



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Yasmin Alves Sobrinho Lira

**Um breve estudo sobre a curvatura Média e o teorema  
de Aleksandrov**

Recife-PE  
Junho de 2022

# Um breve estudo sobre a curvatura Média e o teorema de Aleksandrov

por

Yasmin Alves Sobrinho Lira

Sob orientação de

**Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Recife-PE  
Junho de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- L768b Lira, Yasmin Alves Sobrinho  
Um breve estudo sobre a Curvatura Média e o Teorema de Aleksandrov / Yasmin Alves Sobrinho Lira. - 2022.  
103 f. : il.
- Orientador: Renato Teixeira Gomes.  
Inclui referências e apêndice(s).
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2022.
1. Curvatura média. 2. laplaciano. 3. Aleksandrov. I. Gomes, Renato Teixeira, orient. II. Título

CDD 510

---

Yasmin Alves Sobrinho Lira

# Um breve estudo sobre a curvatura Média e o teorema de Aleksandrov

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 08/06/2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. José Alan Farias dos Santos  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. Renato Teixeira Gomes (orientador)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Recife-PE  
Junho de 2022

*À minha bisavó, Cleonice Alves da Silva.*

# Agradecimentos

Até aqui nos ajudou o Senhor. Agradeço primeiramente a Deus, que por sua misericórdia e graça me permitiu chegar até aqui. Agradeço a minha família, meu alicerce, meu apoio durante toda a vida: meu pai Leandro Sobrinho Lira, minha mãe Thaís Caroline Alves da Silva Lira e meu irmão Daniel Alves Sobrinho Lira. Hoje sou fruto de todo carinho, cuidado, dedicação e amor de vocês.

Agradeço a minha tia Vera Dalva Alves da Silva, que tem me apoiado e incentivado desde sempre. Aos meus avós Vânia e Marcos por todo apoio ao longo dessa jornada.

Agradeço ao professor Dr. Renato Teixeira Gomes (orientador) por acreditar no meu potencial, pela paciência, pelo tempo dedicado, pelo cuidado na minha pessoa e por esses dois anos de muito trabalho e evolução. Também agradeço as contribuições feitas no meu trabalho pelo professor Dr. Marcelo Pedro dos Santos e pelo professor Dr. José Alan Farias dos Santos.

Agradeço aos meus “mais que amigos” Tatiane Gervásio do Nascimento e Túlio José de Souza Santos, por todo apoio, companheirismo e carinho. Vocês foram um presente de Deus, imprescindíveis durante a minha formação acadêmica e um ombro em todos os momentos que precisei. Desejo muito sucesso em suas caminhadas, e espero estar sempre junto para aplaudir cada conquista e dividir cada dificuldade.

Agradeço ainda aos meus companheiros de graduação Alexandre César, Pedro Freitas, Lucas Wanderley, Rafael Solto, Elizabeth Bispo, Clara Rosa, Eduarda Oliveira, por todo incentivo, união, dias de estudos e diversão durante toda graduação.

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática da UFRPE que participaram de forma direta ou indireta na minha formação. Em particular, gostaria de agradecer ao professor Dr. Clessius Silva por todo apoio nos últimos semestres.

Gostaria de agradecer a todos os amigos do CEGEN - UFRPE e pelo ótimo ambiente de estudo de nossa universidade. Por fim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma na minha jornada que não foram citados nesta lista.

# Resumo

Ao se procurar os autovalores da diferencial da aplicação normal de Gauss  $dN$ , surgem naturalmente em seu polinômio característico duas funções que são invariantes por mudança de base deste operador: o determinante da matriz da aplicação normal de Gauss, chamado de curvatura Gaussiana e o traço desta aplicação. Como esta aplicação linear é auto adjunta, existe uma base ortonormal em que a matriz desta é escrita em forma diagonal em termos das curvaturas principais, e seu determinante e seu traço são dados por  $\det(dN) = (-k_1)(-k_2)$  e por  $\text{tr}(dN) = -(k_1 + k_2)$  respectivamente. O negativo da metade do traço  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  é a chamada curvatura média, cuja terminologia foi introduzida pela matemática francesa Sophie Germain ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana. Nesta época, um problema proposto por Lagrange que posteriormente recebeu o nome de problema de Plateau, físico Belga que realizou vários experimentos e estudos aprofundados sobre películas de sabão por volta de 1850, era a grosso modo determinar uma superfície que possua a menor área entre aquelas que têm o bordo dado por uma curva de Jordan prescrita. Pode-se mostrar que tal superfície possui em seus pontos regulares, curvatura média nula. Tais superfícies são chamadas mínimas e tem esse nome devido a Lagrange.

Neste trabalho iremos fazer um breve estudo sobre a curvatura média e superfícies mínimas, demonstrando alguns resultados e apresentando alguns exemplos de tais superfícies. Além disso, demonstraremos o teorema de Aleksandrov que sob certas hipóteses diz que a única superfície compacta com curvatura média constante em  $\mathbb{R}^3$  é a esfera.

Para isto, iremos demonstrar este resultado com um “maquinário” diferente do utilizado por Aleksandrov. Seguiremos a abordagem de R. Reilly em seu artigo “Mean Curvature, the Laplacian and Soap Bubbles” que faz uso de conhecimentos mais básicos do cálculo diferencial e integral e da teoria de superfícies para sua demonstração.

**Palavras-Chave:** Curvatura média; laplaciano; Aleksandrov.

# Abstract

When looking for the eigenvalues of the differential of the normal Gauss map  $dN$ , naturally arise in its characteristic polynomial two functions that are invariant by change of base of this operator: the determinant of the matrix of the normal Gauss map, called Gaussian curvature and the trace of this application. As this linear map is self-adjoint, there is an orthonormal basis in which its matrix is written diagonally in terms of the principal curvatures, and its determinant and trace are given by  $\det(dN) = (-k_1)(-k_2)$  and its dash by  $\text{tr}(dN) = -(k_1 + k_2)$ . The negative half of the  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  is the so-called mean curvature, which was introduced by French mathematician Sophie Germain when studying a problem related to membrane vibrations . At this time, a problem proposed by Lagrange, which later received the name of Plateau's problem, a Belgian physicist who carried out several experiments and in-depth studies on soap films around 1850, was, roughly speaking, to determine a surface that has the smallest area among those which have the edge given by a prescribed Jordan curve. It can be shown that such a surface has zero mean curvature at its regular points. Such surfaces are called minimal and are named after Lagrange.

In this work we will make a brief study on mean curvature and minimal surfaces, demonstrating some results and presenting some examples of such surfaces. Furthermore, we will demonstrate Aleksandrov's theorem which under certain assumptions says that the only compact surface with constant mean curvature in  $\mathbb{R}^3$  is the sphere.

For this, we will demonstrate this result with a different "machinery" the one used by Aleksandrov. We will follow R. Reilly's approach in his article "Mean Curvature, the Laplacian and Soap Bubbles" which makes use of more basic knowledge of differential and integral calculus and surface theory for its demonstration.

**KeyWords:** Mean Curvature; laplacian; Aleksandrov.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Aplicações diferenciáveis . . . . .	13
1.1.1 Diferencial de uma aplicação . . . . .	15
1.2 Curvatura de uma curva plana . . . . .	17
1.3 Superfície Regular . . . . .	20
1.4 Funções e aplicações diferenciáveis em superfícies . . . . .	28
1.5 Plano tangente e diferencial de uma aplicação . . . . .	31
1.6 Primeira forma fundamental . . . . .	33
1.7 Orientação de superfícies . . . . .	39
<b>2 A geometria da Aplicação de Gauss</b>	<b>43</b>
2.1 A aplicação normal de Gauss . . . . .	43
2.2 A segunda forma fundamental . . . . .	48
2.3 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média . . . . .	52
2.4 A aplicação normal de Gauss em coordenadas locais . . . . .	53
<b>3 Superfícies Mínimas</b>	<b>67</b>
3.1 Superfície Mínima . . . . .	67
<b>4 O Teorema de Aleksandrov</b>	<b>83</b>
4.1 Curvatura Média . . . . .	84
4.2 A Curvatura Média e o Laplaciano . . . . .	91
4.3 O Teorema da “Bolha de Sabão” de Aleksandrov . . . . .	96
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Lista de Figuras

1.1	Diferencial de uma aplicação. . . . .	15
1.2	Uma parametrização de $S$ . . . . .	20
1.3	Curvas coordenadas em $S$ . . . . .	21
1.4	Conjunto coberto pela parametrização $\mathbf{x}_1$ . . . . .	23
1.5	Parametrizações locais da esfera. . . . .	24
1.6	Aplicação diferenciável entre superfícies. . . . .	31
1.7	Diagrama da construção de $\gamma$ . . . . .	32
1.8	Cilindro. . . . .	35
1.9	Toro . . . . .	39
2.1	Variação do vetor normal em uma vizinhança de $p$ . . . . .	44
2.2	Esfera unitária $dN_p(v) = v$ . . . . .	45
2.3	Cilindro . . . . .	46
2.4	Curvatura normal. . . . .	49
2.5	Curvatura da seção normal. . . . .	50
2.6	Seções normais sobre $S^2$ . . . . .	51
2.7	Seções normais sobre $C$ . . . . .	51
2.8	Curvatura Gaussiana no toro. . . . .	58
2.9	Superfícies são localmente gráfico de função. . . . .	61
3.1	Variação normal de $\mathbf{x}(\bar{D})$ . . . . .	68
3.2	Catenóide. . . . .	73
3.3	Esquema da construção da equação 3.1. . . . .	74
3.4	Helicóide. . . . .	76
3.5	Superfície de Enneper. . . . .	76
3.6	Superfície de Scherk. . . . .	80
4.1	Representação $T_pS$ e $I_p$ . . . . .	84
4.2	Curvatura como derivada da função ângulo entre $e_1$ e $T(s)$ . . . . .	85
4.3	Interpretação do sinal da curvatura. . . . .	86
4.4	Esquema para definição de curvatura média. . . . .	87

---

4.5	Esquema para demonstração do Lema 2. . . . .	88
4.6	Representação de $\Gamma_\theta$ no plano. . . . .	90
4.8	Representação de $\Gamma_0$ e $\Gamma_{\pi/2}$ no cilindro. . . . .	90
4.7	Representação de $\Gamma_\theta$ na esfera. . . . .	91
4.9	Esquema para demonstração do Teorema 4.8. . . . .	94

# Introdução

Em meados do século XVII com o surgimento da geometria diferencial, que teve como seus precursores Pierre de Fermat, Christiaan Huygens e Isaac Newton, surgiu também a necessidade de se mensurar o quanto uma superfície se encurva em um dado ponto. O primeiro a desenvolver um método para determinar essa medida foi o matemático suíço Leonard Euler em 1770 e para tal, Euler procedeu da seguinte forma: para cada ponto  $p$  em uma superfície  $S$ , Euler considerou um vetor normal unitário  $N$  em  $p$  e um vetor unitário  $v$  qualquer tangente a  $S$  em  $p$ . Olhando para o plano  $P$  normal a  $S$  que passa por  $p$  e contém os vetores  $N$  e  $v$ , a curva formada pela interseção de  $P$  com  $S$  foi chamada de seção normal de  $S$  em  $P$  na direção do vetor unitário  $v$  e a curvatura da seção normal foi chamada de curvatura normal da superfície  $S$  no ponto  $p$  na direção de  $v$ . Observando todas as direções determinadas pelos vetores unitários com origem em  $p$  de  $T_p S$ , Euler considerou os valores máximo  $k_1$  e mínimo  $k_2$  das curvaturas normais de  $S$  em  $p$  e chamou estas curvaturas de curvaturas principais. Ele percebeu que com o conhecimento dessas duas curvaturas era possível determinar a curvatura normal na direção de qualquer vetor unitário  $v$ .

Mais tarde em 1827 o matemático alemão Carl Friedrich Gauss, através do estudo da diferencial da chamada aplicação normal de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , cuja diferencial sob certas considerações é um operador auto-adjunto, definiu a curvatura Gaussiana como o produto  $K = k_1 \cdot k_2$  das curvaturas principais que numa certa base ortonormal, é simplesmente o determinante da matriz de  $dN$  no ponto  $p$  que é um invariante desta aplicação. Um outro invariante, o traço de  $dN_p$  dado por  $\text{tr}(dN_p) = -(k_1 + k_2)$  surge naturalmente no estudo desta aplicação e o negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamada a curvatura média de  $S$  em  $p$  que recebeu esse nome devido a matemática francesa Sophie Germain em 1831 ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana.

A curvatura média, que é um dos temas centrais desse trabalho teve por muito tempo um desprestígio frente a curvatura Gaussiana. Uma das justificativas possíveis para tal é que a curvatura média, diferente da curvatura Gaussiana, não é invariante por isometrias locais visto que esta é uma medida extrínseca de curvatura e descreve localmente a curvatura de uma superfície levando em consideração o ambiente ao qual a superfície está. Porém, por meio do chamado problema de Plateau, (físico belga que realizou estudos aprofundados sobre películas de sabão) que na verdade foi um problema

proposto por Lagrange por volta de 1760 que consiste em determinar qual superfície possui área mínima entre todas aquelas que possuem o bordo dado por uma curva de Jordan prescrita, a curvatura média passou a ganhar certo protagonismo. Meusnier mostrou que a definição de Lagrange para superfícies mínimas como pontos críticos de um problema variacional é equivalente a curvatura média ser nula. Uma versão do problema de Plateau foi resolvido por Tibor Radó (1895-1965) e Jesse Douglas (1897-1965) que chegaram independentemente a suas soluções, assumindo que as superfícies em questão possuíam a topologia do disco. Com o passar dos anos através do estudo das superfícies mínimas e de teoremas de classificações relacionados a curvatura Gaussiana, foi natural que as perguntas também fossem feitas em relação a curvatura média.

Resultados que envolviam classificações sempre foram objetos de estudo e de particular interesse por grande parte dos estudiosos desta área. Um resultado deste tipo foi demonstrado por Liebmann em 1899 em seu artigo intitulado “*Eine neue eigenschaft der kugel*” onde ele demonstrou que as esferas são as únicas superfícies compactas em  $\mathbb{R}^3$  que possuem curvatura Gaussiana constante. Mais tarde em 1956, no artigo “*Uniqueness theorem for surfaces in the large*” Aleksandrov mostrou que as esferas são as únicas superfícies compactas, mergulhadas em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante.

Neste trabalho, iremos demonstrar este resultado com um “maquinário” diferente do utilizado por Aleksandrov. Seguiremos a abordagem de R. Reilly em seu artigo “*Mean Curvature, the Laplacian and Soap Bubbles*” que faz uso de conhecimentos mais básicos do cálculo diferencial e integral e da teoria de superfícies para sua demonstração.

No capítulo 1 estudaremos a diferencial de uma aplicação e parte da teoria de curvas e superfícies regulares. O capítulo 2 é dedicado ao estudo da aplicação normal de Gauss, da segunda forma fundamental e da curvatura Gaussiana, onde também falamos a primeira vez sobre curvatura média. O capítulo 3 é dedicado ao estudo das superfícies mínimas, onde demonstraremos algumas proposições que justificam esta terminologia e apresentaremos alguns exemplos não triviais de tais superfícies. O capítulo 4 é onde se encontra o resultado principal deste trabalho, O teorema de Aleksandrov. Para facilitar o entendimento procuramos sempre que possível, fazer figuras e esquema para auxiliar no entendimento das construções associadas aos resultados deste capítulo.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, faremos o estudo de alguns conceitos que serão relevantes para o nosso trabalho. Faremos uma breve exposição sobre aplicações diferenciáveis, curvatura de curvas planas e um pouco de teoria de superfícies regulares.

### 1.1 Aplicações diferenciáveis

A aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , diz-se *diferenciável* no ponto  $a \in U$  quando existe uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \quad \text{onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Em alguns casos, para evitar exceções causadas pelo denominador zero, é conveniente pôr o resto sob a forma  $r(v) = \rho(v) \cdot |v|$ , onde a aplicação  $\rho$  é definida, para todo  $v$  tal que  $a + v \in U$ , por  $\rho(v) = r(v)/|v|$ , se  $v \neq 0$ , e  $\rho = 0$ . Então, a diferenciabilidade de  $f$  no ponto  $a$  se exprime como

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + \rho(v) \cdot |v|, \quad \text{onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0,$$

de modo que  $\rho$  é contínua no ponto 0. Como a validade da condição  $\lim_{v \rightarrow 0} r(v)/|v| = 0$  independe das normas tomadas em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , vemos que o fato de uma aplicação ser ou não diferenciável num determinado ponto também não depende das normas.

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . A *derivada direcional de  $f$*  num ponto  $a \in U$ , relativamente a um vetor  $v \in \mathbb{R}^m$ , é, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n,$$

quando tal limite existe. Supondo  $f$  diferenciável para todo  $a$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^m$  e

qualquer  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno tem-se

$$f(a + tv) - f(a) = T \cdot tv + \rho(tv) \cdot |tv|, \quad \text{com } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(tv) = 0.$$

Como  $T \cdot tv = t \cdot T \cdot v$  e  $|tv| = |t| \cdot |v|$ , segue-se, para todo  $t \neq 0$ :

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T \cdot v \pm \rho(tv) \cdot |v|, \quad \text{onde } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T \cdot v.$$

Portanto,

$$T \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Em particular, vemos que é única a transformação linear  $T$  que fornece boa aproximação para o acréscimo  $f(a + v) - f(a)$  na vizinhança do ponto  $a$ . Ela é chamada a *derivada de  $f$  no ponto  $a$*  e indicada com a notação  $f'(a)$ .

Portanto, se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é diferenciável no ponto  $a \in U$ , sua derivada é a aplicação linear  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , caracterizada por

$$f(a + v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v), \quad \text{com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

**Teorema 1.1.** *Considere a aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $F$  é diferenciável em  $p \in U$  se e somente se suas funções componentes  $F_1, \dots, F_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis em  $p$ .*

**Teorema 1.2.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $f$  é diferenciável e a aplicação derivada  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é contínua;
2. As funções coordenadas  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  da aplicação  $f$  possuem derivadas parciais contínuas  $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ;
3. Para cada  $v \in \mathbb{R}^m$ , existe a derivada direcional  $(\partial f / \partial v)(x)$  em qualquer ponto  $x \in U$  e a aplicação  $\partial f / \partial v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

$F$  é diferenciável em  $U$  se é diferenciável para todo  $p \in U$ . As demonstrações dos teoremas acima podem ser encontradas em [6] p. 200.

**Definição 1.** O vetor tangente a aplicação  $\alpha : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $t_0 \in U$  é o vetor em  $\mathbb{R}^m$   $\alpha'(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0))$ .

**Exemplo 1.** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $F(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \cos^2(v))$ ,  $(u, v) \in U$ . Note que as funções componentes de  $F$  são diferenciáveis em  $U$ , então  $F$  é diferenciável em  $U$ .

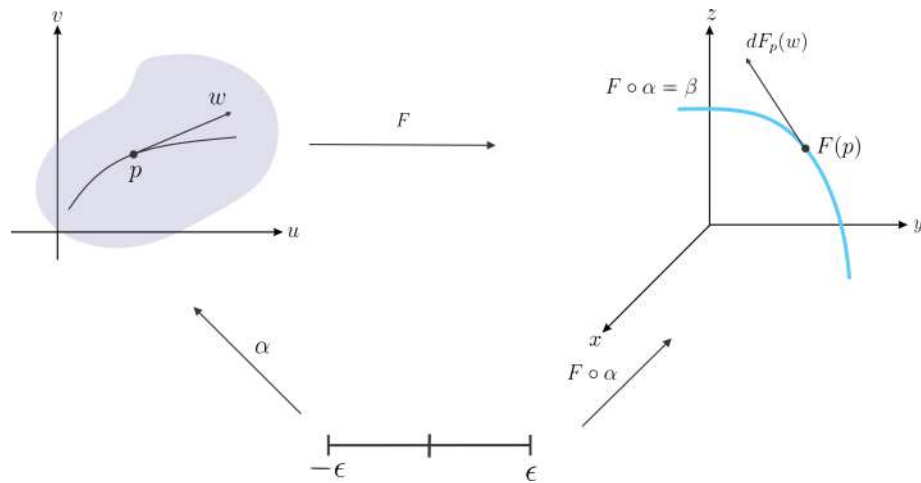
**Exemplo 2.** Seja  $\alpha : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $\alpha(t) = (t^4, t^3, t^2, 2)$ ,  $t \in U$ . Note que as funções componentes de  $\alpha$  são diferenciáveis em  $t$ , e seu vetor tangente é dado por  $\alpha'(t) = (4t^3, 3t^2, 2t, 1)$ .

### 1.1.1 Diferencial de uma aplicação

**Definição 2.** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Associamos a cada  $p \in U$  uma aplicação linear  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que é chamada a diferencial de  $F$  em  $p$ , e é definida da seguinte maneira: sejam  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Pela regra da cadeia, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  também é diferenciável. Então, definimos (Figura 1.1)

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

Figura 1.1: Diferencial de uma aplicação.



Fonte: Autoria própria.

**Proposição 1.3.** A definição de  $dF_p$  independe da escolha da curva que passa pelo ponto  $p$  com vetor tangente  $w$ , e  $dF_p$  é de fato uma aplicação linear.

*Demonstração.* Para facilitar a notação, vamos considerar  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sejam  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(u, v)$  e  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$  e  $f_3 = (0, 0, 1)$  a base canônica do  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ . Podemos escrever  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\alpha'(0) = u'(0)e_1 + v'(0)e_2 = w$ . Tomando  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e fazendo a composição  $\beta = F \circ \alpha(t)$ , obtemos

$$\beta(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$



Derivando  $\beta$  com respeito a  $t$  e aplicando em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_1 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = dF_p(w). \end{aligned}$$

Assim, podemos representar  $dF_p$  nas bases canônicas do  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  (de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ ) na forma matricial acima, que só depende das derivadas parciais das funções componentes de  $F$  em  $p$ . Deste modo,  $dF_p$  independe da escolha da curva e é uma aplicação linear. ■

**Proposição 1.4** (Regra da cadeia para aplicações). *Sejam  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicações diferenciáveis, onde  $U$  e  $V$  são conjuntos abertos tais que  $F(U) \subset V$ . Então,  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação diferenciável e,*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

*Demonstração.* Note que  $G \circ F$  é diferenciável, pois temos uma composição de aplicações diferenciáveis. Além disso, seja  $w_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w_1$ . Assim, definindo

$$\begin{aligned} dF_p(w_1) &= \frac{d}{dt}(F \circ \alpha) |_{t=0} = w_2 \in T_p \mathbb{R}^m \\ \Rightarrow dG_{F(p)}(w_2) &= \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha) |_{t=0} = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha) |_{t=0} \\ \Rightarrow d(G \circ F)_p(w_1) &= \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha) |_{t=0} = dG_{F(p)}(w_2) = dG_{F(p)} \circ dF_p(w_1) \end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.** Seja  $f(x, y, z) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , onde  $f$  é uma função diferenciável e suas funções componentes também. As derivadas parciais de  $f$  com respeito a  $u$  e  $v$  são

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

**Definição 3.** Um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  diz-se conexo quando a única cisão possível é a trivial, ou seja,  $U = U \cup \emptyset$ .

**Definição 4.** Um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é conexo por caminhos se dados dois pontos  $p, q \in U$ , existe uma aplicação contínua  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  tal que  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$ .

**Proposição 1.5.** *Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.*

*Demonstração.* Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  conexo por caminhos e  $a \in U$ . Então, para todo  $x \in U$ , existe um caminho  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  ligando  $a$  e  $x$ . Sendo  $[0, 1]$  conexo e  $\alpha$  contínua, temos que  $\alpha([a, b])$  é conexo. No entanto, para todo  $x \in U$ ,  $a \in \alpha([a, b])$  e, obviamente,

$$U = \bigcup_{x \in U} \alpha([a, b]).$$

Logo,  $U$  é conexo, por ser a união de conexos com um ponto em comum. ■

**Definição 5.** Uma aplicação diferenciável  $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  de  $V$  sobre  $W$ , onde  $V$  e  $W$  são conjuntos abertos, é chamada difeomorfismo de  $V$  sobre  $W$  se  $F$  tem uma inversa diferenciável.

Agora, enunciaremos um resultado fundamental para a teoria de superfícies em  $\mathbb{R}^n$ . A demonstração pode ser encontrada em [6], p. 227.

**Teorema 1.6 (Teorema da Função Inversa).** *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in U$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ , isto é,  $F$  é difeomorfismo local.*

## 1.2 Curvatura de uma curva plana

**Definição 6.** Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 7.** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

**Definição 8.** Dizemos que uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

No que segue apresentaremos uma definição de curvatura de curvas planas útil aos nossos propósitos. Para isto, precisamos falar sobre a função ângulo.

Considere agora  $\mathbb{S}^1 \in \mathbb{R}^2$  uma circunferência centrada na origem e de raio 1. Se  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que  $\|\gamma(t)\| = 1 \forall t \in I$ , então o traço de  $\gamma \subset \mathbb{S}^1$  e  $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$ .

**Definição 9.** Dada uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ , dizemos que  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  é função-ângulo de  $\gamma$ , quando  $\gamma(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ ,  $\forall t \in I$ .

Considere o operador linear

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (-y, x). \end{aligned}$$

Dados  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , denotando por  $\det(v, w)$  o determinante da matriz  $2 \times 2$  que tem as coordenadas de  $v$  e  $w$  em cada coluna respectivamente, temos

$$\det(v, w) = \langle Jv, w \rangle$$

e pela simetria do determinante temos que

$$\langle Jv, w \rangle = \det(v, w) = -\det(w, v) = -\langle v, Jw \rangle.$$

Suponha que  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  admita uma função ângulo diferenciável,  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,

$$\gamma'(t) = (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)))\theta'(t) = \theta'(t) J(\gamma(t))$$

e

$$\langle J(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \theta'(t) \langle J(\gamma(t)), J(\gamma(t)) \rangle.$$

Como  $\|\gamma(t)\| = 1$ ,  $\|J(\gamma(t))\| = 1$ . Logo,

$$\theta'(t) = \det(\gamma(t), \gamma'(t)).$$

**Proposição 1.7.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  uma curva diferenciável. Então  $\gamma$  admite uma função-ângulo  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  que é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de  $\gamma$ , a qual é diferenciável, difere de  $\theta$  por uma constante.*

*Demonstração.* Tome  $t_0 \in I$  arbitrário. Como  $\gamma(t_0) \in \mathbb{S}^1$ ,  $\exists \theta_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(t_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$ . Defina então,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \det(\gamma(u), \gamma'(u)) du, \quad t \in I. \quad (1.1)$$

- $g(u) = \det(\gamma(u), \gamma'(u))$  é contínua;
- $\theta'(t) = \det(\gamma(t), \gamma'(t))$ .

Considere então a curva  $\sigma(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ ,  $t \in I$ . Temos que  $\sigma$  é uma curva diferenciável e  $\sigma(t_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)) = \gamma(t_0)$ .

Vamos então mostrar que  $\sigma$  e  $\gamma$  coincidem. Defina  $f(t) = \langle \gamma(t), \sigma(t) \rangle$ ,  $t \in I$ .

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle \gamma'(t), \sigma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \sigma'(t) \rangle \\ &= \langle \gamma'(t), \sigma(t) \rangle + \theta'(t) \langle \gamma(t), J\sigma(t) \rangle \\ &= \langle \gamma'(t), \sigma(t) \rangle + \det(\gamma(t), \gamma'(t)) \langle \gamma(t), J\sigma(t) \rangle \\ &= \langle \gamma'(t), \sigma(t) \rangle - \langle J\gamma(t), \gamma'(t) \rangle \langle J\gamma(t), \sigma(t) \rangle \end{aligned}$$

Como  $\gamma(t)$  é ortogonal a  $\gamma'(t)$ , então  $\gamma'(t)$  é paralelo a  $J\gamma(t)$ , isto é,  $\exists \lambda(t) \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma'(t) = \lambda(t) J\gamma(t)$ . Logo,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lambda(t) \langle J\gamma(t), \sigma(t) \rangle - \lambda(t) \langle J\gamma(t), J\gamma(t) \rangle \langle J\gamma(t), \sigma(t) \rangle \\ &= \lambda(t) \langle J\gamma(t), \sigma(t) \rangle - \lambda(t) \langle J\gamma(t), \sigma(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $f(t)$  é constante. Como  $f(t_0) = \langle \gamma(t_0), \sigma(t_0) \rangle = 1$ , segue que  $f(t) = \langle \gamma(t), \sigma(t) \rangle = 1 \forall t \in I$ .

Como  $\gamma(t)$  e  $\sigma(t)$  são unitários e  $\langle \gamma(t), \sigma(t) \rangle = 1$ ,  $\cos(\gamma, \sigma) = 1$ , e conseqüentemente o ângulo entre os vetores é 0. Assim, os vetores  $\gamma(t)$  e  $\sigma(t)$  são paralelos, unitários e formam um ângulo 0, então coincidem. ■

Agora considere  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  p.c.a e seja  $t(s) = \alpha'(s)$ ,  $s \in I$ .

- $\|t(s)\| = 1 \forall s \in I$ ;
- $t(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) \forall s \in I$ .

**Definição 10.** A curvatura de  $\alpha$  em  $s$ ,  $k(s)$ , é definida por

$$k(s) = \theta'(s).$$

Como  $k(s) = \theta'(s) = \det(t(s), t'(s)) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$ . Então  $|k(s)|$  é numericamente igual à área do retângulo determinado pelos vetores  $\alpha'(s)$ ,  $\alpha''(s)$ .

Como  $\alpha'(s)$  é unitário,  $|k(s)| = |\det(\alpha'(s), \alpha''(s))| = \|\alpha'(s)\| \|\alpha''(s)\| \cdot \sin(\beta)$ , como  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $|k(s)| = 1 \cdot \|\alpha''(s)\| \cdot 1 = \|\alpha''(s)\|$ .

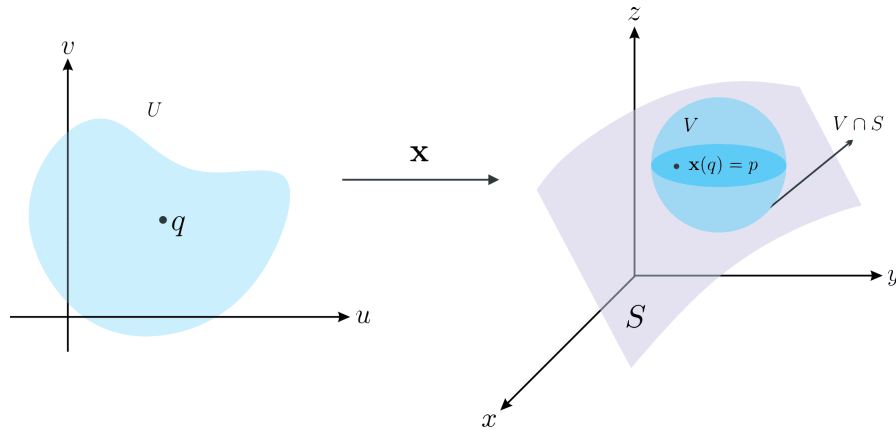
**Teorema 1.8.** *Seja  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  uma curva plana, regular e suave, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Então,*

$$k(t) = \left| \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

### 1.3 Superfície Regular

**Definição 11.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  (Figura 1.2) tal que,

Figura 1.2: Uma parametrização de  $S$ .



Fonte: Autoria própria.

1.  $\mathbf{x}$  é diferenciável; ou seja, se

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in U.$$

então as funções componentes de  $\mathbf{x}$  possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .

2.  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo; isto é,  $\mathbf{x}$  é contínua e tem inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  contínua.
3. *Condição de regularidade*; para todo  $q \in U$  a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

A aplicação  $\mathbf{x}$  é chamada *parametrização local* ou *sistema de coordenadas locais* em uma vizinhança  $V \cap S$  de  $p$ , e tal vizinhança é chamada *vizinhança coordenada*. Com o objetivo de expressar a condição 3 de forma mais clara, iremos calcular a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_q$  nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  dada por  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$  respectivamente. Seja  $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $e_1$  vetor tangente a curva  $\alpha(u) = (u_0 + u, v_0)$ , com  $\alpha(0) = (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(u) = (1, 0) = e_1$  (Figura 1.3). A imagem de  $\alpha$  por  $\mathbf{x}$  é

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \mathbf{x} \circ \alpha(u) = (x(\alpha(u)), y(\alpha(u)), z(\alpha(u))) \\ &= \mathbf{x}(u_0 + u, v_0) = (x(u_0 + u, v_0), y(u_0 + u, v_0), z(u_0 + u, v_0)). \end{aligned}$$

A curva  $\beta$  definida acima é chamada *curva coordenada*  $v = v_0$ , está em  $S$  e tem em  $\mathbf{x}(q)$  o vetor tangente

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

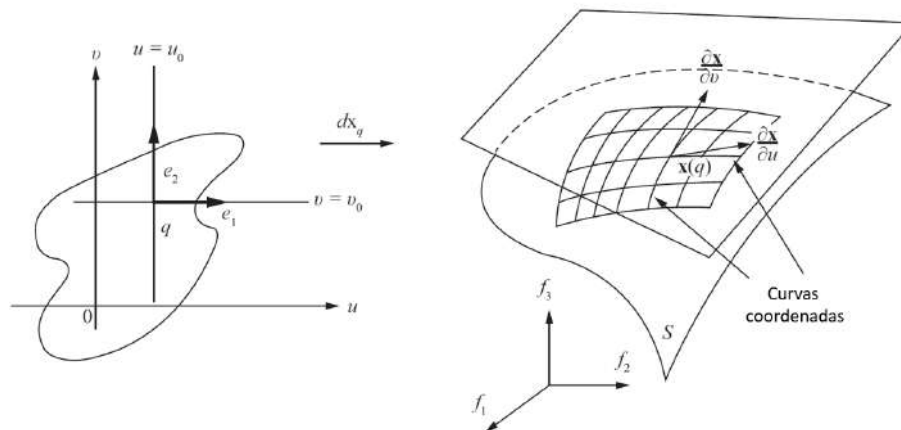
onde as derivadas são calculadas em  $(u_0, v_0)$  e o vetor  $\beta'(0)$  é indicado pelas suas componentes na base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ . Assim, pela definição de diferencial, temos,

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

De modo análogo, para a curva coordenada  $u = u_0$ , temos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Figura 1.3: Curvas coordenadas em  $S$ .



Fonte: CARMO, 2005, p. 63.

Por fim, a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_q$ , também chamada de *matriz Jacobiana*, com relação a essas bases será

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Por comodidade denotaremos  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$  por  $\mathbf{x}_u$  e  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$  por  $\mathbf{x}_v$ .

Como a condição 3 pede que a diferencial  $d\mathbf{x}_q$  seja injetiva, então esta aplicação tem que ter posto 2, isso significa que os vetores  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  são linearmente independentes. Assim para saber se a diferencial é injetiva basta verificar se a matriz Jacobiana tem posto 2, isto é, pelo menos um dos determinantes

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

deve ser diferente de zero em  $q = (u, v)$ ,  $\forall q \in U$ .

Note que a condição 2 exclui a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares. Além disso, a condição 3 garante a existência de um *plano tangente*, como veremos mais adiante.

**Exemplo 4.** A esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

Com efeito, seja  $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}_1 = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \quad (x, y) \in U,$$

onde  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$  e  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ . Iremos mostrar que  $\mathbf{x}_1$  é uma parametrização de  $S^2$  que cobre o hemisfério norte da esfera unitária menos o equador (Figura 1.4). Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}. \end{aligned}$$

Como  $x^2 + y^2 < 1$  então  $\mathbf{x}_1$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens, logo a condição 1 é satisfeita.

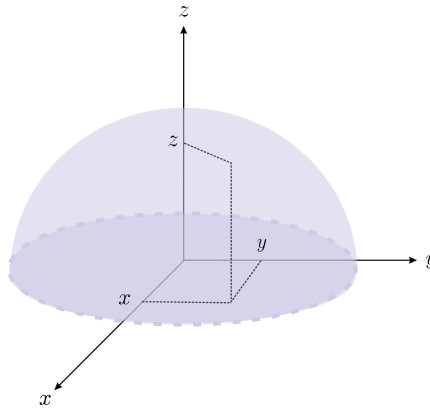
Observe que a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_{(x,y)}$  é dada por

$$d\mathbf{x}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} & \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos perceber que  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \right| = 1$ , com isso concluímos que a matriz  $d\mathbf{x}_{(x,y)}$  tem posto 2, logo a condição 3 também é satisfeita.

Por fim, para verificar a condição 2, perceba que  $\mathbf{x}_1 : U \rightarrow \mathbf{x}_1(U)$  é bijetiva, pois um ponto  $(x, y) \equiv (x, y, 0)$  no disco aberto de raio 1 no plano  $xy$  tem num ponto em  $\mathbb{R}^3$  acima do plano  $xy$  uma altura  $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ . Assim, concluímos que  $\mathbf{x}_1^{-1}$  é a restrição da projeção  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  ao conjunto  $\mathbf{x}_1(U)$ . Logo,  $\mathbf{x}_1^{-1}$  é contínua em  $\mathbf{x}_1(U)$ .

Figura 1.4: Conjunto coberto pela parametrização  $\mathbf{x}_1$ .



Fonte: Autoria própria.

Agora, cobriremos a esfera usando parametrizações similares que juntamente com  $\mathbf{x}_1$  cobrem inteiramente  $\mathbb{S}^2$ . Observe que precisaremos de 6 parametrizações desse tipo para cobrir toda a esfera.

$$\mathbf{x}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_3(x, z) = (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \quad (x, z) \in U_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \quad (x, z) \in U_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_5(y, z) = (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \quad (y, z) \in U_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 < 1\},$$

$$\mathbf{x}_6(y, z) = (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \quad (y, z) \in U_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 < 1\}.$$

Mostramos assim que  $\mathbb{S}^2$  é uma superfície regular (Figura 1.5).

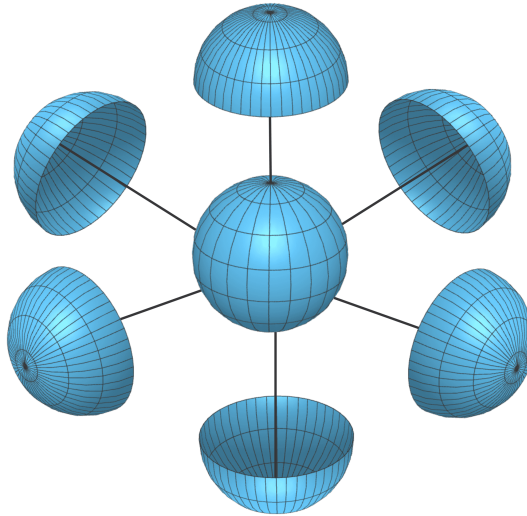
**Exemplo 5.** (Superfície de Revolução) Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana  $C$  em torno de um eixo no plano que não encontra a curva; vamos considerar o plano  $xz$  como o plano da curva e o eixo  $Oz$  como eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para  $C$  e denote por  $u$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $Oz$ .



Figura 1.5: Parametrizações locais da esfera.



Fonte: Autoria própria.

Assim, teremos a aplicação

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \sin(u), g(v)),$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  em  $S$ . Vamos mostrar que  $\mathbf{x}$  é parametrização de  $S$ .

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -f(v) \sin(u) & \frac{\partial x}{\partial v} &= f'(v) \cos(u), \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= f(v) \cos(u) & \frac{\partial y}{\partial v} &= f'(v) \sin(u), \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial v} &= g'(v), \end{aligned}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis, pois a curva é regular, então  $\mathbf{x}$  é diferenciável e a condição 1 é satisfeita. Além disso,  $d\mathbf{x}_q$  é dada por

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} -f(v) \sin(u) & f'(v) \cos(u) \\ f(v) \cos(u) & f'(v) \sin(u) \\ 0 & g'(v) \end{bmatrix},$$

assim, se pegarmos o primeiro dos subdeterminantes  $2 \times 2$  temos que  $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} \right| = -f(v)f'(v) \neq 0$ , pois a curva é regular e  $f(v) > 0$ , deste modo, a matriz da diferencial tem posto 2, e a condição 3 também é satisfeita. Para mostrar que a condição 2, mostraremos primeiro que  $\mathbf{x}$  é injetiva. De fato, como  $(f(v), g(v))$  é uma parametrização de  $C$ , dados  $z$  e

$x^2 + y^2 = (f(v))^2$ , podemos determinar  $v$  de maneira única. Daí,  $\mathbf{x}$  é injetiva, sendo ainda uma função contínua de  $z$  e de  $\sqrt{x^2 + y^2}$  e, conseqüentemente, uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Para mostrar que  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua, resta mostrar que  $u$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Para ver isso, primeiro observamos que se  $u \neq \pi$ , obtemos, já que  $f(v) \neq 0$ ,

$$\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{u}{2}\right)}{2\operatorname{cos}^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(u)}{1 + \operatorname{cos}(u)} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 + \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}};$$

daí,

$$u = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Portanto,  $u$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Isso mostra que  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua e a condição 2 é satisfeita. Desta forma,  $S$  é uma superfície regular, chamada superfície de revolução. A curva  $C$  é chamada de curva geratriz de  $S$ , e o eixo  $Oz$  é o eixo de rotação de  $S$ .

No que segue, demonstraremos duas proposições que garantem que algumas classes de conjuntos são superfícies regulares.

**Proposição 1.9.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Então, o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  para  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

*Demonstração.* A demonstração é relativamente simples. É necessário verificar que a aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , com  $(u, v) \in U$ , é uma parametrização do gráfico de  $f$ . Note que,  $\mathbf{x}$  é diferenciável, visto que, as derivadas parciais das funções componentes de  $\mathbf{x}$  são contínuas ( $f$  é diferenciável e conseqüentemente é contínua). Observe que,

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial u} = 1 & \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} = 0 & \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = f_u(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v} = f_v(u, v), \end{array}$$

com isso a matriz da aplicação linear  $d\mathbf{x}_{(u,v)}$  é dada por

$$d\mathbf{x}_{(u,v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{bmatrix},$$

e a condição 3 é satisfeita, pois  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$ . Finalmente, observe que cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $\mathbf{x}$  de um único ponto  $(u, v) \in U$ . Assim,  $\mathbf{x}$  é bijetiva, e como  $\mathbf{x}^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção  $\pi(x, y, z) = (u, v)$  concluímos que  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua. Portanto,  $\mathbf{x}$  é uma parametrização do gráfico de  $f$  e com isso podemos concluir que todo gráfico de uma função diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $U$  conjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ , é uma superfície regular. ■

**Definição 12.** Diremos que  $a$  é valor regular de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se a diferencial  $df_p$  é sobrejetiva  $\forall p \in f^{-1}(a)$ , a imagem inversa de  $a$  por  $f$ , isto é o conjunto

$$f^{-1}(a) = \{p \in \mathbb{R}^n; f(p) = a\}.$$

Observe que se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , a diferencial  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear. Com efeito, sua matriz é dada por

$$df_p = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f(p)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \end{array} \right]_{1 \times n},$$

e como a dimensão da imagem é 1 ou 0, então  $df_p$  ou é sobrejetiva ou é nula. Se  $a$  não é um valor regular, ou seja, a diferencial não é sobrejetiva neste ponto, diremos que  $a$  é um ponto crítico de  $f$ .

**Proposição 1.10.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Seja  $p = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(a)$ . Como  $a$  é um valor regular de  $f$ , podemos admitir que  $f_z \neq 0$  em  $p$ . Definindo a aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ , e indicaremos por  $(u, v, t)$  as coordenadas de um ponto do  $\mathbb{R}^3$  onde  $F$  toma seus valores. A diferencial de  $F$  em  $p$  é dada por,

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

onde  $\det(dF_p) = f_z \neq 0$ . Aplicando o teorema da função inversa, garantimos a existência de vizinhança  $V$  de  $p$  e  $W$  de  $F(p)$  tais que  $F : V \rightarrow W$  é inversível e a inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$  é diferenciável. Assim, as funções coordenadas de  $F^{-1}$ ,  $x = u$ ,  $y = v$  e  $z = g(u, v, t)$  são diferenciáveis. Em particular,  $z = g(u, v, a) = h(x, y)$  é uma função diferenciável definida na projeção de  $V$  sobre o plano  $xy$ . Como  $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\}$ , concluímos então que o gráfico de  $h$  é  $f^{-1}(a) \cap V$ , que é uma vizinhança coordenada de  $p$ .

Assim, todo  $p \in f^{-1}(a)$  pode ser coberto por uma vizinhança de coordenada, e podemos concluir que  $f^{-1}(a)$  é superfície regular. ■

**Exemplo 6.** Mostre que o elipsóide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

é uma superfície regular.

Seja

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Observe que  $f$  é uma função diferenciável, uma vez que as derivadas parciais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2}$$

existem e são contínuas. Perceba também que,

$f(x, y, z) = 0 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , isto é,  $f^{-1}(0) = E$ . A matriz da diferencial  $df_{(x,y,z)}$  num ponto  $(x, y, z)$  é dada por:

$$df_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{bmatrix}.$$

Assim,  $df_{(x,y,z)} = 0 \iff \frac{2x}{a^2} = 0, \frac{2y}{b^2} = 0$  e  $\frac{2z}{c^2} = 0$ . Logo,  $df_{(x,y,z)} = 0 \iff x = y = z = 0$ . Se  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  então  $df_{(x,y,z)}$  é sobrejetiva. Assim, sobre os pontos de  $E$ ,  $df_{(x,y,z)}$  é sobrejetiva e conseqüentemente 0 é valor regular de  $f$ . Pela proposição acima  $F$  é uma superfície regular.

**Proposição 1.11.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:  $z = f(x, y), y = g(x, z), x = h(y, z)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , e escreva  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$ . Pela condição 3 da Definição 11, um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$$

não se anula em  $\mathbf{x}^{-1}(p) = q$ .

Primeiramente, suponha que  $\partial(x, y)/\partial(u, v)(q) \neq 0$ , e considere a aplicação  $\pi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\pi$  é a projeção  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Então  $\pi \circ \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , e,

como  $\partial(x, y)/\partial(u, v)(q) \neq 0$ , podemos aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de vizinhanças  $V_1$  de  $q$  e  $V_2$  de  $\pi \circ \mathbf{x}(q)$  tais que  $\pi \circ \mathbf{x}$  aplique  $V_1$  difeomorficamente sobre  $V_2$ . Decorre daí que  $\pi$  restrita a  $\mathbf{x}(V_1) = V$  é bijetiva e tem uma inversa diferenciável  $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ . Observe que, como  $\mathbf{x}$  é homeomorfismo,  $V$  é uma vizinhança de  $p$  em  $S$ . Agora, considerando a composição da aplicação  $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$  com a função  $(u, v) \rightarrow z(u, v)$ , podemos notar que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável  $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ , e isso encerra a demonstração deste primeiro caso.

Os casos que restam podem ser tratados da mesma maneira, fornecendo-nos  $x = h(y, z)$  e  $y = g(x, z)$ . ■

Iremos fazer menção de uma proposição, e sua demonstração pode ser encontrada em [1], p.74.

**Proposição 1.12.** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação com  $p \in \mathbf{x}(U)$  tal que as condições 1 e 3 da definição de superfície regular sejam satisfeitas. Suponha que  $\mathbf{x}$  seja bijetiva. Então  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua.*

## 1.4 Funções e aplicações diferenciáveis em superfícies

Vamos mostrar através da proposição abaixo que dado um ponto de uma superfície regular que pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\xi, \eta)$ , é possível passarmos de uma dessas coordenadas para a outra através de uma aplicação diferenciável.

**Proposição 1.13** (*Mudança de parâmetros*). *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ , e sejam  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Então a “mudança” de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  é um difeomorfismo; isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa  $h^{-1}$  diferenciável.*

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), & (u, v) \in U \\ \mathbf{y}(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) & (\xi, \eta) \in V, \end{aligned}$$

então a mudança de coordenadas  $h$ , dada por

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

é tal que as funções  $u$  e  $v$  tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além

disso, a aplicação  $h$  pode ser invertida, fornecendo

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad (u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W),$$

onde as funções  $\xi$  e  $\eta$  também possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1,$$

isto implica que os determinantes Jacobianos, tanto de  $h$  quanto de  $h^{-1}$ , são diferentes de zero em todos os pontos.

*Demonstração.* Note que  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$  é um homeomorfismo. Seja  $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$  e defina  $q = h(r)$ . Como  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma parametrização, podemos supor que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Estendemos  $\mathbf{x}$  a uma aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente,  $F$  aplica um cilindro vertical  $C$  sobre  $U$  em um cilindro vertical sobre  $\mathbf{x}(U)$ , levando cada seção de  $C$  com altura  $t$  na superfície  $\mathbf{x}(u, v) + (0, 0, t)$ .  $F$  é diferenciável e a restrição  $F|_{U \times \{0\}} = \mathbf{x}$ . Calculando o determinante da diferencial  $dF_p$ , obtemos

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança  $M$  de  $\mathbf{x}(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $M$ . Pela continuidade de  $\mathbf{y}$ , existe uma vizinhança  $N$  de  $r$  em  $V$  tal que  $\mathbf{y}(N) \subset M$ . Observe que,  $h|_N = F^{-1} \circ \mathbf{y}|_N$  é a composição de aplicações diferenciáveis. Assim sendo, podemos aplicar a regra da cadeia para aplicações e concluir que  $h$  é diferenciável em  $r$ . Como  $r$  é arbitrário,  $h$  é diferenciável em  $\mathbf{y}^{-1}(W)$ . Com o mesmo argumento, podemos mostrar que a aplicação  $h^{-1}$  é diferenciável, e portanto  $h$  é difeomorfismo. ■

**Exemplo 7.** Uma parametrização para o helicóide é dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos(\bar{u}), \bar{v} \sin(\bar{u}), a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Vamos fazer a seguinte mudança de parâmetros:

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \operatorname{asinh}(v), \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty,$$

que é possível já que a aplicação é evidentemente bijetiva, e o Jacobiano

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = a \cosh(v)$$

nunca se anula. Assim, uma nova parametrização do helicóide é

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (a \operatorname{asinh}(v) \cos(u), a \operatorname{asinh}(v) \operatorname{sen}(u), au), \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty.$$

**Definição 13.** Seja  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um subconjunto aberto  $V$  de uma superfície regular  $S$ . Então  $f$  é diferenciável em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$ , a composição  $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . A função  $f$  é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todos os pontos de  $V$ .

**Exemplo 8.** Seja  $S$  uma superfície regular e  $V \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto tal que  $S \subset V$ . Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável.

Note que a restrição de  $f$  a  $S$  ainda é uma função diferenciável sobre  $S$ , pois para qualquer  $p \in S$  e qualquer parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p$ , pela definição anterior a composição  $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável.

**Definição 14.** Diremos que uma aplicação contínua  $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ , de um conjunto aberto  $V_1$  de uma superfície regular  $S_1$  em uma superfície regular  $S_2$ , é diferenciável em  $p \in V_1$  se, dadas parametrizações

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  e  $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ , a aplicação

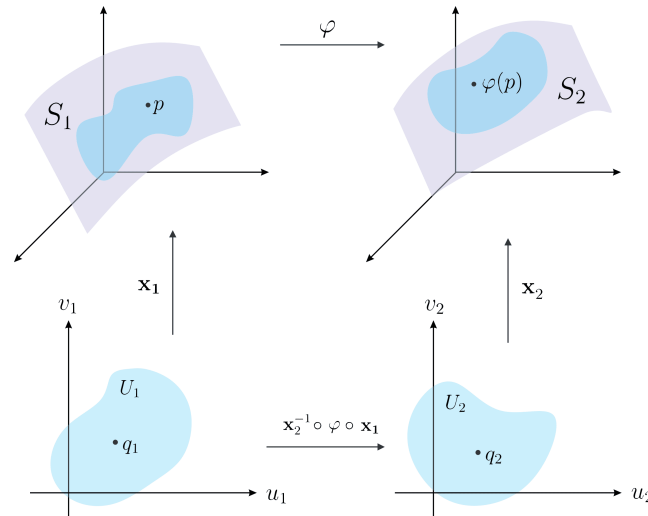
$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em  $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ . (Figura , 1.6)

**Definição 15.** Duas superfícies regulares são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  com uma inversa diferenciável  $\varphi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ .  $\varphi$  é chamada um difeomorfismo de  $S_1$  em  $S_2$ .

**Exemplo 9.** Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma parametrização,  $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável.

Figura 1.6: Aplicação diferenciável entre superfícies.



Fonte: Autoria própria.

Com efeito, para qualquer  $p \in \mathbf{x}(U)$  e qualquer parametrização  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p$ , temos que  $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ , onde  $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ , é diferenciável. Isso mostra que  $U$  e  $\mathbf{x}(U)$  são difeomorfos.

## 1.5 Plano tangente e diferencial de uma aplicação

**Definição 16.** Um vetor tangente a  $S$  em um ponto  $p \in S$  é o vetor tangente  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$ .

**Proposição 1.14.** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

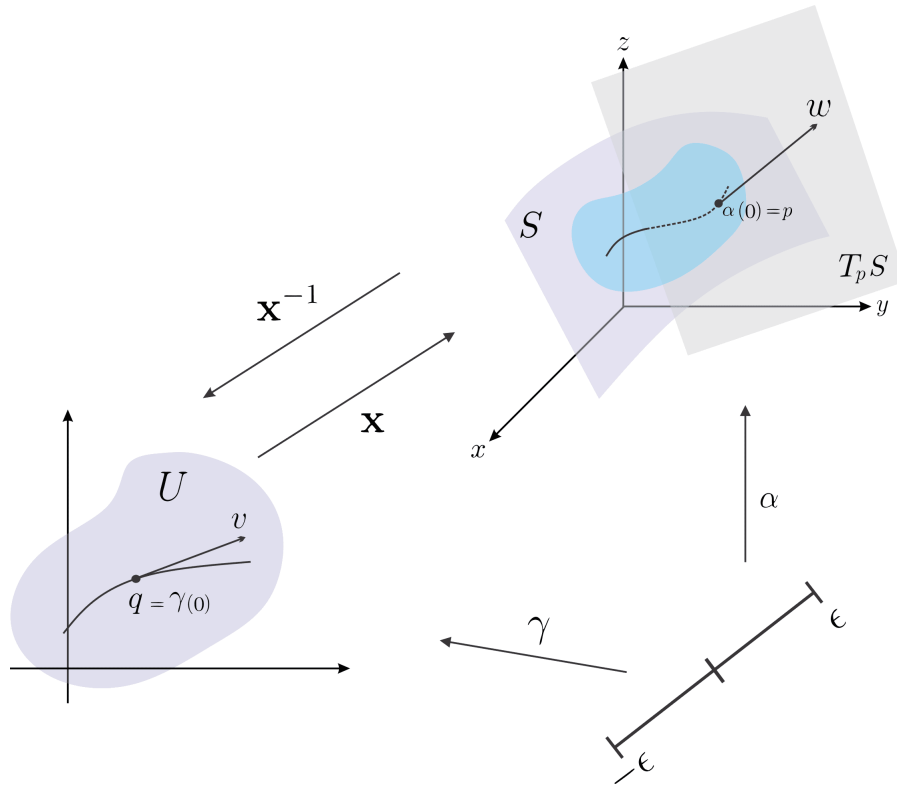
coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $\mathbf{x}(q)$ .

*Demonstração.* Seja  $w$  um vetor tangente em  $\mathbf{x}(q)$ , isto é, seja  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é diferenciável e  $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$ . Pelo Exemplo 10, a curva  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é diferenciável. Pela definição de diferencial, temos que  $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = w$ , então  $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ . Por outro lado, seja  $w = d\mathbf{x}_q(v)$ , onde  $v \in \mathbb{R}^2$  e  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  dada por  $\gamma(t) = tv + q$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  (Figura 1.7). É claro que  $v$  é vetor velocidade da curva  $\gamma$ . Pela definição de diferencial,  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ . Assim, temos que  $w$  é um vetor tangente. ■

**Definição 17.** Chamaremos o plano  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$  de plano tangente a  $S$  em  $p$ , e denotaremos por  $T_p S$ .



Figura 1.7: Diagrama da construção de  $\gamma$ .



Fonte: Autoria própria.

Pela proposição acima,  $T_pS$  não depende da parametrização  $\mathbf{x}$ . Entretanto a escolha de uma parametrização determina uma base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$  de  $T_pS$ , chamada *base associada* a  $\mathbf{x}$ . Assim podemos escrever as coordenadas de  $w \in T_pS$  na base associada a uma parametrização  $\mathbf{x}$  do seguinte modo:  $w = \alpha'(0)$  é o vetor velocidade de uma curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ , onde  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\beta(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Então,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t), v(t)))|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0) = w. \end{aligned}$$

Assim, na base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ ,  $w$  tem coordenadas  $((u'(0), v'(0)))$ .

Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares,  $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável com  $p \in V$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$  uma curva parametrizada diferenciável com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Sabemos que  $w \in T_pS_1$  é vetor velocidade de  $\alpha$ . Assim,  $\beta = \varphi \circ \alpha$  é tal que  $\beta(0) = \varphi(p)$  e, desta forma,  $\beta'(0) \in T_{\varphi(p)}S_2$ .

**Proposição 1.15.** *Na discussão acima, dado  $w$ , o vetor  $\beta'(0)$  não depende da escolha de  $\alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_pS_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}S_2$  definida por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  é linear.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  onde  $\mathbf{x} : U \rightarrow S_1$  e  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \rightarrow S_2$  parametrizações de  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente. Suponha que  $\varphi$  seja expressa nestas coordenadas por

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)),$$

onde  $(u, v) \in U$  e  $(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in \bar{U}$ , e que  $\alpha$  na parametrização  $\mathbf{x}$ , seja expressa por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Assim,  $\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$ , logo a expressão de  $\beta'(0)$  na base  $\{\bar{\mathbf{x}}_u, \bar{\mathbf{x}}_v\}$  de  $T_{\varphi(p)}S_2$  é

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Bigg|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right). \end{aligned}$$

Em forma matricial,

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Desta forma  $d\varphi_p$  é representada por uma matriz que depende apenas da aplicação  $\varphi$  e das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Portanto,  $d\varphi_p$  é linear e não depende da escolha de  $\alpha$ . ■

## 1.6 Primeira forma fundamental

**Definição 18.** A forma quadrática  $I_p$  em  $T_pS$  definida por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ , é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

A primeira forma fundamental consiste portanto em induzir a métrica do  $\mathbb{R}^3$  em cada  $T_pS$ , e nos possibilita fazer medidas sobre a superfície (ângulo de vetores tangentes, comprimento de curvas, área de regiões), sem fazer menção ao espaço  $\mathbb{R}^3$  onde está a superfície. Vamos expressar a primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  associada a uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ . Como um vetor tangente  $w \in T_pS$  é o vetor tangente a uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , com  $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  e

$$\alpha'(0) = w,$$

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right\rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + 2\langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= (u')^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p + 2u'v' \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p + (v')^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ &= (u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G, \end{aligned}$$

onde obtemos os seguintes valores calculados em  $t = 0$ ,

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p.$$

$E$ ,  $F$  e  $G$  são chamados os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ .

**Exemplo 10.** Um sistema de coordenadas para um plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$  é dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Note que, para determinarmos os coeficientes da primeira forma fundamental de  $P$ , observamos que  $\mathbf{x}_u = w_1$  e  $\mathbf{x}_v = w_2$ . Como  $w_1$  e  $w_2$  são vetores ortonormais,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são dadas por,

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\|^2 = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\|^2 = 1.$$

**Exemplo 11.** O cilindro reto sobre o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  (Figura 1.8) admite a parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$  e

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

Para calcular a primeira forma fundamental, note que

$$\mathbf{x}_u = (-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0), \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

e, portanto,

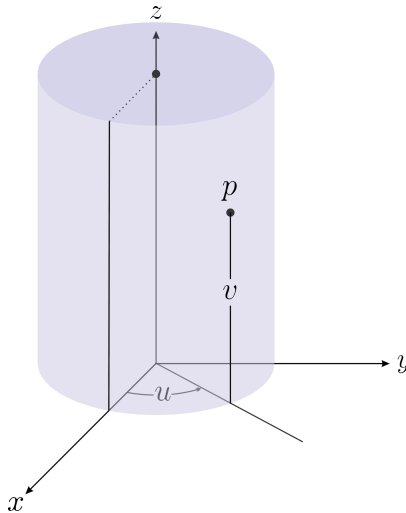
$$E = \langle (-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0), (-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0) \rangle = \cos(u)^2 + \operatorname{sen}(u)^2 = 1,$$

$$F = \langle (-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0,$$

$$G = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1.$$

Observamos que embora o cilindro e o plano sejam duas superfícies distintas, possuem os mesmos coeficientes da primeira forma fundamental.

Figura 1.8: Cilindro.



Fonte: Autoria própria.

**Exemplo 12.** Considere a hélice que é dada por  $\alpha(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), au)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano  $xy$  e que intersecta o eixo  $O_z$ . A superfície gerada por essas retas é chamada de um helicóide. Uma parametrização do helicóide é dada por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos(u), v \operatorname{sen}(u), au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Note que,  $\mathbf{x}_u = (-v \operatorname{sen}(u), v \cos(u), a)$  e  $\mathbf{x}_v = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0)$ . Assim, os coefi-

cientes da primeira forma fundamental são,

$$E = \langle (-v\text{sen}(u), v\cos(u), a), (-v\text{sen}(u), v\cos(u), a) \rangle = \|(-v\text{sen}(u), v\cos(u), a)\|^2 = \\ = v^2(v\cos(u)^2 + \text{sen}(u)^2) + a^2 = v^2 + a^2,$$

$$F = \langle (-v\text{sen}(u), v\cos(u), a), (\cos(u), \text{sen}(u), 0) \rangle = v\cos(u)\text{sen}(u) - v\cos(u)\text{sen}(u) = 0,$$

$$G = \langle (\cos(u), \text{sen}(u), 0), (\cos(u), \text{sen}(u), 0) \rangle = \|(\cos(u), \text{sen}(u), 0)\|^2 = \cos(u)^2 + \text{sen}(u)^2 = 1.$$

**Exemplo 13.** Vamos calcular a primeira forma fundamental de uma esfera em um ponto de uma vizinhança coordenada dada pela parametrização

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta)), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Observe que,

$$\mathbf{x}_\theta(\theta, \varphi) = (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\text{sen}(\varphi), -\text{sen}(\theta)), \quad \mathbf{x}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \text{sen}(\theta)\cos(\varphi), 0).$$

Assim,

$$E(\theta, \varphi) = \langle (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\text{sen}(\varphi), -\text{sen}(\theta)), (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\text{sen}(\varphi), -\text{sen}(\theta)) \rangle = 1,$$

$$F(\theta, \varphi) = \langle (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\text{sen}(\varphi), -\text{sen}(\theta)), (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \text{sen}(\theta)\cos(\varphi), 0) \rangle = 0,$$

$$G(\theta, \varphi) = \langle (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \text{sen}(\theta)\cos(\varphi), 0), (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \text{sen}(\theta)\cos(\varphi), 0) \rangle = \text{sen}^2(\theta).$$

Portanto, se  $w$  é um vetor tangente à esfera em um ponto  $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ , dado na base associada a  $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$  por  $w = a\mathbf{x}_\theta + b\mathbf{x}_\varphi$ , então,

$$I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2\text{sen}^2(\theta).$$

Como mencionado anteriormente, conhecendo a primeira forma fundamental podemos tratar de questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Vamos ver agora algumas dessas questões.

- O comprimento de arco  $s$  de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(0))} dt,$$

e, se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  podemos reescrever o comprimento de arco de  $\alpha$  como,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

- O ângulo  $\theta$  de duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\beta : I \rightarrow S$  que

se intersectam em  $t = t_0$  é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

**Exemplo 14.** Uma parametrização do parabolóide hiperbólico é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2).$$

Temos que,

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u), \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, -2v), \quad \mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 2),$$

Assim, os coeficientes da primeira forma são,

$$E = \langle (1, 0, 2u), (1, 0, 2u) \rangle = 1 + 4u^2$$

$$F = \langle (1, 0, 2u), (0, 1, -2v) \rangle = -4uv$$

$$G = \langle (0, 1, -2v), (0, 1, -2v) \rangle = 1 + 4v^2.$$

Seja  $\beta$  o ângulo entre as curvas coordenadas, logo

$$\cos(\beta) = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{-4uv}{\sqrt{(1+4u^2)(1+4v^2)}} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{-4uv}{\sqrt{(1+4u^2)(1+4v^2)}}.$$

• Seja  $Q$  uma região limitada em  $\mathbb{R}^2$  que está contida em uma vizinhança coordenada  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ . Então  $\mathbf{x}(Q) = R$  é a região limitada em  $S$ . A função  $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|$ , definida em  $U$ , representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ . Mostraremos primeiro que a integral

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv,$$

não depende da escolha da parametrização  $\mathbf{x}$ . Com efeito, seja  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma outra parametrização com  $R \subset \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e defina  $\bar{Q} = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$ . Então,

$$\iint_{\bar{Q}} |\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}| \, d\bar{u}d\bar{v} = \iint_{\bar{Q}} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \, d\bar{u}d\bar{v} = \iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv,$$

onde a última igualdade vem do teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas. A independência afirmada está portanto provada, e podemos estabelecer a seguinte definição.

**Definição 19.** Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular, contida em

uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número positivo

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

é chamada área de  $R$ .

**Exemplo 15.** Vamos calcular a área do toro. Para isto, consideramos a vizinhança coordenada correspondente à parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)),$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $0 < v < 2\pi$ , que cobre o toro, exceto por um meridiano e um paralelo.

Note que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), \\ \mathbf{x}_v &= (-\sin(v)(a + r \cos(u)), \cos(v)(a + r \cos(u)), 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), \\ &\quad r \cos(u)) \rangle = r^2, \\ F &= \langle (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), (-\sin(v)(a + r \cos(u)), \cos(v) \\ &\quad (a + r \cos(u)), 0) \rangle = 0, \\ G &= \langle (-\sin(v)(a + r \cos(u)), \cos(v)(a + r \cos(u)), 0), (-\sin(v)(a + r \cos(u)), \cos(v) \\ &\quad (a + r \cos(u)), 0) \rangle = (a + r \cos(u))^2. \end{aligned}$$

Considere agora a região  $R_\epsilon$ , dada pela imagem por  $\mathbf{x}$  da região  $Q_\epsilon$  dada por ( $\epsilon > 0$  e pequeno),

$$Q_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \epsilon \leq u \leq 2\pi - \epsilon, 0 + \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}.$$

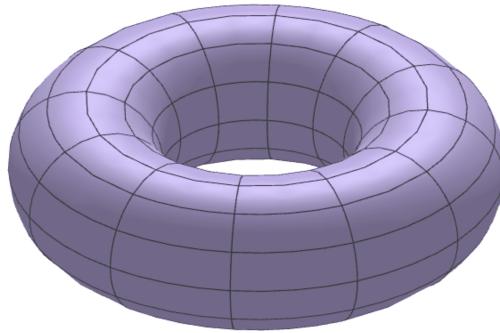
Pela definição acima,

$$\begin{aligned} A(R_\epsilon) &= \iint_{Q_\epsilon} \sqrt{EG - F^2} = \iint_{Q_\epsilon} r(r \cos(u) + a) \, dudv = \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} r(r \cos(u) + a) \, dudv \\ &= \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} r(r \cos(u) + a) \, du \int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon} dv = r^2(2\pi - 2\epsilon)(\sin(2\pi - \epsilon) - \sin(\epsilon)) + ra(2\pi - 2\epsilon)^2. \end{aligned}$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$A(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon) = 4\pi^2 ra.$$

Figura 1.9: Toro



Fonte: Autoria própria.

## 1.7 Orientação de superfícies

**Definição 20.** Uma superfície regular  $S$  é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto  $p \in S$  pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem determinante do Jacobiano positivo em  $p$ . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de  $S$ , e  $S$ , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se  $S$  é orientada, uma parametrização (*local*)  $\mathbf{x}$  é compatível com a orientação de  $S$  se, juntando  $\mathbf{x}$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de  $S$ .

Em outras palavras, dada uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  de uma vizinhança de um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$ , determinamos uma orientação de  $T_p S$ , ou seja, a orientação associada à base ordenada  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Se  $p$  pertence a vizinhança coordenada de uma outra parametrização  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ , a nova base  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  é expressa por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},\end{aligned}$$

onde  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$  e  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$  são as expressões da mudança de coordenadas. As bases  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  e  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  determinam a mesma orientação de  $T_p S$  se e somente se o determinante



do Jacobiano

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix},$$

da mudança de coordenadas é positivo.

**Exemplo 16.** Uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável.

De fato, note que  $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é uma parametrização do gráfico cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. Assim, por ser coberta por uma única vizinhança coordenada, o gráfico é trivialmente orientável.

Como visto anteriormente, dado um sistema de coordenadas  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ , podemos determinar a escolha de um vetor unitário  $N$  em  $p$ , a saber,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p), \quad (1.2)$$

onde,

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \left( \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Escolhendo um outro sistema de coordenadas locais  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  em  $p$ , temos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \left( \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \wedge \left( \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) + \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_v \wedge \mathbf{x}_u) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) - \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|. \end{aligned}$$

Assim, neste sistema de coordenadas,

$$N = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|}{\left| \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \right|} = \pm \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p) \quad (1.3)$$

e, portanto,  $N$  se conserva ou muda de sinal, conforme o Jacobiano da mudança de coordenadas seja positivo ou negativo, respectivamente.

**Proposição 1.16.** *Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se e somente se existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $S$  uma superfície orientável, então podemos cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas tal que, na interseção de quaisquer duas vizinhanças desta família, o Jacobiano da mudança de coordenadas é positivo. Dado  $p = \mathbf{x}(u, v)$  em cada vizinhança, temos  $N(p) = N(u, v)$  por (1.2), e  $N(p)$  está bem definido, visto que se  $p$  pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$ , os vetores normais  $N(u, v)$  e  $N(\bar{u}, \bar{v})$  coincidem por (1.3), pois o Jacobiano da mudança de coordenada é positivo. Além disso, por (1.2), as coordenadas de  $N(u, v)$  em  $\mathbb{R}^3$  são funções diferenciáveis de  $(u, v)$  e portanto,  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo diferenciável de vetores normais e unitários em  $S$ , e considere uma família de vizinhanças coordenadas conexas cobrindo  $S$ . Para cada  $p = \mathbf{x}(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $\mathbf{x}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , pela continuidade de  $N$  é possível se necessário trocarmos  $u$  e  $v$  tal que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Assim,

$$\left\langle N(p), \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \right\rangle = f(p) = \pm 1$$

é uma função contínua em  $\mathbf{x}(U)$ . Como  $\mathbf{x}(U)$  é conexo, o sinal de  $f$  é constante. Se  $f = -1$ , trocaríamos  $u$  e  $v$  na parametrização e obteríamos o resultado afirmado. Fazendo o mesmo com todas as vizinhanças coordenadas, a interseção de duas quaisquer delas teria o Jacobiano da mudança de coordenadas positivo. Caso contrário, teríamos

$$\frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|} = N(p) = -\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = -N(p),$$

o que é uma contradição. Assim, concluímos que as condições para que  $S$  seja orientável são satisfeitas. ■

Um exemplo de uma superfície não-orientável é a chamada *faixa de Möbius*. Tal exemplo pode ser encontrado em [1], p.125.

**Proposição 1.17.** *Se uma superfície regular é dada por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$ , onde  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $a$  é um valor regular de  $f$ , então  $S$  é orientável.*

*Demonstração.* Considere o ponto  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$  e a curva parametrizada  $(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$ , em  $S$  passando por  $p$  para  $t = t_0$ . Como a curva está em  $S$ , temos que  $f(x(t), y(t), z(t)) =$

$a, \forall t \in I$ . Derivando de ambos os lados e calculando em  $t = t_0$ ,

$$\begin{aligned} f_x(p) \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + f_y(p) \left( \frac{dy}{dt} \right)_{t_0} + f_z(p) \left( \frac{dz}{dt} \right)_{t_0} &= 0, \\ \Rightarrow \langle (f_x, f_y, f_z), (dx/dt, dy/dt, dz/dt) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que o vetor  $(f_x, f_y, f_z)$  em  $p$  é perpendicular ao vetor tangente à curva em  $t = t_0$ . Como a curva e o ponto são arbitrários, concluímos que

$$N(x, y, z) = \left( \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right),$$

é um campo diferenciável de vetores normais e unitários em  $S$ , o que implica pela Proposição 19 que  $S$  é orientável. ■

## Capítulo 2

# A geometria da Aplicação de Gauss

Neste capítulo estenderemos aspectos geométricos relacionados a uma superfície regular  $S$ . Definiremos a aplicação normal de Gauss, a segunda forma fundamental e as curvaturas Gaussiana e Média, através da matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss. Mostraremos expressões explícitas para o cálculo dessas entidades em coordenadas locais. Gostaríamos de enfatizar que nos Capítulos 3 e 4 é que aprofundaremos o estudo da curvatura média, embora falaremos dela neste capítulo.

### 2.1 A aplicação normal de Gauss

**Definição 21.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

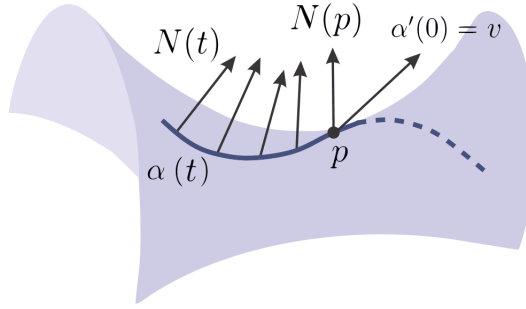
A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada a aplicação normal de Gauss de  $S$ .

Como  $S$  é uma superfície orientável, a aplicação normal de Gauss é diferenciável. Assim, para todo  $p \in S$  a diferencial  $dN_p$  é uma aplicação linear de  $T_pS$  em  $T_{N(p)}S^2$ . Como  $T_pS$  e  $T_{N(p)}S^2$  são os mesmos espaços vetoriais via identificação,  $dN_p$  pode ser olhada como um operador linear em  $T_pS$ . O operador  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  opera da seguinte forma: para cada curva parametrizada  $\alpha(t)$  em  $S$  com  $\alpha(0) = p$ , temos a curva parametrizada  $N \circ \alpha(t) = N(t)$  na esfera  $S^2$ , ou seja, restringimos o vetor  $N$  à curva  $\alpha(t)$ . O vetor tangente a  $N(t)$  é dado por

$$N'(0) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = dN_p(\alpha'(0)).$$

$N'(0)$  é um vetor de  $T_pS$  e mede a taxa de variação de  $N$  restrito a curva  $\alpha(t)$  em  $t = 0$ . Assim,  $dN_p$  mede o quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$  (Figura 2.1).

Figura 2.1: Variação do vetor normal em uma vizinhança de  $p$ .



Fonte: Autoria própria.

**Exemplo 17.** Seja  $P$  o plano dado por  $ax + by + cz = 0$ . Note que  $(a, b, c)$  é normal ao plano, assim, o vetor normal unitário ao plano  $P$  é dado por,

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Como  $N$  é constante para todo  $p \in P$ ,  $dN_p \equiv 0$ .

**Exemplo 18.** Considere a esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (Figura 2.2).

Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é uma curva parametrizada em  $S^2$ , então derivando  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  obtemos,

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,$$

que podemos escrever como

$$2\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 0.$$

Assim, temos que  $(x, y, z)$  é ortogonal a  $(x', y', z')$ , e, conseqüentemente, é normal à esfera no ponto  $(x, y, z)$ . Desta forma,

$$N = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z)$$

e

$$\bar{N} = \frac{(-x, -y, -z)}{\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2}} = (-x, -y, -z),$$

são campos de vetores normais e unitários em  $S^2$ , e definem portanto orientações em  $S^2$ . Escolhendo  $\bar{N} = (-x, -y, -z)$  como um campo normal, podemos notar que  $\bar{N}$  aponta para o centro da esfera. Restringindo  $\bar{N}$  à curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , obtemos

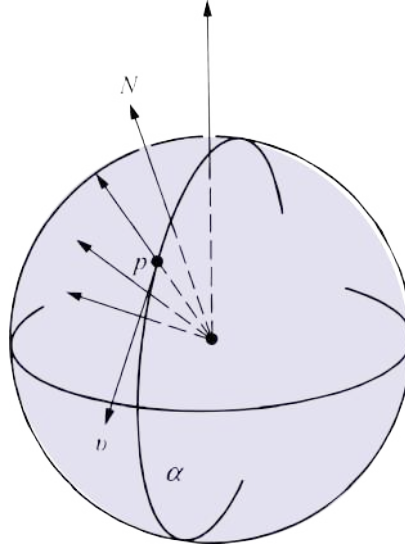
$$\bar{N} = (-x(t), -y(t), -z(t)),$$

onde  $\bar{N}$  é uma função vetorial de  $t$ . Derivando  $\bar{N}$  temos que,

$$d\bar{N}_{(x(t),y(t),z(t))}(x'(t),y'(t),z'(t)) = \bar{N}'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)),$$

ou seja,  $d\bar{N}_p(v) = -v$ , para todo  $p \in S^2$  e todo  $v \in T_p S^2$ . De modo análogo, escolhendo  $N$  como campo normal e unitário, e restringindo à curva  $\alpha(t)$  obteríamos  $dN_p(v) = v$ .

Figura 2.2: Esfera unitária  $dN_p(v) = v$



Fonte: CARMO, 2005, p. 163.

**Exemplo 19.** Seja  $C$  o cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$  (Figura 2.3).

Derivando  $x^2 + y^2 = 1$ , obtemos,

$$2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 2\langle(x, y, 0), (x', y', 0)\rangle = 0.$$

Deste modo, temos que o vetor  $(x, y, 0)$  é ortogonal ao vetor  $(x', y', 0)$ , e, conseqüentemente, é normal ao cilindro no ponto  $(x, y, 0)$ . Temos então que,

$$N = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (x, y, 0)$$

e

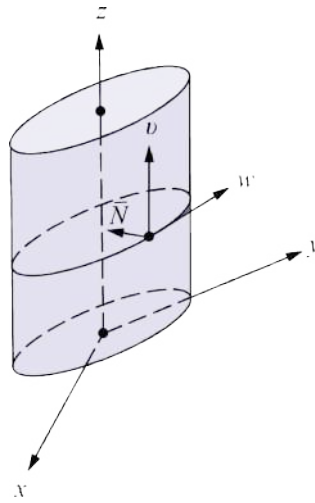
$$\bar{N} = \frac{(-x, -y, 0)}{\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2}} = (-x, -y, 0)$$

são campos de vetores normais e unitários em  $(x, y, z)$ . Fixando uma orientação e escolhendo  $\bar{N}(x, y, z) = (-x, -y, 0)$  como um campo de vetores normais, vamos restringir  $\bar{N}$  à curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  que está contida no cilindro, isto é,  $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$ . Assim,  $\bar{N}(t) = (-x(t), -y(t), 0)$ . Derivando  $\bar{N}$  com respeito a  $t$  obtemos,

$$d\bar{N}_{(x(t),y(t),z(t))}(x'(t),y'(t),z'(t)) = \bar{N}'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0).$$

Concluimos então que, se  $v$  é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao eixo  $O_z$ , então  $d\bar{N}_{(x(t),y(t),z(t))}(v) = 0 = 0v$ . Por outro lado, se  $w$  é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao plano  $xy$ , então  $d\bar{N}(w) = -w$ . Segue-se então que os vetores  $v$  e  $w$  são auto-vetores de  $d\bar{N}$  com autovalores 0 e  $-1$ , respectivamente.

Figura 2.3: Cilindro



Fonte: CARMO, 2005, p. 164.

**Exemplo 20.** Considere  $p = (0, 0, 0)$  um ponto do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$ .

Vamos considerar a parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2).$$

Derivando  $\mathbf{x}$  com respeito a  $u$  e  $v$  respectivamente, obtemos

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, -2u) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, 2v).$$

Assim, calculando seu vetor normal unitário,

$$N(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = \frac{(1, 0, -2u) \wedge (0, 1, 2v)}{|(1, 0, -2u) \wedge (0, 1, 2v)|}.$$

Como,

$$(1, 0, -2u) \wedge (0, 1, 2v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (2u, -2v, 1),$$

e precisamos apenas de um campo de vetores normais, iremos considerar o vetor  $(u, -v, \frac{1}{2})$ , e dividindo pela norma obtemos

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{(u, -v, \frac{1}{2})}{\sqrt{u^2 + (-v)^2 + (\frac{1}{2})^2}} \\ &= \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}} \right). \end{aligned}$$

Podemos notar ainda que em  $p = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  coincidem com os vetores unitários ao longo dos eixos  $O_x$  e  $O_y$ , respectivamente. Deste modo, o vetor tangente em  $p$  à curva

$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , com  $\alpha(0) = p$  tem, em  $\mathbb{R}^3$ , coordenadas  $(u'(0), v'(0), 0)$ . Restringindo  $N(u, v)$  a esta curva obtemos  $N'(t)$  igual a

$$\left( \frac{u' \sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})} - \frac{u(uu' + vv')}{\sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}}}{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}, \frac{v(uu' + vv')}{\sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}} - v' \sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}, -\frac{uu' + vv'}{2\sqrt{u^2 + v^2 + (\frac{1}{4})}} \right)$$

Logo,

$$N'(0) = dN_p(u'(0), v'(0), 0) = (2u'(0), -2v'(0), 0).$$

Assim,  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$  são auto-vetores de  $dN_p$  com auto-valores 2 e  $-2$ , respectivamente, pois

$$dN_p(1, 0, 0) = (2 \cdot 1, 0, 0) = 2(1, 0, 0) \quad \text{e} \quad dN_p(0, 1, 0) = (0, (-2) \cdot 1, 0) = -2(0, 1, 0).$$

**Proposição 2.1.** *A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação normal de Gauss é um operador linear autoadjunto.*

*Demonstração.* Basta mostrar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

para uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_p S$ . Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  a base associada de  $T_p S$ . Se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , então

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial N}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial N}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

e em particular,  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ . Portanto, para provar que  $dN_p$  é autoadjunto, é suficiente mostrar que,

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle, \quad \text{para a base } \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\} \text{ de } T_p S.$$

Note que,  $N$  é vetor normal de  $T_p S$  e conseqüentemente ortogonal a todos os vetores de



$T_p S$ , em particular, aos vetores da base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , isto é

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \quad \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Derivando a equação acima com respeito a  $v$  e  $u$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \langle N, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle &= -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle &= -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Então,  $dN_p$  é um operador autoadjunto. ■

O fato de  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  ser um operador linear autoadjunto nos permite definir uma forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} B : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle dN_p(v), w \rangle, \end{aligned}$$

e conseqüentemente uma forma quadrática

$$\begin{aligned} Q : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle. \end{aligned}$$

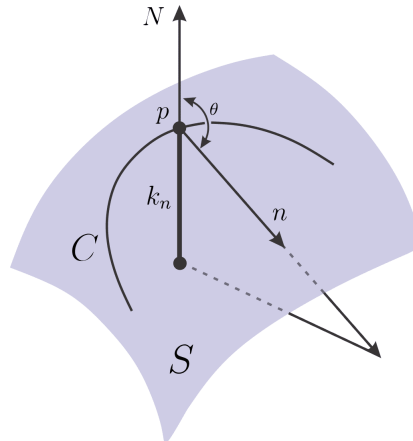
## 2.2 A segunda forma fundamental

**Definição 22.** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p(v) = -Q(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Para obter uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisaremos de algumas definições, como a de curvatura normal. Por convenção usaremos a forma quadrática  $-Q$ .

**Definição 23.** Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$  e  $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos(\theta)$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$  (Figura 2.4).

Figura 2.4: Curvatura normal.



Fonte: Autoria própria.

Observe que  $k_n$  é o comprimento da projeção de  $k \cdot n$  sobre a normal em  $p$  com o sinal dado pela orientação de  $S$  em  $p$ . Esta não depende da orientação de  $C$ , mas muda de sinal com a mudança de orientação de  $S$ . Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental  $II_p$ , considere uma curva regular  $C \subset S$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco de  $C$  com  $\alpha(0) = p$ . Se indicarmos por  $N(s)$  a restrição do vetor normal  $N$  a curva  $\alpha(s)$ , teremos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Derivando o produto interno acima obtemos,

$$\begin{aligned} \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\ \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle &= -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k \langle n, N \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

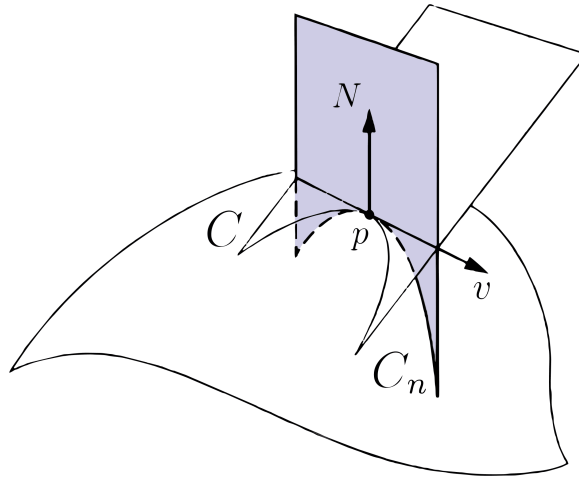
Assim, o valor da segunda forma fundamental  $II_p$  em um vetor unitário  $v \in T_p S$ , é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $v$ .

Se tivéssemos tomado a forma  $Q$  no lugar de  $-Q$ , teríamos obtido  $II_p(\alpha'(0)) = -k_n$ .

**Proposição 2.2.** (Meusnier) *Todas as curvas de uma superfície  $S$  que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

Dado um vetor unitário  $v \in T_p S$ , a interseção de  $S$  com o plano contendo  $v$  e  $N(p)$  é chamada a seção normal de  $S$  em  $p$  segundo  $v$ . Em uma vizinhança de  $p$ , uma seção normal de  $S$  em  $p$  é uma curva regular plana cujo vetor normal  $n$  em  $p$  é  $\pm N(p)$  ou zero. Logo, sua curvatura é igual a o valor absoluto da curvatura normal segundo  $v$  em  $p$ . Assim, a curvatura normal de uma curva é, pela proposição, igual a curvatura da seção normal (Figura 2.5).

Figura 2.5: Curvatura da seção normal.



Fonte: Autoria própria.

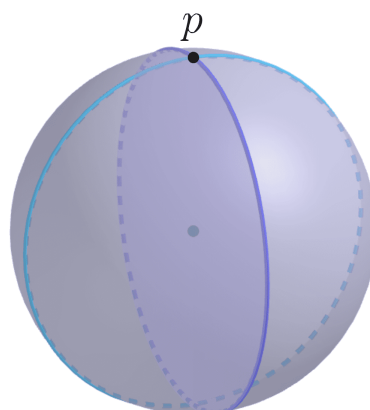
**Exemplo 21.** Dado o plano  $ax + by + cz = 0$  do Exemplo 18, as seções normais são retas. Logo, as curvaturas normais são nulas e a segunda forma fundamental é identicamente nula em todos os pontos.

**Exemplo 22.** Na esfera unitária  $S^2$  do Exemplo 18, com  $\bar{N} = (-x, -y, -z)$  como orientação, as seções normais passando por um ponto  $p \in S^2$  são círculos de raio 1 (Figura 2.6). Assim, todas as curvaturas normais são iguais a 1 e a segunda forma fundamental é  $II_p(v) = 1$  para todo  $p \in S^2$  e todo  $v \in T_p S^2$  com  $|v| = 1$ .

**Exemplo 23.** No cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  do Exemplo 19, as seções normais em um ponto  $p$  variam de um círculo perpendicular ao eixo do cilindro à uma reta paralela ao eixo do cilindro, passando por uma família de elipses (Figura 1.8). Logo, as curvaturas variam de 0 a 1.

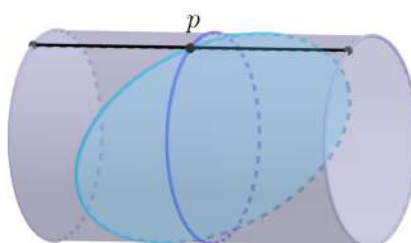
Podemos ver geometricamente que 1 e 0 são, respectivamente, valores de máximo e mínimo da curvatura normal em  $p$ . De fato, como visto no Exemplo 19,  $v$  e  $w$  são autovetores de  $dN_p$  com autovalores  $-1$  e  $0$ , respectivamente. Assim, a segunda forma fundamental assume seus extremos nesses vetores.

Figura 2.6: Seções normais sobre  $S^2$ .



Fonte: Autoria própria.

Figura 2.7: Seções normais sobre  $C$ .



Fonte: Autoria própria.

**Definição 24.** O máximo da curvatura normal  $k_1$  e o mínimo da curvatura normal  $k_2$ , são chamados curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas direções principais em  $p$ .

Nos Exemplos 21 e 22 (plano e esfera, respectivamente), todas as direções em todos os pontos são principais, visto que o valor da segunda forma fundamental restrita a vetores unitários é igual ao valor da curvatura normal, e em ambos os casos  $II_p$  é constante. Já no cilindro do Exemplo 23,  $v$  e  $w$  são auto-vetores e, conseqüentemente, indicam as direções principais em  $p$ , correspondendo às curvaturas principais  $-1$  e  $0$ , respectivamente.

**Definição 25.** Se uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  é uma direção principal em  $p$ , então dizemos que  $C$  é uma linha de curvatura em  $S$ .

**Proposição 2.3** (Olinde Rodrigues). *Uma condição necessária e suficiente para que a curva conexa e regular  $C$  em  $S$  seja uma linha de curvatura de  $S$  é que*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização  $\alpha(t)$  de  $C$ , onde  $N(t) = N \circ \alpha(t)$  e  $\lambda(t)$  é uma função

diferenciável de  $t$ . Nesse caso,  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) segundo  $\alpha'(t)$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Note que, se  $\alpha'(t)$  está contido em uma direção principal, então  $\alpha'(t)$  é um auto-vetor de  $dN$  e

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ , então  $\alpha'(t)$  é auto-vetor de  $dN$  e, portanto,  $\alpha'(t)$  está contido em uma direção principal. ■

Conhecendo as curvaturas principais em  $p$  podemos calcular a curvatura normal segundo uma direção dada de  $T_pS$ . Com efeito, se  $v \in T_pS$  e  $|v| = 1$ , como  $e_1$  e  $e_2$  formam uma base ortonormal de  $T_pS$ , temos

$$v = e_1 \cos(\theta) + e_2 \text{sen}(\theta),$$

onde  $\theta$  é o ângulo de  $e_1$  a  $v$  na orientação de  $T_pS$ . Assim, a curvatura normal  $k_n$  na direção de  $v$  é dada por

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos(\theta) + e_2 \text{sen}(\theta)), e_1 \cos(\theta) + e_2 \text{sen}(\theta) \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos(\theta)) + dN_p(e_2 \text{sen}(\theta)), e_1 \cos(\theta) + e_2 \text{sen}(\theta) \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos(\theta) + e_2 k_2 \text{sen}(\theta), e_1 \cos(\theta) + e_2 \text{sen}(\theta) \rangle \\ &= k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \text{sen}^2(\theta). \end{aligned}$$

Esta última expressão é conhecida classicamente como *Fórmula de Euler*. Ela é simplesmente a expressão de  $II_p$  na base  $\{e_1, e_2\}$ .

## 2.3 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média

Dada uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  em um espaço vetorial de dimensão 2 e dada uma base  $\{v_1, v_2\}$  de  $V$ , lembramos que

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22},$$

onde  $(a_{ij})$  é a matriz de  $A$  na base  $\{v_1, v_2\}$ . No nosso caso, o determinante de  $dN$  é o produto  $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$  das curvaturas principais e o traço de  $dN$  é o negativo  $-(k_1 + k_2)$  da soma das curvaturas principais. Se mudarmos a orientação, o determinante não muda, porém o traço muda de sinal.

**Definição 26.** Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ .

Em termos das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

**Definição 27.** Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado

1. Elíptico, se  $\det(dN_p) > 0$  ( $k_1$  e  $k_2$  possuem o mesmo sinal);
2. Hiperbólico, se  $\det(dN_p) < 0$  ( $k_1$  e  $k_2$  possuem sinais opostos);
3. Parabólico, se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$  ( $k_1 = 0$  ou  $k_2 = 0$ );
4. Planar, se  $dN_p = 0$  ( $k_1 = k_2 = 0$ ).

## 2.4 A aplicação normal de Gauss em coordenadas locais

Vamos agora obter as expressões da diferencial da aplicação de Gauss e da segunda forma fundamental, em um sistema de coordenadas locais. Seja  $S$  uma superfície regular orientável e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização compatível com a orientação de  $S$ , isto é, em  $\mathbf{x}(U)$ ,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Seja  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Para simplificar a notação, convecionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto  $p$ . O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  e

$$dN(\alpha') = \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \quad (2.1)$$

Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_p S$ , podemos escrever

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \quad (2.2)$$

Substituindo os valores de (2.2) em (2.1) temos

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v' \\ &= a_{11}\mathbf{x}_u u' + a_{21}\mathbf{x}_v u' + a_{12}\mathbf{x}_u v' + a_{22}\mathbf{x}_v v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ , com  $i, j = 1, 2$ . Note que a matriz acima não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  seja uma base ortonormal.

Expressando a segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  obtemos,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -(u')^2 \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle - 2u'v' \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle - (v')^2 \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f(u')(v') + g(v')^2. \end{aligned}$$

Como  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , derivando estes produtos internos com respeito a  $u$  e a  $v$  temos que,

$$\begin{aligned} \langle N, \mathbf{x}_u \rangle_u &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ \langle N, \mathbf{x}_u \rangle_v &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ \langle N, \mathbf{x}_v \rangle_u &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle, \\ \langle N, \mathbf{x}_v \rangle_v &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Agora, vamos obter os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes  $e, f, g$ . A partir da equação (4), obtemos,

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . As

relações acima podem ser expressas em forma matricial por,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Resolvendo para a matriz  $a_{ij}$  obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Daí decorrem as seguintes expressões para os coeficientes  $(a_{ij})$  da matriz de  $dN$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Convém mencionar que as equações acima são conhecidas como as *equações de Weingarten*. Temos ainda que

$$\begin{aligned} \det(a_{ij}) &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \cdot \frac{fF - gE}{EG - F^2} - \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \cdot \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{(eg - f)^2 (EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Como a curvatura Gaussiana é dada pelo determinante de  $(a_{ij})$ , temos que

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Para encontrarmos a curvatura média, lembremos que  $-k_1$  e  $-k_2$  são os autovalores de  $dN$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem a equação

$$dN(v) = -kv = -kI(v), \quad \text{para algum } v \in T_p S, v \neq 0,$$



onde  $I$  é a aplicação identidade. Daí, temos que  $dN(v) + kI(v) = 0$ , então

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \det & \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Como  $k_1$  e  $k_2$  são raízes da equação quadrática acima, concluímos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

onde

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e portanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

A partir da relação acima concluímos que, escolhendo  $k_1(q) \leq k_2(q)$ ,  $q \in S$ , as funções  $k_1$  e  $k_2$  são contínuas em  $S$ . Além disso,  $k_1$  e  $k_2$  são diferenciáveis em  $S$ , com a exceção dos pontos umbílicos ( $H^2 = K$ ) de  $S$ .

**Exemplo 24.** O toro  $T$  é a “superfície” gerada pela rotação de um círculo  $S^1$  de raio  $r$  em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância  $a > r$  do centro do círculo.

Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos do toro  $T$ , cobertos pela parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a+r \cos(u)) \cos(v), (a+r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Primeiramente vamos calcular as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $\mathbf{x}$

com respeito a  $u$  e  $v$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-r\text{sen}(u)\cos(v), -r\text{sen}(u)\text{sen}(v), r\cos(u)), \\ \mathbf{x}_v &= -(a+r\cos(u))\text{sen}(v), (a+r\cos(u))\cos(v), 0), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-r\cos(u)\cos(v), -r\cos(u)\text{sen}(v), -r\text{sen}(u)), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (r\text{sen}(u)\text{sen}(v), -r\text{sen}(u)\cos(v), 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= -(a+r\cos(u))\cos(v), -(a+r\cos(u))\text{sen}(v), 0).\end{aligned}$$

Assim, obtemos,

$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2\text{sen}^2(u)(\cos^2(v) + \text{sen}^2(v)) + r^2\cos^2(u) = r^2(\text{sen}^2(u) + \cos^2(u)) = r^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = (a+r\cos(u))r\text{sen}(u)\text{sen}(v)\cos(v) - (a+r\cos(u))r\text{sen}(u)\text{sen}(v)\cos(v) = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (a+r\cos(u))^2(\text{sen}^2(v) + \cos^2(v)) = (a+r\cos(u))^2.\end{aligned}$$

Utilizando os valores acima, temos que,

$$\begin{aligned}e &= \langle N, x_{uu} \rangle = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}, x_{uu} \right\rangle = \frac{\langle x_u \wedge x_v, x_{uu} \rangle}{|x_u \wedge x_v|} = \frac{\langle x_u \wedge x_v, x_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a+r\cos(u))}{r(a+r\cos(u))} = r, \\ f &= \langle N, x_{uv} \rangle = \frac{0}{r(a+r\cos(u))} = 0, \\ g &= \langle N, x_{vv} \rangle = \frac{r\cos(u)(a+r\cos(u))^2}{r(a+r\cos(u))} = \cos(u)(a+r\cos(u)).\end{aligned}$$

Utilizando os coeficientes da primeira e segunda forma, temos então que

$$\begin{aligned}K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r\cos(u)(a+r\cos(u))}{r^2(a+r\cos(u))^2} = \frac{\cos(u)}{r(a+r\cos(u))}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{r^2} + \frac{\cos(u)(a+r\cos(u))}{(a+r\cos(u))^2} \right).\end{aligned}$$

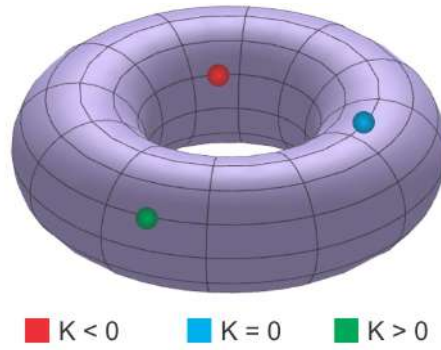
Pela expressão acima podemos concluir que  $K = 0$  ao longo dos paralelos  $u = \pi/2$  e  $u = 3\pi/2$ , e os pontos desses paralelos são parabólicos. Já em  $\pi/2 < u < 3\pi/2$ ,  $K$  é negativa e os pontos dessa região são hiperbólicos. Na região dada por  $0 < u < \pi/2$  ou  $3\pi/2 < u < 2\pi$ ,  $K > 0$  e os pontos são elípticos (Figura 2.8).

**Exemplo 25** (Superfície de Revolução). Considere a superfície de revolução parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(v)\cos(u), \varphi(v)\text{sen}(u), \psi(v)), \quad 0 < u < 2\pi, \quad a < v < b, \quad \varphi(v) > 0.$$

Como vimos anteriormente, os coeficientes da primeira forma fundamental da su-

Figura 2.8: Curvatura Gaussiana no toro.



Fonte: Autoria própria..

perfície de revolução são dados por

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2.$$

Convém supor que a curva geratriz é parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = G = 1.$$

Sabemos ainda que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-\varphi \operatorname{sen}(u), \varphi \cos(u), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (\varphi' \cos(u), \varphi' \operatorname{sen}(u), \psi'), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-\varphi \cos(u), -\varphi \operatorname{sen}(u), 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\varphi' \operatorname{sen}(u), \varphi' \cos(u), 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (\varphi'' \cos(u), \varphi'' \operatorname{sen}(u), \psi''). \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por,

$$\begin{aligned} e &= \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\varphi} \begin{vmatrix} -\varphi \operatorname{sen}(u) & \varphi \cos(u) & 0 \\ \varphi' \cos(u) & \varphi' \operatorname{sen}(u) & \psi' \\ -\varphi \cos(u) & -\varphi \operatorname{sen}(u) & 0 \end{vmatrix} = -\varphi \psi', \\ f &= \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\varphi} \begin{vmatrix} -\varphi \operatorname{sen}(u) & \varphi \cos(u) & 0 \\ \varphi' \cos(u) & \varphi' \operatorname{sen}(u) & \psi' \\ -\varphi' \operatorname{sen}(u) & \varphi' \cos(u) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ g &= \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\varphi} \begin{vmatrix} -\varphi \operatorname{sen}(u) & \varphi \cos(u) & 0 \\ \varphi' \cos(u) & \varphi' \operatorname{sen}(u) & \psi' \\ \varphi'' \cos(u) & \varphi'' \operatorname{sen}(u) & \psi'' \end{vmatrix} = \varphi'' \psi' - \varphi' \psi''. \end{aligned}$$

Como  $F = f = 0$ , temos que os paralelos ( $v = \text{const.}$ ) e os meridianos ( $u = \text{const.}$ )

de uma superfície de revolução são linhas de curvatura.

Além disso, como  $\varphi > 0$  e

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\varphi\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi^2((\varphi')^2 + (\psi')^2)} = -\frac{\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi},$$

segue-se que os pontos parabólicos são dados por

$$\psi' = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi''\psi' - \varphi'\psi'' = 0,$$

onde no primeiro caso a reta tangente à curva geratriz é perpendicular ao eixo de revolução e no segundo caso a curvatura da curva geratriz é zero. Um ponto satisfazendo as duas equações é um ponto planar, visto que nesse caso  $e = f = g = 0$  e, conseqüentemente,  $k_1 = k_2 = 0$ .

Podemos exibir ainda uma outra expressão para a curvatura Gaussiana. Derivando a expressão  $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ , obtemos  $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$ . Assim,

$$K = -\frac{\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' - \varphi'\psi'\psi''}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' - (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi},$$

que é uma expressão conveniente para a curvatura Gaussiana de uma superfície de revolução.

Para os cálculos das curvaturas principais, podemos observar que se  $f = F = 0$ , as curvaturas Gaussiana e Média são dadas por

$$K = \frac{eg}{EG} = k_1k_2, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{EG} = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Conseqüentemente, observando a expressão da curvatura média, vemos que as curvaturas principais são dadas por  $\frac{e}{E}$  e  $\frac{g}{G}$ . Substituindo os valores de  $e, E, g, G$ , a curvatura média de uma tal superfície é

$$H = \frac{1 - \varphi' + \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{2\varphi}.$$

**Exemplo 26.** Muitas vezes uma superfície é dada como o gráfico de uma função diferenciável  $z = h(x, y)$ , onde  $(x, y)$  pertence a um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Desta forma é conveniente ter à mão as fórmulas para os conceitos relevantes neste caso. Para obtermos tais fórmulas, parametrizamos a superfície por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

onde  $u = x, v = y$ .

As derivadas de primeira e segunda ordem de  $\mathbf{x}(u, v)$  são dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1, 0, h_u), & \mathbf{x}_v &= (0, 1, h_v), & \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, h_{uu}), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, h_{uv}), & \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, h_{vv}).\end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = h_u^2 + 1, \quad F = h_u h_v, \quad G = h_v^2 + 1.$$

Além disso,

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{vmatrix} = (-h_u, -h_v, 1),$$

e,

$$N(x, y) = \frac{\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_y}{|\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_y|} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}},$$

onde  $N$  é um campo normal unitário sobre a superfície, e os coeficientes da segunda forma fundamental nessa orientação são dados por

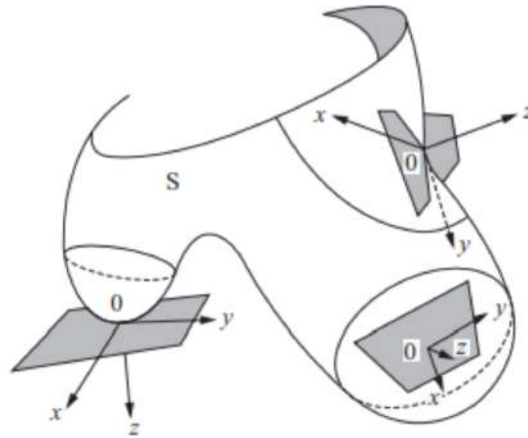
$$\begin{aligned}e &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \\ 0 & 0 & h_{xx} \end{vmatrix} = \frac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}, \\ f &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \\ 0 & 0 & h_{xy} \end{vmatrix} = \frac{h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}, \\ g &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \\ 0 & 0 & h_{yy} \end{vmatrix} = \frac{h_{yy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}.\end{aligned}$$

A partir dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental acima, temos que as curvaturas Gaussiana e média são dadas por

$$\begin{aligned}K &= \frac{\left( \frac{h_{xx}h_{yy}}{(\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1})^2} - \left( \frac{h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right)^2 \right)}{h_x^2 + h_y^2 + 1} = \frac{\left( \frac{h_{xy}h_{yy} - h_{xy}^2}{h_x^2 + h_y^2 + 1} \right)}{h_x^2 + h_y^2 + 1} = \frac{h_{xy}h_{yy} - h_{xy}^2}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^2}, \\ H &= \frac{\left( \frac{h_{xx}(h_y^2 + 1) - h_{xy}h_xh_y + h_{yy}(h_x^2 + 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right)}{2(h_x^2 + h_y^2 + 1)} = \frac{1}{2} \frac{h_{xx}(h_y^2 + 1) - h_{xy}h_xh_y + h_{yy}(h_x^2 + 1)}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Uma razão para estudarmos superfícies dadas por  $z = h(x, y)$  vem do fato de que localmente toda superfície é o gráfico de uma função diferenciável (Proposição 1.11). Dado um ponto  $p$  de uma superfície  $S$ , podemos escolher os eixos coordenados de  $\mathbb{R}^3$  de forma que a origem  $O$  das coordenadas seja  $p$  e que o eixo  $O_z$  de  $\mathbb{R}^3$  esteja na direção da normal positiva de  $S$  em  $p$  (assim, o plano  $xy$  coincide com  $T_pS$ ). Segue-se que a vizinhança de  $p$  em  $S$  pode ser representada na forma  $z = h(x, y)$ ,  $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $U$  é um conjunto aberto e  $h$  é uma função diferenciável, com  $h(0, 0) = 0$ ,  $h_x(0, 0) = 0$ ,  $h_y(0, 0) = 0$ .

Figura 2.9: Superfícies são localmente gráfico de função.



Fonte: CARMO, 2005, p. 193.

A segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$  aplicada ao vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é, neste caso,

$$II_p = h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}y^2.$$

No cálculo elementar de duas variáveis, a forma quadrática acima é conhecida como a *Hessiana* de  $h$  no ponto  $(0, 0)$ . A Hessiana de  $h$  no ponto  $(0, 0)$  é a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Para concluir esta sessão, daremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ .

**Definição 28.** Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  duas superfícies regulares orientadas. Seja  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  uma aplicação diferenciável e suponha que para algum  $p \in S$ ,  $d\varphi_p$  seja não-singular, isto é,  $d\varphi_p$  é injetiva. Dizemos que  $\varphi$  preserva orientação em  $p$  se dada uma base positiva  $\{w_1, w_2\}$  em  $T_pS$ , então  $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$  é uma base positiva de  $T_{\varphi(p)}\bar{S}$ . Se  $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$  não é uma base positiva, dizemos que  $\varphi$  reverte orientação em  $p$ .

Observamos que tanto  $S$  quanto a esfera unitária são mergulhadas em  $\mathbb{R}^3$ . Assim, uma orientação  $N$  em  $S$  induz uma orientação  $N$  em  $S^2$ . Seja  $p \in S$  tal que  $dN_p$  é não-singular. Como, para uma base  $\{w_1, w_2\}$  em  $T_pS$ ,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = K w_1 \wedge w_2,$$

a aplicação de Gauss  $N$  preserva a orientação em  $p \in S$  se  $K(p) > 0$  e reverte a orientação em  $p \in S$  se  $K(p) < 0$ . Intuitivamente, isso significa que uma orientação de  $T_p S$  induz uma orientação para pequenas curvas fechadas em  $S$ , em torno de  $p$ ; a imagem por  $N$  dessas curvas terá orientação igual ou oposta às primeiras curvas, conforme o ponto  $p$  seja elíptico ou hiperbólico, respectivamente.

Para levar tal fato em consideração, faremos a convenção de que a área da imagem por  $N$  de uma região contida em uma vizinhança conexa  $V \subset S$ , onde  $K \neq 0$ , é positiva se  $K > 0$  e negativa se  $K < 0$ .

Podemos agora enunciar uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana  $K$ , para  $K \neq 0$ .

**Proposição 2.4.** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície  $S$  tal que a curvatura Gaussiana  $K(p) \neq 0$ , e seja  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$  onde  $K$  não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}, \quad (2.4)$$

onde  $A$  é a área de uma região  $B \subset V$  contendo  $p$ ,  $A'$  é a área da imagem de  $B$  pela aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ , e o limite é tomado através de uma sequência de regiões  $B_n$ , para  $n$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Como visto anteriormente, a área  $A$  de  $B$  é dada por

$$A = \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv,$$

onde  $\mathbf{x}(u, v)$  é uma parametrização em  $p$ , cuja vizinhança coordenada contém  $V$  e  $R$  é a região do plano  $uv$  correspondente a  $B$ . A área  $A'$  de  $N(B)$  é

$$A' = \iint_R |N_u \wedge N_v| \, dudv.$$

Como vimos anteriormente,  $N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v$  e  $N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$ , assim

$$\begin{aligned} N_u \wedge N_v &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v) \wedge (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v) \\ &= a_{11}a_{12}(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_u) + a_{11}a_{22}(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) + a_{21}a_{12}(\mathbf{x}_v \wedge \mathbf{x}_u) + a_{21}a_{22}(\mathbf{x}_v \wedge \mathbf{x}_v) \\ &= a_{11}a_{22}(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) - a_{21}a_{12}(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \\ &= \det(a_{ij})(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) = K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v). \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever  $A'$  como

$$A' = \iint_R |K \cdot \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = \iint_R K \cdot |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv.$$

Passando o limite, e indicando por  $R$  a área da região  $R$ , obtemos

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv}{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv}.$$

Assim, pelo teorema do valor médio para integrais duplas,

$$\frac{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv}{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv} = \frac{K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = K.$$

■

## Apêndice

**Proposição 2.5.** *O valor médio de uma função de duas variáveis limitada por uma região  $D$  é dado por*

$$f_{med} = \frac{1}{A(D)} \iint f(x, y) dA,$$

onde  $d(A)$  é a área da região  $D$ , e a integral dupla é também aplicada na região  $D$ .

**Lema 2.6.** *Seja  $r : B \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  na bola aberta  $B \subset \mathbb{R}^n$  de centro  $0$ . Se  $r(0) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0$  para quaisquer  $i, j = 1, \dots, n$ , então  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|^2} = 0$ .*

**Teorema 2.7** (Fórmula de Taylor). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Fixando  $a \in U$ , para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + v \in U$ , escrevamos*

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j + r(v),$$

as derivadas sendo calculadas no ponto  $a$ . Então  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|^2} = 0$ .

*Demonstração.* De acordo com o lema anterior devemos demonstrar que

$$r(v) = f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j$$

se anula, juntamente com suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem, no ponto  $v = 0$ .

Para fazer o cálculo, começamos lembrando que, na expressão de  $r(v)$ , as variáveis independentes são as coordenadas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $v$ . É em relação a elas que as derivadas parciais de  $r$  devem ser tomadas, embora continuemos escrevendo  $\partial r / \partial x_i$  e  $\partial^2 r / \partial x_i \partial x_j$ . Observemos também que, no somatório duplo que ocorre na definição de  $r(v)$ , cada par



de variáveis  $\alpha_i, \alpha_j$  aparece em duas parcelas iguais, a saber,  $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i} \alpha_i \cdot \alpha_j$  e  $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i} \alpha_j \cdot \alpha_i$ . Deste modos temos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + v) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Consequentemente,  $r(0) = 0$ ,  $\frac{\partial r}{\partial x_i}(0) = 0$  e  $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0$  para quaisquer  $i, j = 1, \dots, n$ .

■

**Teorema 2.8** (Teorema do Valor Médio para integrais duplas).

**Definição 29.** Dado  $V$  um espaço vetorial, dizemos que uma aplicação  $A : V \rightarrow V$  é auto-adjunta se  $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ , para todo  $v, w \in V$ .

A cada aplicação linear auto-adjunta podemos associar uma aplicação  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $B(v, w) = \langle Av, w \rangle$ . Assim, por  $A$  ser auto-adjunta temos que  $B$  é bilinear e  $B(v, w) = B(w, v)$ , isto é,  $B$  é uma forma bilinear e simétrica. De forma análoga, se  $B$  é uma forma bilinear e simétrica, podemos definir uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  por  $\langle Av, w \rangle = B(v, w)$  e, pela simetria de  $B$  temos que  $A$  é auto-adjunta. A cada forma bilinear e simétrica em  $V$ , corresponde uma forma quadrática  $Q$  em  $V$  dada por,

$$Q(v) = B(v, v), \quad v \in V.$$

Conhecendo  $Q$  podemos determinar  $B$  da seguinte forma,

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \langle Au, v \rangle \\ B(u, v) &= \langle Au, v \rangle + \langle A(u + v), u + v \rangle - \langle A(u + v), u + v \rangle \\ B(u, v) &= \langle Au, v \rangle + \langle A(u + v), u + v \rangle - \langle Au, u \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle Av, v \rangle \\ B(u, v) &= Q(u + v) - Q(u) - Q(v) - B(v, u) \\ 2B(u, v) &= Q(u + v) - Q(u) - Q(v) \\ \Rightarrow B(u, v) &= \frac{1}{2}[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)]. \end{aligned}$$

Assim, estabelecemos uma bijeção entre formas quadráticas em  $V$  e aplicações lineares auto-adjuntas de  $V$ .

**Lema 2.9.** Se a função  $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , restrita ao círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ , tem um máximo no ponto  $(1, 0)$ , então  $b = 0$ .

*Demonstração.* Primeiro, vamos parametrizar o círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$  por  $x = \cos(t)$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $t \in (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$ . Assim, podemos escrever  $Q$  restrita a este círculo como uma função de  $t$ ,

$$Q(t) = a \cos^2(t) + 2b \cos(t)\sin(t) + c \sin^2(t).$$

Como  $Q$  tem um máximo no ponto  $(1, 0)$  e para  $(\cos(t), \sin(t)) = (1, 0)$  temos que  $t = 0$ , como  $Q$  é uma função diferenciável de  $t$ , pelo Teorema de Fermat temos que  $(dQ/dt)_{t=0} = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQ}{dt}\right) &= -2a \cos(t)\sin(t) + 2b(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + 2c \cos(t)\sin(t) \\ &= \cos(t)\sin(t)(2c - 2a) + 2b \cos(2t) \\ \Rightarrow \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=0} &= \cos(0)\sin(0)(2c - 2a) + 2b \cos(0) = 2b = 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que  $b = 0$ . ■

**Proposição 2.10.** *Dada uma forma quadrática  $Q$  em  $V$ , existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tal que se  $v \in V$  é dado por  $v = xe_1 + ye_2$ , então*

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são o máximo e o mínimo, respectivamente, de  $Q$  sobre o círculo unitário  $|v| = 1$ .

*Demonstração.* Seja  $\lambda_1$  o máximo de  $Q$  sobre o círculo unitário  $|v| = 1$ , e seja  $e_1$  um vetor unitário tal que  $Q(e_1) = \lambda_1$ . Um tal  $e_1$  existe pela continuidade de  $Q$  sobre o conjunto compacto  $|v| = 1$ . Seja  $e_2$  um vetor unitário que é ortogonal a  $e_1$ , e seja  $\lambda_2 = Q(e_2)$ . Vamos mostrar então que a base  $\{e_1, e_2\}$  satisfaz as condições da proposição.

Seja  $B$  a forma simétrica bilinear associada a  $Q$  e  $v = xe_1 + ye_2$ . Assim,

$$\begin{aligned} Q(v) &= B(v, v) = B(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\ &= \langle Axe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2 \rangle = \langle Axe_1, xe_1 \rangle + \langle Axe_1, ye_2 \rangle + \langle Aye_2, xe_1 \rangle + \langle Aye_2, ye_2 \rangle \\ &= x^2 \langle Ae_1, e_1 \rangle + 2xy \langle Ae_2, e_1 \rangle + y^2 \langle Ae_2, e_2 \rangle \\ &= x^2 \lambda_1 + 2bxy + y^2 \lambda_2, \end{aligned}$$

onde  $b = B(e_1, e_2)$ . Como  $Q(e_1) = Q(1, 0) = \lambda_1$  (as coordenadas de  $e_1$  na base  $\{e_1, e_2\}$  é  $(1, 0)$ ), pelo lema,  $b = 0$ , e resta mostrar que  $\lambda_2$  é o mínimo de  $Q$  sobre o círculo  $|v| = 1$ . De fato, observe que para qualquer  $v = xe_1 + ye_2$  com  $x^2 + y^2 = 1$ , como  $\lambda_2 \leq \lambda_1$  pois  $\lambda_1$  é o máximo de  $Q$ , temos que

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2 (x^2 + y^2) = \lambda_2.$$

Assim,  $Q(v) \geq \lambda_2$  para todo  $v$  com  $|v| = 1$ . Logo,  $\lambda_2$  é o mínimo de  $Q$  sobre o círculo unitário  $|v| = 1$ . ■

**Definição 30.** Diz-se que um vetor  $v \neq 0$  é um auto-vetor de uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  se  $Av = \lambda v$  para algum número real  $\lambda$ ;  $\lambda$  é chamado um auto-valor de  $A$ .

**Teorema 2.11.** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então, existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ . Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ .*

*Demonstração.* Considere a forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ . Pela proposição acima, existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$ , tal que  $Q(e_1) = \lambda_1$ ,  $Q(e_2) = \lambda_2$ , tal que  $\lambda_2 \leq \lambda_1$  e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são o máximo e o mínimo, respectivamente, de  $Q$  sobre o círculo unitário. Resta provar que

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2.$$

Como  $B(e_1, e_2) = \langle Ae_1, e_2 \rangle = 0$  e  $e_2 \neq 0$ , temos que  $Ae_1$  é paralelo a  $e_1$  ou  $Ae_1 = 0$ . Se  $Ae_1$  é paralelo a  $e_1$ , então  $Ae_1 = \alpha e_1$ , e como  $\langle Ae_1, e_1 \rangle = \lambda_1 = \langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \alpha$ , concluímos que  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ ; se  $Ae_1 = 0$ , então  $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle = 0$ , e  $Ae_1 = 0 = \lambda_1 e_1$ . Assim, em qualquer caso, temos que  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ .

Agora, usando o fato de que  $B(e_2, e_1) = \langle Ae_2, e_1 \rangle = 0$  e  $e_1 \neq 0$ , temos que  $Ae_2$  é paralelo a  $e_2$  ou  $Ae_2 = 0$ . Se  $Ae_2$  é paralelo a  $e_2$ , então  $Ae_2 = \beta e_2$ , e como  $\langle Ae_2, e_2 \rangle = \lambda_2 = \langle \beta e_2, e_2 \rangle = \beta$ , concluímos que  $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ ; se  $Ae_2 = 0$ , então  $\lambda_2 = \langle Ae_2, e_2 \rangle = 0$ , e  $Ae_2 = 0 = \lambda_2 e_2$ . Assim, em qualquer caso, temos que  $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ . ■

## Capítulo 3

# Superfícies Mínimas

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre superfícies mínimas, isto é, superfícies com curvatura média nula. Iniciaremos com o conceito de variação normal construindo uma função área que através dela justificaremos a terminologia “*Mínima*”. Apresentaremos alguns resultados sobre o tema e exemplos de algumas superfícies mínimas.

### 3.1 Superfície Mínima

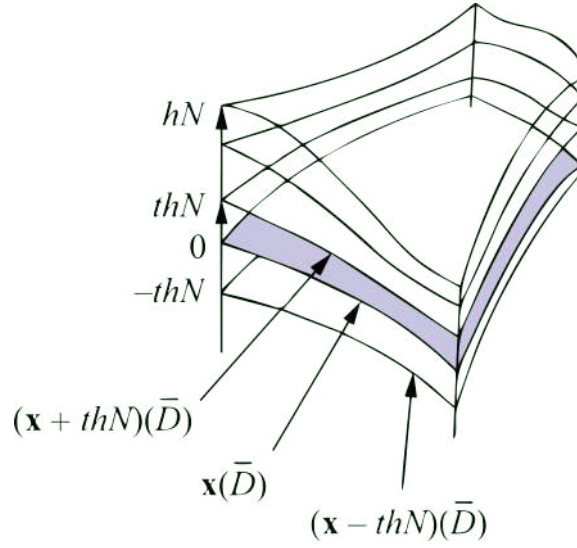
**Definição 31.** Uma superfície parametrizada  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\mathbf{x}$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  é chamado traço de  $\mathbf{x}$ .  $\mathbf{x}$  é regular se a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva para todo  $q \in U$  (isto é, os vetores  $\partial\mathbf{x}/\partial u, \partial\mathbf{x}/\partial v$  são linearmente independentes para todo  $q \in U$ ). Um ponto  $q \in U$  onde  $d\mathbf{x}_q$  não é injetiva é chamado um ponto singular de  $\mathbf{x}$ .

Para uma superfície parametrizada regular, existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $V\mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular. Para mais detalhes, ver [1] p. 93. Uma superfície parametrizada regular é chamada *mínima* se a sua curvatura média é identicamente nula. Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é *mínima* se cada uma de suas parametrizações é mínima. Para explicar o porquê de usarmos o termo mínima para tais superfícies, vamos introduzir o conceito de variação.

**Definição 32.** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado  $D \subset U$  e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{D}$  é a união do domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . A *variação normal* de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , é a aplicação  $\varphi : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  (Figura 3.1) dada por:

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  fixado, a aplicação  $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{x}^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$  é uma superfície parametrizada. Derivando com respeito a  $u$  e a  $v$  respectivamente,

Figura 3.1: Variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ .


Fonte: Autoria própria.

obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} = \mathbf{x}_u + th_u N + th N_u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} = \mathbf{x}_v + th_v N + th N_v.$$

Assim, denotando os coeficientes da primeira forma fundamental por  $E^t$ ,  $F^t$ ,  $G^t$  temos que

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_u^t \rangle = \langle \mathbf{x}_u + th_u N + th N_u, \mathbf{x}_u + th_u N + th N_u \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + th_u \langle \mathbf{x}_u, N \rangle + th \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + th_u \langle N, \mathbf{x}_u \rangle + t^2 h_u h_u \langle N, N \rangle \\ &\quad + t^2 h_u h \langle N, N_u \rangle + th \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + t^2 h h_u \langle N_u, N \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle \\ &= E + 2th \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^t &= \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = \langle \mathbf{x}_u + th_u N + th N_u, \mathbf{x}_v + th_v N + th N_v \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + th_v \langle \mathbf{x}_u, N \rangle + th \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + th_u \langle N, \mathbf{x}_v \rangle + t^2 h_u h_v \langle N, N \rangle \\ &\quad + t^2 h h_u \langle N, N_v \rangle + th \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + t^2 h h_v \langle N_u, N \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle \\ &= F + th (\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^t &= \langle \mathbf{x}_v^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = \langle \mathbf{x}_v + th_v N + th N_v, \mathbf{x}_v + th_v N + th N_v \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle + th_v \langle \mathbf{x}_v, N \rangle + th \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + th_v \langle N, \mathbf{x}_v \rangle + t^2 h_v h_v \langle N, N \rangle \\ &\quad + t^2 h h_v \langle N, N_v \rangle + th \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle + t^2 h h_v \langle N_v, N \rangle + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle \\ &= G + 2th \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que

$$\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle = -g,$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^t &= E - 2the + t^2 h_u h_u + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle, \\ F^t &= F - 2thf + t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle, \\ G^t &= G - 2thg + t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - 2thEg + E(t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle) - 2theG + 4t^2 h^2 eg - \\ &\quad 2the(t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle) + (t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle)(t^2 h_v h_v + \\ &\quad t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle) - (F^2 - 2thfF + F(t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle) - 2thfF + \\ &\quad 4t^2 h^2 f^2 + (t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle)(t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle)). \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que a curvatura média é

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - Ff + Ge}{EG - F^2},$$

e fazendo

$$\begin{aligned} R &= E(t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle) + 4t^2 h^2 eg - 2the(t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle) + \\ &\quad (t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle)(t^2 h_v h_v + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle) - F(t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle) - \\ &\quad 4t^2 h^2 f^2 - (t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle)(t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2fF + eG) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4th) + R, \end{aligned}$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} (R/t) = 0$ . Assim,  $\mathbf{x}^t$  é uma superfície parametrizada regular pois  $E^t G^t - F^2 = (EG - F^2)(1 - 4th) + R = |\mathbf{x}_u^t \wedge \mathbf{x}_v^t|^2$  e para  $\epsilon$  suficientemente pequeno,  $EG - F^2 \neq 0$  e  $(1 - 4th) \neq 0$ . Assim, mostramos que  $|\mathbf{x}_u^t \wedge \mathbf{x}_v^t| \neq 0$ , ou seja,  $\mathbf{x}_u^t$  e  $\mathbf{x}_v^t$  são linearmente

independentes. Além disso, a área  $A(t)$  de  $\mathbf{x}^t(\bar{D})$  é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, dudv = \int_{\bar{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4th) + \bar{R}} \, dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \end{aligned}$$

onde  $\bar{R} = R/(EG - F^2)$ . Assim, se  $\epsilon$  é pequeno,  $A$  é uma função diferenciável e a sua derivada em  $t = 0$  é

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

A proposição a seguir justifica o uso da palavra mínima em conexão com as superfícies com curvatura média nula.

**Proposição 3.1.** *Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $\mathbf{x}$  é mínima se e somente se  $A'(0) = 0$  para todo domínio  $D$  e toda variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $\mathbf{x}$  é mínima, então  $H \equiv 0$ , então  $A'(0) = 0$  e a condição é satisfeita. ( $\Leftarrow$ ) Seja  $A'(0) = 0$  e suponha que  $H(q) \neq 0$  para algum  $q \in D$ . Escolhendo uma  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(q) = H(q)$ ,  $hH > 0$ , e  $h$  seja identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de  $q$ . Então  $A'(0) < 0$  para a variação determinada por essa função  $h$ , o que é uma contradição, pois temos por hipótese que  $A'(0) = 0$ . Logo,  $H(q) = 0$ . ■

Desta forma, temos que qualquer região limitada  $\mathbf{x}(\bar{D})$  de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ . Podemos observar que este ponto crítico não necessariamente é ponto de mínimo e isso faz a palavra mínima parecer estranha, porém esta terminologia é consagrada pelo tempo, tendo sido introduzida por Lagrange, primeiro a definir superfície mínima, em 1760.

Um exemplo de superfície mínima pode ser obtida mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Se bem executado, obtemos uma película de sabão que tem o arame como fronteira. Considerações físicas mostram que a película assume a posição onde em seus pontos regulares a curvatura média é zero.

Vamos então introduzir, para uma superfície parametrizada regular, o *vetor curvatura média* definido por  $\mathbf{H} = HN$ , onde  $N$  é o campo de vetores normais e unitários em  $S$ . Escolhendo  $h = H$ , temos que, para essa variação particular,

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} \, dudv < 0.$$

Isso significa que se deformarmos  $\mathbf{x}(\bar{D})$  na direção do vetor  $\mathbf{H}$ , a área é inicialmente decrescente.

Vamos agora obter outra interpretação para o vetor curvatura média.

**Definição 33.** Uma superfície parametrizada regular  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  é chamada *isotérmica* se  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  e  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ .

**Proposição 3.2.** Seja  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e suponha que  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Então

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde  $\lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ .

*Demonstração.* Como  $\mathbf{x}$  isotérmica,  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  e  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ . Derivando de ambos os lados com respeito a  $u$  e a  $v$  respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle, \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle \quad \text{e} \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle, \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle.$$

Logo,

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0.$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle = -\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle \\ \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Temos então que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$  é ortogonal a  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  e, conseqüentemente, paralelo a  $N$ . Novamente, como  $\mathbf{x}$  é isotérmica, temos que  $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = G$  e  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 = F$ . Assim,

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{E(g + e)}{E^2} = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}.$$

Deste modo,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} + \mathbf{x}_{uu} \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 H \langle N, N \rangle &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \rangle \\ \langle N, 2\lambda^2 H N \rangle &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \rangle \\ 2\lambda^2 H N &= \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}.$$





**Definição 34.** O Laplaciano  $\Delta f$  de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por  $\Delta f = \partial^2 f / \partial u^2 + \partial^2 f / \partial v^2$ ,  $(u, v) \in U$ . Dizemos que  $f$  é *harmônica* em  $U$  se  $\Delta f = 0$ .

**Corolário 1.** Seja  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  uma superfície parametrizada e suponha que  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Então  $\mathbf{x}$  é mínima se e somente se as suas funções coordenadas  $x, y, z$  são harmônicas.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $\mathbf{x}$  é mínima, temos que  $H \equiv 0$ , logo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= 0 \\ \Rightarrow (x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}) + (x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}) &= 0 \\ \Rightarrow (x_{uu} + x_{vv}, y_{uu} + y_{vv}, z_{uu} + z_{vv}) &= 0 \\ \Rightarrow (\Delta x, \Delta y, \Delta z) &= 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Assim, as funções coordenadas  $x, y$  e  $z$  são harmônicas.

( $\Leftarrow$ ) Se  $x, y$  e  $z$  são harmônicas, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= 0 \\ \Rightarrow 2\lambda^2 \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Como  $2\lambda^2 > 0$ , necessariamente  $\mathbf{H} = 0$ , deste modo

$$\begin{aligned} HN &= 0 \\ \Rightarrow H &= 0, \end{aligned}$$

e  $\mathbf{x}$  é mínima. ■

**Exemplo 27.** O catenóide, dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

é a superfície gerada pela rotação da catenária  $y = a \cos(z/a)$  em torno do eixo  $O_z$ . Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-a \cosh(v) \sin(u), a \cosh(v) \cos(u), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), a). \end{aligned}$$

Logo,

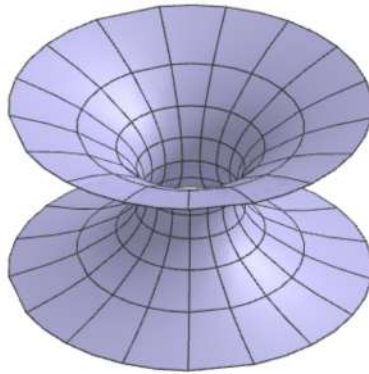
$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = a^2 \cosh^2(v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = G \quad \text{e} \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Logo,  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-a \cosh(v) \cos(u), -a \cosh(v) \sin(u), 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), 0).\end{aligned}$$

Concluimos assim que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  e, desta forma,  $\mathbf{x}$  é harmônica. Pelo corolário 1, temos que o catenoide é uma superfície mínima.

Figura 3.2: Catenóide.



Fonte: Autoria própria.

O catenoide pode ser caracterizado como a única superfície de revolução que é mínima. Tal fato pode ser provado da seguinte maneira: queremos encontrar uma curva  $y = f(x)$  que ao ser rotacionada em torno do eixo  $O_x$  descreva uma superfície mínima. Como vimos anteriormente no Exemplo 25, os paralelos ( $u = \text{constante}$ ) e meridianos ( $v = \text{constante}$ ) de uma superfície de revolução são linhas de curvatura, e para que isto aconteça é necessário que  $F = f = 0$ , temos que a curvatura da curva  $y = f(x)$  deve ser o negativo da curvatura normal do círculo gerado pelo ponto  $f(x)$ . Como a curvatura de  $y = f(x)$  é

$$k(y) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

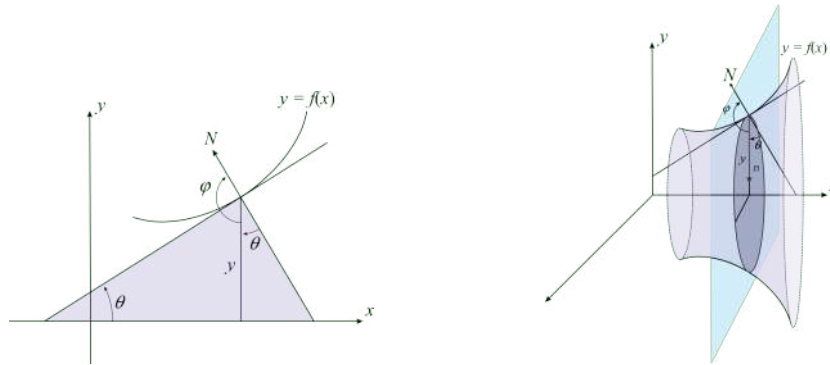
e a curvatura normal da circunferência é a projeção da curvatura usual ( $k_c = 1/y$ ) sobre o vetor normal  $N$  à superfície, obtemos

$$k(y) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y} \cos(\varphi). \quad (3.1)$$

Porém, (Figura 3.3) temos que

$$\begin{aligned}\theta &= \pi - \varphi \\ \Rightarrow \cos(\theta) &= \cos(\pi - \theta) \\ \Rightarrow \cos(\theta) &= \cos(\pi) \cos(\varphi) + \sin(\pi) \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Figura 3.3: Esquema da construção da equação 3.1.



Fonte: Autoria própria.

$$\Rightarrow \cos(\theta) = -\cos(\varphi).$$

Além disso, como  $\tan(\theta) = y'$ ,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan(\theta))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Logo,

$$k(y) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y} \frac{1}{(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Como existe pelo menos um ponto onde  $y' \neq 0$ , trabalharemos em uma vizinhança deste ponto. Multiplicando de ambos os lados da equação por  $2y'$ , obtemos

$$\frac{2y'y''}{1 + (y')^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Fazendo  $1 + (y')^2 = z$ , temos que  $z' = 2y'y''$ . Substituindo na equação acima,

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y}.$$

Integrando de ambos os lados da equação, obtemos

$$\ln z = \ln y^2 + \ln k^2 = \ln (yk)^2, \quad k = \text{const..}$$

Da primeira equação temos

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln y^2 + \ln k^2 = \ln (yk)^2 \\ \Rightarrow e^{\ln z} &= e^{\ln y^2 + \ln k^2} = e^{\ln (yk)^2} \\ \Rightarrow z &= (yk)^2. \end{aligned}$$

Porém,  $z = 1 + (y')^2$ , logo,

$$1 + (y')^2 = z = (yk)^2, \quad k = \text{const..}$$

Esta última expressão pode ser escrita como

$$\frac{kdy}{\sqrt{(yk)^2 - 1}} = kdx.$$

Novamente, integrando de ambos os lados da equação,

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c, \quad c = \text{const.},$$

ou ainda, aplicando a função  $\cosh$  de ambos os lados da equação,

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx + c).$$

Assim, em uma vizinhança de um ponto onde  $y' \neq 0$ , a curva  $y = f(x)$  é uma catenária. Porém,  $y'$  pode ser zero se  $x = 0$ , e se queremos uma superfície conexa, ela é, por continuidade, um catenoide, como havíamos afirmado.

**Exemplo 28** (Helicoide). Seja  $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), au)$  onde  $0 < u < 2\pi$  e  $-\infty < v < \infty$  uma parametrização para o helicoide

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-a \sinh(v) \sin(u), a \sinh(v) \cos(u), a), \\ \mathbf{x}_v &= (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$E = a^2 \cosh^2(v) = G \quad \text{e} \quad F = 0,$$

o que nos permite concluir que  $\mathbf{x}$  é isotérmica, visto que  $E = G$  e, conseqüentemente,  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  e  $F = 0 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ . Além disso,

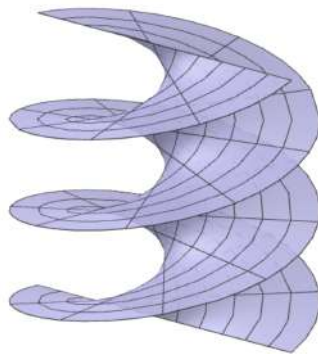
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (-a \sinh(v) \cos(u), -a \sinh(v) \sin(u), 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), 0). \end{aligned}$$

Concluimos assim que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  e, desta forma, o helicoide é uma superfície mínima. Além disso, tal superfície possui uma propriedade interessante de ser a única superfície mínima, além do plano, que também é uma superfície regrada, que a grosso modo são superfícies geradas por retas, mas não demonstraremos este fato aqui.

**Exemplo 29** (Superfície mínima de Enneper). A superfície de Enneper (Figura 3.5) é a superfície parametrizada

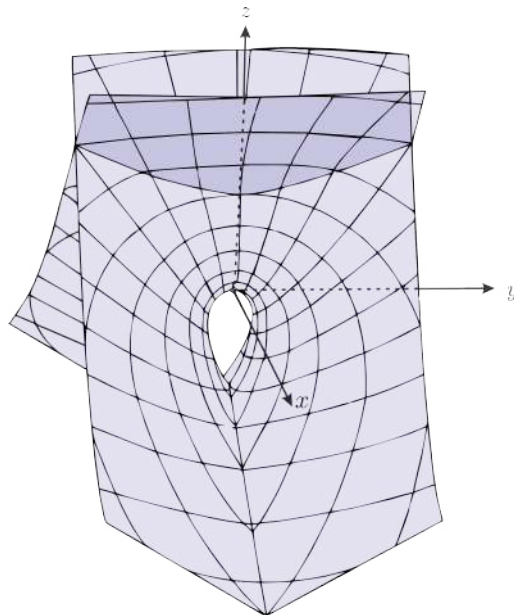
$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Figura 3.4: Helicoide.



Fonte: Autoria própria.

Figura 3.5: Superfície de Enneper.



Fonte: CARMO, 2005, p.245.

Temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \\ \mathbf{x}_v &= (2vu, 1 - v^2 + u^2, -2v).\end{aligned}$$

Logo,

$$E = u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1 = G \quad \text{e} \quad F = 0,$$

o que nos permite concluir que  $\mathbf{x}$  é isotérmica, visto que  $E = G$  e  $F = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-2u, 2v, 2), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (2u, -2v, -2).\end{aligned}$$

Concluimos assim que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  e, desta forma, pelo Critério 1 a superfície de Enneper é uma superfície mínima.

Podemos notar ainda que se trocarmos  $(u, v)$  por  $(-v, u)$  temos então que

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \frac{v^3}{3} - vu^2 - v, u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v^2 - u^2 \right),$$

logo, trocamos, na superfície  $(x, y, x)$  por  $(-y, x, -z)$ . Assim, ao efetuarmos uma rotação positiva de  $\pi/2$  em torno do eixo  $O_z$  seguida de uma simetria no plano  $xy$ , a superfície permanece invariante.

Uma característica da superfície de Enneper é que ela possui auto-interseções. Tomando  $u = \rho \cos(\theta)$ ,  $v = \rho \sin(\theta)$  e escrevendo  $\mathbf{x}(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \mathbf{x}(\rho, \theta)$  temos que

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = \left( \rho \cos(\theta) - \frac{\rho^3}{3} \cos(3\theta), \rho \sin(\theta) + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\theta), \rho^2 \cos(2\theta) \right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left( \rho \cos(\theta) - \frac{\rho^3}{3} \cos(3\theta) \right)^2 + \left( \rho \sin(\theta) + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\theta) \right)^2 \\ &= \rho^2 \cos^2(\theta) - \cos(\theta) \frac{2\rho^4}{3} \cos(3\theta) + \frac{\rho^6}{9} \cos^2(3\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) + \sin(\theta) \frac{2\rho^4}{3} \sin(3\theta) + \frac{\rho^6}{9} \sin^2(3\theta) \\ &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \cos(4\theta) \frac{2\rho^4}{3} = \left( \rho + \frac{\rho^3}{3} \right) - \frac{4}{3} (\rho^2 \cos(2\theta))^2. \end{aligned}$$

Assim, se  $\mathbf{x}(\rho_1, \theta_1) = \mathbf{x}(\rho_2, \theta_2)$ , então

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= x_2^2 + y_2^2 \\ \Rightarrow \left( \rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \right) - \frac{4}{3} (\rho_1^2 \cos(2\theta_1))^2 &= \left( \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \right) - \frac{4}{3} (\rho_2^2 \cos(2\theta_2))^2. \end{aligned}$$

Como  $\rho_1^2 + \cos(2\theta_1) = \rho_2^2 + \cos(2\theta_2)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} &= \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \\ \Rightarrow (\rho_1 - \rho_2) + \frac{(\rho_1)^3 - (\rho_2)^3}{3} &= 0 \\ \Rightarrow (\rho_1 - \rho_2) \left[ 1 + \frac{(\rho_1)^2 + \rho_1 \rho_2 + (\rho_2)^2}{3} \right] &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que  $\rho_1 = \rho_2$  e, conseqüentemente,  $\cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2)$ . Se, por exemplo,

$\rho_1 = \rho_2$  e  $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$ , como  $y(\rho_1, \theta_1) = y(\rho_2, \theta_2)$ ,

$$\begin{aligned} y(\rho_1, \theta_1) &= y(\rho_2, 2\pi - \theta_2) = \rho_2 \operatorname{sen}(2\pi - \theta_2) + \frac{\rho_2^3}{3} \operatorname{sen}(3(2\pi - \theta_2)) \\ &= \rho_2 (\operatorname{sen}(2\pi) \cos(\theta_2) - \cos(2\pi) \operatorname{sen}(\theta_2)) + \frac{\rho_2^3}{3} (\operatorname{sen}(6\pi) \cos(3\theta_2) - \cos(6\pi) \operatorname{sen}(3\theta_2)) \\ &= -\rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - \frac{\rho_2^3}{3} \operatorname{sen}(3\theta_2) = -y(\rho_2, \theta_2). \end{aligned}$$

Assim, temos que  $y = -y$ , o que implica que  $y = 0$ , isto é, os pontos  $(\rho_1, \theta_1)$  e  $(\rho_2, \theta_2)$  pertencem à curva

$$\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\rho^2}{3} \operatorname{sen}(3\theta) = 0.$$

É claro que, para cada ponto  $(\rho, \theta)$  que pertence a esta curva, o ponto  $(\rho, 2\pi - \theta)$  também pertence a ela, e

$$x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta), \quad z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta).$$

Assim, a interseção da superfície com o plano  $y = 0$  é uma curva de auto-interseção da superfície.

De forma análoga, pode-se mostrar que a interseção da superfície com o plano  $x = 0$  também é uma curva de auto-interseção (neste caso,  $\rho_1 = \rho_2$  e  $\theta_1 = \pi - \theta_2$ ).

Antes de passarmos ao próximo exemplo, vamos estabelecer uma relação entre superfícies mínimas e superfícies analíticas de uma variável complexa. Denotaremos por  $\mathbb{C}$  o plano complexo, que é, como de costume, identificado com  $\mathbb{R}^2$  ao tomarmos  $\zeta = u + vi$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

**Definição 35.** Uma função  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é *analítica* (ou holomorfa) quando, escrevendo

$$f(\zeta) = f_1(u, v) + if_2(u, v),$$

as funções reais  $f_1$  e  $f_2$  têm derivadas parciais contínuas de primeira ordem que satisfazem às chamadas equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Seja agora  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e defina as funções complexas  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  por

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \varphi_2(\zeta) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \varphi_3(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v},$$

onde  $x, y$  e  $z$  são funções coordenadas  $\mathbf{x}$ .

**Lema 3.3.**  $\mathbf{x}$  é isotérmica se e somente se  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ . Se essa última condição é satisfeita,  $\mathbf{x}$  é mínima se e somente se  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  são funções analíticas.

*Demonstração.* Através de um cálculo simples, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= (x_u - ix_v)^2 + (y_u - iy_v)^2 + (z_u - iz_v)^2 \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) - (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - 2i(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\ &= (E - G) - 2iF.\end{aligned}$$

Logo, temos que  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  se, e só se,  $E = G$  e  $F = 0$ , ou seja, se, e só se,  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Além disso,  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  se, e só se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\partial z}{\partial v} \right),\end{aligned}$$

que são metade das equações de Cauchy-Riemann para  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Para verificar a outra metade, usando o teorema de Clairaut para funções de duas variáveis temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) = -\frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right) = -\frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right) = -\frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\partial z}{\partial v} \right),\end{aligned}$$

Assim,  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann e concluímos que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  se e somente se  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  são analíticas. ■

**Exemplo 30** (Superfície Mínima Scherk). A superfície de Scherk (Figura 3.6) é a superfície parametrizada dada por

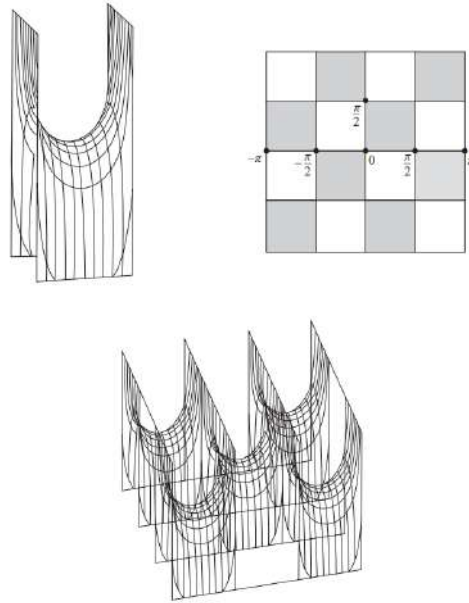
$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \arg \left( \frac{\xi + i}{\xi - i} \right), \arg \left( \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right), \log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| \right),$$

$\xi \neq \pm 1, \xi \neq \pm i$ , onde  $\xi = u + iv$  e  $\arg(\xi)$  é o ângulo que  $O\xi$  faz com o eixo real.

Para um número complexo  $z \neq 0$  qualquer temos que, na forma polar, podemos



Figura 3.6: Superfície de Scherk.



Fonte: CARMO, 2005, p.249.

escrever  $z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ , onde  $\theta = \arg(z)$ . Assim, temos que

$$\tan(\theta) = \frac{\Im(z/|z|)}{\Re(z/|z|)} = \frac{\Im(z)}{\Re(z)}.$$

Logo, substituindo  $\xi = u + iv$ ,

$$\arg\left(\frac{\xi + i}{\xi - i}\right) = \arg\left(\frac{u + iv + i}{u + iv - i}\right) = \arg\left(\frac{u + i(v + 1)}{u + i(v - 1)}\right).$$

Multiplicando pelo conjugado  $u - i(v - 1)$  do denominador,

$$\arg\left(\frac{u^2 + v^2 - 1 - i(u(v - 1) - u(v + 1))}{u^2 + (v - 1)^2}\right) = \arg\left(\frac{(u^2 + v^2 - 1) + 2ui}{u^2 + (v - 1)^2}\right).$$

Assim,

$$\Im(z) = \frac{2u}{u^2 + (v - 1)^2}, \quad \Re(z) = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + (v - 1)^2}.$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{\left(\frac{2u}{u^2 + (v - 1)^2}\right)}{\left(\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + (v - 1)^2}\right)} = \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1} \\ \Rightarrow \theta &= \arctan\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

De forma análoga, substituindo  $\xi = u + iv$ ,

$$\arg\left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right) = \arg\left(\frac{u + iv + 1}{u + iv - 1}\right) = \arg\left(\frac{(u + 1) + iv}{(u - 1) + iv}\right).$$

Multiplicando pelo conjugado  $(u - 1) - iv$  do denominador,

$$\arg\left(\frac{u^2 - 1 + v^2 + i(v(u - 1) - v(u + 1))}{(u - 1)^2 + v^2}\right) = \arg\left(\frac{(u^2 + v^2 - 1) - 2vi}{(u - 1)^2 + v^2}\right).$$

Assim,

$$\Im(z) = \frac{2v}{(u - 1)^2 + v^2}, \quad \Re(z) = \frac{u^2 + v^2 - 1}{(u - 1)^2 + v^2}.$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{\left(\frac{2v}{(u - 1)^2 + v^2}\right)}{\left(\frac{u^2 + v^2 - 1}{(u - 1)^2 + v^2}\right)} = \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \\ \Rightarrow \theta &= \arctan\left(-\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

Além disso, substituindo  $\xi = u + vi$  e utilizando o fato de que dado um número complexo  $a = \alpha + i\beta$  temos que  $|a| = \alpha^2 + \beta^2$ , então

$$\log\left(\left|\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}\right|\right) = \log\left(\left|\frac{(u^2 - v^2 + 1) + 2iuv}{(u^2 - v^2 - 1) + 2iuv}\right|\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}\right)^2} \left[ \left(\frac{2(u^2 + v^2 - 1) - 4u^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2}\right) + i \frac{4uv}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \right] \\ &= \frac{-2(u^2 - v^2 + 1) + 4iuv}{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4u^2} = \frac{-2(1 + u^2 - v^2 - 2iuv)}{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2} = -\frac{2}{1 + \xi^2}; \\ \varphi_2 &= \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4v^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2}\right)} \left[ \left(\frac{4uv}{(u^2 + v^2 - 1)^2}\right) + 2i \frac{(u^2 + v^2 - 1) - 2v^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \right] \\ &= \frac{-2i(-(u^2 - v^2 - 1) + 2iuv)}{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2} = \frac{-2i(1 - u^2 + v^2 + 2iuv)}{(v^2 - u^2 + 1)^2 + 4u^2v^2} = -\frac{2i}{1 - \xi^2}. \end{aligned}$$

Temos ainda que  $\log(z) = \log(|z|)e^{i\theta} = \log(|z|) + i\theta$ , assim

$$\left(\log\left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}\right)\right)' = \frac{\partial}{\partial u} \left(\log\left|\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}\right|\right) - i \frac{\partial}{\partial v} \left(\log\left|\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}\right|\right) = \varphi_3(\xi).$$

Deste modo,

$$\varphi_3(\xi) = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \left( \frac{2\xi(\xi^2 - 1) - 2\xi(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 - 1)^2} \right) = \frac{-4\xi}{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - 1)} = \frac{4\xi}{1 - \xi^4}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= \frac{4}{(1 + \xi^2)^2} - \frac{4}{(1 - \xi^2)^2} + \frac{16\xi^2}{(1 - \xi^4)^2} = \frac{4(1 - \xi^2)^2 - 4(1 + \xi^2)^2 + 16\xi^2}{(1 - \xi^4)^2} \\ &= \frac{4(1 - 2\xi^2 + \xi^4) - 4(1 + 2\xi^2 + \xi^4) + 16\xi^2}{(1 - \xi^4)^2} = 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Além disso, como  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  são funções analíticas, temos pelo lema anterior que  $\mathbf{x}$  é mínima.

## Capítulo 4

### O Teorema de Aleksandrov

No que segue, faremos um estudo com um pouco mais de detalhes do artigo “Mean curvature, the laplacian, and soap bubbles”, encontrado em [11], cujo objetivo principal é a demonstração do teorema de Aleksandrov em  $\mathbb{R}^3$ . Usaremos as mesmas notações e simplificações do artigo no tocante a algumas definições, como por exemplo a Definição 33, que define superfície como imagem inversa de valor regular.

Neste sentido, voltamos a falar da curvatura média agora como uma média de curvaturas de seções normais e mostraremos que podemos calculá-la através da média aritmética das curvaturas de quaisquer seções normais tomadas em direções ortogonais. Mostraremos alguns resultados relacionados a curvatura média e ao laplaciano necessários para a demonstração do teorema de Aleksandrov.

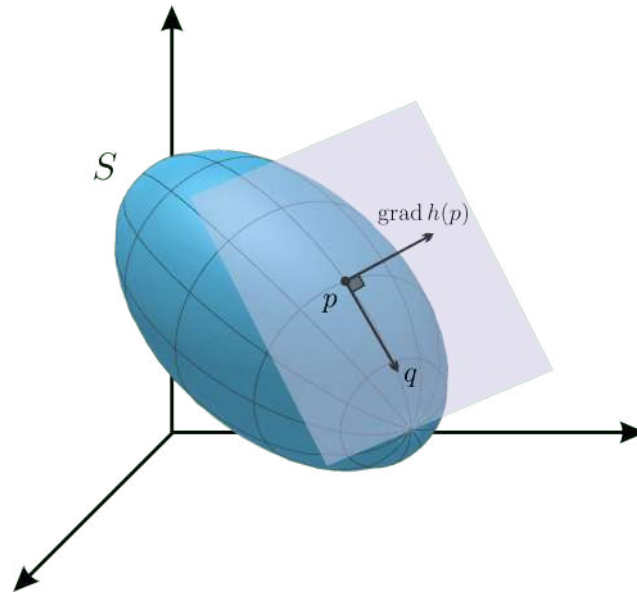
**Definição 36.** Seja  $S$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $S$  é uma superfície se em alguma vizinhança  $U$  de  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ , existe uma função  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que se  $p \in S$ , então (i)  $h(p) = 0$  e (ii)  $\text{grad } h(p) \neq 0$ . Se, para algum inteiro  $k \geq 1$ ,  $h$  é uma função de classe  $C^k$ , então dizemos que  $S$  é uma *superfície* de classe  $C^k$ .

**Observação 4.1.** Em livros clássicos de geometria, esta não é a definição mais utilizada para uma superfície. Porém, ela é suficiente e útil para os nossos propósitos além de trazer algumas simplificações importantes. Uma definição mais ampla pode ser encontrada na Definição 11.

**Observação 4.2.** (a) Pela Proposição 1.10,  $S$  é superfície regular. Além disso, a Proposição 1.11 garante que cada ponto de  $S$  tem uma vizinhança (em  $S$ ) que é gráfico de uma função  $C^k$  de duas variáveis;

(b) Existe um plano tangente  $T_p S$  e uma reta normal  $I_p$  em cada ponto  $p$  de  $S$  (Figura 4.1):

$$T_p S = \{q \in \mathbb{R}^3 : (q - p) \perp \text{grad } h(p)\} \quad \text{e} \quad I_p = \{q \in \mathbb{R}^3 : (q - p) \parallel \text{grad } h(p)\};$$

Figura 4.1: Representação  $T_p S$  e  $I_p$ .

Fonte: Autoria própria.

- (c) A orientação de  $S$  é determinada escolhendo um dos dois campos de vetores normais e unitários de  $S$ ,  $v(p) = \text{grad } h(p) / |\text{grad } h(p)|$  ou  $v(p) = -\text{grad } h(p) / |\text{grad } h(p)|$ . O campo vetorial  $v$  orienta  $S$  estabelecendo um sentido de “esquerda” e “direita” em cada plano tangente  $T_p S$ . Por exemplo, se  $u \in T_p S$  e  $u \neq 0$ , então o produto vetorial  $v_p \times u$  é um vetor em  $T_p S$  que diz-se que “aponta” para a esquerda de  $u$ . Se  $S$  é a fronteira de um domínio  $D$  cujo fecho  $\bar{D}$  é compacto, então orientamos  $S$  de modo que  $v$  aponte para fora de  $D$ ;

- (d) Denotamos o elemento de área em  $S$  por  $dA$  e a área total de  $S$  (se finita) por  $A$ .

Aqui, voltaremos a falar de curvatura média, procurando dar uma descrição dela em termos de curvas planas.

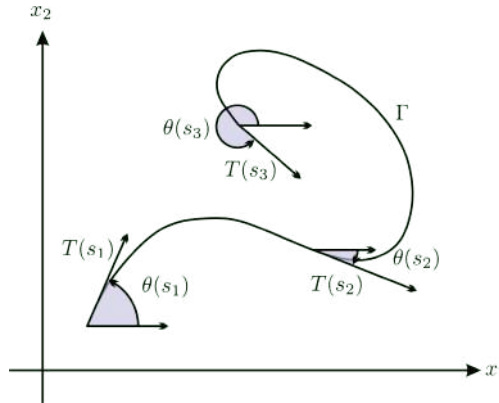
Na próxima seção apresentaremos uma definição de curvatura média como uma média das curvaturas de seções normais em um ponto  $p$ . Demonstraremos também um lema que nos ajuda a calcular a curvatura média conhecendo as curvaturas de quaisquer seções tomadas em direções ortogonais de  $T_p S$ .

## 4.1 Curvatura Média

A curvatura média de uma superfície de classe  $C^2$  é uma função  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  que mede o quanto  $S$  se “encurva”. Descrevemos  $H$  em termos da noção mais familiar de curvatura de uma curva plana.

Seja  $P$  um plano orientável em  $\mathbb{R}^3$ . Escolha as coordenadas cartesianas  $x_1$  e  $x_2$  em  $P$  tal que  $e_2$ , o vetor unitário na direção positiva de  $x_2$ , aponte para a esquerda de  $e_1$ , o vetor unitário na direção positiva de  $x_1$ . Suponha que  $\Gamma$  é a curva em  $P$  (Figura 4.2) que tem por parametrização  $\Gamma(s) = (x_1, x_2) = (g_1(s), g_2(s))$ , onde  $g_1$  e  $g_2$  são funções de classe  $C^2$  e  $s$  é o comprimento de arco ao longo de  $\Gamma$ . Denote o vetor tangente unitário,  $(g'_1(s), g'_2(s))$ , por  $T(s)$ ; denote o ângulo formado de  $e_1$  até  $T(s)$  por  $\theta(s)$ .

Figura 4.2: Curvatura como derivada da função ângulo entre  $e_1$  e  $T(s)$ .



Fonte: Autoria própria.

**Definição 37.** A curvatura de  $\Gamma$  em  $s$  é o número  $k(s) = d\theta/ds$ .

**Observação 4.3.**

- (a) Suponha que  $\Gamma$  é o gráfico  $x_2 = \phi(x_1)$ , de uma função  $\phi$  de classe  $C^2$ , e que a orientação positiva ao longo de  $\Gamma$  é dada no sentido em que  $x_1$  aumenta. Assim, como a derivada é a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $\phi$ , que neste caso é medida pela tangente do ângulo  $\theta$  formado entre a reta tangente e o eixo  $x_1$ , temos que  $\phi' = \tan(\theta)$ . Logo, aplicando a função arcotangente de ambos os lados,  $\theta = \arctan(\phi')$ . Além disso, a função comprimento de arco é dada por

$$s(x_1) = \int_a^{x_1} \|\Gamma'(t)\| dt = \int_a^{x_1} \|(1, \phi'(t))\| dt = \int_a^{x_1} (1 + \phi'^2(t))^{1/2} dt.$$

Derivando de ambos os lados obtemos,

$$ds = (1 + \phi'^2(x_1))^{1/2} dx_1, \tag{4.1}$$

e, derivando  $\theta$  com respeito a  $x_1$ , temos

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{\phi''(x_1)}{1 + \phi'^2(x_1)}.$$

Logo, pela Regra da Cadeia,

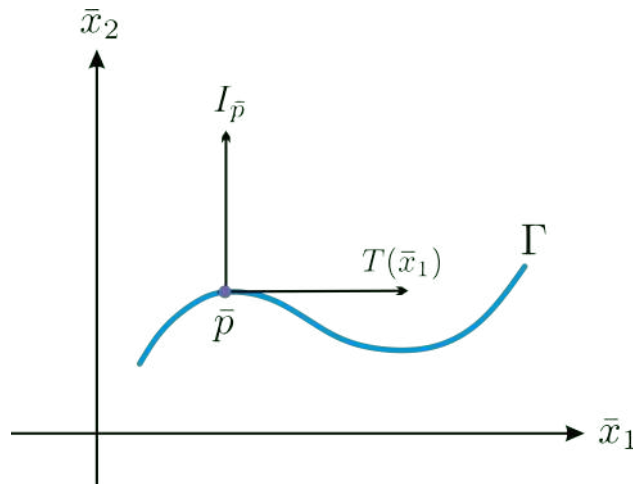
$$k(s) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} = \frac{\phi''}{1 + \phi'^2} \frac{1}{(1 + \phi'^2)^{1/2}} = \frac{\phi''}{(1 + \phi'^2)^{3/2}}. \quad (4.2)$$

Note que se  $\bar{p} = (\bar{x}_1, \phi(\bar{x}_1))$  é um ponto de  $\Gamma$  tal que a reta normal  $I_{\bar{p}}$  é paralela ao eixo  $x_2$  (Figura 4.3), o vetor tangente à curva  $\Gamma(x_1) = (x_1, \phi(x_1))$  dado por  $T(x_1) = (1, \phi'(x_1))$  é horizontal, conseqüentemente  $\phi'(\bar{x}_1) = 0$ ; nesse caso, a equação acima toma a forma simples

$$k(\bar{p}) = \phi''(\bar{x}_1). \quad (4.3)$$

Ainda, note que se  $k$  é positiva no ponto  $p = (x_1, \phi(x_1))$  de  $\Gamma$  então, perto de  $p$ ,  $\Gamma$

Figura 4.3: Interpretação do sinal da curvatura.



Fonte: Autoria própria.

inclina-se para o vetor unitário

$$n(p) = \left( \frac{-\phi'(x_1)}{(1 + \phi'(x_1)^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + \phi'(x_1)^2)^{1/2}} \right).$$

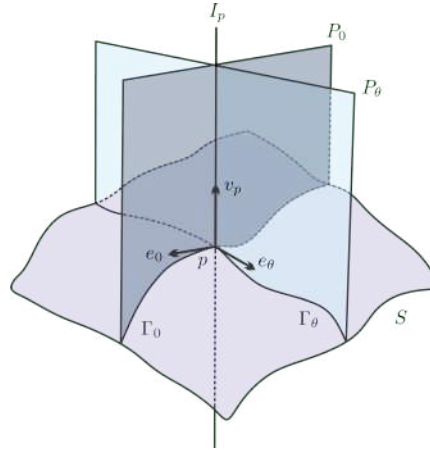
Analogamente, se  $k(0) < 0$  então, próximo de  $p$ ,  $\Gamma$  inclina-se para longe de  $n(p)$ .

- (b) Suponha que nem a orientação de  $P$  nem a direção positiva ao longo de  $\Gamma$  sejam dadas; então, nos pontos onde  $|k| \neq 0$ , o sinal de  $k$  é ambíguo (nesse caso, não é bem definida em  $P$  a noção de “rotação no sentido anti-horário”). Uma maneira conveniente de especificar um sinal para a curvatura em tal ponto  $p$  de  $\Gamma$  é escolher, dos dois vetores unitários em  $P$  normal a  $\Gamma$  em  $p$ , um “preferido” que denotaremos por  $n(p)$ ; dizemos que a curvatura em  $p$  é positiva (em relação a  $n(p)$ ) se  $\Gamma$  se inclina em direção a  $n(p)$  perto de  $p$  e que é negativo caso contrário.

Seja  $S$  é uma superfície orientada de classe  $C^2$  e  $p$  um ponto de  $S$ . Escolha um vetor unitário  $e_0$  no plano tangente  $T_p S$  e para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$  seja  $e_\theta$  o vetor obtido pela

rotação de  $e_0$  no sentido anti-horário em  $T_p S$  através de um ângulo  $\theta$  (Figura 4.4). O vetor  $e_\theta$  e a linha normal  $I_p$  definem um plano  $P_\theta$  que intercepta  $S$  ortogonalmente em  $p$ . Seja  $\Gamma_\theta = P_\theta \cap S$  a curva de interseção; denote a curvatura de  $\Gamma_\theta$  em  $p$ , em relação ao vetor normal unitário  $v_p$ , por  $k(\theta, p)$ . Isso faz sentido porque  $v_p$  não é apenas normal a  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ , também é normal a  $\Gamma_\theta$  em  $P_\theta$ .

Figura 4.4: Esquema para definição de curvatura média.



Fonte: Autoria própria.

**Definição 38.** A curvatura média  $H(p)$  de  $S$  em  $p$  é a média das curvaturas  $k(\theta, p)$  para  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Isto é,

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta, p) d\theta. \quad (4.4)$$

Isto não é necessariamente calcular  $k(\theta, p)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  em ordem para determinar  $H(p)$ .

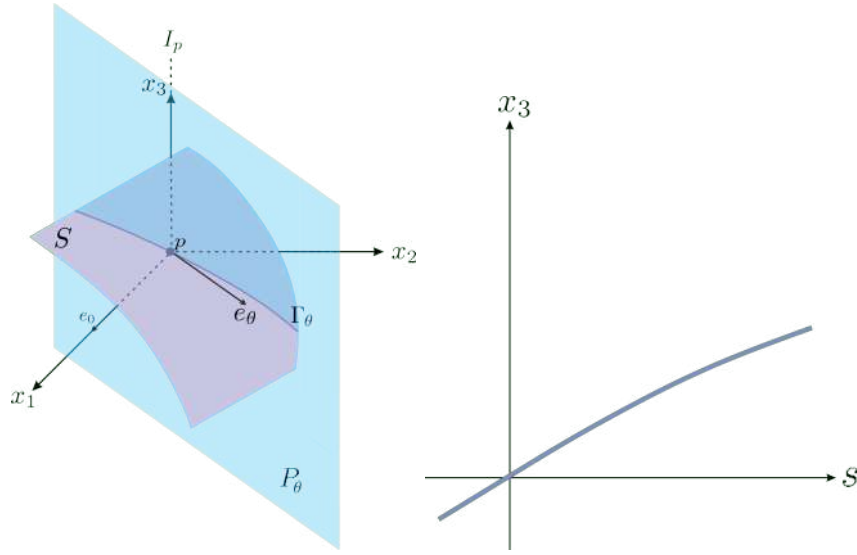
**Lema 4.4.** Se  $p \in S$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então

$$H(p) = \frac{1}{2}(k(\theta, p) + k(\theta + \pi/2, p)). \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Escolha as coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  para que  $p$  seja igual a  $(0, 0, 0)$  e  $I_p$  seja o eixo  $x_3$  (Figura 4.5). Então, perto de  $p$ , podemos expressar  $S$  como o gráfico de uma função de classe  $C^2$ , dada por  $x_3 = f(x_1, x_2)$  tal que  $f_{x_1}(0, 0) = f_{x_2}(0, 0) = 0$ . Seja  $e_0$  o vetor unitário ao longo do eixo positivo  $x_1$  e para cada  $\theta$  em  $[0, 2\pi]$  construa  $P_\theta$  e  $\Gamma_\theta$  como antes. Então (próximo a  $p$ )  $\Gamma_\theta$  é o gráfico  $x_3 = \phi_\theta(s)$  no plano  $P_\theta$ , onde o eixo  $s$  em  $P_\theta$  é a interseção de  $P_\theta$  com o plano  $x_1 x_2$  e  $\phi_\theta(s) = f(s \cos(\theta), s \sin(\theta))$ . É claro que  $\phi'_\theta(0) = 0$  (porque  $f_{x_1}(0, 0) = f_{x_2}(0, 0) = 0$ ), então pela equação (4.3), podemos



Figura 4.5: Esquema para demonstração do Lema 2.



Fonte: Autoria própria.

concluir que  $k(\theta, p) = \phi''_{\theta}(0)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \phi'_{\theta}(s) &= f_{x_1}(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \cos(\theta) + f_{x_2}(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \sin(\theta) \\ \Rightarrow \phi''_{\theta}(s) &= f_{x_1 x_1}(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \cos^2(\theta) + 2f_{x_1 x_2}(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + f_{x_2 x_2}(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Aplicando em  $s = 0$ , obtemos então

$$k(\theta, p) = \cos^2(\theta) f_{x_1 x_1}(0, 0) + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) f_{x_1 x_2}(0, 0) + \sin^2(\theta) f_{x_2 x_2}(0, 0). \quad (4.6)$$

Deste modo, para  $f_{x_1 x_1}$ ,  $f_{x_1 x_2}$  e  $f_{x_2 x_2}$  calculados no  $(0, 0)$  temos que

$$\begin{aligned} k(\theta, p) + k(\theta + \pi/2, p) &= \cos^2(\theta) f_{x_1 x_1} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) f_{x_1 x_2} + \sin^2(\theta) f_{x_2 x_2} + \cos^2(\theta + \pi/2) f_{x_1 x_1} \\ &\quad + 2 \cos(\theta + \pi/2) \sin(\theta + \pi/2) f_{x_1 x_2} + \sin^2(\theta + \pi/2) f_{x_2 x_2}. \end{aligned}$$

Utilizando as identidades  $\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$  e  $\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$ , temos que

$$\begin{aligned} k(\theta, p) + k(\theta + \pi/2, p) &= \cos^2(\theta) f_{x_1 x_1} + \sin^2(\theta) f_{x_1 x_1} + \sin^2(\theta) f_{x_2 x_2} + \cos^2(\theta) f_{x_2 x_2} \\ &= f_{x_1 x_1}(0, 0) + f_{x_2 x_2}(0, 0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo a expressão de  $k(\theta, p)$  encontrada em (4.6) na expressão de  $H(p)$

encontrada em (4.4),

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta)f_{x_1x_1} + 2\cos(\theta)\text{sen}(\theta)f_{x_1x_2} + \text{sen}^2(\theta)f_{x_2x_2}) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( f_{x_1x_1} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + 2f_{x_1x_2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\text{sen}(\theta) d\theta + f_{x_2x_2} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta) d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( f_{x_1x_1} \left( \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{1}{2}\text{sen}(2x) \right) \right) \Big|_0^{2\pi} + 2f_{x_1x_2} \left( \frac{\text{sen}^2(x)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + \right. \\
 &\quad \left. f_{x_2x_2} \left( \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{1}{2}\text{sen}(2x) \right) \right) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( f_{x_1x_1} \left( \frac{1}{2}(2\pi - 0) \right) + 2f_{x_1x_2} \left( \frac{0}{2} - \frac{0}{2} \right) + f_{x_2x_2} \left( \frac{1}{2}(2\pi - 0) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (f_{x_1x_1}\pi + f_{x_2x_2}\pi) = \frac{1}{2}(f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2}).
 \end{aligned}$$

Ainda, pela equação (4.7), concluímos que

$$H(p) = \frac{1}{2} (k(\theta, p) + k(\theta + \pi/2, p))$$

■

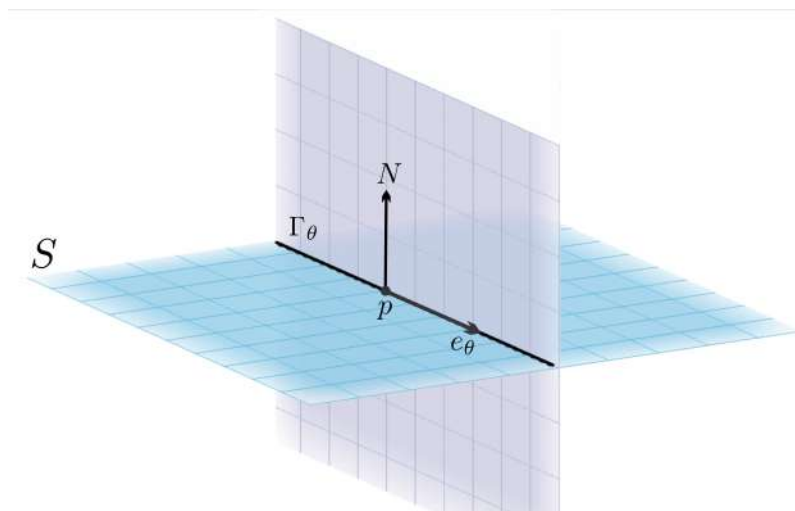
Comparando com a definição de curvatura média encontrada na Seção 3 do Capítulo 2, observamos que o Teorema 2.11 nos fornece duas direções ortogonais dadas pelos autovetores de  $dN_p$ . Assim, o resultado acima está de acordo com esta definição.

### Exemplos

Na maioria das superfícies a curvatura média varia de ponto a ponto, mas neste artigo consideramos apenas superfícies nas quais  $H$  é constante.

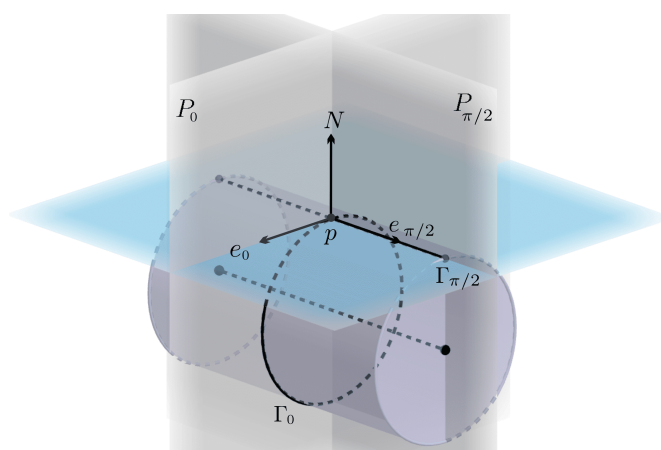
- (a) Se  $S$  é um plano, então cada curva  $\Gamma_\theta$  (Figura 4.6) é uma linha reta, então  $k(\theta, p) = 0$  para cada  $p \in S$  e cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Assim,  $H \equiv 0$ ;
- (b) Se  $S$  é uma esfera de raio  $R$ , então cada  $\Gamma_\theta$  (Figura 4.7) é um círculo de raio  $R$ , então  $k(\theta, p) = -1/R$  para cada  $p$  e  $\theta$ . Assim,  $H = -1/R$ ;
- (c) Suponha que  $S$  seja um cilindro circular reto, de raio  $R$ , cujo eixo seja uma linha  $L$ . Para  $p \in S$  seja  $e_0$  um vetor unitário paralelo a  $L$ ; então  $\Gamma_0$  ((Figura 4.8)) é uma reta (ou seja, o “gerador” através de  $p$ ) e  $\Gamma_{\pi/2}$  é um círculo de raio  $R$ . Segue-se que  $H(p) = \frac{1}{2}(0 + (-1/R)) = -1/2R$ ;

Figura 4.6: Representação de  $\Gamma_\theta$  no plano.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4.8: Representação de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_{\pi/2}$  no cilindro.

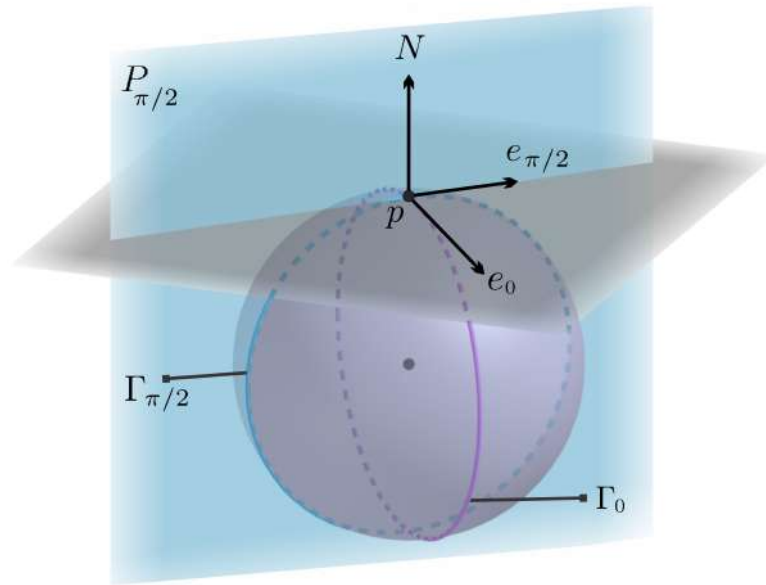


Fonte: Autoria própria.

Os exemplos anteriores possuem muita simetria; aqueles que se seguem não precisam possuir.

- (d) Mergulhe cuidadosamente um laço de arame em uma solução de sabão; uma película de sabão se formará ao redor do laço. A estabilidade de tal película requer que sua área seja menor do que a de qualquer superfície próxima abrangendo o mesmo laço. Pode-se provar (usando o Cálculo das Variações) que esta propriedade de “área mínima” implica que a curvatura média deve ser zero em cada ponto da película. (Por outro lado, qualquer superfície na qual  $H \equiv 0$  é chamada de superfície mínima como visto na seção 1 o capítulo 3);
- (e) Imagine que o laço de fio no exemplo anterior seja a borda de um recipiente (por exemplo, a borda de um tubo de bolha de sabão). Agora bombeie um pouco de

Figura 4.7: Representação de  $\Gamma_\theta$  na esfera.



Fonte: Autoria própria.

ar para dentro (ou fora) deste recipiente; a mudança da pressão do ar em um lado da película de sabão que atravessa o aro faz com que a película mude de forma. Está provado no Cálculo das Variações que a curvatura média da película de sabão deformada é uma constante e diferente de zero. Se uma quantidade suficiente de ar for bombeada para o recipiente, então a película de sabão pode escapar da borda e formar um bolha de sabão flutuante.

Em todos os exemplos anteriores, exceto em um, ou a superfície se estende ao infinito ou tem uma curva limite. A exceção é a esfera. O principal resultado deste estudo é o Teorema de Aleksandrov, que afirma que não há outra exceção. Mais precisamente, se uma superfície  $S$  de classe  $C^4$  é a fronteira de um domínio compacto  $\bar{D}$  em  $\mathbb{R}^3$  e se  $H$  é constante em  $S$ , então  $S$  é uma esfera.

## 4.2 A Curvatura Média e o Laplaciano

Aqui denotaremos as derivadas parciais por subscritos

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = F_j, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = F_{kj}, \quad \text{etc.},$$

e a primeira e a segunda derivadas direcionais ao longo de um vetor  $v = (v_1, \dots, v_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  por  $D_v$  e  $D_v^2$ , onde

$$D_v F(p) = \frac{d}{dt} F(p + tv) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n F_j(p) v_j,$$

e

$$D_v^2 F(p) = \frac{d^2}{dt^2} F(p + tv) \Big|_{t=0} = \sum_{j,k=1}^n F_{jk}(p) v_j v_k.$$

**Definição 39.** Suponha que  $F$  é uma função de classe  $C^2$  em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . O Laplaciano de  $F$  é a função  $\Delta F = \sum_{j=1}^n F_{jj}$ .

**Observação 4.5.** O valor de  $\Delta F$  é independente da escolha das coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^n$ . Existe uma relação simples entre o Laplaciano em  $\mathbb{R}^2$  e a curvatura das curvas planas, dada pelo teorema a seguir.

**Teorema 4.6.** *Suponha que  $F$  é uma função de classe  $C^2$  em um conjunto aberto  $U$  em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $p$  um ponto de  $U$  e seja  $\Gamma$  uma curva em  $U$  passando por  $p$ . Denote a restrição de  $F$  a  $\Gamma$  por  $f$ . Seja  $n_p$  um vetor normal a  $\Gamma$  em  $p$  e seja  $k(p)$  a curvatura correspondente. Finalmente, denote o comprimento de arco ao longo de  $\Gamma$  por  $s$ . Então,*

$$(\Delta F)(p) = \frac{d^2 f}{ds^2}(p) - k(p) D_{n_p} F(p) + D_{n_p}^2 F(p). \quad (4.8)$$

*Demonstração.* Escolha as coordenadas cartesianas  $x_1, x_2$  em  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $p = (0, 0)$  e  $n_p$  indique a direção positiva de  $x_2$ . Então, perto de  $p$  a curva  $\Gamma$  é o gráfico,  $x_2 = \phi(x_1)$ , de alguma função  $\phi$  de classe  $C^2$  de tal modo que  $\phi'(0) = 0$ . Logo, por (4.2), temos que  $\phi''(0) = k(p)$ . Pela regra da cadeia,

$$f(s) = F(x_1(s), x_2(s)) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= F_1 \frac{dx_1}{ds} + F_2 \frac{dx_2}{ds} \\ \Rightarrow \frac{d^2 f}{ds^2} &= F_{11} \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 + 2F_{12} \frac{dx_1}{ds} \frac{dx_2}{ds} + F_{22} \left( \frac{dx_2}{ds} \right)^2 + F_1 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + F_2 \frac{d^2 x_2}{ds^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mas ao longo de  $\Gamma$ , por (4.1) temos que,

$$\frac{dx_1}{ds} = (1 + \phi'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad x_2 = \phi(x_1).$$

Substituindo tais valores na equação (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} = & F_{11} \left[ (1 + \phi'^2)^{-\frac{1}{2}} \right]^2 + 2F_{12} [(1 + \phi'^2)^{-\frac{1}{2}}]^2 \phi'(x_1) + F_{22} [(1 + \phi'^2)^{-\frac{1}{2}}]^2 \phi'^2(x_1) \\ & + F_1 \left[ \phi' \phi'' (1 + \phi'^2)^{-\frac{3}{2}} \right] + F_2 \phi''(x_1) \left[ (1 + \phi'^2)^{-\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Isso implica que em  $p$  a equação (4.9) assume a forma simples

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2}(p) &= F_{11}(p) + F_2(p)k(p) \\ \Rightarrow F_{11} &= \frac{d^2 f}{ds^2}(p) - F_2(p)k(p). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Além disso, como escolhermos  $n_p$  indicando a direção positiva de  $x_2$  temos que  $F_2(p) = D_{n_p}F(p)$  e  $F_{22}(p) = D_{n_p}^2 F(p)$ , ou seja, a derivada direcional de  $F(p)$  na direção de  $n_p$  é dada pela derivada parcial de  $F$  com relação a coordenada  $x_2$ . Logo, pela equação (4.11) o Laplaciano assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \Delta F(p) &= F_{11} + F_{22} \\ &= \frac{d^2 f}{ds^2}(p) - k(p)D_{n_p}F(p) + D_{n_p}^2 F(p). \end{aligned}$$

■

**Definição 40.** Suponha que  $G$  é uma função de classe  $C^2$  em um conjunto aberto  $W$  em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $p$  um ponto de  $W$  e seja  $S$  uma superfície de classe  $C^2$  em  $W$  passando por  $p$ . Denote a restrição de  $G$  a  $S$  por  $g$ . Seja  $\{P_\theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  uma família de planos através de  $p$  construída como na Seção 1 deste capítulo (portanto,  $P_\theta$  contém a reta normal  $I_p$  e faz um ângulo  $\theta$  com  $P_0$ ) e seja  $\Gamma_\theta = S \cap P_\theta$  a família correspondente de curvas. Finalmente, denote a restrição de  $g$  a  $\Gamma_\theta$  por  $g_\theta$  e denote as derivadas de  $g_\theta$  em relação ao comprimento de arco ao longo de  $\Gamma_\theta$  por pontos ( $\dot{g}_\theta, \ddot{g}_\theta$ , etc.). Então o Laplaciano de superfície de  $g$  em  $p$  é

$$(\Delta_s g)(p) = \ddot{g}_0(p) + \ddot{g}_{\pi/2}(p). \quad (4.12)$$

**Observação 4.7.**

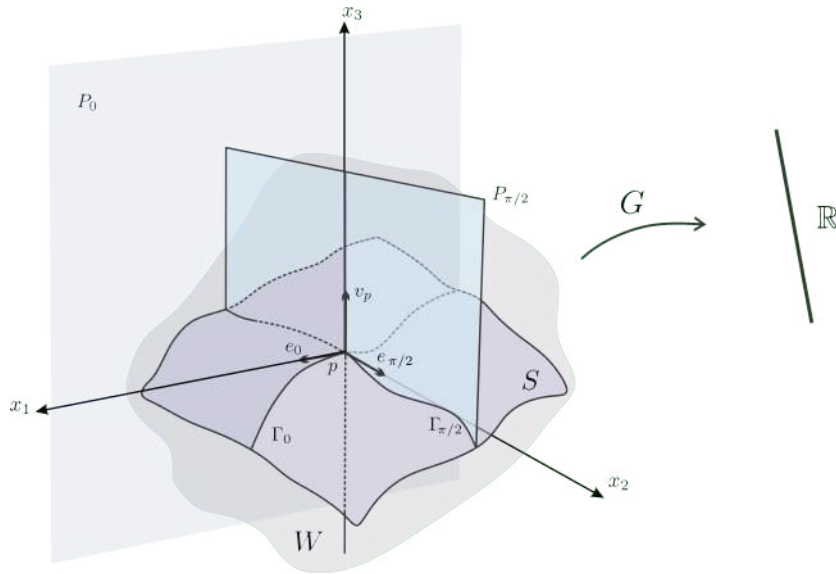
- (a) A quantidade  $\Delta_s g(p)$  faz sentido para qualquer função  $g$  de classe  $C^2$  em  $S$  e não depende de como estendemos  $g$  para uma função  $G$  de classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (b) Se  $S$  é um plano, então  $\Delta_s$  é apenas o Laplaciano em duas variáveis;
- (c) Na geometria Riemanniana o operador  $\Delta_s$  é definido usando apenas a geometria intrínseca de  $S$ . Neste contexto,  $\Delta_s$  é chamado de operador Laplace-Beltrami.

**Teorema 4.8.** *Suponha que  $G$  é um função de classe  $C^2$  em um conjunto aberto  $W$  em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $p$  um ponto de  $W$  e seja  $S$  uma superfície orientada em  $W$  passando por  $p$ . Denote a restrição de  $G$  a  $S$  por  $g$ . Seja  $v_p$  o vetor unitário e normal a  $S$  em  $p$  e seja  $H(p)$  a curvatura média. Denote o Laplaciano da superfície por  $\Delta_s$ . Então,*

$$(\Delta G)(p) = (\Delta_s g)(p) - 2H(p)D_{v_p}G(p) + D_{v_p}^2 G(p). \quad (4.13)$$

*Demonstração.* Escolha as coordenadas cartesianas  $x_1, x_2$  e  $x_3$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $p = (0, 0, 0)$  e  $v_p$  aponte na direção positiva de  $x_3$  (Figura 4.9). Seja  $P_0$  o plano  $x_1x_3$ .

Figura 4.9: Esquema para demonstração do Teorema 4.8.



Fonte: Autoria própria.

É fácil ver que  $G_{33}(p) = D_{v_p}^2 G(p)$ . Além disso, pela equação (4.11) temos que

$$\begin{aligned} G_{11}(p) &= \ddot{g}_0(p) - k(0, p)D_{v_p}G(p), \\ G_{22}(p) &= \ddot{g}_{\pi/2}(p) - k(\pi/2, p)D_{v_p}G(p). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\Delta G)(p) &= \ddot{g}_0(p) - k(0, p)D_{v_p}G(p) + \ddot{g}_{\pi/2}(p) - k(\pi/2, p)D_{v_p}G(p) + D_{v_p}^2 G(p) \\ &= \ddot{g}_0(p) + \ddot{g}_{\pi/2}(p) - (k(0, p) + k(\pi/2, p))D_{v_p}G(p) + D_{v_p}^2 G(p). \end{aligned}$$

Pelas equações (4.5) e (4.12) temos por fim,

$$(\Delta G)(p) = (\Delta_s g)(p) - 2H(p)D_{v_p}G(p) + D_{v_p}^2 G(p).$$

■

**Observação 4.9.** A equação (4.13) faz sentido e permanece sendo verdade mesmo se  $S$  forma a fronteira de  $W$ ; apenas amplie  $G$  para uma função de classe  $C^k$  em uma vizinhança cheia de  $S$ .

**Exemplo 31.** Se  $S$  é a esfera  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ , então a equação 4.13 é a conhecida fórmula para  $\Delta$  em coordenadas esféricas:

$$\Delta G = \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}.$$

Em particular,

$$\Delta_s = \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

**Proposição 4.10.** *Suponha que  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  em uma superfície de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^3$ .*

(a) *Se  $g$  é constante, então  $\Delta_s g = 0$ ;*

(b) *Se  $S$  é compacto (isto é, se  $S$  é a fronteira de um domínio compacto em  $\mathbb{R}^3$ ), então  $\iint_S \Delta_s g \, dA = 0$ .*

**Observação 4.11.** Vamos nos referir a essas declarações como propriedades (a) e (b) de  $\Delta_s$ . A propriedade (a) segue diretamente da definição de  $\Delta_s$ . A propriedade (b) segue (menos diretamente) do teorema da divergência em  $\mathbb{R}^3$ ; a prova (um pouco longa) está no Apêndice do Capítulo 4. O próximo resultado ilustra o poder da propriedade (b).

**Proposição 4.12** (Minkowski). *Suponha que  $S$  é uma superfície compacta de classe  $C^2$  e que  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  é a “função suporte” definida por  $P(p) = \langle p, v_p \rangle$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ . Então,*

$$\iint_S (H \cdot P + 1) \, dA = 0.$$

*Demonstração.* Seja  $G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} G_1 &= x_1, & G_2 &= x_2, & G_3 &= x_3 \\ \Rightarrow G_{11} &= G_{22} = G_{33} = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\Delta G)(p) = G_{11} + G_{22} + G_{33} = 3.$$

Além disso, seja  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e  $v_p = (v_{p_1}, v_{p_2}, v_{p_3})$ , pela definição de derivada direcional



temos que

$$\begin{aligned} D_{v_p} G(p) &= \frac{d}{dt} G(p + tv_p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} G(p_1 + tv_{p_1}, p_2 + tv_{p_2}, p_3 + tv_{p_3}) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (2(p_1 + tv_{p_1})v_{p_1} + 2(p_2 + tv_{p_2})v_{p_2} + 2(p_3 + tv_{p_3})v_{p_3}) \right) \Big|_{t=0} \\ &= p_1 v_{p_1} + p_2 v_{p_2} + p_3 v_{p_3} = \langle p, v_p \rangle. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} D_{v_p}^2 G(p) &= \frac{d^2}{dt^2} G(p + tv_p) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} G(p_1 + tv_{p_1}, p_2 + tv_{p_2}, p_3 + tv_{p_3}) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} ((p_1 + tv_{p_1})v_{p_1} + (p_2 + tv_{p_2})v_{p_2} + (p_3 + tv_{p_3})v_{p_3}) \Big|_{t=0} \\ &= v_{p_1}^2 + v_{p_2}^2 + v_{p_3}^2 = 1. \end{aligned}$$

Deste modo, temos que  $D_{v_p} G(p) = P(p)$  e  $D_{v_p}^2 G(p) = 1$  para cada  $p$  em  $S$ . Substituindo na equação (4.13) obtemos

$$\begin{aligned} 3 &= (\Delta_s g)(p) - 2HP(p) + 1 \\ \Rightarrow (\Delta_s g)(p) &= 2HP(p) + 2 \\ \Rightarrow \frac{\Delta_s g}{2} &= HP + 1. \end{aligned}$$

Logo, pela propriedade (b) da Proposição 4.10, temos que

$$\iint_S (H \cdot P + 1) dA = 0.$$

■

### 4.3 O Teorema da “Bolha de Sabão” de Aleksandrov

Para finalmente demonstrarmos o teorema de Aleksandrov, precisaremos dos resultados que seguem.

**Proposição 4.13** (Desigualdade de Newton). *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz real  $n \times n$ . Defina a norma  $\|A\|$  e o traço  $\text{tr}(A)$  por  $\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2$  e  $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ . Então,*

**a.**  $\|A\|^2 \geq \frac{1}{n} (\text{tr}(A))^2$ ;

**b.** *Temos a igualdade no item (a) se, e somente se  $A$  é proporcional a matriz identidade  $n \times n$  :  $a_{ij} = c \cdot \delta_{ij}$ .*

*Demonstração.* (a) Temos que

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \geq \sum_{i=1}^n (a_{ii})^2 = (a_{11})^2 + (a_{22})^2 + \cdots + (a_{nn})^2. \quad (4.14)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores  $a = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , onde  $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &\leq \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle \\ \Rightarrow (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})^2 &\leq ((a_{11})^2 + (a_{22})^2 + \cdots + (a_{nn})^2) \cdot 1 \cdot n \\ \Rightarrow |a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}| &\leq \sqrt{(a_{11})^2 + (a_{22})^2 + \cdots + (a_{nn})^2} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_{11})^2 + (a_{22})^2 + \cdots + (a_{nn})^2} &\geq \frac{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}{\sqrt{n}} \\ \Rightarrow |(a_{11})^2 + (a_{22})^2 + \cdots + (a_{nn})^2| &\geq \frac{(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})^2}{|n|} \\ \Rightarrow (a_{11})^2 + (a_{22})^2 + \cdots + (a_{nn})^2 &\geq \frac{(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})^2}{n} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.14),

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \geq \sum_{i=1}^n (a_{ii})^2 \geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2 = \frac{1}{n} (\text{tr}(A))^2.$$

(b) A igualdade na primeira desigualdade ocorrerá se, e somente se,  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i \neq j$ . Por outro lado, a igualdade na segunda desigualdade só ocorrerá se  $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ . Assim, temos a igualdade do item (a) se, e somente se,  $A$  é proporcional à matriz identidade. ■

**Proposição 4.14** (Teorema da divergência). *Seja  $\bar{D}$  um domínio compacto em  $\mathbb{R}^3$  cuja fronteira é uma superfície  $S$  de classe  $C^4$  com o vetor normal  $v$  apontando para fora. Se  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  em  $\bar{D}$ , então*

$$\iiint_D \Delta F \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iint_S (D_v F) \, dA.$$

(Utilizamos a abreviação  $D_v F$  para a função  $p \mapsto D_{v_p} F(p)$ ,  $p \in S$ .)

A proposição 4.14 é um resultado clássico demonstrado em cálculo avançado.

**Proposição 4.15.** *Sejam  $\bar{D}$  e  $S$  como na Proposição 4.14 e  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  a função suporte (ver a Proposição 4.12), então  $\iint_S P \, dA = 3V$ , onde  $V$  é o volume de  $\bar{D}$ .*

*Demonstração.* Tome  $F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ . Vimos na demonstração da proposição 4.12 que  $D_v F = P$  e  $\Delta F = 3$ , assim, pelo teorema da divergência, temos que

$$\iiint_D 3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iint_S P \, dA.$$

Mas,

$$\iiint_D 3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 3V.$$

Logo,

$$\iint_S P \, dA = 3V.$$

■

**Proposição 4.16.** *Suponha que  $\bar{D}$  e  $S$  são como na Proposição 4.14. Então, existe uma função  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$  em  $\bar{D}$  e de classe  $C^\infty$  em  $D$  e que satisfaz o seguinte problema de valor de contorno:  $\Delta F = 1$  em  $\bar{D}$ ,  $F|_S = 0$ .*

A prova da Proposição 4.16 não é elementar, mas a afirmação deste resultado é muito fácil de compreender. Observe que usamos apenas a existência abstrata de  $F$ ; não é importante termos  $F$  explicitamente.

**Teorema 4.17** (Aleksandrov). *Suponha que  $D$  é um domínio em  $\mathbb{R}^3$  cujo fecho  $\bar{D}$  é compacto e cuja fronteira é uma superfície  $S$  de classe  $C^4$ . Se a curvatura média de  $S$  é constante, então  $S$  é uma esfera (isto implica que  $D$  é uma bola.)*

*Demonstração do Teorema de Aleksandrov.* Seja  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  a função descrita na proposição 4.16. Temos que  $\Delta F = 1$  e  $F|_S = 0$  (ou seja,  $F$  restrita a  $S$  denotada por  $f$  é constante), assim, pela propriedade de  $\Delta_s$  encontrada no item (a) da proposição 4.10 temos que  $\Delta_s f(p) = 0$ . Logo, pela Equação 4.13, temos que para cada  $p \in S$ ,

$$1 = 0 - 2H(p)D_{v_p}F(p) + D_{v_p}^2F(p).$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por  $D_{v_p}F(p)$  e integrando sobre  $S$ , obtemos

$$\iint_S D_{v_p}F \, dA = \iint_S -2H(D_{v_p}F)^2 \, dA + \iint_S (D_{v_p}F)(D_{v_p}^2F) \, dA. \quad (4.15)$$

Vamos então analisar os termos que aparecem na expressão acima separadamente:

(i)  $\iint_S D_{v_p}F \, dA$ ; Como  $\Delta F = 1$ , pela proposição 4.14, temos que

$$\iint_S (D_{v_p}F) \, dA = \iiint_D \Delta F \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iiint_D 1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = V. \quad (4.16)$$

(ii)  $\iint_S -2H(D_{v_p}F)^2 dA$ ; Como  $H$  é constante, pela proposição 4.12,

$$\begin{aligned} \iint_S (HP + 1)dA = 0 &\Rightarrow \iint_S HP dA + \iint_S 1 dA = 0 \\ &\Rightarrow H \iint_S P dA = - \iint_S 1 dA \\ &\Rightarrow H = \frac{-A}{\iint_S P dA}. \end{aligned}$$

Logo, pela proposição 4.15,

$$\begin{aligned} H &= \frac{-A}{3V} \\ \Rightarrow -2H &= \frac{2A}{3V}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais temos que,

$$\begin{aligned} \left( \iint_S 1 \cdot D_{v_p}F dA \right)^2 &\geq \iint_S 1^2 dA \cdot \iint_S (D_{v_p}F)^2 dA \\ \Rightarrow \iint_S (D_v F)^2 dA &\geq \frac{(\iint_S 1 D_v F dA)^2}{\iint_S 1^2 dA}. \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência e novamente pela proposição 4.15 juntamente com o fato de que  $\Delta F = 1$ , temos que

$$\frac{(\iint_S 1 D_v F dA)^2}{\iint_S 1^2 dA} = \frac{(\iiint_{\bar{D}} \Delta F dV)^2}{A} = \frac{V^2(\bar{D})}{A(S)}.$$

Portanto,

$$\iint_S (D_v F)^2 dA \geq \frac{V^2(\bar{D})}{A(S)}. \tag{4.18}$$

Segue-se das equações (4.17) e (4.18) que,

$$\iint_S -2H(D_v F)^2 dA \geq \left( \frac{2A}{3V} \right) \left( \frac{V^2}{A} \right) = \left( \frac{2}{3} \right) V.$$

(iii)  $\iint_S (D_v F)(D_v^2 F) dA$ ; Como  $F|_S$  é constante temos que para todo  $p \in S$ ,  $F(p) = k$ , assim,  $S = F^{-1}(k)$  e  $S$  é superfície de nível  $k$  de  $F$ . Sabemos que  $\text{grad } F$  é ortogonal as superfícies de nível de  $F$ , logo,  $\text{grad } F$  deve ser paralelo ao vetor normal unitário  $v = (v_1, v_2, v_3)$  em cada ponto  $p$  de  $S$ , isto é,  $\text{grad } F = \langle \text{grad } F, v \rangle v$ ; em outras

palavras,  $F_j = (D_v F)v_j$ ,  $j = (1, 2, 3)$ . Como  $D_v^2 F = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} v_i v_j$ , segue-se que

$$\begin{aligned} (D_{v_p}^2 F)(D_{v_p} F) &= \left( \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} v_i v_j \right) (D_{v_p} F) = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} v_i F_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} F_j^2 \right) v_i \\ &= D_v \left( \frac{1}{2} |\text{grad } F|^2 \right) \end{aligned}$$

Além disso, o teorema da divergência implica que

$$\iint_S (D_v^2 F)(D_v F) dA = \iint_S D_{v_p} \left( \frac{1}{2} |\text{grad}(F)|^2 \right) = \iiint_D \Delta \left( \frac{1}{2} |\text{grad } F|^2 \right) dV. \quad (4.19)$$

Mas,

$$\Delta \left( \frac{1}{2} |\text{grad } F|^2 \right) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 F_j^2 \right)_{ii} = \sum_{i,j=1}^3 (F_{jii} F_j + (F_{ji})^2) = \sum_{i,j=1}^3 (F_{ji})^2,$$

pois  $\sum_{i=1}^3 F_{jii} = \sum_{i=1}^3 F_{iij} = (\Delta F)_j$ , mas por hipótese  $\Delta F = 1$ , logo  $(\Delta F)_j = (\partial/\partial x_j)(1) = 0$ . Assim, pela desigualdade de Newton, temos que

$$\Delta \left( \frac{1}{2} |\text{grad } F|^2 \right) = \sum_{i,j=1}^3 (F_{ij})^2 \geq \frac{1}{3} \left( \sum_{j=1}^3 F_{jj} \right)^2 = \frac{1}{3} (\Delta F)^2 = \frac{1}{3}.$$

Integrando sobre  $S$  de ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\iiint_S \Delta \left( \frac{1}{2} |\text{grad } F|^2 \right) dV \geq \iiint_S \frac{1}{3} dV = \frac{V}{3}.$$

Logo, pela equação (4.19) temos a desigualdade

$$\iint_S D_v^2 F \cdot D_v F dA \geq \frac{V}{3}. \quad (4.20)$$

Além disso, a desigualdade acima é uma igualdade se, e somente se,

$$(F_{ij}) = \frac{1}{3} (\delta_{ij}) \text{ em } \bar{D}. \quad (4.21)$$

Podemos resumir as equações (4.15), (4.16), (4.18) e (4.20) da seguinte forma

$$V = \iint_S D_v F dA = \iint_S -2H(D_v F)^2 dA + \iint_S (D_v F)(D_v^2 F) dA \geq \frac{2V}{3} + \frac{V}{3} = V.$$

Assim, a desigualdade na expressão acima deve na verdade ser uma igualdade. Portanto,

a equação (4.20) também deve ser uma igualdade. Ainda, por (4.21),  $F$  deve satisfazer

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Integrando esta equação,

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b,$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $b$  são constantes de integração. Completando quadrados temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b &= \frac{x_1^2}{6} + a_1 x_1 + \left(\frac{a_1 \sqrt{6}}{2}\right) - \left(\frac{a_1 \sqrt{6}}{2}\right) + \\ &\frac{x_2^2}{6} + a_2 x_2 + \left(\frac{a_2 \sqrt{6}}{2}\right) - \left(\frac{a_2 \sqrt{6}}{2}\right) + \frac{x_3^2}{6} + a_3 x_3 + \left(\frac{a_3 \sqrt{6}}{2}\right) - \left(\frac{a_3 \sqrt{6}}{2}\right) + b \\ &= \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{a_1 \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{a_2 \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{6}} + \frac{a_3 \sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{6}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + b. \end{aligned}$$

Como  $F|_S = 0$ , temos que  $S$  é conjunto de nível zero de  $F$ , isto é, para  $(x_1, x_2, x_3) \in S$ ,  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{a_1 \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{a_2 \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{6}} + \frac{a_3 \sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{6}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + b = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{a_1 \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{a_2 \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{6}} + \frac{a_3 \sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - b \end{aligned}$$

Para  $b < \frac{6}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$  temos que,  $S$  é uma esfera de centro  $\left(-\frac{a_1 \sqrt{6}}{2}, -\frac{a_2 \sqrt{6}}{2}, -\frac{a_3 \sqrt{6}}{2}\right)$

e raio  $\sqrt{\frac{6}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - b}$ . ■

## Apêndice

Este apêndice é dedicado a demonstração da propriedade **b**) da proposição 4.10 que enunciaremos aqui novamente.

**Proposição.** *Suponha que  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  em uma superfície de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^3$ .*

**a.** *Se  $g$  é constante, então  $\Delta_s g = 0$ ;*

**b.** Se  $S$  é compacto (isto é, se  $S$  é a fronteira de um domínio compacto em  $\mathbb{R}^3$ ), então  $\iint_S \Delta_s g \, dA = 0$ .

*Demonstração.* Nossa demonstração da propriedade (b) do laplaciano de superfície é baseada na observação que a equação 4.13 assume a forma particular

$$(\Delta G)(p) = (\Delta_s g)(p), \quad \text{para } p \in S$$

se  $G$  é constante ao longo dos vetores normais de  $S$ . Para um  $T > 0$  suficientemente pequeno temos

$$W_T = \{q \in \mathbb{R}^3 : q = p + tv(p) \text{ para algum } p \in S \text{ e algum } t \in [0, T]\},$$

e defina  $G : W_T \rightarrow \mathbb{R}^3$  pela regra  $G(p + tv(p)) = g(p)$ , para todo  $p \in S$ ,  $t \in [0, T]$ . Pelo teorema da função inversa temos que se  $T$  é um número positivo suficientemente pequeno, então cada  $q$  em  $W_T$  pode ser escrito de forma única como  $p + tv(p)$ , com  $p \in S$  e  $t \in [0, T]$ ; assim,  $G$  é bem definida e suave. É óbvio que  $G|_S = g$  e que  $G$  é constante ao longo dos vetores normais de  $S$ . Agora, para cada  $t \in [0, T]$ , seja

$$S_t = \{q \in W_T : q = p + tv(p) \text{ para algum } p \in S\}.$$

Chamamos  $S_t$  de superfície paralela de altura  $t$ . De forma análoga, seja  $g_t = G|_{S_t}$  e  $dA_t$  o elemento de área em  $S_t$ . É fácil verificar que vetores normais de  $S = S_0$  também são normais a cada uma das superfícies  $S_t$  para  $t \in [0, T]$ . Assim, a equação 4.13 implica que, para cada  $t \in [0, T]$  e cada  $p \in S_t$ ,

$$\Delta G(p) = \Delta_{S_t} g_t(p).$$

Integrando  $\Delta G$  sobre  $W_T$ , da equação acima obtemos

$$\iiint_{W_T} \Delta G \, dV = \int_0^T dt \iint_{S_t} \Delta G \, dA_t = \int_0^T dt \iint_{S_t} \Delta_{S_t} g_t \, dA_t. \quad (4.22)$$

Podemos utilizar o teorema da divergência em  $\mathbb{R}^3$  para reescrever a última das integrais acima como

$$\iint_{S_T} D_{v_T} G \, dA_T - \iint_{S_0} D_{v_0} G \, dA_0.$$

No entanto, as derivadas normais  $D_{v_T} G$  e  $D_{v_0} G$  desaparecem porque  $G$  é constante ao longo dos vetores normais de  $S$ . A equação 4.22 implica que para cada  $T > 0$  suficientemente pequeno,

$$\int_0^T dt \iint_{S_t} \Delta_{S_t} g_t \, dA_t = 0.$$

A propriedade (b) segue facilmente: derive ambos os lados da equação acima com respeito a  $T$ .





## Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 2.ed, SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [2] STEWART J. **Cálculo, vol. 2**. 5.ed, Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2006.
- [3] O'NEILL, B. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press Inc. New York, 1966.
- [4] BOLDRINI, Luis José, et al. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986. Matemática Universitária, 2016.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 1**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 2**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [7] CARMO, Manfredo Perdigão **Differential Geometry of curves and surfaces**. 2.ed, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2016.
- [8] AHLFORS, Lars Valerian, and Leo Sario. **Riemann surfaces**. Princeton university press, N.J., 1960.
- [9] GAUSS, C. F. **General investigations of curved surfaces**. Morehead and Hillebeitel, tr., Princeton, 1827.
- [10] ALEKSANDROV, A.D., **Uniqueness Theorems for surfaces in the large I**. Vestnik Leningrad Univ., 11 (1956), 5-17.
- [11] REILLY, R.C., **Mean Curvature, The Laplacian, and Soap Bubbles**., 1982.
- [12] CORDEIRO, L. G., **A Solução de Douglas-Radó do Problema de Plateau**., Trabalho de monografia, UFSC, 2013.
- [13] GOMES, J. M., **A curvatura média das superfícies II**.