UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MARIA EDUARDA NUNES DE OLIVEIRA

SIGNIFICADOS ATRIBUÍDOS AO SINAL DE IGUALDADE EM SENTENÇAS DE ADIÇÃO POR ESTUDANTES DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Recife
2022

MARIA EDUARDA NUNES DE OLIVEIRA

SIGNIFICADOS ATRIBUÍDOS AO SINAL DE IGUALDADE EM SENTENÇAS DE ADIÇÃO POR ESTUDANTES DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de Concentração: Ensino (Matemática)

Orientador (a): Profª. Drª. Elisângela Bastos de Melo Espíndola

Recife
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48s Oliveira, Maria Eduarda Nunes de
Significados atribuídos ao sinal de igualdade em sentenças de adição por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental / Maria Eduarda Nunes de Oliveira. - 2022.
44 f. : il.

Orientadora: Elisangela Bastos de Melo Espindola.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2022.

1. Sentenças de adição. 2. Sinal de igualdade. 3. Ensino Fundamental. I. Espindola, Elisangela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 510

MARIA EDUARDA NUNES DE OLIVEIRA

Significados atribuídos ao sinal de igualdade em sentenças de adição por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental

Monografia de conclusão de curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Aprovado em 09 de junho de 2022.Conceito

final: 10,0

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dr.ª Elisângela Bastos de Melo Espíndola

Professora adjunta do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco (Orientadora)

____

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida

Professor adjunto do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco (Examinador Interno)

____

Prof.ª Dr.ª Juliana Martins

(Examinadora Externa)

RECIFE
2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar saúde e força para superar as dificuldades.

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Elisângela Bastos de Melo Espíndola pela paciência com que me guiou nesta trajetória. Obrigada pelo acolhimento, apoio e incentivo, sem o seu auxílio eu não teria conseguido.

Agradeço aos meus pais, Djanir Nunes Rodrigues de Oliveira e Nelson Cavalcanti de Oliveira, por terem acreditado em mim desde o princípio, me incentivado a continuar nos momentos mais difíceis e pelo amor incondicional.

Aos amigos que encontrei na universidade, em especial Maria Clara, Vinícius Soares, Tatianne Gervásio, Érick Caetano e Matheus Almeida, por terem tornado a graduação mais leve e compartilhar os momentos de felicidade e apreensão.

Aos meus melhores amigos, Alícya Bessone e Manoel Cariele, que estiveram ao meu lado desde o Ensino Médio, agradeço pelo carinho e apoio durante esses anos.

Ao meu namorado, Jamerson Silva Lira, por todo carinho, compreensão e incentivo.

Agradeço aos demais que cruzaram meu caminho e contribuíram positivamente na minha caminhada.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar os significados atribuídos ao sinal de igualdade em sentenças de adição por estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Para tanto, tomamos como referência teórico-metodológica estudos que discutem os significados do sinal de igualdade em uma perspectiva operacional e relacional. A coleta de dados foi realizada a partir de um teste com cinco questões com sentenças de adição, ele foi aplicado em duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede privada, uma localizada em Olinda – PE e outra em Recife – PE. Participaram da pesquisa 19 estudantes. Os resultados do teste apontam que a maioria dos estudantes, que errou a resolução das sentenças, apresentou a noção do sinal de igualdade operacional, por entenderem que o sinal de igual é uma indicação direta do resultado de uma operação, isto é, "operação = resultado". Para os que atribuíram o significado, em perspectiva relacional, identificamos que a maior parte deles utilizou procedimentos aritméticos tanto para determinar o termo desconhecido, como para determinar se a sentença seria verdadeira ou falsa, demonstrando dependência da realização das operações aritméticas envolvidas na resolução das sentenças de adição.

Palavras-chave: Sentenças de adição; Sinal de igualdade; Relacional; Operacional; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This research aims to analyze the meanings attributed by students of the 6th year of Elementary School on the equal sign in the resolution of addition sentences. In order to do so, we take as a theoretical-methodological reference studies that discuss the meanings of the equal sign in an operational and relational perspective. Data collection was performed using a diagnostic test with five questions with addition sentences. The test was applied in two classes of the 6th year of Elementary School in two private schools, one located in Olinda – PE and the other in Recife – PE. 19 students participated in the research. The test results show that most students, who made mistakes in solving sentences, presented the notion of the operational equality sign, as they understand that the equal sign is a direct indication of the result of an operation, that is, “operation = result". For those who attributed the meaning, in a relational perspective, to the equal sign, we can identify that most of them used arithmetic procedures both to determine the unknown term and to determine whether the sentence would be true or false, demonstrating dependence on the performance of arithmetic operations. involved in solving addition sentences.

Keywords: Addition sentences; Equals sign; Relational; Operational; Elementary School.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Este trabalho aprofunda uma investigação desenvolvida no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC 2019/2020 da Universidade Federal Rural de Pernambuco intitulado "*Pensamento algébrico: uma análise em livros didáticos do ensino fundamental*", inserida no projeto de pesquisa "*Trabalho documental docente: recursos dos (as)/para professores (as) de Matemática*".

No referido projeto do PIBIC, interessamo-nos em identificar como a habilidade, prescrita respectivamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e no Currículo de Pernambuco (C-PE) (PERNAMBUCO, 2020) "(EF06MA14) / (EF06MA14PE) - Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas", são propostas em livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental.

A motivação do projeto do PIBIC em torno de livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental (EF) surgiu por compreendermos, de uma parte, que este ano concentra a transição dos anos iniciais para os anos finais e é assim revelador de vários aspectos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática que os alunos tiveram acesso no início de sua vida escolar. De outra parte, consideramos que neste ano de transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental, ocorrem continuidades e rupturas entre os domínios da Álgebra e da Aritmética.

> Na perspectiva de continuidade, pelo menos parcialmente, as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino fundamental, na resolução de equações são herdadas de uma compreensão insuficiente das operações inversas com números inteiros. Enquanto a ruptura, refere-se à questões de "sintaxe" relacionadas aos diferentes usos das letras e as diferentes funções do sinal de igual (=) na aritmética e na álgebra (TELES, 2004, p.1).

De acordo com Pernambuco (2019, p.56): "O processo de transição da fase dos anos iniciais para a fase dos anos finais, da etapa do ensino fundamental, requer uma atenção cuidadosa para a sua especificidade, pois esta última deverá consolidar o caminho alicerçado na fase anterior". Neste sentido, apresentamos no tópico 1.1 a habilidade prescrita na BNCC EF06MA14 e no Currículo de Pernambuco EF06MA14PE na unidade temática Álgebra a fim de melhor compreendermos as atividades que são propostas nos LD do 6º ano (item 1.2) e que serviram de base para a presente pesquisa acerca dos significados atribuídos por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre o sinal de igualdade na resolução de sentenças de adição.

1.2 HABILIDADES DA BNCC E DO CP PRESCRITAS AO ENSINO DE ÁLGEBRA

De acordo com as orientações metodológicas do Currículo de Pernambuco:

> Deve ficar clara a importância de se compreender os significados do sinal de igualdade para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Uma compreensão relacional do sinal de igualdade implica entender que ele representa uma relação de equivalência. Nos anos iniciais, essa relação é, muitas vezes, interpretada como significando "é a mesma quantidade que" ao expressar uma relação entre quantidades equivalentes. Quando se explora a equivalência, os estudantes precisam saber que 8 = 8 e 8 = 3 + 5 são escritas verdadeiras e que 8 + 3 = 11 + 8 é falso, já que 8 + 3 e 11 + 8 não são equivalentes (PERNAMBUCO, 2019b, p.32).

No Quadro 1 expomos as habilidades presentes na BNCC e CP sobre o ensino de Álgebra do 3º ao 6º ano do Ensino Fundamental, particularmente, sobre os objetos de conhecimento: noção de equivalência, relações e propriedades de igualdade.

Quadro 1 – Habilidades da BNCC e CP prescritas para Álgebra

	Objetos de conhecimento	**Conteúdos**	**Habilidades**
3º ano	Relação de igualdade	Compreensão do conceito de igualdade em diferentes sentenças de adições e subtrações de dois números naturais; Compreensão do sentido de equivalência na igualdade; Interpretação do sinal de igualdade como equivalência; Identificação do sentido de igualdade em uma operação numérica de adição; Escrita de diferentes sentenças de adições e subtrações com ideia de igualdade; Noção de igualdade em uma situação-problema, envolvendo equilíbrio.	(EF03MA11) / (EF03MA11PE): Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença ***(por exemplo, 3 + 4 = 7, então 7 = 3 + 4, indicando sentido de equivalência na igualdade; ou ainda a ideia de que é possível que adições e subtrações entre números diferentes deem o mesmo resultado. Assim 15 – 10 = 5, 25 – 20 = 5 são subtrações diferentes com resultados iguais. Então 15 – 10 = 25 – 20 ou ainda 30 + 20 = 15 + 35, pois as duas somas são iguais).***
4º ano	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	Uso das relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão na resolução de problemas; Utilização da calculadora quando necessário como meio de investigação entre as relações	(EF04MA13) / (EF04MA13PE): Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão para aplicá-las na resolução de problemas.

		inversas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; Investigação de padrões em operações entre multiplicação e divisão com resto zero com os números naturais.	
	Propriedades da igualdade	Compreensão de que a relação de igualdade existente entre dois termos não se altera quando se adiciona ou subtrai um mesmo número a cada um de seus termos; Resolução e elaboração de problemas em que um dos termos da sentença matemática seja desconhecido; Ideia de igualdade como equivalência; Compreensão que subtrair o mesmo número de dois termos de uma subtração, não altera o resultado; Resolução de problema reconhecendo que uma igualdade não se altera quando se adiciona um mesmo número a seus dois termos; Reconhecimento que uma igualdade não se altera quando se multiplica um mesmo número a seus dois membros; Localização de número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade em adições e subtrações; Localização de número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve multiplicações e divisões com números naturais.	(EF04MA14) / (EF04MA14PE): Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) / (EF04MA15PE): Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	Compreensão das propriedades da igualdade; Investigação e construção da noção de equivalência em situações de adições e subtrações, multiplicações e divisões; Utilização de informações existentes em problemas para descobrir um valor desconhecido em uma igualdade.	(EF05MA10) / (EF05MA10PE): Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

		Utilização das propriedades da igualdade na resolução de problemas; Reconhecimento e uso de informações existentes em situações para descobrir um valor desconhecido em uma igualdade; Resolução e elaboração de problemas em que um dos termos da sentença matemática seja desconhecido; Identificação e resolução de problemas de multiplicação e divisão com estratégias de cálculo mental ou algoritmo; Aplicação de propriedades numéricas para operações equivalentes.	(EF05MA11) / (EF05MA11PE): Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
6º ano	Propriedades da igualdade	– Aplicação dos conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades; – Aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo; – Determinação de elemento desconhecido em uma igualdade matemática envolvendo representação simbólica; – Resolução de problemas envolvendo a equação do 1º grau do tipo ax + b = c, no conjunto dos números naturais, por meio de tentativa, princípio da igualdade e/ou técnica de equivalência.	(EF06MA14) / (EF06MA14PE): Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. ***(por exemplo, explorando a metáfora da balança).***

Fonte: Brasil (2018); Pernambuco (2019).

Pelo exposto no Quadro 1, os objetos de conhecimento, conteúdos e habilidades previstos para serem estudados no 6º ano, quanto ao estudo dos temas algébricos, relativos à habilidade (EF06MA14) / (EF06MA14PE) são decorrentes daqueles estudados no 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Isto nos remete ao estudo de propriedades de igualdade e princípios de equivalência. Com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018), uma igualdade apresenta as propriedades:

- 1ª propriedade: $a = a$, para qualquer a. Essa é a propriedade reflexiva.
- 2ª propriedade: $a = b \Leftrightarrow b = a$, para quaisquer a e b. Essa é a propriedade simétrica.
- 3ª propriedade: $a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$, para quaisquer a, b e c. Essa é a propriedade transitiva.

O princípio aditivo e o princípio multiplicativo são chamados de princípios de equivalência.

1º) Princípio Aditivo da Igualdade

> Se a=b então a + c=b + c ∈ Q e vice e versa. Se a + c=b + c então a=b a=b então a + c=b + c quaisquer que sejam a, b, c ∈ * Q
> “Somando-se a ambos os membros de uma equação a mesma expressão, obtém-se uma
> equação equivalente à dada.” (ZARDO, 2006, p. 25).

2º) Princípio Multiplicativo da Igualdade

> Se a=b então a.c=b.c e vice-versa
> Se a.c=b.c então a=b ou a=b então a.c=b.c quaisquer que sejam a, b, c ∈ * Q
> “Multiplicando a ambos os membros de uma equação por um mesmo número (diferente de zero), obtém-se uma equação equivalente à dada.” (ZARDO, 2006, p. 25).

Ressaltamos que na BNCC (BRASIL, 2018); não aparece, para o 6º ano, o conteúdo “Resolução de problemas envolvendo a equação do 1º grau do tipo ax + b = c, no conjunto dos números naturais, por meio de tentativa, princípio da igualdade e/ou técnica de equivalência” (Quadro 1). Esse aparece apenas no Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2019). Este fato nos levou a não tomá-la objeto de nosso estudo.

1.3 A HABILIDADE (EF06MA14) / (EF06MA14PE) EM LD DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A pesquisa que realizamos no PIBIC foi do tipo documental e ocorreu em três LD do 6º ano do EF, de coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2020 (Matemática, Compreensão e Prática; Geração Alpha; Mais Matemática).

> O primeiro nesse nível de ensino em que a análise dos livros foi pautada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento curricular nacional, de caráter normativo, que está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Destarte, o objetivo do trabalho avaliativo foi garantir que os materiais contribuam para o desenvolvimento das competências e habilidades envolvidas no processo de aprendizagem nos anos finais do ensino fundamental, conforme definidas na BNCC (BRASIL, 2019, p.4).

No Quadro 2 apresentamos como o **LD da Coleção Geração Alpha** propõe as atividades referentes à determinação do termo desconhecido envolvendo a adição:

Quadro 2 – Atividade sobre o termo desconhecido – Coleção Geração Alpha

Questão 17. Escreva o número que torna cada igualdade verdadeira.

a) 12 + 8 + 7 = 15 + 5 + $\square$ **b)** 32 + 6 + 2 = 20 + 18 + $\square$ **c)** 150 + 372 + 281 = 222 + 300 + $\square$ **d)** 1285 + 315 + 2178 = 1200 + 400 + $\square$

Fonte: Oliveira e Fugita (2018, p.29).

Sobre a atividade proposta no Quadro 2, Oliveira e Fugita (2018) propõem: "Escreva o número que torna cada igualdade verdadeira". Consideramos que para respondê-la, os estudantes podem desenvolver os seguintes procedimentos:

- Na Questão 17 – Supomos que se o estudante inicia a adição das três parcelas do primeiro membro, ele fará uso da propriedade associativa para encontrar a soma ou total dessas. Ou seja, ele pode adicionar, por exemplo, no item a: (12+8) + 7, 12 + (8 +7) ou (12+7) +8. E, depois, realizar a soma das duas parcelas que estão no segundo membro, para então perceber quanto falta para tornar a igualdade verdadeira.
- Se ele optar por responder inicialmente as duas primeiras parcelas do segundo membro (ex.: item a, 15 +5) e depois somar as duas primeiras parcelas do primeiro membro (ex: item a, 12+8), logo pode perceber que 15 +5 = 12+8, sendo então necessário apenas colocar "7" para completar a igualdade. Fato semelhante ocorre nos demais itens.
- O estudante pode ainda perceber, por exemplo no item "a", o total 27 de um lado e o total 20 do outro, e então chegar à conclusão que "falta" 7, deste segundo lado.

No Quadro 3, expomos as atividades propostas no **LD** – **Coleção Araribá Mais Matemática**.

Quadro 3 – Atividade sobre o termo desconhecido – Coleção Araribá Mais Matemática

Que número deve ser colocado no lugar de $\square$ para que cada lado da igualdade tenha o mesmo valor? a) 5 + 7 = 15 - $\square$ b) 13 + $\square$ = 5. 4 c) 45 - $\square$ = 7 + 8 d) 77+ $\square$ = 77 + 19

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 69).

No Quadro 3, no caso dos itens "a e c", consideramos a possibilidade de os estudantes somarem as parcelas do primeiro membro ou do segundo membro, isto é, daqueles que não apresentam o "$\square$". E, em seguida, indicar o valor do "$\square$" decorrente da subtração do número que se encontra no outro membro. No item "c" o estudante é levado a primeiro multiplicar "5 x 4” e depois calcular mentalmente quanto precisa adicionar a 13 para se ter o valor igual a 20. No caso do item “d”, parece ficar evidente que basta ao aluno acrescentar o número que se encontra, na mesma posição, no outro membro da igualdade.

Ainda no **LD** – **Coleção Araribá Mais Matemática** foi apresentada a questão 5 (Quadro 4), com orientações específicas ao professor.

Quadro 4 – Atividade com sugestão para o professor – LD – Coleção Araribá Mais Matemática

Questão 5: Descubra o valor da letra em cada caso. a) 139 + a = 462 b) 257 - b = 123
Orientações específicas ao professor: Para a resolução da atividade, podemos proceder da seguinte maneira a) 139 + a = 462 → subtrai-se 139 de cada membro da igualdade 139 + a - 139 = 462 – 139 a = 323 b) 257 - b = 123 Nesse caso, podemos pensar na relação entre adição e subtração vista anteriormente. 257 - b = 123 equivale a b + 123 = 257, assim: b + 123 = 257 → subtrai-se 123 em cada membro b + 123 - 123 = 257 - 123 b = 134

Fonte: Gay e Silva (2018 p. 70).

Na atividade do Quadro 5, podemos perceber uma mudança na representação simbólica do “□” para letra. Este tipo de atividade só é apresentada neste LD.

No **LD da Coleção Matemática Compreensão e Prática** foram apresentadas as questões expostas no quadro a seguir:

Quadro 5 – Atividade sobre o termo desconhecimento – Coleção Matemática Compreensão e Prática

Questão 3 : Descubra o número desconhecido nas sentenças matemáticas a seguir. a) □ + 10 = 15 b) 2 . □ + 3 = 10 + 5 c) 14 - 2 = 10 + □

Fonte: Silveira (2018, p. 98).

Na questão 3 (Quadro 5), consideramos que o item “a”, leva o estudante a calcular mentalmente quanto precisa adicionar a 10 para obter o valor 15. Nos itens “b” e “c” a ideia de calcular a adição ou subtração de um dos membros para depois calcular o valor do “□” indica uma tendência de enfatizar os cálculos aritméticos como ocorreu também na Coleção Araribá Mais Matemática. Diferentemente, consideramos que a Coleção Geração Alpha, apresenta uma maior possibilidade de os alunos pensarem algebricamente o valor do “$\square$”.

Diante das habilidades apresentadas na BNCC e no C-PE, do 3º ao 5º ano e na pesquisa documental que realizamos sobre as atividades propostas nos LD para a habilidade EF06MA14) / (EF06MA14PE nos interessamos em realizar uma sondagem com os alunos do 6º ano em torno dos seguintes objetivos de pesquisa:

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo geral

- Analisar os significados atribuídos ao sinal de igualdade em sentenças de adição por estudantes do 6º ano do ensino fundamental.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar e discutir as estratégias de resolução de sentenças de adição que envolvem a noção de equivalência do sinal de igualdade e o cálculo do termo desconhecido em sentenças de adição.

Para atingir esses objetivos, desenvolvemos mais três capítulos como apresentamos a seguir.

1.5 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Neste capítulo de Introdução buscamos situar a motivação da presente pesquisa a partir de outros estudos que realizamos no PIBIC em torno do levantamento de atividades propostas nos LD para a habilidade EF06MA14 / EF06MA14PE.

No segundo capítulo apresentamos os significados de igualdade na álgebra e aprofundamos a noção operacional e relacional do sinal de igualdade. Por fim, expomos as propriedades de igualdade e princípios de equivalência.

No terceiro capítulo apresentamos a metodologia da pesquisa e das ferramentas utilizadas para a construção e análise dos dados.

No quarto capítulo abordamos os resultados e discussões da pesquisa. Por fim, tecemos algumas considerações sobre os limites e outras perspectivas investigativas a partir dos resultados obtidos no presente trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos algumas considerações sobre o significado de igualdade na álgebra e aprofundamos a noção operacional e relacional do sinal de igualdade. Por fim, expomos as propriedades de igualdade e princípios de equivalência.

2.1 O SIGNIFICADO DO SINAL DE IGUALDADE

Concordamos com Ciani et al. (2017, p.1) quando afirmam que o símbolo da igualdade “talvez seja um dos símbolos mais utilizados na Matemática, desde os anos iniciais até o ensino superior. Quase sempre não lhe é dada a devida importância e atenção à sua utilização e nem lhe é atribuída a “culpa” por erros graves na resolução de questões matemáticas”.

Segundo o Ministère de l’Éducation de l’Ontario (2003, p. 36, tradução nossa), “o símbolo de igualdade é um sinal universalmente conhecido, mas muitas vezes mal interpretado por muitos alunos que percebem o sinal = como o símbolo que sempre precede, em frases matemáticas, a resposta a um cálculo da esquerda para a direita”[1].

De acordo com Cavalcanti e Câmara dos Santos (2013, p. 1) “na literatura encontramos estudos que discutem, basicamente, duas noções diferentes do sinal de igualdade. Uma noção ‘operacional’, e outra relacional envolvendo a ideia de ‘equivalência’”. Na Figura 1 apresentamos um melhor detalhamento dessas duas noções.

Figura 1 – Resumo com as principais concepções averiguadas por Cavalcanti (2008)

Contextos	Categorias de análise (a priori)	Expressões (exemplos)	Principal finalidade do símbolo “=”	Principais características do símbolo “=”
Operações aritméticas	Concepção Operacional	8 + 7 = 8 + 7 + 5 + 9 =	Indicar um cálculo a ser realizado, ou, o local do resultado.	Aspecto assimétrico (um lado é dado, o outro precisa ser preenchido/encontrado)
Igualdades aritméticas	Concepção Igualdade Relacional	6 + 5 = 11 5 + 7 = 4 + 8 15 = 7 + 8	Indicar que o que está no lado direito do “=” é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.	Relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes.

Fonte: Matos e Cavalcanti (2010).

[1] Le symbole de l’égalité est un signe universellement connu, mais souvent mal interprété par de nombreux élèves qui perçoivent le signe = comme le symbole qui précède toujours, dans les phrases mathématiques, la réponse à un calcul de gauche à droite (MINISTÈRE DE L’ÉDUCATION DE L’ONTARIO, 2003, p. 36).

Gomes e Noronha (2022, p. 14) também afirmam que existem duas concepções distintas do sinal de igualdade e que, “a compreensão da noção de equivalência se torna relevante desde a infância, por possibilitar que os sujeitos façam deduções, relacionem, busquem, compreendam e registrem diferentes significados simbólicos e numéricos”. No entanto, constantemente, a concepção operacional é transmitida durante os anos iniciais e a relacional durante os anos finais. Na Figura 2 temos alguns exemplos.

Figura 2 – Significados do símbolo de igualdade

Concepção	**Definição**	**Exemplo**
Operador	O símbolo de igualdade indica a realização direta de uma operação e exposição do seu resultado. Ou seja, no local após o símbolo de igual, deve ser escrito o resultado da operação. A igualdade, então, ganha um sentido de "operador". Noção unidirecional (MOLINA, 2006) $4 + ? = 12$	$2 + 6 = 8$
Equivalência	O símbolo de igualdade indica a comparação, ou equivalência entre dois membros de uma expressão. Noção bidirecional (MOLINA, 2006): $4 + 8 = 12 + 0$	$2 + 6 = 3 + 5$ $8 = 8$

Fonte: Gomes e Noronha (2022).

Bandarra (2011) também discute que existem duas interpretações em relação ao significado da igualdade, sendo a operacional, na qual o aluno considera que o sinal representa dar a resposta da operação, e a relacional, que representa a noção de equivalência submetida a esse sinal.

Particularmente, sobre sentenças de adição, Molina (2006), propõe seis tipos de definições para a igualdade relacionadas a diferentes tipos de sentenças, como podemos ver na Figura 3.

Figura 3 – Tipos de igualdade e sentenças matemáticas

Tipo		Definición	Ejemplos
Igualdad	Abierta	Igualdad incompleta (con un término a averiguar)	23 + $\square$ = 30 10 + $\square$ = 15 + 15
	Cerrada	Igualdad completa (sin términos desconocidos)	5 + 7 = 12 12 + 11 = 11 + 12
Sentencia	Verdadera	Proposición verdadera que contiene el signo igual	
	Falsa	Proposición falsa que contiene el signo igual	9 = 5 + 5 13 + 5 = 14 + 6
Igualdad o Sentencia	De acción	Igualdad o sentencia con operaciones en sólo un lado del signo igual	13 – 7 = 6 34 = $\square$ + 34
	De no-acción	Igualdad o sentencia con operaciones en ambos lados del signo igual o en ninguno de ellos	3 + 5 = $\square$ + 1 3 = 3

Fonte: Molina (2006).

Os exemplos propostos por Molina (2003) consideram como igualdade aberta aquela que apresenta algum termo desconhecido, e igualdade numérica fechada, a que não apresenta, isto é, todos os termos são conhecidos. Dentre as igualdades fechadas, têm-se as sentenças verdadeiras, que são proposições verdadeiras que possuem o sinal de igual. A principal diferença entre uma sentença e uma igualdade, é que uma sentença pode ser falsa enquanto a igualdade não.

No tópico 2.1.1 aprofundamos a noção operacional do sinal de igualdade e logo após, no tópico 2.1.2 a noção relacional.

2.1.1 A noção operacional do sinal de igualdade

Para Cavalcanti e Câmara dos Santos (2013, p. 1) “comumente, o primeiro contato dos alunos com o símbolo ‘=’ acontece por meio de atividades envolvendo igualdades ‘aritméticas’, e, durante um bom tempo, as operações aritméticas são, particularmente, as situações que caracterizam sentido para o sinal de igualdade”. Neste contexto, o sinal de igualdade costuma ter um sentido operacional. Ou seja: “antes do sinal de igualdade vem sempre uma operação, e, depois do sinal de igualdade aparece uma resposta, que, geralmente é um número” (CAVALCANTI; CÂMARA DOS SANTOS, 2013, p. 3). Por exemplo: “3+ 2 = 5” ou “5 = 3+2” - no primeiro caso, têm-se a sequência ‘operação = resultado’, no segundo, temos a sequência ‘número = operação’ (uma decomposição de um número em uma operação).

Freudenthal (1983) apud Cavalcanti (2008) nos indica que o símbolo “=” em operações como “6 + 8 =” apresenta um aspecto assimétrico. Um dos lados é dado e o outro deve ser completado. Estas operações comumente são interpretadas como tarefas a serem executadas ou como indagações. Por exemplo, “quanto é 1 + 8?” e, “quanto é 15 + 2?” sugerem as tarefas: “some 1 a 8” e “some 15 a 2”. A entonação interrogativa insinua ideias como: “após a tarefa: a execução, após a pergunta: a resposta” (idem).

Para Ciani *et al.* (2017, p.3), a concepção operacional de igualdade é, de maneira geral, apresentada para representar uma igualdade de expressões. “Nas séries iniciais os alunos encontram o símbolo ‘=’ essencialmente em atividades envolvendo operações aritméticas, nas quais, normalmente um lado é dado, e as operações surgem à esquerda do sinal “=”, e o outro precisa ser preenchido indicando o resultado”. Essas autoras acrescentam:

> A concepção operacional é geralmente tratada na aritmética por meio de atividades, que envolvem o sinal de igualdade tão somente, indicando a obtenção de um resultado, como por exemplo, “Maria tem duas rosas e ganhou de presente mais cinco violetas, quantas flores ela tem ao todo?” Ao resolver esta situação, o aluno resolverá somando 2 + 5 = 7. Neste exemplo, percebemos claramente que o sinal de igualdade está posto somente como um operador que transforme as duas quantidades em um resultado final, resolvendo assim o que é solicitado (CIANI *et al.*, 2017, p. 2).

McNeil e Alibali (2005) citado por Bandarra (2011, p. 3) afirmam que:

> A forma limitada como os alunos encaram a utilização do sinal de igual deve-se sobretudo às experiências matemáticas que vivenciam no ensino básico. Segundo estes investigadores, as situações de aprendizagem mais utilizadas resumem-se sobretudo ao cálculo para obter uma resposta numérica (BANDARRA, 2011, p. 3).

Ciani *et al.* (2017, p.3) chamam a atenção que para a aprendizagem da aritmética e da álgebra se faz importante “reconhecer as diferentes concepções do sinal de igualdade e utilizá-lo de forma correta para expressar relações”. Haja vista, “quando os alunos não compreendem o sinal de igualdade na sua totalidade, restringindo apenas a sua noção operacional, limitam-se a memorizar apenas um conjunto de regras” (idem).

2.1.2 A noção relacional de equivalência do sinal de igualdade

A noção relacional de equivalência do sinal de igualdade, de acordo com Cavalcanti e Câmara dos Santos (2013a, p. 4) “envolve a compreensão do símbolo ‘=’ como uma relação estática numa igualdade aritmética ou algébrica. Uma igualdade aritmética ou algébrica deve, assim, apresentar as propriedades de equivalência (simétrica, reflexividade e transitividade)”.

> O raciocínio algébrico é caracterizado por uma maneira de pensar sobre quantidades e padrões em matemática, e uma maneira de justificar os tipos de manipulações que são esperadas realizadas nos símbolos. O pensamento relacional, que é central para o pensamento algébrico, é possível mesmo nas séries iniciais, quando as crianças são convidadas a pensar sobre números de propriedades e como podem tornar seus

> cálculos possíveis. Isso prepara as crianças para justificar conceitualmente a manipulação de símbolos em álgebra (OZANA; ADRIEN, 2012, p. 52-53, tradução nossa)[2].

A noção de equivalência do sinal de igualdade costuma ser realçada com exemplos do equilíbrio da balança. Nesse sentido, Santos, Luvison e Moreira (2018, p. 77) descrevem o tipo de tarefa: "Qual número que pode ser colocado no espaço vazio da igualdade "18 + 12 = 20 + ___?" - como aquela "em que os alunos precisam identificar as relações que existem nos membros de uma igualdade sem utilizar procedimentos algorítmicos".

Segundo Grillo (2018, p.287), na expressão 11 + 16 = 12 - □, espera-se que os alunos usem o raciocínio de compensação. E, como respostas esperadas que; "os alunos estabeleçam relações entre os números, comparando as expressões que se apresentam em ambos os lados do sinal de igual. Nas quatro primeiras expressões, a ordem das parcelas não altera o resultado". Para Ciani et al. (2017):

> A concepção relacional é constatada em situações em que o sinal de igualdade é utilizado para representar uma igualdade de expressões. Segue um exemplo que envolve essa concepção: "Maria possui 5 rosas e Joana 7, considerando que as duas deram 3 flores cada a suas mães, quantas flores Maria precisa para ter o mesmo tanto de Joana?". Com isso, observamos que a igualdade terá significado distinto ao exemplo anterior, sendo aqui, mostrado a noção de equivalência, em que para resolver o aluno chegará na seguinte expressão, □ + 5 − 3 = 7 − 3, na qual ele terá que encontrar resultados iguais nos dois membros (CIANI et al., 2017, p. 3-4).

Santos de Souza e Souza (2018, p. 57) trazem o seguinte exemplo: "Analisando a expressão (6 + 5) + 7 = 6 + (n + 7), que número n representa? Explique o que você fez para determiná-lo". Nesse caso, têm-se como resposta esperada: Os alunos poderiam resolver o problema somando os três números do primeiro membro, 6 + 5 + 7 = 18, e depois os dois do segundo membro, 6 + 7 = 13, o valor de n seria o que resta para 13 chegar a 18, ou seja, 5. E também fazem a seguinte análise: Se assim os alunos procedessem, demonstrariam total dependência da realização das operações contidas na expressão para a resolução da questão. A aritmética generalizada seria evidente se alunos explorassem o aspecto mais geral da estrutura matemática da situação, e relevante para a resolução da questão, neste caso, a propriedade associativa da adição, pois para quaisquer a, b e c reais, (a + b) + c = a + (b + c) (SANTOS de

[2] Le raisonnement algébrique est caractérisé par une manière de penser aux quantités et aux régularités en mathématiques, et par une manière de justifier les types de manipulations qui sont réalisées sur les symboles. La pensée relationnelle, qui est au cœur de la pensée algébrique, est possible, même aux premières années du primaire, quand on demande aux enfants de réfléchir aux propriétés des nombres et à la manière dont elles peuvent rendre leurs calculs possibles. Ceci prépare les enfants à justifier de manière conceptuelle la manipulation des symboles en algèbre (OZANA; ADRIEN, 2012, p. 52-53).

SOUZA; SOUZA, 2018, p. 57). Sobre esse aspecto, afirma Canavarro (2009, p. 89) apud Santos de Souza e Souza (2018, p. 49):

> É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da Álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque ambos constituem 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente).

Com base no que expomos no primeiro e segundo capítulos, buscamos delinear a metodologia do presente trabalho que passamos a apresentar no Capítulo 3.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos os procedimentos de construção e análise de dados. Em torno da aplicação do teste que aplicamos em torno do objetivo da pesquisa: analisar os significados atribuídos por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre o sinal de igualdade na resolução de sentenças de adição

3.1 CARACTERÍSTICAS DA PESQUISA

A presente pesquisa se insere em uma abordagem qualitativa uma vez que as investigações qualitativas são aquelas que estão interessadas em analisar fenômenos em seu ambiente natural. Portanto, os pesquisadores são os principais responsáveis pela geração de dados, focando mais no processo do que no produto (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015).

3.2 CENÁRIO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

Escolhemos em desenvolver a pesquisa no 6º ano do ensino fundamental, por ser o primeiro ano de contato dos alunos com uma série de aspectos que:

> Incidem nas relações entre estudantes e professores. Entre as transformações deflagradoras de mudanças nesses relacionamentos, está a aplicação mais frequente e sistemática de instrumentos avaliativos, a elevação do quantitativo de conteúdos, o acréscimo de componentes curriculares - com decorrente aumento no número de professores, bem como a redução do tempo de convivência entre estes e os estudantes. Como consequência de tudo isso, há um aprofundamento da impessoalização no trato entre os sujeitos envolvidos no ato de ensinar e aprender que apresenta, entre outros reflexos, um maior distanciamento físico e uma dificuldade de construir empatia recíproca (PERNAMBUCO, 2019, p.58).

A pesquisa ocorreu com dezenove estudantes de turmas do 6° ano do Ensino Fundamental em duas escolas da rede privada. Sendo uma escola localizada em Olinda e outra em Recife – Pernambuco.

Os estudantes identificados de 1 ao 13 são da escola localizada em Olinda, enquanto os estudantes com a numeração de 14 ao 19, são da escola localizada em Recife.

No período da pesquisa, primeiro semestre letivo de 2022, as aulas nessas escolas estavam ocorrendo de forma presencial. Ressaltamos que as professoras afirmaram que os estudantes dessas escolas já haviam trabalhado o conteúdo de adição e subtração com números naturais.

3.3 PROCEDIMENTOS PARA APLICAÇÃO DO TESTE DIAGNÓSTICO

O teste elaborado para ser aplicado com os estudantes do 6º ano levou em conta a pesquisa realizada nos livros didáticos que apresentamos na introdução deste trabalho e em especial, os estudos desenvolvidos por Osana e Adrien (2012) e os tipos de sentenças propostos por Molina (2006).

Quadro 6 – Questões propostas aos estudantes do 6° ano

1. Vocês conseguem "de cabeça" responder se esta sentença é verdadeira ou falsa?

   57 + 38 = 56 + 39

2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

   345 + 576 = 342 + 574 + ☐

3. Qual o número que deve ser posto no quadradinho para que a igualdade seja verdadeira?

   8 + 4 = ☐ + 5

4. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

   3 + 1 + 1 = 3 + ☐

5. Qual o número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

   7 + 4 + 169 = 7 + c + 169

Fonte: Adaptado de Osana e Adrien (2012).

A aplicação do teste foi combinada com as professoras de matemática responsáveis pelas duas turmas posteriormente à sua elaboração. Cada uma delas disponibilizou duas aulas que ocorreram no formato presencial para a aplicação.

Na escola localizada em Olinda, treze estudantes responderam ao teste e na escola localizada em Recife, obtivemos seis respostas. A turma de estudantes que estão representados do 1 ao 13, terminou o teste em 24 minutos, enquanto a turma representada do 14 ao 19 respondeu em 30 minutos.

3.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

No processo de análise das questões respondidas pelos estudantes procedemos à verificação de:

a) Quantidade de estudantes que afirmaram ser verdadeira ou falsa a sentença "**57 + 38 = 56 + 39"** e suas justificativas.

Por meio desta questão esperamos que os alunos apresentem a compreensão de que "**57 + 38 = 56 + 39"**, seja calculando as somas, ou pela percepção de que do lado direito foi subtraído o valor 1 (de 57) e adicionado o valor 1 (de 38), o que mantém a igualdade verdadeira.

b) Respostas e justificativas apresentadas pelos estudantes sobre o valor do ☐ na sentença:

345 + 576 = 342 + 574 + ☐.

Esperamos que os estudantes percebam de que do lado direito foi subtraído o valor 3 (de 345) e o valor 2 (de 576); sendo assim, o valor do ☐ para que a igualdade seja verdadeira é 5, isto é, 3+2 =5. Contudo, é provável que calculando separadamente 345 + 576 e depois 342 + 574 e observando que a diferença entre a sentença do lado direito e do lado esquerdo é 5, isto leve os estudantes a concluírem que este é o valor do ☐.

c) Respostas e justificativas dos estudantes sobre o valor do ☐ na sentença:

8 + 4 = ☐ + 5.

Espera-se que o estudante calcule separadamente 8 + 4 = 12 e observe que a diferença entre a sentença do lado esquerdo e a do lado direito é 7, ou seja, quanto ele precisa adicionar ao 5 para ter o valor da sentença do lado direito igual a 12. o estudante conclua que este é o valor do ☐. Ou pela percepção de que do lado direito foi somado o valor 1 (de 4) e por isso deve se subtrair o valor 1 (de 8), o valor do ☐ para que a igualdade seja verdadeira é 7, isto é, 8 - 1 = 7.

d) Respostas e justificativas dos estudantes sobre o valor do ☐ na sentença:

3 + 1 + 1 = 3 + ☐.

Espera-se que o estudante calcule separadamente 3 + 1 + 1 = 5 e observe que a diferença entre a sentença do lado esquerdo e a do lado direito é 2, ou seja, quanto ele precisa adicionar ao 3 para ter o valor da sentença do lado direito igual a 5, e o estudante conclua que este (2) é o valor do ☐. Ou pela percepção de que do lado direito tem-se a repetição do número 3 e por isso deve se somar os valores restantes do lado esquerdo, o valor do ☐ para que a igualdade seja verdadeira é 2, isto é, 1 + 1 = 2.

e) Respostas e justificativas dos estudantes sobre o valor do **"c"** na sentença:

7 + 4 + 169 = 7 + c + 169.

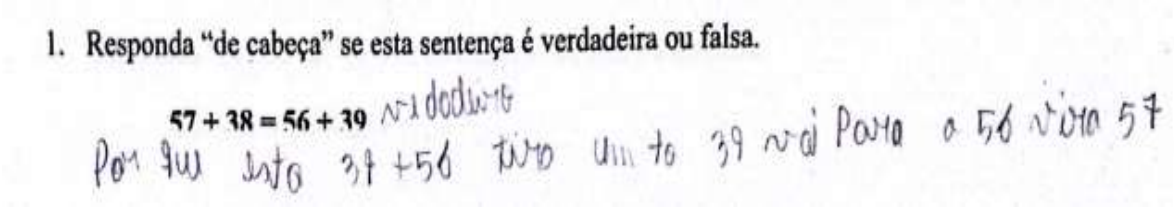
Esperamos que, calculando separadamente 7 + 4 + 169 e depois 7 + 169 e observar que a diferença entre a sentença do lado direito e do lado esquerdo é 4, o que leva o estudante a concluir que este é o valor do ☐. Ou pela percepção de que do lado esquerdo tem-se 7, 4 e 169 e do lado direito temos 7 e 169; sendo assim, o único valor que "falta" é 4, portanto, o valor do ☐ para que a igualdade seja verdadeira é 4.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

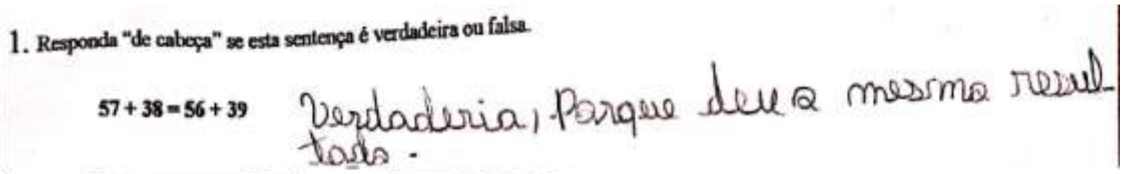
Sobre a ***primeira questão***, 10 (dez) dentre 19 (dezenove) estudantes responderam que a sentença “**57 + 38 = 56 + 39”** é verdadeira**.** Das justificativas apresentadas, podemos perceber que apenas um desses estudantes indicou utilizar a comparação entre os números que foram subtraídos e adicionados em ambos os termos da igualdade: *Estudante 1 - “Porque* está *38 + 56, tira 1 do 38 vai para o 56 vira 57”* (Figura 4). Nesse caso, o estudante faz uso do raciocínio da compensação (GRILLO, 2018) e utiliza a noção de equivalência do sinal de “=”. Enquanto os demais estudantes buscaram somar os números do membro da esquerda (57 +38) e da direita (56 + 39) para constatar a igualdade entre eles. Tal procedimento demonstra que esses estudantes entendem o sinal de igual como uma equivalência, no entanto, têm dependência da realização das operações contidas na expressão para a resolução da questão.

Figura 4 – Justificativa sobre a sentença “**57 + 38 = 56 + 39”** ser verdadeira

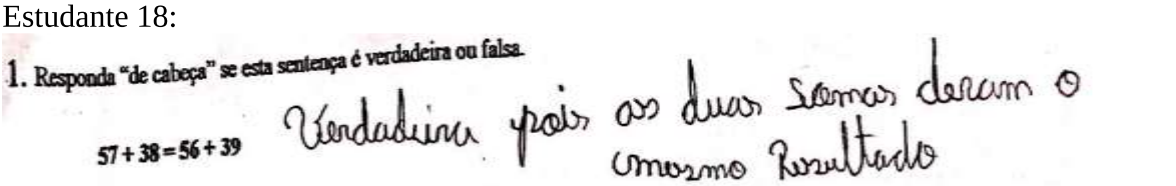
Estudante 1:



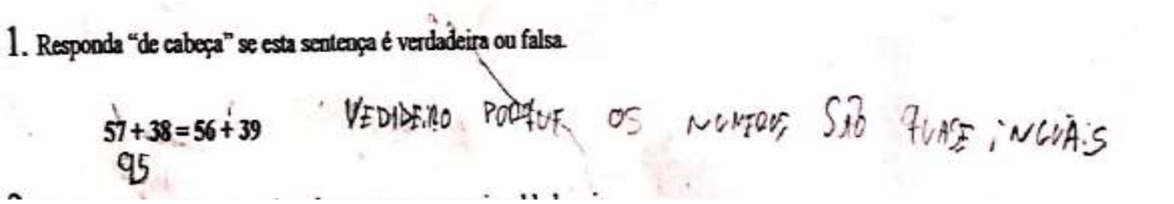
Estudante 17:



Estudante 18:



Estudante 19:

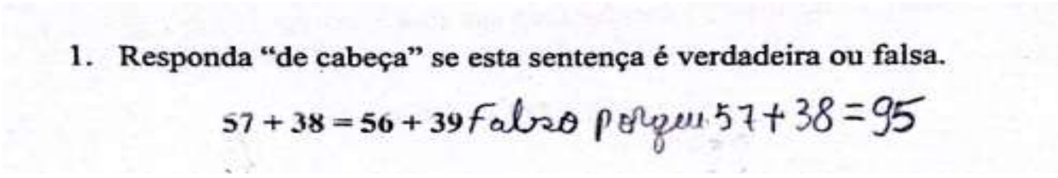


Fonte: Protocolo da pesquisa.

Ainda sobre a ***primeira questão***, um estudante não soube responder e 8 (oito) responderam que a sentença “**57 + 38 = 56 + 39”** é falsa**,** dentre os 8 (oito) estudantes, 5 (cinco) justificaram suas respostas**.** Das justificativas apresentadas pelos estudantes (Figura 5)**,** podemos constatar a falta de compreensão da equivalência entre os membros da esquerda e da direita do sinal de igual. Nesta situação eles apresentaram a concepção errada de que a resposta da adição de dois números vem logo depois do sinal de igual, isto é, “operação = resultado” (CAVALCANTI; CÂMARA DOS SANTOS, 2013), assim, eles somaram 57 + 38 e indicaram o resultado “95”, o que nos remete a um significado operacional do sinal de igual. De outra forma, supomos que alguns estudantes consideram que o resultado de 57 + 38 é diferente de 56 + 39, por apresentarem números diferentes e assim, chegam a esta conclusão sem realizarem a soma de ambos os lados da igualdade para comprovar a resposta. Os demais estudantes não apresentaram justificativa para suas respostas.

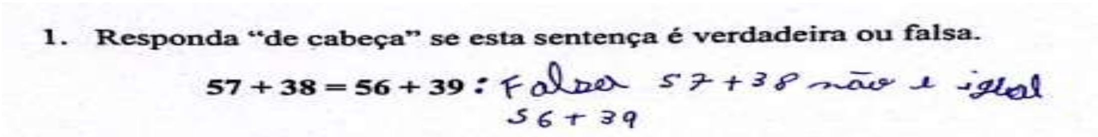
Figura 5 – Justificativas sobre a sentença “**57 + 38 = 56 + 39”** ser falsa

Estudante 2:


1. Responda “de cabeça” se esta sentença é verdadeira ou falsa.

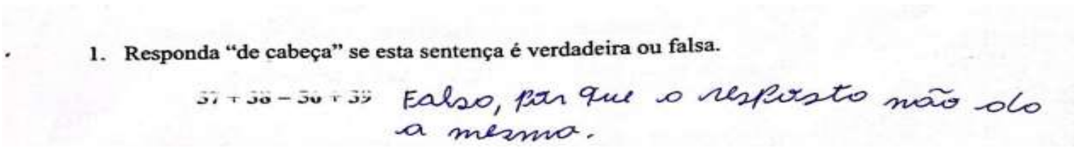
57 + 38 = 56 + 39 Falso porque 57+38=95

Estudante 3:


1. Responda “de cabeça” se esta sentença é verdadeira ou falsa.

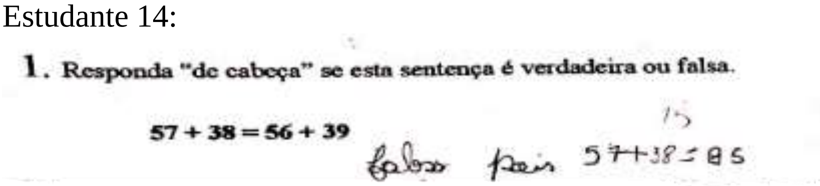
57 + 38 = 56 + 39 : Falso 57+38 não é igual 56+39

Estudante 4:

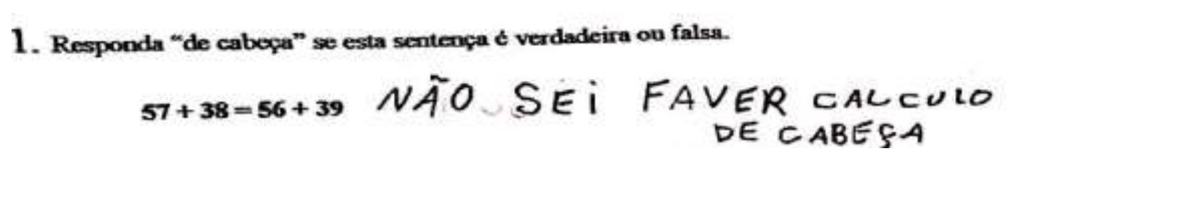

1. Responda “de cabeça” se esta sentença é verdadeira ou falsa.

57 + 38 = 56 + 39 Falso, por que a resposta não da a mesma.

Estudante 14:


1. Responda "de cabeça" se esta sentença é verdadeira ou falsa.

57 + 38 = 56 + 39 falso pois 57+38=85


1. Responda "de cabeça" se esta sentença é verdadeira ou falsa.

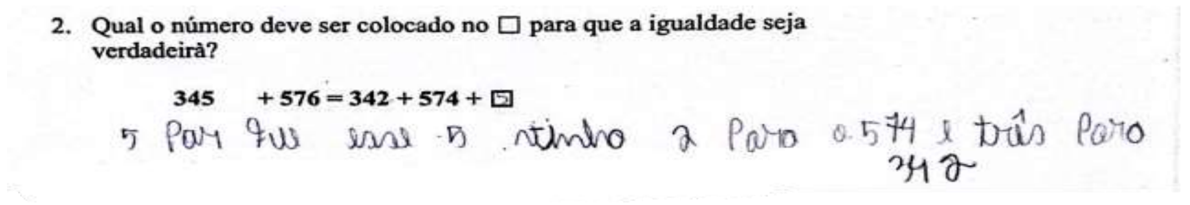
57 + 38 = 56 + 39 NÃO SEI FAVER CALCULO DE CABEÇA

Fonte: Protocolo da pesquisa.

No caso da ***segunda questão***, dos 19 (dezenove) estudantes, 8 (oito) responderam corretamente o valor do ☐ igual a 5 na sentença: **345 + 576 = 342 + 574 + ☐** (Figura 6). Os estudantes que responderam corretamente, compreenderam o sinal de "=" como uma equivalência, no entanto, constatamos que 7 (sete) desses estudantes usaram o algoritmo da adição para obter o resultado das somas dos números presentes em cada lado do sinal de igual, para depois calcular a diferença entre os resultados, indicando assim o valor do ☐. Assim como na primeira questão, os estudantes tiveram que realizar as operações contidas na expressão, isto é, operaram com os números concretos e não com o desconhecido, o que representa uma prática aritmética (GOMES, 2020). Apenas o Estudante 1 apresentou a justificativa que do lado direito foi subtraído o valor 3 (de 345) e o valor 2 (de 576), estabelecendo uma relação entre o que foi subtraído e o que precisava ser adicionado no ☐ para tornar a sentença verdadeira (raciocínio de compensação).

Figura 6 – Justificativas das respostas corretas para sentença: **345 + 576 = 342 + 574 + ☐.**

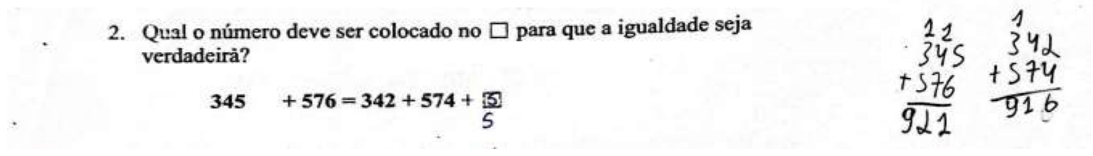
Estudante 1:


2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

345 + 576 = 342 + 574 + 5

5 Por que esse 3 retinho 2 para o 574 e três para 342

Estudante 4:

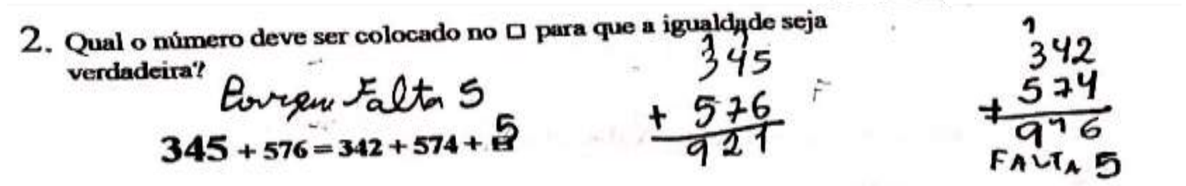

2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

345 + 576 = 342 + 574 + 5

345 + 576 = 921

342 + 574 = 916

Estudante 15:


2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

Porque Falta 5

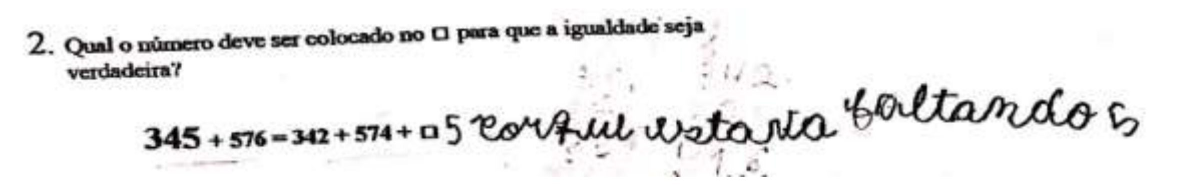
345 + 576 = 342 + 574 + 5

345 + 576 = 921

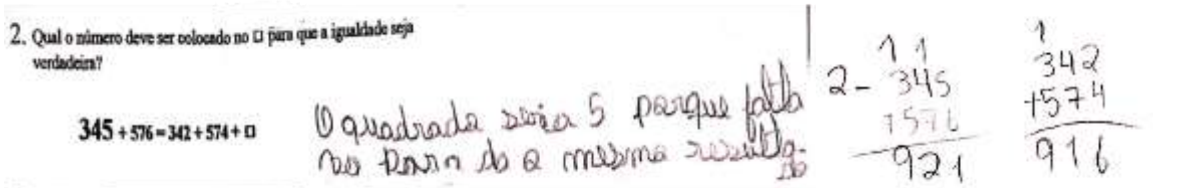
342 + 574 = 916

FALTA 5

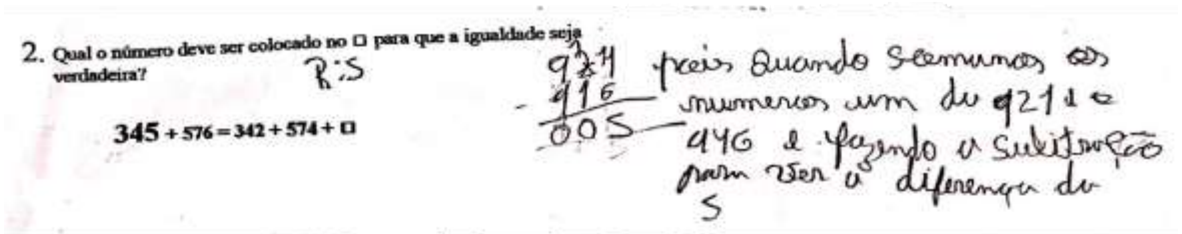
Estudante 16:



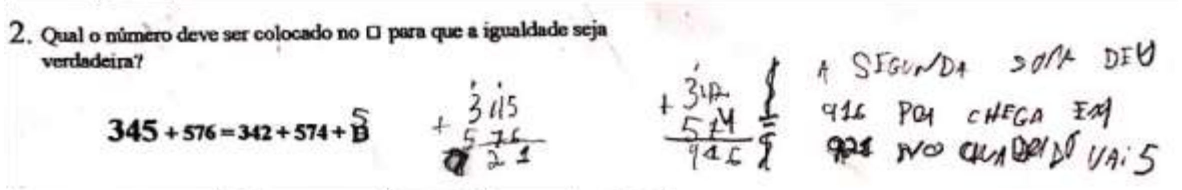
Estudante 17:



Estudante 18:



Estudante 19:



Fonte: Protocolo da pesquisa.

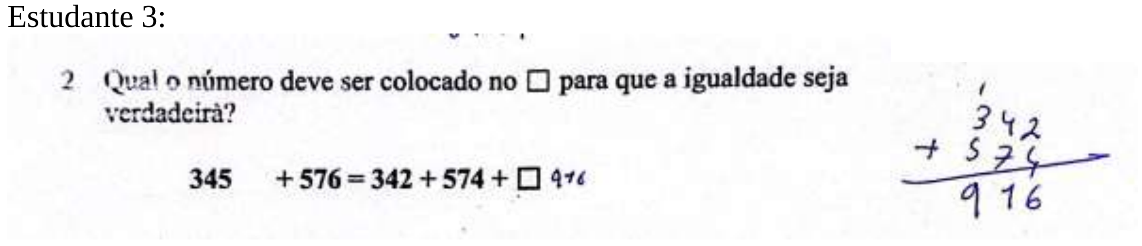
As respostas apresentadas de forma errada (Figura 7) para o valor do ☐ na sentença: “**345 + 576 = 342 + 574 + ☐**” revelam que os estudantes utilizaram a concepção operacional do sinal de igual, seja:

- adicionando os números do membro da direita do sinal de igual (342 + 574 = 916), indicando o ☐ igual a 916;
- adicionando os números no membro da esquerda do sinal de igual (345 + 576 = 921), indicando o ☐ igual a 921;
- adicionando todos os números da esquerda e da direita do sinal de igual (345 + 576 + 342 + 574 = 1. 837), indicando o ☐ igual a 1.837;

Para as estratégias supramencionadas identificamos que alguns estudantes que as utilizaram apresentaram erros nas somas das parcelas. Em todos os casos, os estudantes entenderam que o sinal de igual antecede o resultado (GOMES; NORONHA, 2022).

Figura 7 – Respostas erradas para sentença: **345 + 576 = 342 + 574 + ☐.**

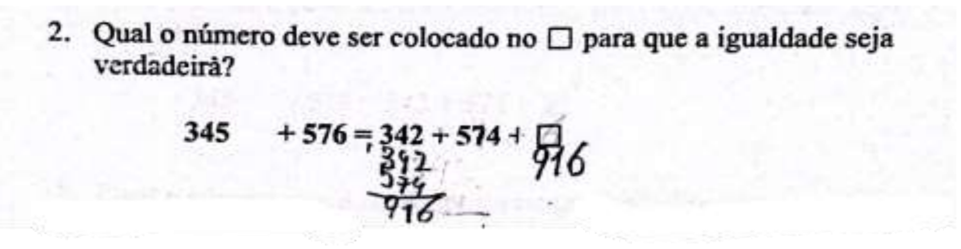
Estudante 3:


2 Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeirà?

345 + 576 = 342 + 574 + ☐ 916

342
+ 574
916

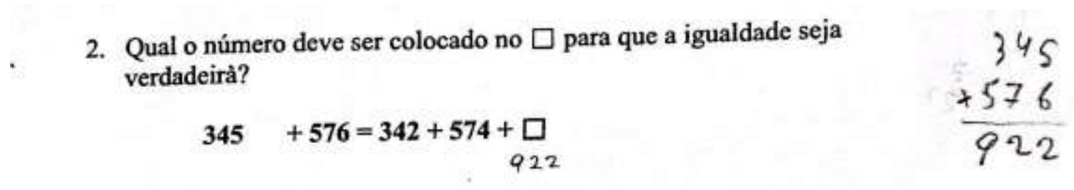
Estudante 5:


2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeirà?

345 + 576 = 342 + 574 + ☐ 916

342
574
916

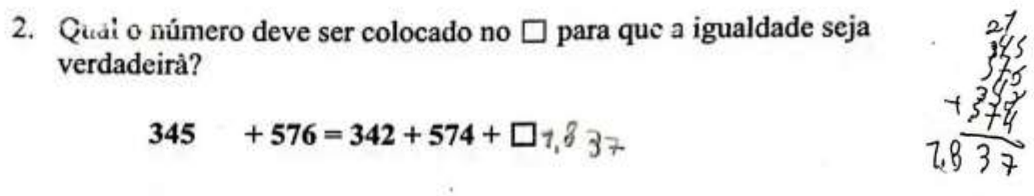
Estudante 6:


2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeirà?

345 + 576 = 342 + 574 + ☐
922

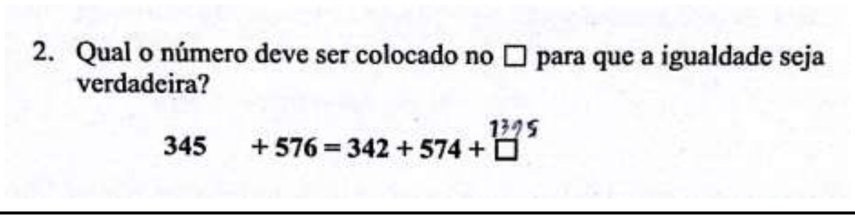
345
+576
922

Estudante 7:


2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeirà?

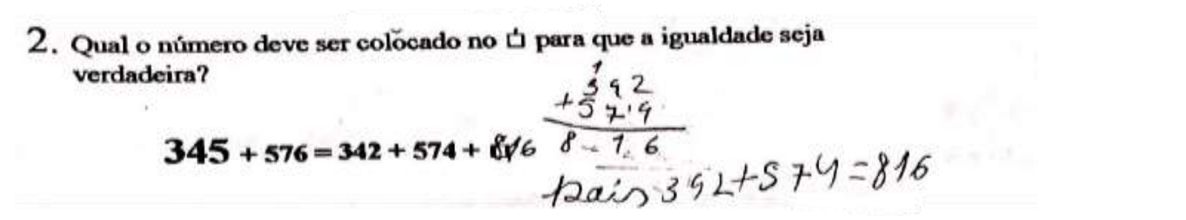
345 + 576 = 342 + 574 + ☐ 1.837

Estudante 10:


2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

345 + 576 = 342 + 574 + ☐ 1395

Estudante 14**:**


2. Qual o número deve ser colocado no □ para que a igualdade seja verdadeira?

345 + 576 = 342 + 574 + 816

pois 392+574=816

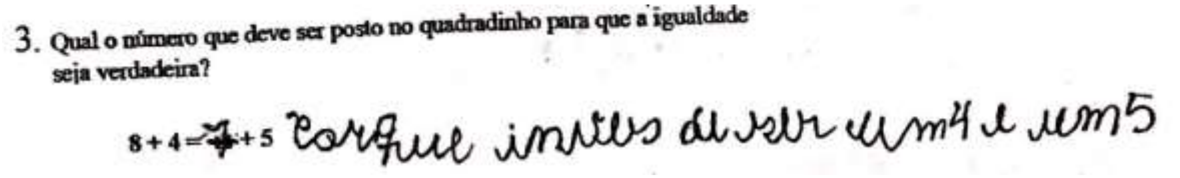
Fonte: Protocolo da pesquisa.

Quanto à ***terceira questão***, dentre 19 (dezenove) estudantes, 9 (nove) deles acertaram a indicação do valor do ☐ igual a 7 na sentença: **8 + 4 = ☐ + 5.** Na Figura 8, temos exemplos de como neste caso os estudantes compreenderam a igualdade como uma equivalência com justificativas que revelam:

- Raciocínio de compensação: percepção que do lado direito foi adicionado o valor 1 (de 4), assim deve ser subtraído o valor 1 (de 8), estabelecendo uma relação entre o que foi subtraído e o que precisava ser adicionado no ☐, isto é, 8 - 1 = 7, revelando o - (ex.: Estudante 16).
- Utilização de práticas essencialmente aritméticas (GOMES, 2020): ênfase nas operações inversas de adição e subtração - (ex.:Estudante 18).
- Tentativa e erro: o aluno busca sucessivamente números para obter a igualdade na sentença matemática (ex.: Estudante 17).
- Cálculo mental - reflete a ideia de quanto tem que juntar a 5 para ter o resultado igual a 12. (Ex.: Estudante 19).

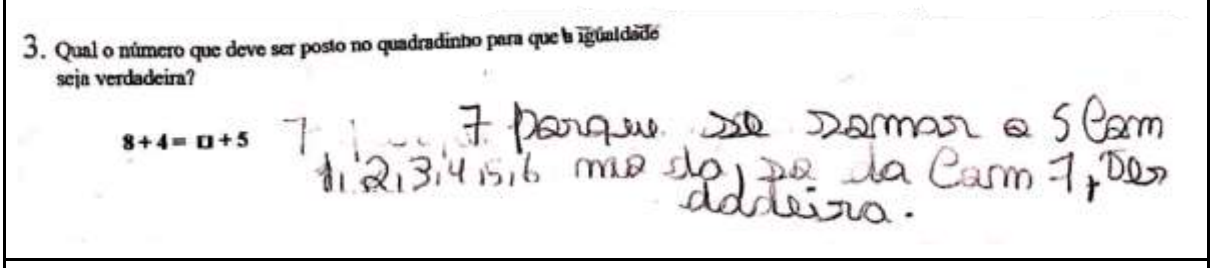
Figura 8 – Justificativas das respostas corretas para sentença: **8 + 4 = ☐ + 5**

Estudante 16:


3. Qual o número que deve ser posto no quadradinho para que a igualdade seja verdadeira?

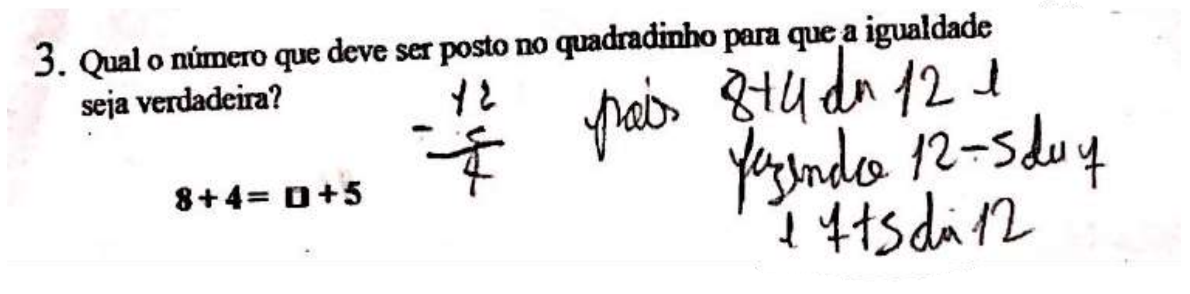
8 + 4 = 7 + 5 Porque invés de ser um4 e um5

Estudante 17:

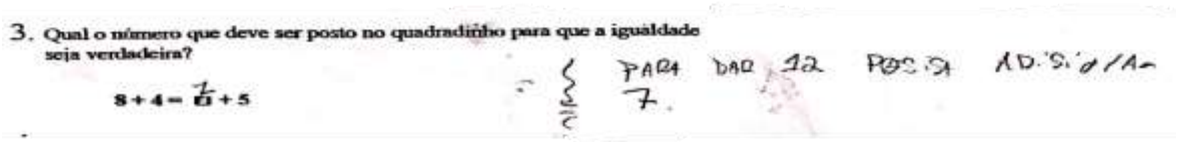

3. Qual o número que deve ser posto no quadradinho para que a igualdade seja verdadeira?

8 + 4 = □ + 5 7 parque se somar a 5 com 1,2,3,4,5,6 mo da pa da com 7, Dez adeira.

Estudante 18:



Estudante 19:

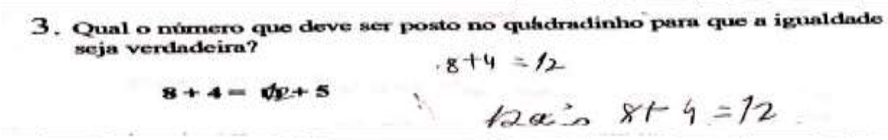


Fonte: Protocolo da pesquisa.

Na Figura 9, podemos perceber como dentre as respostas erradas dos 10 (dez) estudantes para ***terceira questão***, 5 (cinco) utilizaram a estratégia de somar 8 + 4 = 12, substituindo então o 12 no valor do **☐.** Outros 5 (cinco) indicaram erros ao somarem os números e não apresentaram justificativas, para Gomes e Noronha (2022, p. 21) isto revela que os estudantes utilizaram a "noção do símbolo de igualdade em uma perspectiva unidirecional, como indicação direta do resultado de uma operação".

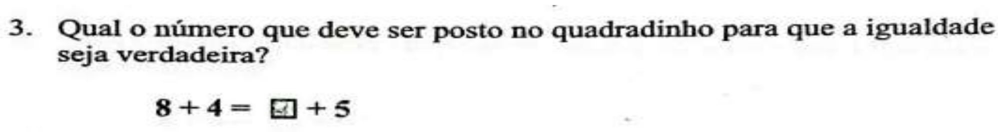
Figura 9 – Respostas erradas para sentença: **8 + 4 = ☐ + 5**

Estudante 14:

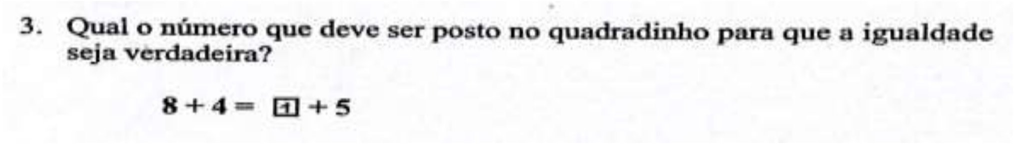


Estudante 6:

Estudante 7:



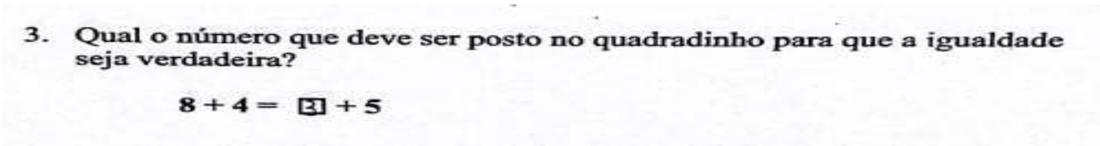
Estudante 8:



3. **Qual o número que deve ser posto no quadradinho para que a igualdade seja verdadeira?**

8 + 4 = $\boxed{1}$ + 5

Estudante 11:



3. **Qual o número que deve ser posto no quadradinho para que a igualdade seja verdadeira?**

8 + 4 = $\boxed{3}$ + 5

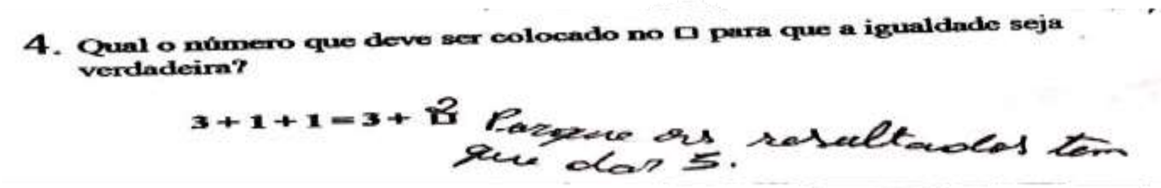
Fonte: Protocolo da pesquisa.

No que concerne à ***quarta questão***, dentre 19 (dezenove) estudantes, 10 (dez) deles acertaram a indicação do valor do ☐ igual a 2 na sentença: **3 + 1 + 1 = 3 + ☐.** As justificativas (Figura 10) mostram que 3 (três) desses estudantes usaram o algoritmo da adição para obter o resultado da soma dos números presentes do lado esquerdo do sinal de igual, para depois calcular a diferença entre o resultado da soma e o número que havia do lado direito, indicando assim o valor do ☐, portanto, mesmo compreendendo o sinal de igualdade como uma equivalência, esses estudantes utilizaram procedimentos aritméticos.

Outros dois estudantes apresentaram a justificativa de que como o valor 3 se repete em ambos os lados e só há um ☐, eles devem somar os números restantes do lado esquerdo (1 + 1), estabelecendo uma relação entre o que "sobrou" do lado esquerdo e o que precisava ser adicionado no ☐ para tornar a sentença verdadeira, nesse caso, tem-se o raciocínio de compensação.

Figura 10 – Justificativas das respostas corretas da sentença: **3 + 1 + 1 = 3 + ☐**.

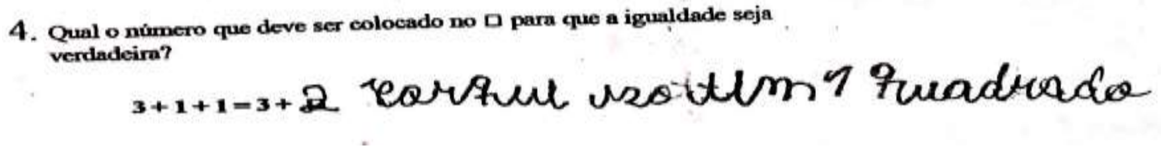
Estudante 15



4. **Qual o número que deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?**

3 + 1 + 1 = 3 + 2 Porque os resultados tem que dar 5.

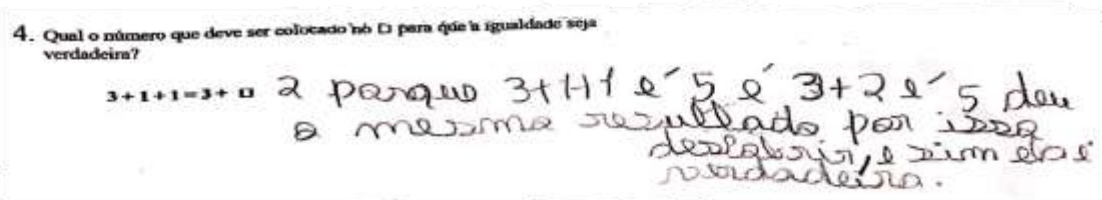
Estudante 16:



4. **Qual o número que deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?**

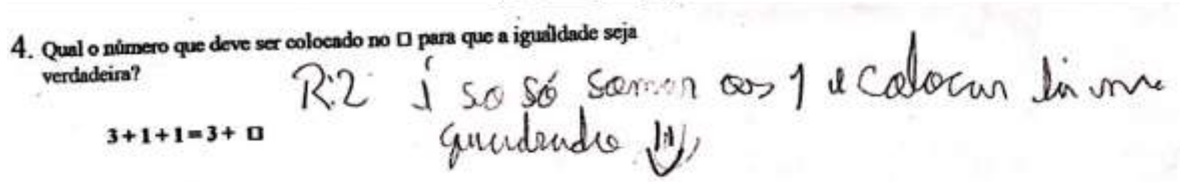
3+1+1=3+ 2 Porque só tem 1 quadrado

Estudante 17:


4. Qual o número que deve ser colocado no □ para que a igualdade seja verdadeira?

3+1+1=3+□ 2 porque 3+1+1 é 5 e 3+2 é 5 deu o mesmo resultado por isso descobri, e sim é verdadeira.

Estudante 18:


4. Qual o número que deve ser colocado no □ para que a igualdade seja verdadeira?

3+1+1=3+□ R:2 é só só somar os 1 e colocar lá no quadrado 11

Fonte: Protocolo da pesquisa.

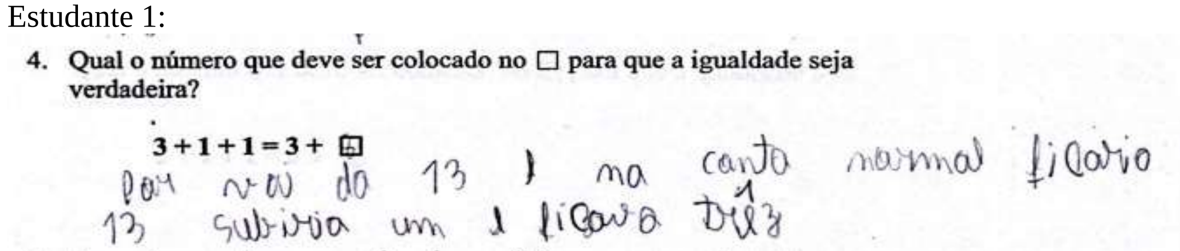
As respostas erradas dos estudantes para ***quarta questão*** revelam que eles utilizaram a concepção operacional do sinal de igual e seu aspecto assimétrico (MATOS; CAVALCANTI, 2010), seja:

- adicionando os números no membro da esquerda do sinal de igual (3 + 1 + 1 = 5), indicando o □ igual a 5;
- adicionando todos os números da esquerda e da direita do sinal de igual (3 + 1 + 1 + 3 = 8), indicando o □ igual a 8;

Na Figura 11, também observamos que, para as estratégias supramencionadas, alguns estudantes que as utilizaram apresentaram erros nas somas das parcelas.

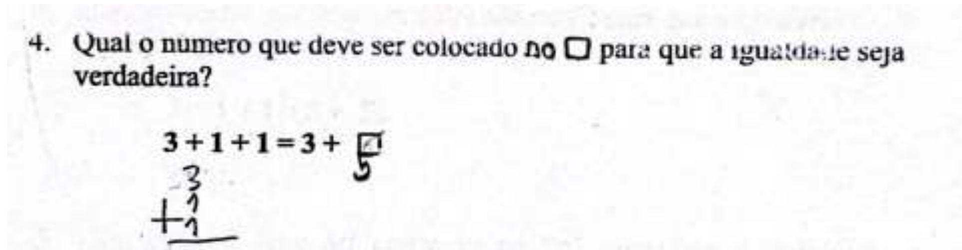
Figura 11 – Respostas erradas para sentença: **3 + 1 + 1 = 3 + □**

Estudante 1:


4. Qual o número que deve ser colocado no □ para que a igualdade seja verdadeira?

3+1+1=3+□ por no do 13 1 na conta normal ficario 13 subiria um 1 ficava Trêz

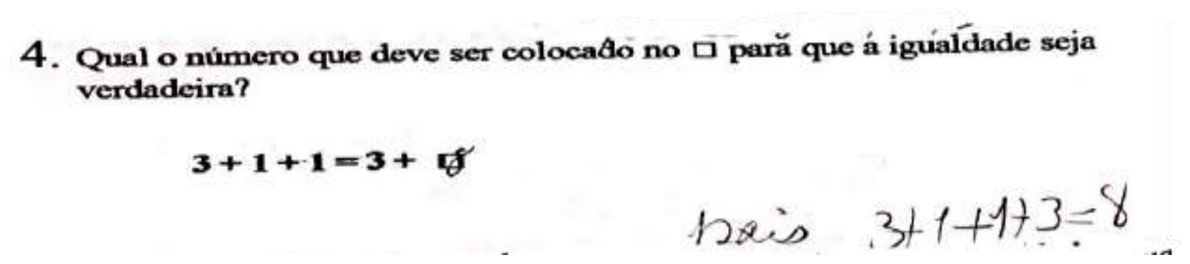
Estudante 5:


4. Qual o número que deve ser colocado no □ para que a igualdade seja verdadeira?

3+1+1=3+□ 5

3 +1 1

Estudante 14:


4. Qual o número que deve ser colocado no □ para que a igualdade seja verdadeira?

3 + 1 + 1 = 3 + 8

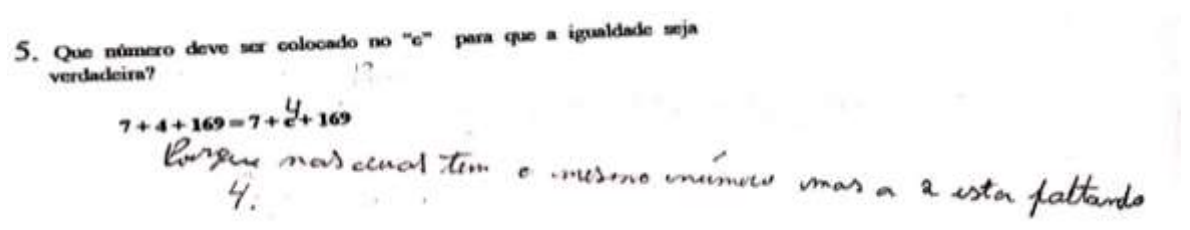
pois 3+1+1+3=8

Fonte: Protocolo da pesquisa.

A propósito da ***quinta questão***, dentre 19 (dezenove) estudantes, 13 (treze) deles acertaram a indicação do valor do **c** igual a 4 na sentença: **7 + 4 + 169 = 7 + c + 169.** Identificamos que cinco (5) desses estudantes utilizaram o raciocínio de compensação (Figura 12), isto é, observaram que os números 7 e 169 se repetiam em ambos os lados da igualdade, no entanto, o número 4 aparece apenas do lado esquerdo, os levando a conclusão de que c = 4 por ser o número "que falta", estabelecendo uma relação entre o que "sobrou" do lado esquerdo e o que precisava ser adicionado no c para tornar a sentença verdadeira.

Figura 12 – Justificativas das respostas corretas para sentença: **7 + 4 + 169 = 7 + c + 169.**

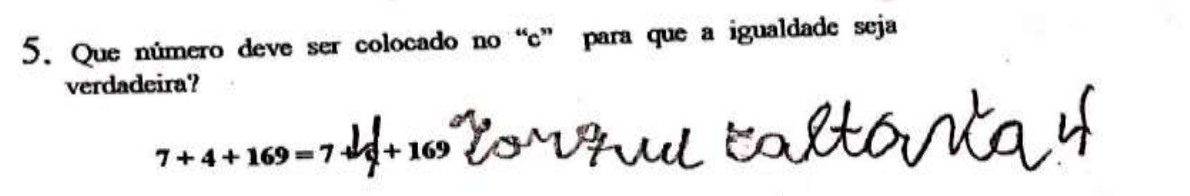
Estudante 15:


5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

7 + 4 + 169 = 7 + 4 + 169

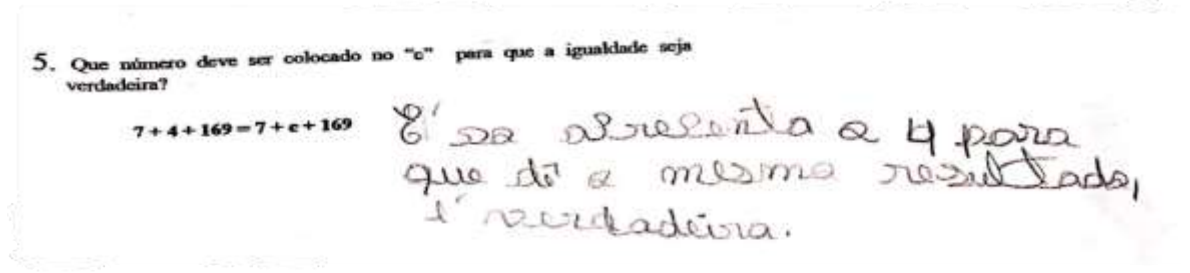
Porque nos dois tem o mesmo número mas o 4 esta faltando 4.

Estudante 16:


5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

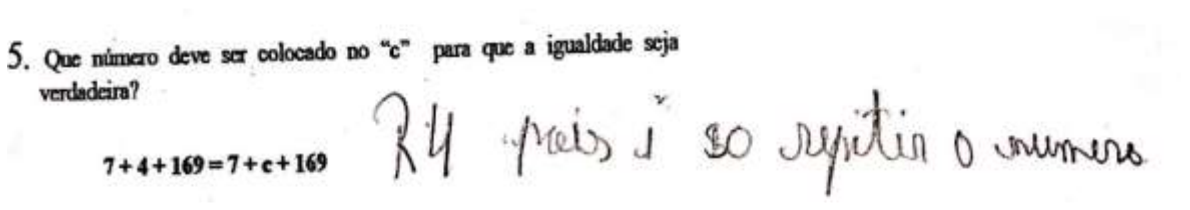
7 + 4 + 169 = 7 + 4 + 169 Porque faltava 4

Estudante 17:


5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

7 + 4 + 169 = 7 + c + 169 É só acrescentar o 4 para que dê o mesmo resultado, é verdadeira.

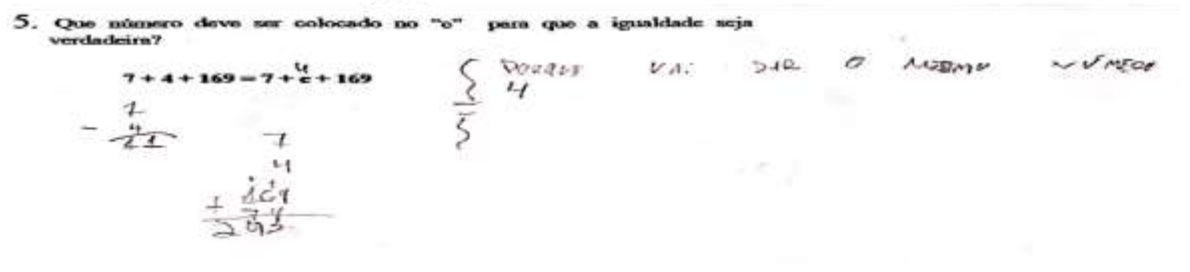
Estudante 18:



5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

7 + 4 + 169 = 7 + c + 169

Estudante 19:



5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

7 + 4 + 169 = 7 + c + 169

Fonte: Protocolo da pesquisa.

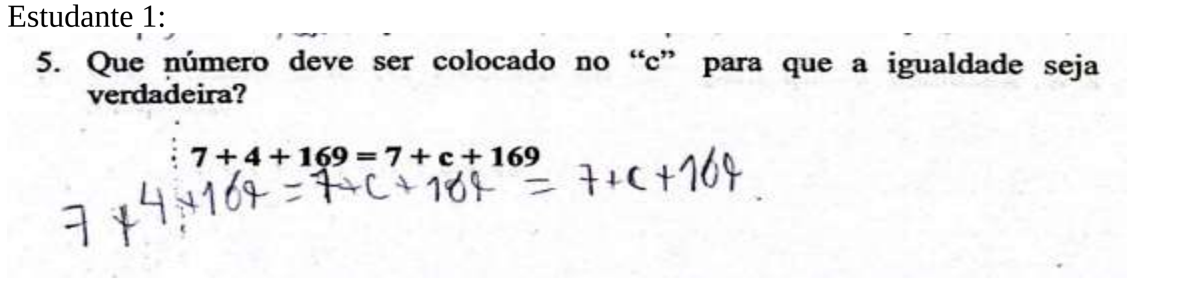
As respostas erradas dos estudantes revelam o significado do sinal de igualdade como operador, seja:

- adicionando dois números do membro da esquerda do sinal de igual (7 + 4 = 11), indicando o **c** igual a 11;
- adicionando todos os números da esquerda do sinal de igual (7 + 4 + 169 = 180), indicando o **c** igual a 180.

Além desses, outros estudantes apresentaram outras respostas incorretas para o valor de c, mas não apresentaram justificativa.

Figura 13 – Respostas erradas para sentença: **7 + 4 + 169 = 7 + c + 169.**

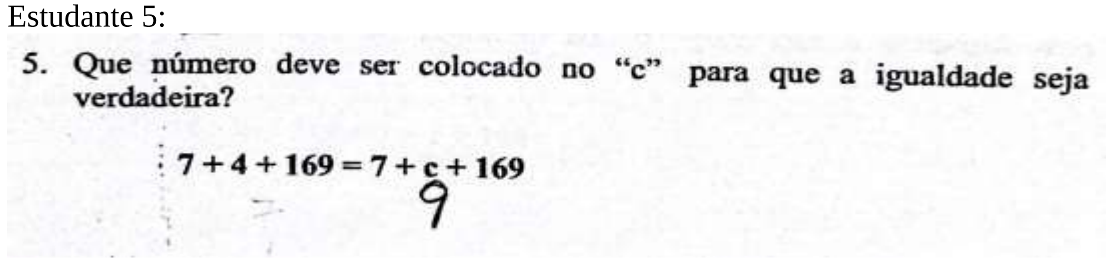
Estudante 1:



5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

7 + 4 + 169 = 7 + c + 169

Estudante 5:



5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira?

7 + 4 + 169 = 7 + c + 169

Estudante 8:

5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira? $7 + 4 + 169 = 7 + c + 169$ 7
Estudante 9: 5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira? $7 + 4 + 169 = 7 + c + 169$ 14
Estudante 10: 5. Que número deve ser colocado no "c" para que a igualdade seja verdadeira? $7 + 4 + 169 = 7 + c + 169$ 11
Estudante 14: 5. Que número deve ser colocado no "b" para que a igualdade seja verdadeira? $7 + 4 + 169 = 7 + b + 169$ $169 + 7 + 4 = 180$ pois $169 + 7 + 4 = 180$

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Os resultados do teste aplicado com os estudantes apontam que o maior número de acertos ocorreu na quinta questão, isto pode ser justificado pela repetição dos valores numéricos em ambos os lados da igualdade e a ordem em que esses números apareciam. O maior número de erros ocorreu na segunda e terceira questão.

No que diz respeito às estratégias, constatamos que, alguns estudantes, mesmo utilizando a concepção do sinal de igualdade como equivalência, utilizam procedimentos aritméticos para determinação dos termos desconhecidos. Dessa forma, consideramos que durante a introdução à Álgebra, a Aritmética desempenha um papel relevante na estruturação e desenvolvimento do pensamento algébrico. Quanto aos estudantes que responderam às questões de maneira incorreta, observamos que isso se deu por terem compreendido o sinal de "=" como um operador. Isto foi bastante presente na segunda e terceira questões.

Quadro 7 – Questões em que os estudantes apresentaram mais erros.

2. Qual o número deve ser colocado no ☐ para que a igualdade seja verdadeira?

345 + 576 = 342 + 574 + ☐

3. Qual o número que deve ser posto no quadradinho para que a igualdade seja verdadeira?

8 + 4 = ☐ + 5

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Nesses casos, eles efetuaram a soma das parcelas do lado esquerdo e indicaram os resultados do lado direito ou somaram todos os números conhecidos e indicaram o termo desconhecido como sendo resultado dessa soma, utilizando a noção de que a igualdade representa a indicação de um resultado, isto é, "operação = resultado”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo geral analisar os significados atribuídos por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre o sinal de igualdade na resolução de sentenças de adição. Como dissemos, escolhemos o 6º ano por ser uma turma de transição dos anos iniciais para os anos finais.

Os resultados da pesquisa apontam que os estudantes que utilizaram a noção do sinal de igualdade operacional erraram as questões por entenderem que o sinal de igual é uma indicação direta do resultado de uma operação, isto é, “operação = resultado”. Para os que deram o significado relacional ao sinal de igualdade, pudemos observar que embora tenham compreendido o sinal de igualdade como uma equivalência, a maior parte deles utilizaram procedimentos aritméticos tanto para determinar o termo desconhecido como para determinar se a sentença seria verdadeira ou falsa, o que demonstra dependência da realização das operações envolvidas nas sentenças.

Como limitações da pesquisa apontamos o número reduzido de estudantes que responderam ao teste. Convém explicar que os 19 estudantes que responderam ao teste foram aqueles efetivamente matriculados e que estavam frequentando as aulas presenciais nas duas escolas particulares. Além disso, destacamos que não foi possível acompanhar as aulas de Matemática sobre o tema e nem acesso aos livros didáticos e recursos utilizados pelas professoras sobre o ensino do tema “propriedades de igualdade”.

Diante dos erros apresentados pelos estudantes no teste que aplicamos, compreendemos que a aplicação de uma entrevista nos ajudaria a melhor compreendê-las. Uma entrevista com as professoras também poderia ter sido realizada para aprofundarmos a compreensão do processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes sobre o tema.

Resta-nos em aberto também reflexões sobre como os estudantes do 6º ano estudaram nos anos iniciais as propriedades de igualdade. Como vimos, a BNCC prescreve desde o 3º ano habilidades referentes a este objeto de conhecimento.

Como possibilidades de ampliar essa pesquisa, consideramos:

- Uma análise sobre o tema relações de propriedades de igualdade nos livros didáticos aprovados na escola.
- Um acompanhamento das aulas ministradas sobre o tema na intenção de observar como o símbolo de igualdade é apresentado e trabalhado nas diferentes situações com os estudantes e também entender qual a concepção dos professores quanto ao sinal de igualdade.

- Um aprofundamento sobre aspectos teórico-metodológicos vindos de pesquisas sobre o tema.

Ademais, esperamos que este trabalho possa contribuir para outras pesquisas sobre a temática do ensino e da aprendizagem das relações de igualdade no Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BANDARRA, L. **O sinal de igual: um estudo vertical**. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Póvoa do Varzim. **Anais...** Póvoa do Varzim, 2011. p. 305-322. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/17.Bandarra.pdf. Acesso em: 31 mai. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Programa nacional do Livro Didático 2020.: matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019.

CAVALCANTI, J.D.B. **Concepções de alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos**. 222f. Dissertação 9 Mestrado em Ensino das Ciências), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife: 2008.

CAVALCANTI, J.D.B; CÂMARA DOS SANTOS, M. **Um estudo sobre compreensões do sinal de igualdade: noção operacional e relacional de equivalência**. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV., **Anai [s…].** Blumenau - SC, 2013, p. 1-11.

CAVALCANTI, J.D.B.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Significado do símbolo "=" no contexto das funções e as concepções dos alunos do 3º ano do ensino médio. In: LIMA, A.P.A et al. **Pesquisas em fenômenos didáticos:** alguns cenários. Recife; UFRPE, 2010.

CIANI, A. B. *et al*. O sinal de igual e sua utilização em sentenças matemáticas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Cascavel, **Anais...**, Cascavel, 2017, p. 1-6. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/212/138. Acesso em 20 mar. 2021.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá Mais Matemática**: 1 ed. 6º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J.R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**.v.6. São Paulo: FTD, 2018.

GOMES, L.P.S. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise a partir da Teoria da Objetivação.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, Rio Grande do Norte, 2020. Programa de Pós-Graduação em Educação. PPGEd/UFRN

GOMES, L.P.S.; NORONHA, C.A. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: orientações e práticas de ensino e aprendizagem.** Revista Educação e Infâncias, Natal, v. 1, n.1, 2022. Disponível em:

https://periodicos.ufrn.br/educacaoinfancia/article/view/21048/15489. Acesso em 22 mai. 2022.

GRILLO, C. L. O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. In: NACARATO, A.M.; CUSTÓDIO, I.A. (Orgs.).**O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (Ensinará) Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf. Acesso em 28 mar. 2022.

KRIPKA; Rosana.; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa Lara. Pesquisa Documental: Considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. Atas Congresso Ibero-americano - Investigação Qualitativa em Educação - CIAIQ2015., 2015. Disponível em:https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2015/article/view/252/248. Acesso em: 15 abr. 2022.

MATOS, E.S. P.; CAVALCANTI, D. Algumas considerações sobre os significados do símbolo "=" na perspectiva dos alunos do 7º ano do ensino fundamental. In: II Semana de Educação Matemática- II SEEMAT, 2010, Vitória da Conquista-BA. **Anais** da II SEEMAT, 2010. Disponível em: http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/co4.pdf.
Acesso em 23 mar. 2022.

MOLINA, Marta. Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tese de Doutorado, Departamento de Didática da Matemática, Granada, Universidad de Granada, 2006. Disponível em: <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF> Acesso em: 25 mai 2022.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année**. Modélisation et algèbre. Fascicule 2. Situations d'égalité. Ontario: Ministère de l'Education, 2003. Disponível em: http://atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_MA_M_3_fasc2.pdf. Acesso em 01 jun. 2022.

OLIVEIRA, C.N.C.; FUGITA, F. **Geração Alpha Matemática**. 2 ed. 6º ano. São Paulo: SM, 2018.

OSANA, Helena P. ; ADRIEN, Emmanuelle. Le concept d´équivalence mathématique chez les enfants du primaire. **Bulletin AMQ,** v. LII, no 3, octobre 2012. Disponível em: **https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/oct12/AtelierOsanaAdrien.pdf.**
Acesso em 27 mar. 2022.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Currículo de Pernambuco**. Ensino Fundamental. Área de Matemática. Recife: SE, 2019a.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Orientações metodológicas**. Ensino Fundamental. Matemática. Recife: SE, 2019b.

SANTOS, C. C. S.; LUVISON, C.C.; MOREIRA, K.G.A Construção do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental I: Possíveis trabalhos para a percepção de regularidades e de generalizações. In: NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I.A. (Orgs.). **O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (Ensinará) matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf.Acesso em 22 nov. 2019.Acesso em 16 mar. 2022.

SOUZA, J. S. S.; SOUZA, L. O. A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: 54 Práticas de Sala de Aula e de Formação de Professores. In: CARNEIRO, R. F.; SOUZA, A.C.; BERTINI, L.F. (Orgs.). **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** práticas de sala de aula e de formação de professores. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf.Acesso em 22 nov. 2019.Acesso em 16 mar. 2022.

TELES, R. A.M. **A relação entre a aritmética e a álgebra na matemática escolar**: a influência da compreensão das propriedades da igualdade e o conceito de operações inversas na resolução de equações polinomiais do 1º grau. In: ENEM, VIII, **Anais**. Recife, 2004.

ZARDO, T. **Equações do 1º grau: um estudo didático**. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2006.