contém algum ponto de K, a cobertura aberta $K \subset \cup A_n$ não admite subcobertura finita, o que contradiz a hipótese de K ser compacto. Portanto, K é um subconjunto fechado. ■

Propriedade 2: Qualquer interseção $K = \cap K_\lambda$ de compactos $K_\lambda \subset M$ é compacta.

Demonstração: Com efeito, cada K_λ sendo fechado em M, a interseção K é um subconjunto fechado em M e, portanto, em cada K_λ. Logo K compacto. ■

Além disso, é possível relacionar compacidade com o conceito de completude.

Propriedade 3: Todo espaço métrico compacto é completo.

Demonstração: De fato, se M é compacto, então M é um subconjunto fechado, pela Propriedade 1. Além disso, sabe-se que um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ainda completo, tem-se que o fecho de M em $\widehat{M}$ é completo e contém M. Portanto, M é denso no seu complemento. Logo, $M = \widehat{M}$. ■

Sabe-se que o conceito de continuidade é um dos pontos centrais no estudo de análise, diante disto vale destacar que também é possível relacionar compactos com o conceito de continuidade.

Propriedade 4: A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.

Demonstração: Sejam $f : M \to N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dada uma cobertura aberta $f(K) \subset \cup A_\lambda$, obtemos a cobertura aberta $K \subset \bigcup_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$, da qual extraímos uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$ e daí $f(K) \subset ff^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup ff^{-1}(A_{\lambda_n}) \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Logo, $f(K)$ é compacto. ■

Propriedade 5: Se M é compacto, toda aplicação contínua $f : M \to N$ é fechada, isto é, $F \subset M$ fechado implica $f(F) \subset N$ fechado.
Demonstração: De fato, sejam M espaço métrico compacto, $f : M \to N$ contínua e F um subconjunto fechado de M. Então, pela Propriedade 1 temos que o subconjunto F é compacto. Logo $f(F)$ também é compacto, portanto $f(F)$ é fechado em N. ■

Propriedade 6: Se M é compacto, toda bijeção contínua $f : M \to N$ é homeomorfismo.
Demonstração: Sejam M compacto e $f : M \to N$ contínua e bijetiva. Denotemos $g := f^{-1} : N \to M$ tal que $F \subset M$ fechado, donde segue que $g^{-1}(F) = f(F) \subset N$ é fechado. Logo, g é contínua. ■

Propriedade 7: Se M é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \to N$, é limitada.
Demonstração: Sejam M compacto e $f : M \to N$ uma função contínua, então pela Propriedade 4, $f(M) \subset N$ é compacto. Logo, $f(M)$ é limitado. Assim, f é limitada. ■

Dentre as propriedades vistas anteriormente destacamos o teorema clássico de Weierstrass, referente à existência de valores extremos para funções reais contínuas, definidas em espaços métricos compactos.

Teorema 4.15. *Se M é compacto, toda função real contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Mais precisamente: existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$.*

Demonstração: Sejam M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ contínua, então pela Propriedade 4, temos que $f(M)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Portanto, é fechado e limitado. Daí, existem $a = \inf f(M)$ e $b = \sup f(M)$, tais que $a \in f(M)$ e $b \in f(M)$. Ou seja, existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = a$ e $f(x_1) = b$. Portanto $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$. ■

Corolário 4.16. *Sejam M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.*

Demonstração: Sendo M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua então $f(M)$ é compacto e, portanto, é fechado e limitado. Assim, existe $c = \inf\{f(x);\ x \in M\}$ tal que $c \in f(M)$. Temos $c > 0$ pois $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Portanto, $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$. ■

A fim de caracterizar os conjuntos compactos, segue a noção de espaços métricos totalmente limitados.

Definição 4.17. Seja (M, d) um espaço métrico, M diz-se totalmente limitado quando, para todo $\epsilon > 0$, existem $X_1, \dots, X_n \subset M$, com $\text{diam}(X_i) < \varepsilon$, tais que

$$M = X_1 \cup \cdots \cup X_n.$$

Lembrando que $\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y)|x, y \in X\}$.

Exemplo 4.18. Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, então é totalmente limitado. De fato, para todo ϵ >0 podemos escrever a reta como reunião dos intervalos

$$I_n = [n\delta, (n+1)\delta].$$

Sendo X limitado, X está contido numa reunião finita desses intervalos.

Exemplo 4.19. Se $Y \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então é totalmente limitado (decompondo $\mathbb{R}^n$ em paralelepípedos $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$).

A proposição a seguir nos dá uma caracterização para o conceito de compacidade:

Proposição 4.20. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico são equivalentes.*

1. *M é compacto;*
2. *Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*
3. *Toda sequência de pontos de M possui uma subsequência convergente;*
4. *M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2). Suponhamos M compacto e seja $X \subset M$ um subconjunto sem ponto de acumulaçã. Isto é, $X' = \varnothing$. Então $\overline{X} = X \cup X' = X$; ou seja, X é fechado em M. Portanto X é compacto. Agora, como nenhum $x \in X$ é ponto de acumulação, então X é discreto e assim finito. Logo, todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação.
2) $\Rightarrow$ 3). Dada uma sequência (x_n) em M, há duas possibilidades para o conjunto dos valores x_n; ou o conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ é finito ou infinito. Se o conjunto X é finito então, existe algum valor a tal que se tenha $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x_{n_k} = \dots$ que se repete infinitas vezes e portanto a subsequência (x_{n_k}) converge para a. Se o conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é infinito então, por hipótese, possui um ponto de acumulação a.

Afirmação : Toda bola centrada em a contém uma infinidade de termos x_n, com índices arbitrariamente grande, logo a é limite de alguma subsequência de (x_n).

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $\epsilon = \dfrac{1}{k}$, uma vez que $\epsilon > 0$ é dado. Para $k = 1$ tem-se que existe $x_{k_1} \in B(a;1)$ onde a é o ponto de acumulação e $x_{k_1} \in X$. Prosseguindo dessa forma, obtemos que Para $k = k_j$, existe $x_{k_j} \in B\left(a, \dfrac{1}{k_j}\right)$ onde $x_{k_j} \in X$. Assim, dado $\epsilon > 0$ seja $k_{j_0} > \dfrac{1}{k_j}$, então se $k_j > k_{j_0}$ segue que, $d(x_{k_j}, a) < \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_j} = a$.

3) $\Rightarrow$ 4). Supondo que toda sequência de Cauchy em M possui subsequência convergente, segue que a sequência é convergente. Assim, M é completo. Agora mostremos que, para todo $\epsilon > 0$ dado, podemos exprimir M como a reunião de um número finito de bolas de raio ϵ. De fato, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $x_1 \in M$. Se $M = B(x_1, \epsilon)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Se $M = B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2; \epsilon)$, o resultado está provado. Se não, existe $x_3 \in M$ tal que $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$ e $d(x_3, x_1) \geq \epsilon$. Prosseguindo desta maneira, encontramos n tal que $M = B(x_1; \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n; \epsilon)$, ou obtemos uma sequência de (x_n) tal que $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$ para $m \neq n$ quaisquer. Neste caso, nenhuma subsequência de (x_n) seria convergente. Portanto, isto não ocorre e M é totalmente limitado.

4) $\Rightarrow$ 1). Seja M um espaço métrico completo e totalmente limitado. Suponhamos por absurdo, que existe uma cobertura aberta $M = \cup A_\lambda$ que não possui subcobertura finita. Sendo M totalmente limitado, podemos escrever M como a reunião de um número finito de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro menor do que 1. Pelo menos um desses subconjuntos, digamos X_1 é tal que $X_1 \subset \cup A_\lambda$ não admite subcobertura finita. Agora, X_1 também é totalmente limitado, logo pode ser expresso como a reunião finita de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro menor que $\dfrac{1}{2}$. Ao menos um desses conjuntos, digamos X_2, não pode ser coberto por um número finito de A_λ. Prosseguindo, desta maneira obtemos uma sequência $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados de M, onde diam $X_n < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e X_n não está contido numa reunião finita dos $A'_\lambda s$. Em particular, nenhum X_n é vazio. Assim, pela Proposição 3.4, existe $a \in M$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_n = \{a\}.$$

Para algum λ, tem-se que $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, deve-se ter a bola aberta

$$B\left(a; \frac{1}{n}\right) \subset A_\lambda$$

para algum n. Como $a \in X_n$ e diam $X_n < \frac{1}{n}$, concluímos que

$$X_n \subset B\left(a; \frac{1}{n}\right),$$

donde $X_n \subset A_\lambda$, o que é uma contradição. Portanto, M é compacto.

■

4.1.1 Compacidade em $\mathbb{R}^n$

Nessa seção estudaremo alguns resultados a fim de caracterizar os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ como sendo, aqueles que são fechados e limitados.

Teorema 4.21. ***(Heine-Borel)*** *Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Demonstração: De fato, seja $K \subset \mathbb{R}^n$ limitado e fechado $\Leftrightarrow$ K é totalmente limitado e completo (pelo Exemplo 4.18 e pela Proposição 4.20) $\Leftrightarrow$ K é compacto. ■

Corolário 4.22. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fecho compacto se, e somente se, é limitado.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{X}$ é compacto e como $X \subset \overline{X}$ segue que X é totalmente limitado. Portanto, é limitado pelo Exemplo 4.18. Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Sabe-se que diam $X = \text{diam}\overline{X}$, então $\overline{X}$ é limitado e fechado, ou seja, $\overline{X}$ é compacto. ■

A definição seguinte nos dá mais uma caracterização para os espaços métricos compactos a partir de limite de sequências:

Definição 4.23. Diz-se que um espaço é sequencialmente compacto quando toda sequência de pontos nele contida possui uma subsequência convergente.

Observe que a Proposição 4.20 garante que um espaço métrico é sequencialmente compacto se, e somente se, é compacto.

Exemplo 4.24. A esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$ e a bola fechada unitária $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1\}$ são fechadas e limitadas logo, pelo Teorema 4.21, são compactas.

4.1.2 Compacidade em espaços vetoriais normados

Uma classe especial de espaços métricos são os espaços vetoriais normados, onde estudamos um teorema clássico de Riesz, que garante que os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ são, essencialmente, os únicos espaços normados nos quais as bolas fechadas são compactas.

Definição 4.25. Uma bijeção $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dita um isomorfismo topológico se $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Nesse caso, dizemos que E e F são topologicamente isomorfos.

Lema 4.26. ***(Hausdorff)*** *Quaisquer dois espaços normados de dimensão n são topologicamente isomorfos.*

Demonstração: Seja E um espaço normado de dimensão $n \in \mathbb{N}^*$. Considere as seguintes aplicações: $T : E \to \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \to V$ e $T \circ F : E \to F$. Note que a composição de dois isomorfismos topológicos também é um isomorfismo topológico, pois trata-se de composição de funções contínuas, onde a continuidade é preservada assim como a composição de aplicações lineares que preserva a linearidade. Assim, o enunciado deste lema é equivalente a verificarmos que E e $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_0)$ são topologicamente isomorfos, onde

$$||x||_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. De fato, seja $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E e definamos

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \to & E \\ & x & \mapsto & T(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \end{array}$$

Observe que T é uma bijeção linear. Com efeito, T é injetiva já que estamos escrevendo os elementos na base então os coeficientes x_i são únicos. Por outro lado, é sobrejetiva pelo fato de todo elemento de E ser escrito como combinação linear dos elementos da base.

Afirmação 1: T é contínua.

De fato, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$||T(x)||_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, ||e_i|| \tag{4.2}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.3}$$

$$= A||x||_0. \tag{4.4}$$

com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $A = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Então, $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Afirmação 2: T^{-1} é contínua.

Consideremos o subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$, dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n ; ||x||_0 = 1\}$$

Por Heine-Borel(Teorema 4.21), temos que S é compacto. Sendo

$$\begin{array}{rcl} f: S & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = ||T(x)||_E \end{array}$$

uma função contínua e sabendo que $f(x) > 0$ para todo $x \in S$, o teorema de Weierstrass (ver Teorema 4.15) garante a existência de $a \in S$ tal que

$$||T(a)||_E = f(a) = \min\{f(x); x \in S\}$$

Seja $B = ||T(a)|| > 0$, segue que

$$||T(x)||_E \geq B||x||_0$$

para todo $x \in E$, isto é, $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Consequentemente, E e $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_0)$ são topologicamente isomorfos.

■

Lema 4.27. *Seja E um espaço vetorial normado, com $\dim E = N$. Se $X \subset E$ é limitado, então X é totalmente limitado.*

Demonstração: Pelo Lema 4.26, existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^n \to E$. Assim, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$||T(x)||_E \leq c_1||x||_0;\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } ||T^{-1}(x)||_0 \leq c_2||x||_E\ \forall; y \in E. \tag{4.5}$$

Desta forma, como X é limitado em E, $T^{-1}(X)$ é limitado em $\mathbb{R}^n$, logo existe $r > 0$ de modo que $T^{-1}(X) \subset B[0, r]$. Agora, note que $B[0, r] \subset \bigcup\limits_{x \in B[0,r]} B(x; \frac{\varepsilon}{2c_2})$, seja qual for $\varepsilon > 0$ previamente fixado. Como $B[0, r]$ é compacta em $\mathbb{R}^n$, existem $x_1, \ldots, x_k \in B[0, r]$ de modo que

$$\begin{aligned} T_{-1}(X) \subset B[0, r] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i; \frac{\varepsilon}{2c_2}\right) \ &\Rightarrow\ T(T_{-1}(X)) \subset T\left(\bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i; \frac{\varepsilon}{2c_2}\right)\right) \\ &\Rightarrow\ X \subset \bigcup_{i=1}^{k} T\left(B\left(x_i; \frac{\varepsilon}{2c_2}\right)\right). \end{aligned}$$

Uma vez que diam $\left(B\left(x_i; \dfrac{\varepsilon}{2c_2}\right)\right) = \frac{\varepsilon}{c_2}$, temos que diam $T(B(x_i; \frac{\varepsilon}{2c_2})) \leq \varepsilon$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Portanto, X é totalmente limitado. ■

Lema 4.28. ***(Riesz)*** *Sejam E um espaço normado e M um subespaço fechado de E, com $M \neq E$. Então, dado $\theta \in (0, 1)$, existe $y \in E$, com $||y|| = 1$, tal que*

$$||y - x|| \geq \theta$$

para todo $x \in M$.

Demonstração: Seja $S_E = \{x \in E; ||x||_0 = 1\}$. Como $M \neq E$, consideremos $y_0 \in E \backslash M$. Sendo M é um subespaço fechado de E, temos que

$$g := d(y_0; M) = \inf\{||y_0 - x||; x \in M\} > 0.$$

Note que, $g < \frac{g}{\theta}$. Assim, obtemos $x_0 \in M$ tal que

$$g < ||y_0 - x_0|| < \frac{g}{\theta}.$$

Considere $y = \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} \in S_E$. Daí, para cada $x \in M$, temos que

$$||y - x|| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} - x \right\| = \frac{||y_0 - (x_0 + x||y_0 - x_0||)||}{||y_0 - x_0||} \geq \frac{g}{||y_0 - x_0||} > \theta.$$

Visto que, $(x_0 + x||y_0 - x_0||) \in M$. Segue que, $||y - x|| \geq \theta$ para todo $x \in M$. ■

Agora apresentamos o principal resultado desta seção:

Teorema 4.29. ***(Riesz)*** *Seja E um espaço normado. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *E tem dimensão finita;*
2. *$B_E := B[0; 1] = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de E.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) De fato, como E tem dimensão finita, pelo Lema 4.28, tem-se que E é completo. Assim, a bola fechada B_E no espaço completo é completa, pela Proprosição 3.3.. Além disso, no espaço de dimensão finita, é totalmente limitada pelo Lema 4.28. Portanto, B_E é compacta, pela Proprosição 4.20.
(2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que E tenha dimensão infinita. Tomemos $x_1 \in E$, com $||x_1|| = 1$, e seja M_1 o espaço gerado por x_1. Como E tem dimensão infinita, $M_1 \neq E$. Assim, segue do Lema 4.28 que existe $x_2 \in E$, com $||x_2|| = 1$, tal que

$$||x_2 - x|| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $x \in M_1$. Em particular,

$$||x_2 - x_1|| \geq \frac{1}{2}.$$

Agora, seja M_2 o espaço gerado por x_1 e x_2. Como $M_2 \neq M$, aplicando novamente o Lema 4.28, obtemos $x_3 \in E$, com $||x_3|| = 1$, tal que

$$||x_3 - x|| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $x \in M_2$. Em particular,

$$||x_3 - x_j|| \geq \frac{1}{2}$$

onde $j \in \{1, 2\}$. Prosseguindo dessa forma, obtemos indutivamente uma sequência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ em

$$S_E = \{x \in F; ||x|| = 1\} \subset B_E$$

de tal forma que

$$||x_j - x_k|| \geq \frac{1}{2}$$

para quaisquer $j, k \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ não possui subsequência convergentes. Pela Proposição 4.20, B_E não é um subconjunto compacto de E. Equivalentemente, se B_E for um subconjunto compacto de E, então dim $E < \infty$. ■

Exemplo 4.30. O espaço normado l^2, possui dimensão infinita.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ consideremos

$$e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{n-ésimo termo}}, 0, \dots, 0, \dots) \in l^2.$$

Assim, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência na bola fechada unitária de l^2. Além disso, dados $m, n \in \mathbb{N}^*$, com $m > n$, temos

$$||e_m - e_n||_2^2 = ||(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{m-ésimo termo}}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{n-ésimo termo}}, 0, \dots)||_2^2 = 2.$$

O que significa que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ não possui subsequências convergentes. Portanto, a Proposição 4.20 e o Teorema de Riesz 4.29 asseguram que l^2 tem dimensão infinita.

Considerações Finais

Neste trabalho nos baseamos no estudo da teoria dos espaços métricos, mais especificamente, apresentamos resultados e noções topológicas em espaços métricos nos quais é possível realizar caracterizações de alguns conceitos, permitindo desta maneira, interpretações diferentes para os mesmos bem como novas visões matemáticas que fogem das intuitivamente comuns. Desse modo, cumprimos os objetivos previamente estabelecidos os quais nos direcionaram a perceber a importância do estudo de resultados clássicos da análise matemática e suas generalizações. Ademais, nos possibilitou um embasamento teórico para dar continuidade à minha formação em um curso de Pós-graduação.

Referências Bibliográficas

[1] Fernandez, Cecília de Souza. Silva, Luiz Alberto Viana da. *Sobre a Noção de Compacidade*. Colóquio da Região Nordeste, III, 2014.

[2] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[3] LIMA, E.L. **Elementos de Topologia Geral**: 5.ed. Rio de Janeiro: SBM,2009.

[4] LIMA, E.L. **Análise Real**, Vol 1: 12.ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2016.

[5] LUNKES, Aline Lurdes Z. **Espaços métricos - uma introdução**. 2015. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2015.

[6] Wikipédia - Maurice Frechét. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Maurice_Fr>. Acesso em 08 de março de 2020.