UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE GRADUAÇÃO DAS EXATAS E NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JAIRO JOSE RIBEIRO TOSCANO DE BRITO JUNIOR

OS CONCEITOS DE FRAÇÃO PARTE-TODO, QUOCIENTE E OPERADOR: a necessária diferenciação desses subconstrutos na prática docente

RECIFE, 2019

JAIRO JOSE RIBEIRO TOSCANO DE BRITO JUNIOR

OS CONCEITOS DE FRAÇÃO PARTE-TODO, QUOCIENTE E OPERADOR: a necessária diferenciação desses subconstrutos na prática docente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profa. Me.Cleide Oliveira Rodrigues

RECIFE, 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

B862c Brito Junior, Jairo José Ribeiro Toscano de.
Os conceitos de fração parte-todo, quociente e operador: a necessária diferenciação desses subconstrutos na prática docente / Jairo José Ribeiro Toscano de Brito Junior. – Recife, 2019.
59 f.:il.

Orientador(a): Cleide Oliveira Rodrigues.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife, BR-PE, 2019.
Inclui referências.

1. Subconstruto de fração 2. Material manipulativo 3. Resolução de problemas I. Rodrigues, Cleide Oliveira, orient. II. Título

CDD 510.7

JAIRO JOSE RIBEIRO TOSCANO DE BRITO JUNIOR

OS CONCEITOS DE FRAÇÃO PARTE-TODO, QUOCIENTE E OPERADOR: a necessária diferenciação desses subconstrutos na prática docente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profa. Me.Cleide Oliveira Rodrigues

Recife, _____ de ____________ de _______

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Me. Cleide Oliveira Rodrigues (Orientadora)

____
Profª. Dra. Maria Ângela Caldas Didier (Avaliadora)

____
Profª. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola (Avaliadora)

Dedico este trabalho a uma mulher guerreira, a um homem resiliente, a dois gêmeos destemidos, e a uma peteca companheira.

RESUMO

Neste trabalho temos por objetivo desenvolver compreensões em torno do ensino e da aprendizagem dos conteúdos de fração a partir da necessária diferenciação dos subcosntrutos parte-todo, quociente e operador na prática docente. Para o desenvolvimento das atividades utilização de recursos didático - material manipulativo e resolução de problemas - no processo de ensino e aprendizagem de fração na construção de conceitos de fração. A fundamentação teórica que embasou esse estudo foi as discussões de Damico (2007), Silva (2005) e Romanatto (1997) sobre os subconstrutos dos números fracionários, mais especificamente, parte-todo, quociente e operador, e também sobre os recursos didáticos que foram utilizados nas atividades (material manipulativo e resolução de problemas). A escolha metodológica deste trabalho baseou-se na pesquisa-ação, cujo objetivo foi analisar a minha própria prática docente, enquanto professor de uma turma de 7º ano de uma escola particular, localizada na cidade de Paulista – PE, num total de 15 aulas.Este total de aulas foi dividido em 3 momentos: no primeiro, foi utilizado o material manipulativo para construir conceitos do subconstruto parte-todo. O segundo, trabalhou-se o subconstruto parte-todo em problemas contextualizados na pura matemática ou ligados à realidade dos alunos. E o terceiro momento, trouxemos problemas em contextos parecidos aos já apresentados no segundo momento, mas agora também abordando o subconstruto quociente e operador. Quanto aos resultados obtidos podemos destacar o bom desempenho da turma no último momento, comprovando que o trabalho com material manipulativo e a resolução de problemas nos dois primeiros momentos foram contribuidores da construção do conhecimento dos alunos sobre fração, mostrando assim que a utilização desses recursos são uma interessante possibilidade metodológica. Além das contribuições identificadas na aprendizagem, destacamos a importância da reflexão sobre a prática docente como um processo de pesquisa.

Palavras-chave: Subconstruto de fração, material manipulativo, resolução de problemas.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O professor de matemática tem convivido com diversas dimensões de dificuldades dos alunos em relação aos seus processos de aprendizagem em matemática, sendo a repetência e a evasão algumas das consequências desse fato. O professor, na maioria das vezes, em busca de uma melhor qualidade de vida, absorve uma carga de trabalho ostensiva, muitas vezes comprometendo suas atividades de docência, e, mais ainda, o processo de ensino e de aprendizagem de matemática.

Nas últimas décadas, orientações didáticas para as práticas docentes têm contribuído para a construção de novas possibilidades de ensino alavancadas pela Educação Matemática, onde aproximam professores e pesquisadores em torno de atividades de pesquisa voltadas ao ensino de matemática, "que nos permite conhecer os processos de ensino e de aprendizagem que resultam em uma melhor qualidade de ensino" (DAMICO, 2007, p. 17). Nessas pesquisas encontramos possibilidades didáticas e metodológicas que contribuem no repensar a prática de ensino e possibilitar novos olhares para a aprendizagem dos alunos.

As categorias relacionadas a formação e as atividades docentes são diversas e abrangentes. Segundo Damico (2007), é necessário o entendimento de outros saberes, além dos conhecimentos relacionados aos conteúdos específicos do professor.

Aos iniciar as atividades docentes, assumindo o espaço da sala de aula, além da perspectiva do estágio supervisionado, o professor passa a conviver com as múltiplas dimensões que a relação professor, aluno e conteúdos exigem, despertando no professor, em início de carreira, o interesse em buscar outras possibilidades de ensino que resulte em aprendizagens significativas.

São vários os conteúdos matemáticos conhecidos como geradores de obstáculos de ensino, dentre estes estão os números racionais. Esses conteúdos chamam à atenção dos professores por verificar tantas dificuldades em sala de aula durante o seu processo de ensino-aprendizagem (Cunha, 2016). A dificuldade de ensinar números racionais, possivelmente, ocorre pelo fato de que a construção desse conceito se dá de forma incomum, exigindo do aluno outra forma de pensar que transcende a compreensão de números naturais. Segundo MERLINI (2005, p.54), "entre vários pesquisadores, existe um consenso de que a construção do conceito de número racional e, especialmente, o conceito de fração não ocorre de maneira natural".

Com tal problemática em vista, o pensamento do professor converge para como propor formas de ensino mais relevante ou significativa, a fim de não depender de métodos tradicionais, que hoje são insuficientes para o processo de ensino. Dessa forma, os educadores buscam alternativas nas metodologias, processos esses que são, em sua maioria, produtos de pesquisas em Educação Matemática. Destacamos, neste trabalho as metodologias que apoiaram as minhas ações didáticas: a relevância da contextualização nos processos de ensino, os materiais manipulativos e a resolução de problemas como recursos didáticos que podem contribuir na construção dos conceitos de frações.

Entendemos como contextualização uma travessia que edifica a criticidade e autonomia do aluno enquanto cidadão, porque visa prepará-lo para situações envolvendo seu cotidiano, desde da matemática do âmbito social à matemática pura (Souza, & Bittar, 2014).

Encontramos nos livros didáticos exercícios contextualizados em cenários artificiais, criação de situações de uma realidade possível. Esses exercícios são importantes para no ensino de matemática, pois pode-se fazer uso de contextos diferentes para despertar o interesse da classe, do contexto da matemática pura até à um contexto de realidade fantasiosa (Ponte & Quaresma, 2012) ou da semirrealidade (Skovsmose, 2000).

A importância do contexto de um problema para o ensino favorece desenvolver a autonomia do aluno em relação a construção do seu conhecimento. Cada aluno se identifica com algum tipo de contexto, e sua interação com ele aumenta sua capacidade de aprender determinado assunto. Portanto, a variedade de contextos aplicados nas aulas de matemática pode trazer bons resultados no processo de ensino (Valero, 2002).

Os recursos didáticos têm a finalidade de contribuir com construções de conceitos de frações superando o embasamento teórico e abstrato pertinentes a esses conteúdos. Os materiais manipulativos se apresentam aos professores como uma “esperança de que as dificuldades de ensino possam ser amenizadas pelo suporte da materialidade”. (PAIS, 2016, p. 1). Pode-se ver como alternativa necessária à renovação da prática pedagógica dos professores, auxiliando-os na utilização de metodologias que privilegiam a ação dos alunos sobre o processo que leva a percepção do aluno junto ao material concreto à idéia matemática abstrata. Por isso, acreditamos que no ensino de frações esses materiais contribuem na construção de conceitos.

A resolução de problemas é o principal meio de ensino da Matemática. Na escola, seu ensino é baseado em problemas ou exercícios que já foram resolvidos e sistematizados através do livro didático. Alunos e professores não têm acesso às particularidades da produção do conhecimento. Os cientistas publicam suas descobertas de forma descontextualizada, despersonalizada e atemporal, deixando a tarefa de contextualizar o ensino principalmente para os professores. E, essa não é uma tarefa simples. Ensinar o aluno a resolver problemas é ajudá-lo a construir conceitos, como condição inerente ao processo de aprender matemática. Essa tarefa não é simples nem rápida, tanto para quem ensina como para quem aprende, pois requer dedicação, tempo e compreensão das dificuldades que, por sua natureza, os problemas apresentam. A importância de trabalhar a resolução de problemas, como viés da aprendizagem da Matemática, traz para o centro do ensino dessa disciplina o sentido e o significado que deve ser dado aos conhecimentos matemáticos.

O presente trabalho pretende analisar as aulas planejadas e desenvolvidas por mim, numa turma de 7º ano, do Ensino Fundamental, de uma escola particular onde exerço atividades de professor. Os fundamentos teóricos que apoiam minhas aulas e a escrita deste trabalho tem base nos estudos de Damico (2007), Silva (2005) e Romanatto (1995), sobre diferentes abordagens de números fracionários associadas às ideias de fração parte-todo, quociente entre inteiros e operador, utilizando-se de recursos didáticos, mais especificamente de materiais manipulativos e resolução de problemas em contextos variados, considerando que essa pode ser uma proposta de ensino para a construção de conceitos de fração. Para este trabalho não discutiremos todos os subconstrutos discutidos pelos autores acima. Assumiremos a palavra subconstruto com destaque aos subconstrutos parte-todo, quociente e operador.

Outro objetivo dessa pesquisa é contribuir com minha formação docente de modo a me formar enquanto pesquisador das minhas próprias ações. Nesse sentido, este trabalho se insere no campo da pesquisa-ação como metodologia de pesquisa. Além disso, o reconhecimento das dificuldades de ensinar esses números fizera-me tomar como objeto de investigação.

O referido trabalho está dividido em 5 itens: Introdução, Compreensões Teóricas de Números Fracionários, Metodologia, Resultado e Discussão, e Considerações Finais.

O item 2 traz o Referencial Teórico, e começa abordando as dificuldades mais observadas por diversos autores que estudam sobre Ensino de Números Fracionários com adição de minha percepção sobre o assunto como profissional de Educação Básica, atravessa uma discussão sobre o que são os subconstrutos parte-todo, quociente e operador embasada nos estudos de Damico (2007), Silva (2005), e Romanatto (1997), e termina discutindo sobre os recursos didáticos (material manipulativo e resolução de problema) como proposta metodológica para o ensino de fração.

A Metodologia tem seu início numa discussão sobre a Metodologia de Pesquisa Ação com embasamento teórico maior nos estudo de Thiollent (1992), e finaliza com os principais dados sobre a construção do trabalho, tais como: definição do tema, os objetivos do trabalho, plano de coleta de dados, informação sobre a escola-campo, e realização da atividade proposta pelo trabalho.

Em Resultado e Discussão é feita a análise da atividade realizada com os alunos bem como os resultados obtidos. E o trabalho termina com as Considerações Finais que destacam as contribuições observadas pelas atividades realizadas, reforçando as vantagens da utilização do material manipulativo e da resolução de problemas no ensino de fração.

2. COMPREENSÕES TEÓRICAS DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Os conhecimentos da Matemática são fundamentais na formação humana, porque favorece a compreensão de situações vivenciadas nas rotinas diárias, como: situações de contar objetos, de compra e venda, de análise de dados, de dimensionamento de figuras e muitas outras. Mas, na escola a Matemática, ainda, tem assumido o caráter de ciência, cujo processo de ensino e de aprendizagem está no estudo dos conjuntos numéricos dissociados da realidade. Neste cenário, considera-se a matemática difícil e sem conexões com as necessidades humanas.

A construção do conceito de número para Boyer (1976), não está relacionado a um grupo ou a uma pessoa, mas a um processo longo levado pela necessidade de desenvolvimento da espécie humana. Para Ifrah (1995, *apud* Jesus, 2005) os números figuram entre os conceitos mais complexos e abstratos já desenvolvidos pelo homem e, que sem dúvida, essa foi uma das maiores (ou a maior) invenção da humanidade.

Na escola esses conteúdos se apresentam prontos, com suas estruturas aditivas e multiplicativas, com seus fundamentos mais complexos e de forma organizada, dando a entender que suas construções foram de fácil desenvolvimento. Dessa forma, o ensino da matemática é desinteressante, pois não se apresentam suas descobertas, as necessidades de criação dos conjuntos e quais foram as transformações ao longo do tempo (Costa, 2009). A compreensão dessas dificuldades, enquanto conhecimentos de ensino indica para o professor a necessidade de construir outras possibilidades metodológicas para o ensino e para a aprendizagem dos números. Em particular, para o ensino dos números fracionários existe uma convergência de ideias sobre as dificuldades de ensinar e aprender tais conteúdos (Behr *et al.*, 1992).

No trabalho de Behr e colaboradores (1992) tem-se que, do ponto de vista educacional e científico, os obstáculos circundam no aprofundamento e esclarecimento sobre os significados que números racionais podem proporcionar, tal problemática acarreta nos alunos obstáculos de aprendizagem observada através da não construção do significado dos conceitos de fração.

Adjiage e Pluvinage (2000) mostram que, dentre os possíveis significados atribuídos aos números fracionários, o de elemento do conjunto dos números racionais auxilia no processo de familiarização dos alunos com o assunto, porque deixa clara a flexibilidade do novo número quanto às relações operatórias.

2.1. Contribuições à construção de conceitos de frações

O conceito de fração precisa ser expandido e compreendido, e não apenas aceito como mais uma técnica para calcular. O aprofundamento nos números fracionários deve acontecer quando se transita pelos significados que ele pode proporcionar. Significados estes que são: parte-todo, quociente entre números inteiros, medida, razão e operador (Base Comum Curricular de Pernambuco, 2008).

Para Damico (2007) os números fracionários possuem pelo menos seis modos diferentes de interpretação, denominados subconstrutos: comparação parte-todo, quociente ou divisão indicada, operador, coordenada linear e medida do contínuo ou quantidade discreta. Enquanto, Silva (2005) classifica esses números em concepções parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Podemos perceber que ambos possuem interpretações de número fracionário em comum.

A compreensão que se espera que os alunos tenham acerca dos números fracionários não se refere ao fato de compreender isoladamente os significados dos subconstrutos (Damico, 2007), mas compreender a relação que existe entre eles.

Por sua vez, Romanatto (1997, *apud* Kieren, 1975) traz sete interpretações sobre os números racionais, são elas:

a) os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, etc;

b) os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) para os números naturais;

c) os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\right\}$ e $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{3}{9}, \dots\right\}$ são números racionais;

d) os números racionais são números da forma $\frac{p}{q}$, onde p e $q$são inteiros e $q \neq 0$. Dessa forma, os números racionais são números relacionais;

e) os números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo, estreitadores, alongadores, etc);

f) os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Há números da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$;

g) os números racionais são medidas ou pontos sobre a linha ou reta numerada.

Romanatto (1997) quando fala sobre os subconstrutos dos números racionais menciona vários trabalhos que falam sobre a semântica desses números (Kieren, 1975, 1980; Nesher, 1985), em particular, dos números fracionários (Nesher, 1985; Behr *et al*., 1983;), e afirma que esses trabalhos representaram um avanço considerável no estudo dos significados das frações. Segundo sua análise, “Tais autores concordam que quociente, razão, operador e alguma versão da relação parte-todo são conceitos centrais”. (ROMANATTO, 1997, p.71).

Damico (2007) afirma que nas últimas décadas foram realizadas muitas pesquisas sobre números racionais voltadas a identificar os melhores métodos ou técnicas que ajudariam os estudantes nas tarefas que envolvessem os cálculos desses números. Segundo esse autor, a análise sobre esses procedimentos era feita em cima dos processos mentais que as crianças empregavam nas situações problemas com os números racionais. Assim, diz Damico (2007), que os esforços têm sido voltados ao entendimento sobre a construção das estruturas cognitivas das crianças quanto a aprendizagem dos números racionais, pois é o que se levará em conta para as posteriores mudanças que poderá haver nos currículos escolares para que ocorra uma aprendizagem matemática mais eficaz.

Pode-se perceber a importância dada, nesses trabalhos, ao estudo da relação dos significados do conceito de número racional, ou mais especificamente o número fracionário, no aprendizado dos alunos quando ROMANATTO (1997) diz, reforçado por Damico (2007), que “Uma lista de interpretações é um ponto de partida necessário, mas uma teoria do significado de frações precisa também esclarecer as relações entre as interpretações”(p.71).

2.1.1. **Subconstruto parte-todo**

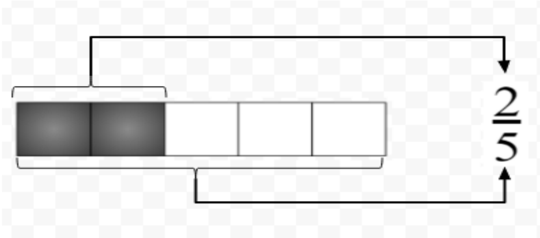
Sobre os possíveis significados atribuídos ao objeto fração, Silva (2005) destaca que essa concepção surge da ação de dividir uma grandeza contínua, ou discreta, em partes iguais, ou equivalentes, e que para o aluno articular esse conceito deve compreender uma relação entre registros escritos e figuras divididas, e vice-versa.

DAMICO (2007) acrescenta que “a fração indica a relação que existe entre um certo número de partes e o número total de partes em que o todo foi dividido. O todo recebe o nome de unidade” (p. 67). Semelhante diz Silva (2005, p.70)

> O sujeito deve entender, genericamente, que o todo recebe também o nome de inteiro e que a escrita a/b descreve a partição, em que o número b indica a quantidade de partes ‘iguais’ em que o inteiro foi dividido. [...] O número a, por sua vez, representa a quantidade de partes que está sendo considerada do inteiro[...].

Para Nunes (2003) a concepção parte-todo é a representação de um todo que foi fatiado em n fatias, e cada uma dessas é representada pelo registro simbólico $\frac{1}{n}$. Nesta situação, teríamos que o inteiro 1 é o mesmo que n fatias consideradas, ou seja, $\frac{n}{n}$. A autora ainda comenta sobre o processo de dupla contagem, dando como exemplo, um todo sendo repartido em 5 pedaços e considerando-se duas dessas partes, e diz que a interpretação dos alunos sobre esse cenário se daria por esse método: acima do traço se escreve o número de partes pintadas, e abaixo o número total de partes.

Figura 1 - Exemplo do subconstruto parte-todo



Fonte: Autoria própria

Entretanto, para Adjiage e Pluvinage (2000), o processo de dupla contagem não é tão interessante quando se trata de frações impróprias, visto que “a expressão $\frac{4}{3}$ de torta é sempre incômoda e que juntar uma segunda torta não muda grande coisa, pois se falará sempre em $\frac{4}{3}$ de torta, no singular”.

Figura 2 - Exemplo de representação parte-todo de fração imprópria

Fonte: Autoria própria

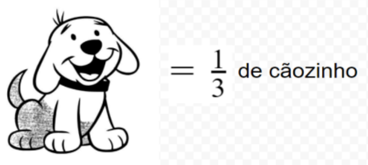
Damico (2007) ao discutir sobre o processo de dupla contagem destaca que não se trata apenas de um procedimento, cuja relevância se encontra apenas nas duas contagens a serem realizadas. Ele identifica em sua pesquisa com professores em formação e formadores de professor uma variedade de concepções equivocadas sobre esse processo, e categoriza as concepções em: “A não identificação ou dificuldade ao identificar a congruência entre as áreas das partes consideradas, e a não associação entre parte considerada e numerador ou o total de partes e o denominador”. (DAMICO, 2007, p. 69)

O autor ainda (2007) esclarece que o subconstruto parte-todo é bastante usado nas salas de aulas de todo o mundo, e a sua apresentação aos alunos muitas vezes se dá por meio do uso de materiais manipulativos, como pizzas ou chocolates divididos em partes congruentes para representar objetos contínuos, e bolas de gude ou tampas de garrafa para representar objetos discretos.

Duas concepções fundamentais para o desenvolvimento de tarefas envolvendo esse subconstruto estão relacionadas à natureza dos objetos: natureza contínua ou discreta. Ainda, deve-se entender que para algumas concepções de divisão não se pode considerar como natureza contínua nem discreta, como exemplo, não se pode dividir um animal, ou uma criança, ou até mesmo um vestido para dois. Podemos entender que esses elementos só podem ser divididos quando estão em grupo, pois na coleção cada um é visto como unidade.

Considere o seguinte exemplo: Três irmãos ganharam um cãozinho. Cada um queria o cãozinho, mas seus pais disseram que eles precisariam dividir. Como fica a divisão desse cãozinho para os três irmãos? Em resposta não cabe como solução do problema $\frac{1}{3}$ do cãozinho, pois o animal é o próprio inteiro, e nesse caso a natureza não é contínua, logo não cabe a resposta indicada.

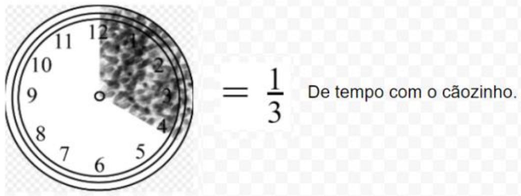
Figura 3 - Exemplo de representação parte-todo inadequada para objeto contínuo



Fonte: Autoria própria

Se o objeto passasse a ser o tempo que cada um passaria com o cãozinho, teríamos o tempo como objeto a ser dividido, e esse, portanto é de natureza contínua, assim caberia $\frac{1}{3}$ como solução do problema.

Figura 4 - Exemplo de representação parte-todo adequada para objeto contínuo

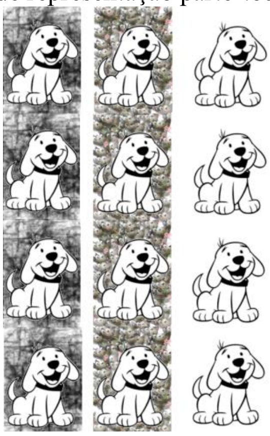


Fonte: Autoria própria

A identificação da natureza do objeto é fundamental quando se pretende trabalhar fração, pois o conceito deve ser construído com base também na significativa associação do objeto real citado com a representação fracionária.

Quando se trata de objetos natureza discretos, consideramos cada objeto como uma unidade. O todo passa a ser a coleção inteira desses objetos. Podendo, então, associar o objeto discutido no parágrafo anterior a um objeto de natureza discreta considerando cada cãozinho como uma unidade. Observe o seguinte exemplo: a cadela de três irmãos dá a luz a 12 filhotes. Os pais decidem dividir os filhotes, igualmente, entre os três irmãos. Quantoscãezinhos cada um recebe?

Figura 5 - Exemplo 1 de representação parte-todo para objetos discretos



Fonte: Autoria própria

Nesse exemplo o inteiro, ou o objeto, é a coleção dos filhotes. O cãozinho agora é um objeto de natureza discreta, o qual cada um deles representa uma unidade na coleção. Sendo assim, é apropriado associar a resposta $\frac{1}{3}$à solução desse problema, pois a resposta é *4* cãezinhos que equivale a $\frac{1}{3}$ do inteiro que é a coleção de *12* cãezinhos.

A percepção do aluno quanto a essa divisão pode ser fortalecida quando se leva em consideração seus conhecimentos prévios para realizar a tarefa em sala de aula de problemas diversos que leve em consideração as características da natureza do objeto.

A interpretação acerca das características que a situação parte-todo proporciona a tarefa, muitas vezes, se dá pelo aluno de forma visual. Dessa forma, o aluno constrói esquemas mentais, sabendo identificar a figura visual do todo e das partes, e mais ainda, como elas se relacionam (Damico, 2007).

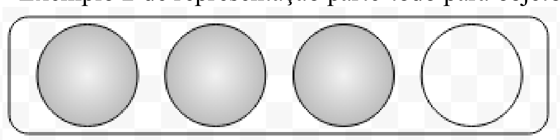
Silva (2005) discute os tipos de tarefas que trazem o conceito de fração parte-todo. Ao tratar, especificamente, das tarefas que tratam da fração sob a perspectiva parte-todo em objetos contínuos, a autora traz um caso em que pede ao aluno representar a fração da figura que possui um sexto de suas partes pintada e a outra parte pintada é de um quarto da mesma figura. Como somar parte de tamanhos diferentes do mesmo inteiro? Subdividem-se as partes em doze avos, e assim associa-se $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$, a $\frac{3}{12}$ e $\frac{2}{12}$, que são suas respectivas frações equivalentes. E assim torna-se mais fácil associar a parte pintada à $\frac{5}{12}$.

Damico (2007, *apud* Owens, 1980; Sambo, 1980; Behr *et al*., 1983) abordam uma questão existente entre o conceito de área e a capacidade de construir o conceito de fração. Em seus estudos, foi notado que a associação da medida das partes de uma região geométrica com a medida das partes de sua área poderia ajudar a criança a estabelecer uma relação da parte com o seu todo.

Sob essa perspectiva DAMICO (2007) descreve sobre a importância da identificação do todo, o objeto o qual está sendo tomada uma parte "estas são algumas das questões que mostram as dificuldades intrínsecas à relação parte-todo, quando tomamos quantidades contínuas divididas em partes congruentes." (p.69). Este autor identifica que a relação entre a área considerada da área total e a área total requer esquemas mentais específicos a cada indivíduo, e isso deve ser levado em consideração pelo professor na elaboração do seu plano de ensino sob o ponto de vista desse subconstruto.

O trabalho com a concepção parte-todo articulada com objetos discretos se inicia com tarefas nas séries iniciais de maneira simples como representar coleção de objetos do nosso cotidiano. Silva (2005) traz diversos exemplos envolvendo objetos discretos que podem abordar mais de um construto. Segue um exemplo semelhante: Que parte das bolinhas estão preenchidas?

Figura 6 - Exemplo 2 de representação parte-todo para objeto discreto



Fonte: Autoria própria

O conjunto total é composto com quatro bolinhas. Cada bolinha representa uma parte do total de quatro. E mais ainda, elas se dividem em bolinhas que estão preenchidas e as que estão vazias. Utilizando o método de dupla contagem percebe-se que as bolinhas com cor são apenas uma parte do total de bolinhas. E assim consegue-se associar uma parte do conjunto ao todo, e assim conclui-se que a parte das bolas preenchidas são $\frac{3}{4}$.

Damico (2007) traz o ponto de vista de educadores matemático sobre a importância desse construto parte-todo, que influencia na familiarização oral e simbólica dos números racionais, mais especificamente, dos números fracionários, assim como no entendimento do aluno sobre as diversas interpretações que esses números podem assumir. Entretanto, afirma esse autor que "este modelo isoladamente se mostra insuficiente para abarcar a completa compreensão deste conjunto numérico, uma vez que a compreensão das frações impróprias não pode ser adquirida por intermédio deste tipo de abordagem" (DAMICO, 2007, p. 70).

Considerando outros subconstrutos indispensáveis na construção dos conceitos de fração, dentre esses fração quociente.

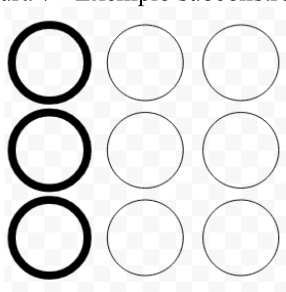
2.1.2. **Subconstruto quociente**

Nesse subconstruto a simbologia $\frac{\square}{\square}$ está ligada à divisão de uma quantidade, no caso a quantidade $\square$ em $\square$ partes, ou seja, $\square$ está dividido em $\square$ partes iguais. Diferente do subconstruto da fração parte-todo, o numerador não possui a restrição de ter que ser menor do que o denominador que não pode ser nulo (Silva, 2005).

Damico (2007) diz que nesse caso a fração $\frac{\square}{\square}$ é uma divisão entre dois números inteiros, ou seja, a fração representa uma relação entre os inteiros $\square$ e $\square$ determinando assim uma operação. Essa descrição traz o subconstruto quociente como "a ideia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada." (p. 70).

Na fração imprópria $\frac{9}{3}$, cujo numerador é maior do que o denominador, podemos compreender como uma divisão. Basta olharmos o numerador como a quantidade que vai ser dividida numa quantidade igual ao denominador de grupos com o mesmo número de elementos. Como na figura a seguir.

Figura 7 - Exemplo subconstruto quociente

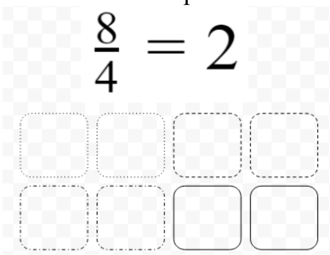


Fonte: Autoria própria

Damico (2007, *apud* Kieren, 1970) ressalta uma diferença do subconstruto quociente para com o subconstruto da relação parte-todo. Na abordagem do subconstruto parte-todo, o aluno constrói um esquema mental específico para descrever como o ato de repartir uma unidade inteira num determinado número de pedaços congruentes. Esse esquema possui uma forte fundamentação visual e manipulativa para o aluno. Já no subconstruto quociente, o cenário passa a ser o de realizar a divisão entre dois números inteiros, ou seja, dividir uma certa quantidade de unidades em uma certa quantidade de agrupamentos. Por ser um cenário diferente do abordado no primeiro subconstruto, o esquema mental construído para a sua compreensão é diferente.

Silva (2005) salienta que à técnica para trabalhar com o subconstruto com objetos discretos é a mesma utilizada ao realizar divisão com números naturais, ou seja, a resposta tem de ser um número natural, pois não faz sentido a resposta ser uma fração. Supondo uma situação onde se deve dividir 13 bolinhas de gude para quatro crianças, de modo que cada uma receba a mesma quantidade. Essa é uma situação impossível como agrupamento de objetos discretos.

Figura 8 - Exemplo subconstruto quociente com objetos discretos



Fonte: Autoria própria

Na representação acima, tem-se que os objetos discretos representam bem a divisão apresentada. Divisão que tem como resultado um número natural, portanto, é uma divisão como a que conhecemos dos números naturais. Então, bastou dividir a quantidade de partes consideradas (oito) na quantidade solicitada no denominador (quatro) de agrupamentos ou partes iguais para obter-se o resultado.

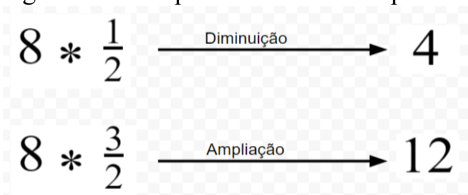
Visto esta breve discussão sobre os subconstrutos parte-todo e quociente, percebe-se que o primeiro subconstruto está relacionado a identificação visual do que a fração representa e como manipular essa representação sem alterar a quantidade de fato, enquanto o segundo subconstruto solicita que olhemos para a fração como agrupamento ou partilha e identifiquemos o valor de cada umas dessas partes. Da mesma maneira que conseguimos relacionar o parte-todo com quociente, conseguimos relacionar o quociente com o subconstruto operador.

2.1.3. **Subconstruto operador**

O subconstruto operador mostra a fração $\frac{p}{q}$ como um operador manipulativo sobre uma quantidade qualquer resultando em sua ampliação ou diminuição. Isso quer dizer que a fração atua como um transformador sobre o objeto, esticando-os ou encolhendo-os. E a manipulação desse número $\frac{x}{y}$ sob essa perspectiva ajuda a construir a concepção de multiplicação entre fração (Silva, 2005).

Damico (2007) afirma que o número racional, em particular o número fracionário $\frac{p}{q}$ como operador realiza duas operações em sua ação. A primeira, é a multiplicação da quantidade que está sendo operada por p e, a segunda, trata-se da divisão do produto por q. O autor continua destacando que a interpretação dada a esses números pode ser pensada como uma função transformadora, se aproximando de ideias de função.

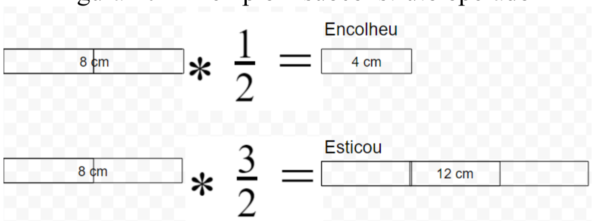
Figura 9 - Exemplo 1 subconstruto operador



Fonte: Autoria própria

Damico (2007), ainda, discute sobre a atuação do número fracionário como operador sobre objetos de naturezas distintas. Quando se trata de um objeto contínuo, a operação que se sucede é a de esticar ou encolher tal objeto, e complementa dizendo que "Qualquer segmento de reta de comprimento L operado por meio de $\frac{p}{q}$ será 'esticado' de um fator p e 'encolhido' de um fator q" (p. 75).

Figura 10 - Exemplo 2 subconstruto operador

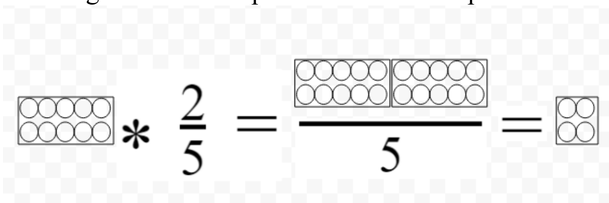


Fonte: Autoria própria

Ainda sobre objetos contínuos, Silva (2005) concorda com Damico (2007) associando a construção do conhecimento sobre fração operador com a de uma ação que provoca redução ou ampliação da medida original, quando $p < q$ ou $q < p$, respectivamente.

Quando falamos sobre objetos discretos, o número fracionário $\frac{p}{q}$ pertencente a este subconstruto adota uma interpretação de multiplicador/divisor ao operar o objeto. Primeiro o objeto é multiplicado por p e em seguida dividido em q partes iguais (Damico, 2007).

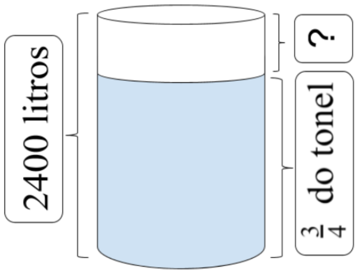
Figura 11 - Exemplo 3 subconstruto operador



Fonte: Autoria própria

Silva (2005) diz que a maior parte das tarefas sobre fração envolve mais de um subconstruto, pois, em sua concepção eles se relacionam. O subconstruto parte-todo é, facilmente, encontrado em todos os exercícios envolvendo fração porque ele está presente no momento inicial de todas as resoluções quando se interpreta o cenário da questão. Por exemplo: “Um tonel encontra-se com seus $\frac{3}{4}$ cheios de água. Sabendo que sua capacidade total é de 2400 litros, quanto resta para completar o tonel?”.

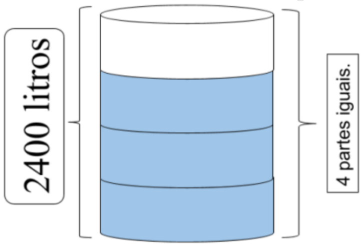
Figura 12 - Exemplo de exercício com mais de um subconstruto



Fonte: Autoria própria

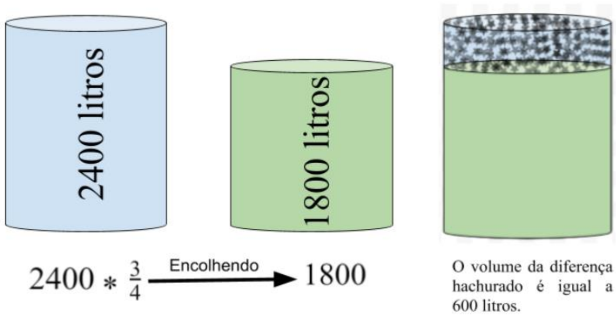
A primeira coisa que deve ser feita é entender o que $\frac{3}{4}$ representa na questão. Entendido o cenário, procura-se identificar o que a questão pede, que no caso é o que falta para completar o tonel que equivale a $\frac{1}{4}$ do tonel. Nesse exemplo, observa-se, primeiro, o subconstruto parte-todo ao entender o que representa esses $\frac{3}{4}$, juntamente com a observação de que é pedido que identifique o valor que falta para o preenchimento do tonel, ou seja, qual o valor de $\frac{1}{4}$ do tonel. E, depois, pode-se resolver a questão de duas formas: utilizando o subconstruto quociente sobre 2400 litros dividindo-o em quatro partes e identificando o valor de cada parte do tonel, ou, usando o subconstruto operador calculando $\frac{3}{4}$ de 2400 litros e reduzindo o valor para 1800, logo encontra-se a solução 600 litros que é o que falta de 1800 litros para 2400 litros.

Figura 13 - Resolução 1 do exemplo do tonel



Fonte: Autoria própria

Figura 14 - Resolução 2 do exemplo do tonel



Fonte: Autoria própria

Nesse exemplo, o aluno tem a chance de interagir com mais de um conhecimento ou conceito ao mesmo tempo, e simultaneamente, envolver-se na questão, pois é um problema que trabalha mais de um subconstruto dos números fracionários, e é um problema matemática que traz objetos ou situações em que o aluno pode se situar, porque pode fazer parte de seu cotidiano. E, o que nos possibilita conectar todos esses fatores num único ponto, que nesse caso o ponto é o problema matemático, é o contexto.

2.2. Contribuições do contexto e dos recursos didáticos no ensino de fração

Concordamos que a maior parte dos profissionais em sala de aula, ainda hoje, apoiam suas atividades didáticas em métodos tradicionais de ensino, dificultando assim a eficácia do seu trabalho como mediador. Segundo Silva e Santo (2004), o aluno inserido no cenário atual da educação, na busca de motivação para aprender, perde-se diante de processos de ensino tradicional que exige dele uma postura de agente passivo que atua somente mediante o método de repetição sem reflexão.

Acerca de como propor uma forma de ensino mais relevante ou significativo, a fim de atender as expectativas dos atuantes do processo de ensino, os educadores buscam processos metodológicos alternativos. Processos esses que são, em sua maioria, produtos de pesquisas em educação matemática. A busca de contextualização no ensino é um tema que gerado trabalhos na área da Educação Matemática (Silva e Santo, 2004).

Contexto pode ser definido como aquilo que acompanha o texto, ou mais ainda, como o conjunto de informações que preenchem o cenário onde um certo evento ou acontecimento está inserido (Valero, 2002).

SILVA e SANTO (2004) discutem em seu trabalho sobre contextualizar afirmando que "É situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada" (p. 3). Ou seja, o fato se situa de maneira diferente para cada teia de relação em que ele se inserir. Um exemplo é: Um policial vai dar uma palestra sobre violência sexual para pessoas adultas, e também para crianças. A maneira como ele ministrará essas palestras irá diferir mediante o público a ser apresentado.

Quando tratamos de contexto e matemática, o termo mais comum, visto na área de educação matemática, é o de contexto de um problema.

> O contexto de um problema pode ser referido tanto para o campo dos conceitos matemáticos e procedimentos dentro dos quais um problema, ou então às referências que a formulação de um problema evoca no aluno. (VALERO, 2002, p 50)

Da Ponte e Quaresma (2012) diz que a matemática permeia o nosso cotidiano, até nas pequenas coisas, sendo assim pode-se trazer problemas matemática, os quais o autor chama de extra-matemáticas, que fazem referência a objetos da vida corrente, assim como também a itens fantasiosos, como personagens de contos de fada. Por mais abstrata que seja a matemática, podemos contextualizá-la de modo a ficar mais atrativa ao público que deseja-se ensinar.

Por outro lado, uma questão intitulada apenas de efetue também pode ser considerada contextualizada. SILVA e SANTO (2004) concordam dizendo que "Boa parte dos professores acredita que ensino contextualizado é aquele em que o professor deve relacionar o conteúdo a ser trabalhado com algo da realidade cotidiana do aluno" (p. 1). Da Ponte e Quaresma (2012) acrescenta dizendo que na área de educação matemática quando se discute contextualização, temos autores que assumem que as ideias matemáticas abstratas são sempre cabíveis de estabelecer relação com o mundo real, e outros que afirma não ser possível estabelecer essa relação por a matemática pela mesma tratar de formas puras não existentes nessa realidade.

As atuais tendências para o ensino de matemática buscam seu sentido e significado para a matemática, vinculando-a a realidade do aluno e utilizando recursos didáticos específicos com diferentes objetivos para a superação das dificuldades de ensino e de aprendizagem da matemática. Isso pode ser verificado em propostas curriculares, em livros didáticos e nos documentos oficiais.

Os materiais manipulativos podem também ser tomados como recursos didáticos, desde que estejam direcionados para fins didáticos, como uma alternativa metodológica que favorecem a relação professor, aluno e conteúdos. O uso planejado de tais materiais pode favorecer a compreensão de relações matemáticas abstratas através da manipulação e visualização de critérios que fundamentam as ideias matemáticas. Nessa perspectiva, à relevância dos materiais manipulativos se apresentam como alternativa necessária à renovação da prática pedagógica dos professores, porque auxiliam à ação dos alunos no seu processo de aprender.

Para Piaget (1952, *apud*Moyer, 2001), as crianças não têm maturidade mental para aprender conceitos abstratos próprios da matemática e os materiais manipulativos contribuem para que a aprendizagem ocorra. Segundo Azevedo (1999), o uso de recursos materiais no ensino de Matemática se destaca, porque favorece ao aluno construir representações mentais ricas e significativas. Os materiais manipuláveis cumprem um papel intermediário entre os fatos e suas representações. Estes são recursos através dos quais o aluno pode construir representações de situações reais e operar sobre elas. Para Calvacanti (2006), a manipulação do material concreto por si só não garante a aprendizagem do conteúdo, é necessário, portanto, um planejamento minucioso de como utilizar esses materiais para favorecer a construção de conceitos. Além do planejamento, é importante que o professor conheça as potencialidade e limitações dos objetos, dando destaque às operações que podem ser realizadas através do favorecimento da manipulação com o objeto. Segundo Carvalho,

> Na manipulação do material didático a ênfase não está sobre os objetos e sim sobre as operações que com eles se realizam. Discordo das propostas pedagógicas em que o material didático tem a mera função ilustrativa. O aluno permanece passivo, recebendo a ilustração proposta pelo professor respondendo sim ou não a perguntas feitas por ele. (CARVALHO, 1990, p.107 *apud* SARMENTO, 2010).

Apesar de reconhecer a importância de saber trabalhar com materiais manipulativos no espaço da aula, ainda não me considero apto a utilizá-los de forma satisfatória e eficaz, pois para professor em início de carreira as atividades se inserem no campo empírico da docência, visto que as relações que se estabelecem e que são necessárias entre os conteúdos específicos e pedagógicos ainda não estão claras, mas como se sabe a formação inicial é apenas uma etapa no meu processo de formação.

A resolução de problema torna-se consistente no ensino de matemática, porque é impossívelpensar em aprender matemática sem responder problemas que fundamentam seus conhecimentos, sejam problemas inseridos no contexto da matemática pura ou da realidade.

Seu conceito está associado a"uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" (PCN, 1998, p. 41). Para Allevato e Onuchic, (2011), é uma tarefa para a qual não se tem métodos ou regras definidas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Nos dois conceitos tem-se que problemas são situações a serem resolvidas, onde não se tem um método ou técnica definida para a solução do mesmo.

Para Dante (1998) a ideia de que ensinar Matemática é ensinar o aluno a resolver problemas, tornando o ensino dessa disciplina um desafio para os professores. Essa visão mudou, porque hoje compreende-se a atividade de resolver problema diferentes da ideia de memorizar um conjunto de algoritmos apresentados pelo professor para resolver uma lista de exercícios. A variedade de problemas que encontramos nos livros didáticos e, até mesmo na internet, favorece outras formas de trabalhar os conteúdos de forma que os alunos participem das discussões.

Segundo Medeiros (2001), o problema precisa ser interessante, onde o aluno elabore estratégias que o possibilite descobrir a resposta. A importância de pensar na resolução de problemas como recurso didático decisivo no ensino da Matemática indica aos professores que as atividades devem ser planejadas levando em consideração a participação ativa dos alunos.

A resolução de problemas possibilita o "resgaste de conhecimentos prévios dos alunos, com uma participação ativa dos mesmos e pode aprofundar e ampliar suas compreensões sobre um conceito, procedimento ou conteúdo matemático"(Justulin, 2014, p. 65). Neste recurso didático o professor precisa abrir um espaço de discussão para compreender o ponto de vista dele, fazer perguntas para indicar um passo que poderá ajudar o aluno a planejar e executar sua estratégia de resolução. É importante também que o professor esclareça para os alunos a importância de resolver o problema, ajudando-os a reconhecer alguns pontos que facilitarão a importância de estudar matemática. Quando o aluno percebe que pode resolver problemas de determinados conteúdos ele adquiri segurança e encontra sentido para sua vidaescolar. A capacidade de resolver problemas é iniciada na atividade de sala de aula, com a interação de todos os sujeitos do processo de ensino-aprendizagem.

3. METODOLOGIA

No curso de licenciatura são várias as disciplinas que os professores nos orientam a escrever um trabalho científico: um artigo, um relatório de experiência ou um trabalho de conclusão de disciplina, todos eles são desafiantes, porque compreender os critérios que estabelecem as relações entre os objetivos, fundamentação teórica e metodologia é uma tarefa que se aprende com bastante leitura e escrita num processo de ir e vir.

A palavra metodologia é bastante utilizada para indicar uma sequência de tarefas sistematizada para dar sentido a uma tarefa maior. Algumas vezes, nós alunos de licenciatura, ouvimos falar em metodologias de pesquisas apoiadas em fundamentos próprios, diferente da pensada pelo senso comum, mas a compreensão dessa metodologia, cujo potencial é conduzir uma pesquisa, ainda não está clara para os alunos de graduação.

Para Thiollent (1992), a metodologia,

> Além de ser uma disciplina que estuda os métodos, a metodologia é também considerada como modo de conduzir a pesquisa. Nesse sentido, a metodologia pode ser vista como conhecimento geral e habilidade que são necessários ao pesquisador para se orientar no processo de investigação, tomar decisões oportunas, selecionar, conceitos, hipóteses, técnicas e dados adequados. (p. 25)

Quando decidi investigar minha própria prática fui orientado a compreender os fundamentos teóricos da pesquisa-ação, visto que eu sou sujeito das minhas ações, inserido no meu espaço de trabalho, pensando e controlando o processo de ensino para que os alunos apresentem aprendizagem que respondam a objetivos antes definidos por mim. Desta forma, estamos cientes que a metodologia mais próxima do trabalho de investigação que contempla esse trabalho é a pesquisa-ação, pois todas as etapas para a realização dessa pesquisa foram planejadas, executadas e avaliadas pelo próprio pesquisador.

> Na pesquisa-ação os pesquisadores desempenham um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, no acompanhamento e na avaliação das ações desencadeadas [...] a pesquisa-ação exige uma estrutura de relação entre pesquisadores e pessoas da situação investigada que seja do tipo participativo. (THIOLLENT, 1992, p. 15).

Decidimos adotar a pesquisa-ação como parte metodológica desse trabalho por compreender que quando o pesquisador participa das ações pesquisadas sendo sujeito das ações investigadas, cujo planejamento visa a compreensão e à resolução de problemas de situações que envolve todos os sujeitos do processo, estamos diante de uma metodologia de pesquisa-ação. Para Tripp (2005, p. 3), na educação a pesquisa-ação é vista como uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores quando utilizam suas práticas como pesquisa para repensar ou compreender os problemas inseridos no meio, no meu caso, a sala de aula.

As ações planejadas a partir da pesquisa-ação são flexíveis, não seguindo uma ordem de ações como possibilidade de controlar variáveis que podem surgir. Considerando a sala de aula como um ambiente mutável, onde os sujeitos negociam as ações em prol das aprendizagens entendemos que essa metodologia atende a dinâmica pensada para o desenvolvimento dos conteúdos de frações numa turma de 7º ano do Ensino Fundamental.

Os conteúdos de frações são sempre um desafio nas práticas de ensino de professores, visto que os alunos utilizam compreensões teóricas específicas para a construção desses conceitos.

Durante alguns meses sendo professor dessa turma, naturalmente, tinha um levantamento ou diagnóstico da situação de cada aluno, dos seus conhecimentos prévios, conhecimento do livro didático, podendo identificar algumas dificuldades previsíveis na nossa relação de professor-aluno-conteúdos. Os elementos destacados são critérios para inserir-se no ambiente de uma pesquisa-ação. Segundo Thiollent (1992, p. 48), a metodologia da pesquisa-ação compreende na fase exploratória, na definição do tema, na colocação do problema de pesquisa, na referência teórica que apoia as etapas da pesquisa, no campo de observação, no plano de ação para a coleta de dados, nas aprendizagens desenvolvidas e na divulgação externa.

Nas últimas décadas, foi observado em trabalhos (Romanatto, 1997; Damico, 2007; Silva, 2005) a importância que se tem dado ao estudo do ensino dos números racionais, principalmente ao trabalho com números fracionários. Nos autores citados, temos Damico e Silva que trabalham o tema destacando os subconstrutos ou interpretações diferentes que esses números podem assumir em diferentes situações através de diferentes tipos de tarefas. Neste trabalho, busca-se trabalhar três interpretações ou subconstrutos (parte-todo, quociente e operador) com o uso de recursos didáticos (material manipulativo, contexto e resolução de problema) no processo de ensino e aprendizagem desses assuntos.

A dificuldade de se ensinar os números fracionários se dá por diversos fatores. Podemos aqui citar que os alunos sentem dificuldade quando lhe são introduzidos os números racionais, pois tratam-se de números novos (quantidades novas) com propriedades parcialmente diferentes (divisão por exemplo) dos vistos anteriormente (naturais e inteiros). Ao tratar de números fracionários tratamos de partes de uma certa quantidade, e para se falar disso precisa-se entender a natureza do inteiro tratado (contínua ou discreta) para compreender certas situações e problemas.

A pesquisa foi realizada numa escola particular na cidade de Paulista, município de Pernambuco. É uma escola de pequeno porte com apenas uma turma de cada um dos anos do Ensino Fundamental séries finais, com seu funcionamento no horário da tarde. Cada turma com uma média de 20 alunos. Nesta escola exerço as atividades de professor de Matemática oficialmente contratado para ensinar matemática nos quatro anos finais do Ensino Fundamental. A turma selecionada de 7º ano a qual participou do trabalho aqui descrito possuía 15 alunos com faixa etária de 11 à 13 anos, com 8 meninas e 7 meninos. A turma não é agitada, o que proporcionou um bom desenvolvimento do trabalho, participação assídua e os conteúdos em questão também fizeram parte da escolha desta investigação.

As atividades foram pensadas para que o aluno tivesse o máximo de contato com a construção do seu conhecimento, de tal maneira que ele percebesse que tinha sido o responsável por compreender o assunto tratado. O trabalho com as pizzas de emborrachado e as barras de chocolate de emborrachado envolvia o aluno de maneira bastante direta com a construção do conhecimento sobre representação de números fracionários de uma forma biunívoca entre material (quantidade) e número (fração). E o uso da resolução de problemas como outra possibilidade metodológica para a construção do conhecimento através do contato direto do aluno com problemas que abordam situações próximas das encontradas no nosso dia a dia.

A aplicação do trabalho a ser realizado com os alunos foi dividida em três momentos. O primeiro momento seria trabalhado uma atividade com material manipulativo, cuja as finalidades eram: verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre fração e fazê-los construir o conhecimento sobre o conceito de fração através da utilização do material manipulativo reforçado pelo subconstruto parte-todo. O segundo momento seria o responsável por fazer os alunos entrarem em contato diretamente com problemas que abordassem a fração como parte todo, destacando a diferença entre os problemas e a primeira atividade, e os fazendo ganhar confiança quanto a soma de partes (soma de números fracionários). E o terceiro momento tem por objetivo apresentar os subconstrutos quociente e operador através de problemas cujas soluções precisariam dessas interpretações dos números fracionários.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta sessão faremos uma análise dos principais resultados identificados durante a realização das atividades com os conteúdos de fração. Os dados aqui analisados terão, principalmente, minha compreensão, tanto do ponto de vista de pesquisador quanto do sujeito atuante do processo de ensino.

A sala de aula é um espaço onde muitas coisas acontecem ao mesmo tempo, rapidamente e de forma imprevisível. Isso faz com que a coleta de dados não adote uma natureza linear de fatos, pois a investigação se deu a partir das relações que eu, enquanto professor, estabeleci com os alunos e com os conteúdos. A análise dos dados consiste na formalização de alguns elementos coletados desde do planejamento das atividades até as avaliações. Essa formalização de ideias aqui contidas não passa pela natureza objetiva da prática docente, mas pela natureza reflexiva dessa prática.

Será realizada a análise e discussão em cima de três momentos que se dividem em 15 aulas numa turma do 7º ano do Ensino Fundamental. O primeiro momento, foi a apresentação dos números fracionários através da investigação de como os alunos compreendem esses números e com a aplicação de material manipulativo. O segundo momento, observei a análise verbal e escrita dos alunos com 4 questões, uma elaborada por mim, 3 do livro didático, onde duas foram adaptadas por mim levando em consideração o que se objetivou trabalhar, e uma no contexto da matemática pura. E o terceiro momento, foca na resolução de uma lista de exercício como possibilidade que favorece a construção dos conceitos de fração abordada no primeiro momento, entretanto agora com uma abordagem sob a perspectiva dos subconstrutos (parte-todo, quociente e operador).

O foco deste trabalho é analisar a contribuição que esses três momentos trouxeram para a construção dos conceitos de frações pelos alunos.

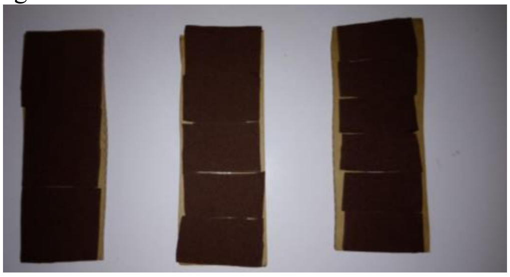
4.1. Primeiro momento

Este momento tinha como objetivo discutir com os alunos conceitos referentes à fração parte-todo, ou seja, é a fração que representa uma quantidade de um inteiro. Com o uso de material manipulativo (pizzas e barras de chocolates de emborrachado) procurou-se fazer o aluno identificar e articular a relação existente entre a fração e sua representação concreta, visual, verbal e simbólica. Segundo Mamede (2011) articular e interpretar estes modos de representação, facilmente, constituem uma dificuldade para o aluno, por isso deve haver uma preocupação de interligar esses diferentes modelos, tanto com o uso de quantidades discretas como contínuas.

Figura 15 - Pizzas de emborrachado

Fonte: Autoria própria

Figura 16 - Barras de chocolate de emborrachado



Fonte: Autoria própria

A atividade do primeiro momento, era composta por pizzas de emborrachado, distribuídas para quatro grupo de alunos. Cada grupo recebeu uma pizza dividida de forma diferentes, em partes iguais: um grupo recebeu uma pizza divindade em 3 partes, outro em 4, outro em 6 e outro em 8 partes. As barras de chocolate de emborrachado do se dividiam em barra de 3 pedaços, 5 pedaços, e 6 pedaços respectivamente, e uma ficha (Ficha 1) de problemas que tinha como objetivo formalizar a atividade com seus algoritmo e discutir as respostas dos alunos relacionando as ideias construídas através do manuseio do material manipulativo e a resolução dos problemas. A atividade questionava a divisão para três de situações envolvendo pizzas de diferentes tipos e barras de chocolates de diferentes tipos.

Figura 17 - Pizzas do tipo 1 ao 4 (da esquerda para a direita)

Fonte: Autoria própria

Figura 18 - Barras do tipo 1 ao 3 (da esquerda para a direita)

Fonte: Autoria própria

Figura 19 – Questões da Ficha 1

Ficha 1
Questão 1 - Estamos todos numa pizzaria. Vamos receber várias pizzas que foram partidas de maneiras diferentes. Sabendo disso, responda:

a) Como fica a divisão da Pizza 1 para cada membro da equipe?

b) Como fica a divisão da Pizza 2 para cada membro da equipe?

c) Como fica a divisão da Pizza 3 para cada membro da equipe?

d) Como fica a divisão para cada membro da equipe de uma Pizza 2 mais uma Pizza 4?

e) Como fica a divisão para cada membro da equipe de duas Pizzas 4 mais uma Pizza 2?

f) O que podemos falar sobre as frações que representam as divisões das alternativas a, b e c?

2- A Páscoa chegou! Ganhamos muitos chocolates. Ovos, caixas e até barras de chocolate. Muitas vezes temos de dividir nossos chocolates com amigos e familiares. Sabendo disso, responda:

a) Quanto cada um da equipe recebe se dividirmos uma caixa com 18 bombons?

b) Quanto da Barra 1 cada membro da equipe recebe?

c) Quanto da Barra 2 cada membro da equipe recebe?

d) Quanto cada membro vai receber da divisão de uma Barra 1 mais uma Barra 2?

e) Quanto cada membro vai receber da divisão de três Barras inteiras mais uma Barra 3?

Fonte: Autoria própria

Mamede (2011) diz ainda que ao querer estabelecer uma associação entre quantidades e representações fracionárias, a utilização de material manipulativo possui uma dimensão significativa ao trabalhar frações, porque a conexão a ser feita entre o número (quantidade) e a fração acontece do concreto para o abstrato num processo de construção de compreensão e estímulo ao raciocínio. Neste primeiro momento, o material foi utilizado para auxiliar os alunos na resolução dos problemas propostos na ficha 1. Com o material disposto os alunos realizaram tentativas de divisões de forma ‘concreta” e com o uso do apelo visual. Observei as discussões, as tentativas, as curiosidades para saber como o outro grupo resolveu. Mas observei principalmente, as dificuldades da passagem da proposta do material para a formalização no papel.

Figura 20 – Itens*a* e *b* da Questão 1 da Ficha 1

Ficha 1

Questão 1 - Estamos todos numa pizzaria. Vamos receber várias pizzas que foram partidas de maneiras diferentes. Sabendo disso, responda:

a) Como fica a divisão da Pizza 1 para cada membro da equipe?

b) Como fica a divisão da Pizza 2 para cada membro da equipe?

Fonte: Autoria própria

Observamos que os conhecimentos prévios dos alunos sobre a compreensão de numerador e denominador estavam bem estabelecidos, pois não houve dificuldade ao responder as duas primeiras perguntas deste primeiro momento que se tratava apenas de associar a quantidade identificada na divisão das pizzas ao numerador e o total de fatias ao denominador. Entretanto, identificamos algumas dificuldade quando questionamos sobre a relação existente entre as duas quantidades da mesma pizza abordadas nas duas primeiras perguntas ("Como fica a divisão da Pizza 1 para cada membro da equipe?" e "Como fica a divisão da Pizza 2 para cada membro da equipe?"), que eram $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$. Nas representações com materiais manipulativos, cujo objetivo era identificar frações equivalentes, esses trouxeram uma contribuição significativa quando os alunos entenderam que a parte da pizza correspondente a $\frac{1}{3}$ era igual a parte da pizza correspondente a $\frac{2}{6}$.

Figura 21 - Pizza de $\frac{1}{3}$ e pizza de $\frac{2}{6}$

Fonte: Autoria própria

Concordamos com MAMEDE (2011), quando ela diz, que parte considerável da dificuldade de articular e compreender o conceito de fração reside da compreensão de frações equivalentes, pois “frações que se referem à mesma quantidade podem ser representadas por diferentes símbolos escritos e podem ser designados por diferentes palavras” (p.2).

Figura 22 – Item *c* da Questão 1 da Ficha 1

Ficha 1

Questão 1 - Estamos todos numa pizzaria. Vamos receber várias pizzas que foram partidas de maneiras diferentes. Sabendo disso, responda:

c) Como fica a divisão da Pizza 3 para cada membro da equipe?

Fonte: Autoria própria

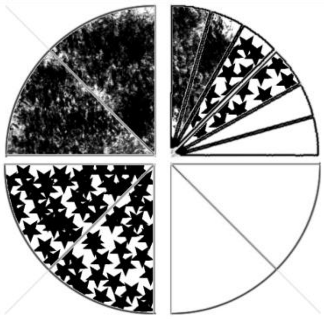
A terceira pergunta (“Como fica a divisão da Pizza 3 para cada membro da equipe?”) prevista na atividade deste primeiro momento exigiu bastante atenção dos alunos. Foi unânime a conclusão inicial de que todos receberiam $\frac{2}{8}$ da pizza, entretanto não conseguiram descobrir o que fazer com os dois pedaços restantes.

Figura 23 - Pizza com 8 pedaços

Fonte: Autoria própria

Enquanto eles estavam com o material manipulativo em mãos, a pizza 3 foi representada no quadro branco por meio de desenho. Deu-se destaque aos dois pedaços restantes da divisão realizada pelos alunos e questionei: “*Como podemos dividir esses dois pedaços para três pessoas*?”. Deste questionamento surgiu a sugestão de dividir cada um dos pedaços em três menores. Para os alunos ficou claro que cada um comeria $\frac{2}{8}$ mais dois pedaços menores dos seis pequenos pedaços restantes. Porém, ainda não se havia chegado à uma resposta de fato para o problema.

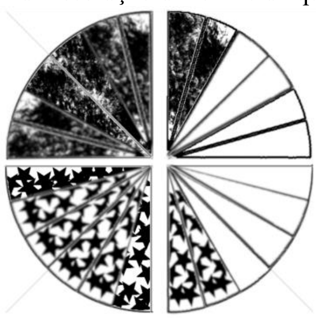
Figura 24 - Parte 1 da resolução da letra c da Questão 1 da Ficha 1



Fonte: Autoria própria

A problemática estava em não haver uma representação compatível entre $\frac{2}{8}$ e os pedaços menores recém divididos. A pizza estava dividida em pedaços de tamanhos diferentes e essa situação é um dos obstáculos dos alunos acerca de representar por fração aqueles pedaços de tamanhos diferentes (quantidades diferentes), dificuldade já observada por vários autores (DAMICO, 2007; SILVA, 2005; ROMANATTO, 1997). Para se estabelecer uma representação adequada se fazia necessário dividir cada um dos 8 pedaços da pizza 3 em 3 pedaços menores. Feito isso, facilmente, associou-se os pedaços menores à $\frac{1}{24}$ e os pedaços iniciais a $\frac{3}{24}$, logo encontrou-se a resposta do problema que era que cada um comia $\frac{8}{24}$ da pizza, ou seja, o equivalente a $\frac{1}{3}$.

Figura 25 - Parte 2 da resolução da letra c da questão 1da Ficha 1



Fonte: Autoria própria

Esta terceira pergunta, foi importante porque conseguimos articular ao mesmo tempo a visualização das quantidades abordadas (compreensão do subconstruto parte-todo) e a associação destas com a representações adequadas (frações equivalentes) à solução da questão. Além de desenvolver a habilidade de usar o conceito de frações equivalentes para encontrar a melhor representação da quantidade em questão para solucionar o problema.

Figura 26 – Itens *d* e *e* da Questão 1 da Ficha 1

Ficha 1

Questão 1 - Estamos todos numa pizzaria. Vamos receber várias pizzas que foram partidas de maneiras diferentes. Sabendo disso, responda:

d) Como fica a divisão para cada membro da equipe de uma Pizza 2 mais uma Pizza 4?

e) Como fica a divisão para cada membro da equipe de duas Pizzas 4 mais uma Pizza 2?

Fonte: Autoria própria

As duas perguntas posteriores exigiram dos alunos identificar quanto cada um de três pessoas comeria de duas pizzas de tipos diferentes ("Como fica a divisão para cada membro da equipe da Pizza 2 mais uma Pizza 4?") e de três pizzas de tipos diferentes ("Como fica a divisão para cada membro da equipe de duas Pizzas 4 mais uma Pizza 2?"). Os alunos facilmente identificavam quanto cada um comia de cada pizza separadamente, mas o resultado final não se deu de imediato, pois tratava-se de uma soma entre frações com denominadores diferentes, ou seja, somar fatias de pizza com tamanhos diferentes. A turma concluiu que os denominadores deveriam ser iguais para realizar a soma das frações, mostrando que os conhecimentos prévios dos alunos sobre soma de fração não apontavam dúvidas nas respostas, até o ponto de soma de frações com denominadores iguais.

Através de discussões sobre as possíveis estratégias para solucionar a questão, solicitei que recorressem à técnica usada para solucionar o caso da divisão da pizza de 8 pedaços para três, buscando uma representação adequada para as frações em questão, ou seja, na verdade tratava-se de deixar todas as pizzas com a mesma quantidade de pedaços. Porém, ao tentar utilizar a técnica antes vista, os alunos tiveram dificuldade e argumentavam assim: "A divisão em pedaços menores que fazemos para uma pizza não servia para a outra". E através do método de tentativa e erro, perceberam que conseguiriam dividir todas as pizzas em 24 pedaços menores e iguais. Deste ponto, conseguiam associar cada fração inicial a sua equivalente e por fim realizar a soma de frações com denominadores iguais. As discussões com os alunos sobre os conceitos de frações equivalentes se tornam importante no momento de repartir a parte restante em pedaços menores, levando o aluno a pensar que as partes, antes divididas, agora devem ser divididas também. É nessa construção conceitual onde observei que reside uma das maiores dificuldades de trabalhar com frações parte-todo.

Ao se depararem com a resposta do problema anterior ($\frac{16}{24}$) os alunos notaram que se tratava de $\frac{2}{3}$ da pizza. Em seguida, abriu-se uma discussão de que poderiam ter resolvido mais rapidamente de uma forma simples, pois bastaria ter associado que, na verdade, cada um comeria $\frac{1}{3}$ de cada pizza, e como haviam duas pizzas, logo cada um comeria $\frac{2}{3}$ de pizza.

Figura 27 – Item *f* da Questão 1 da Ficha 1

Ficha 1

Questão 1 - Estamos todos numa pizzaria. Vamos receber várias pizzas que foram partidas de maneiras diferentes. Sabendo disso, responda:

f) O que podemos falar sobre as frações que representam as divisões das alternativas a, b e c?

Fonte: Autoria própria

Esse item teve como objetivo fazer uma análise comparativa dos itens anteriores, não como revisão, mas buscando as diferenças e semelhanças entre as alternativas. Acreditamos que o resgate dos conceitos discutido a fim de levantar os porquês das respostas para os problemas ajuda ao aluno a compreender as situações, as elaborar algoritmos e a encontrar diferenças nos problemas e consequentemente, nas respostas. Sobre a alternativa *e* ("O que podemos falar sobre as frações que representam as divisões das alternativas a, b e c?"), foi feita uma ponte com a interpretação da fração como quociente quando os alunos se depararam com a resposta do problema $\frac{24}{24}$, lembrando que a fração pode ser vista como uma divisão. E com essa abordagem os alunos visualizaram que na verdade a solução dessa pergunta era simples: cada um comeria uma pizza inteira.

Por fim, esta primeira questão finalizou com um questionamento ao aluno sobre como ele relaciona as respostas das 3 primeiras alternativas ("Como fica a divisão da Pizza 1 para cada membro da equipe?", "Como fica a divisão da Pizza 2 para cada membro da equipe?", e "Como fica a divisão da Pizza 3 para cada membro da equipe?"), e 70% dos alunos responderam que as três respostas representavam a mesma quantidade, ou seja, as frações eram equivalentes, por se referirem ao mesmo inteiro, que é no caso a pizza. Esse indicativo nos permite concluir que o uso de material manipulativo como alternativa de ensino de fração, mais especificamente, o trabalho sobre compreender as representações fracionárias em cima de uma mesma quantidade (frações equivalentes), é uma boa possibilidade metodológica.

Quadro 1 - Resposta da letra *f* da questão 1 da Ficha 1

Resposta	Quantidade
"Representam a mesma quantidade de pizza."	7
"São a mesma coisa."	3
"O número de cima é menor do que o de baixo."	2
Outra	3

Fonte: Autoria própria

Figura 28 – Itens *a* e *e* da Questão 2 da Ficha 1

Ficha 1

Questão 2 - A Páscoa chegou! Ganhamos muitos chocolates. Ovos, caixas e até barras de chocolate. Muitas vezes temos de dividir nossos chocolates com amigos e familiares. Sabendo disso, responda:

a) Quanto cada um da equipe recebe se dividirmos uma caixa com 18 bombons? …

e) Quanto cada membro vai receber da divisão de três Barras inteiras mais uma Barra 3?

Fonte: Autoria própria

A segunda questão da ficha de atividade, desse primeiro momento, trazia situações parecidas com a da primeira questão, exceto por dessa vez estar trabalhando com barras de chocolate. Possuía também duas questões diferentes: uma tratando de fração quociente com objetos discretos ("Quanto cada um da equipe recebe se dividirmos uma caixa com 18 bombons?"), e outra fazendo referência à frações impróprias ("Quanto cada membro vai receber da divisão de três Barras inteiras mais uma Barra 3?"). O objetivo dessa questão era reforçar a compreensão dos alunos sobre diferentes representações fracionárias que podemos dar as partes de um inteiro, ou até mesmo ao inteiro, e visualizar essa representação também em objetos discretos (agrupamento).

Ao fim da atividade os alunos notaram que buscar a fração equivalente adequada à solução do problema é mais prático, pois não precisaria mais olhar para parte abordada e por meio de tentativa e erro encontrar em quantas partes menores deve-se dividir as já dispostas para solucionar o problema. O processo utilizado na questão "colocar" poderia ser substituído pela técnica de multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número, transformando assim a fração na equivalente desejada. Porém, para utilizar esse processo seria necessário atenção para não optar por número que dividam as partes em partes menores demais, por exemplo ao somar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ pode se optar por dividir os inteiros em 12 pedaços ao invés de 6 (ou seja, multiplicar a primeira fração por 6 em cima e em baixo, e a segunda por 4 em cima e em baixo, quando na verdade deveria multiplicar o numerador e denominador da primeira por 3 e o da segunda por 2), mas seria necessário realizar uma simplificação ao fim da operação, e esse não era o objetivo da atividade.

A importância deste primeiro momento com os alunos é observada no desenvolvimento da atividade, pois percebe-se que a atividade possibilita a construção da compreensão e a capacidade de articular a representação de quantidades por fração, ou seja, a associação entre quantidades e números fracionários. E essa habilidade é fundamental pois “o conceito de frações só está totalmente adquirido quando o aluno domina o conceito em todas as interpretações ou significados de fração, e é capaz de traduzir, raciocinar e resolver problemas nas diferentes interpretações” (MAMEDE, 2011, p.3).

Este primeiro momento foi pensado como proposta de aula por se tratar de uma prática lúdica que é considerada por muitos pesquisadores de Educação Matemática uma ferramenta de grande potencialidade de ensino. Pasuche colaboradores (2013) concordam com o uso do lúdico para ensino de matemática porque incentiva o envolvimento do aluno na atividade muitas vezes possibilitando criar e inventar durante o processo.Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL/MEC, 1998) também destacam a importância do uso do lúdico no ensino indicando que proporciona ao aluno significativo desenvolvimento cognitivo (crítica, intuição, criação, estratégia, etc.).

PASUCH e colaboradores (2013) complementam afirmando:

> “Caso o professor deseje estimular seus alunos através do lúdico, deverá: ter um bom planejamento, conhecer a turma para saber quais atividades serão melhor desenvolvidas e ter consciência de que para se planejar aulas lúdicas será necessário dedicação e tempo, mas que será significativo e gratificante se considerados os resultados que serão obtidos durante e ao final do processo de ensino-aprendizagem.” (p.7)

Concordamos com os autores quanto à preparação que se deve ter ao querer realizar uma prática ou aula com material manipulativo, pois para se obter um resultado positivo deve ser bem planejada, conhecer os alunos que participarão, dedicação e tempo.

4.2.Segundo momento

Segundo BERTONI (2009) a utilização de materiais manipulativos é insuficiente para a construção completa do sentido de aprender fração, ou seja, de estabelecer a associação entre os números fracionários e a realidade. Por isso a autora em seu trabalho direcionou seu estudo para a busca com contextos presentes ou quase presentes em nossa realidade, através da busca por coisas divididas em parte congruentes ou iguais. A autora complementa ainda dizendo:

> O foco principal é tornar clara para a criança a existência de situações significativas do contexto que demandam a introdução de novos números. Números têm que funcionar na vida, não só em figuras divididas, onde nem adquirem verdadeiramente esse significado. (p.12)

Concordando em parte com Bertoni (2009), sobre a necessidade desse contato dos alunos com situações reais ou quase reais envolvendo frações, as aulas desse segundo momento foram planejadas com o objetivo de trabalhar problemas inseridos no contexto da matemática pura e do cotidiano dos alunos que exigiam deles articular mais sofisticadamente a visualização da quantidade citada nas questão (mencionada em forma de número fracionário), ou seja, articular adequadamente o subconstruto parte-todo abordado em cada problema, assim como o contato inicial com o subconstruto operador.

Figura 29 –Questão 1 da Ficha 2

Ficha 2

Questão 1 - (Página 62, Questão 1 - Modificada) Leia o testamento do avô de Jairo:

- Deixo $\frac{1}{2}$ das minhas finanças para os meninos de rua.
- Deixo $\frac{1}{3}$ para a luta contra a Aids.
- Deixo $\frac{1}{9}$ (e só isso) para os meus netos.

O bondoso avô de Jairo dividiu completamente sua fortuna? Se lhe restou uma parte, quanto é essa parte?

Fonte: Autoria própria

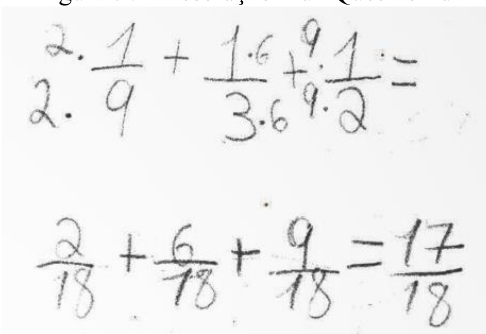
A questão 1 (ficha 2) tem como tema um dos contextos identificado por LOPES (2008) como pobre de significado para crianças e adolescentes, que é o problema envolvendo partilha de bens, entretanto, o autor ainda diz que “Ainda que a temática seja adulta pode-se abordá-la através de um tratamento literário, onde a fantasia não precisa ser escondida [...]” (p. 7).

De início começou-se uma discussão sobre como se resolveria essa questão. A dificuldade inicial que era unânime foi a de identificar o inteiro da questão, que no caso era a fortuna do avô de Jairo. Os alunos não estavam conseguindo associar as partes citadas ao inteiro ao que elas se referiam. Observei que os alunos reconheceram as frações, mas não conseguiram identificar que o interesse era encontrar o todo da fração. Talvez, porque nos problemas anteriores a discussão era a partir do todo identificar as partes, observei que eles não esperavam o problema com outra possibilidade. Neste momento, eu ajudei no entendimento da questão, para que eles pudessem desenvolvimento à atividade, e, consequentemente, gerar novos seus conhecimentos sobre fração ou problema envolvendo fração. OKUMA (2010) concorda com esse feito dizendo:

> "O professor que se preocupa com a construção de conhecimento pelo próprio aluno busca ser mediador do processo, levando o aluno a ter segurança e autoconfiança na busca de soluções." (p. 60)

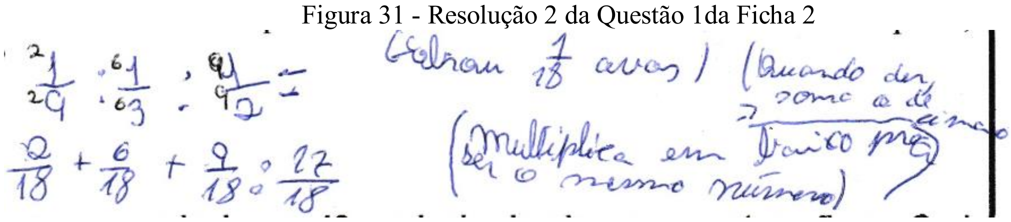
Feita essa associação, a discussão chegou à conclusão de que teríamos de somar as partes, e a partir dessa soma poderíamos concluir se a fortuna foi ou não completamente doada. Foi notado que os alunos se apropriaram da técnica vista nas aulas do primeiro momento (a técnica de buscar a fração equivalente adequada multiplicando o numerador e denominador das frações pelo mesmo número), e não tiveram dificuldades para realizar a soma de frações com denominadores diferentes. Ao obter o resultado $\frac{17}{18}$ perceberam que a fortuna não estava completa, ou seja, $\frac{1}{18}$ não havia sido doado, logo não foi doada por completa a fortuna.

Figura 30 - Resolução 1 da Questão 1da Ficha 2



Fonte: Aluno A

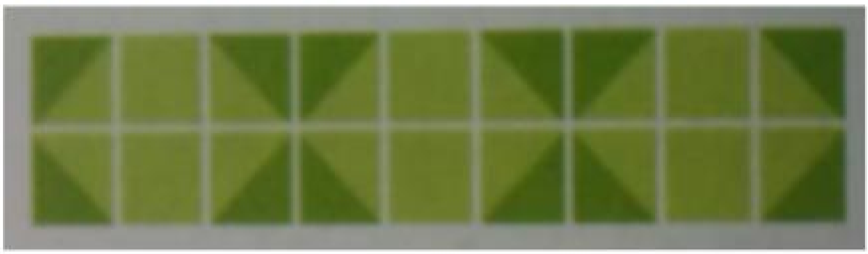
Figura 31 - Resolução 2 da Questão 1da Ficha 2



Fonte: Aluno B

Figura 32 - Questão 2 da Ficha 2

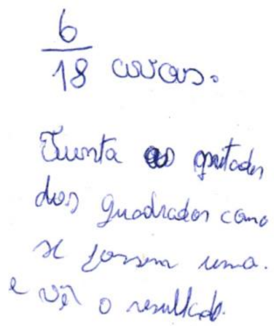
Questão 2 - (Página 62, Questão 5) Constroem-se e sombreiam-se 18 quadrados iguais, como mostra a figura. Qual fração da área total é sombreada?



Fonte: Autoria própria

Na questão 2, a questão inserida no contexto da matemática, a resposta da maioria dos alunos se deu por pura interpretação visual do problema, percebi isso quando analisei a resposta de um dos alunos: “Junta as partes pintadas dos quadrados como se fossem uma…”. Visualmente eles associaram que 12 meios quadrados sombreados equivaliam a 6 quadrados completamente sombreados, portanto a área sombreada tratava-se de $\frac{6}{18}$ da figura.

Figura 33 - Resposta da Questão 2 da Ficha 2



Fonte: Aluno B

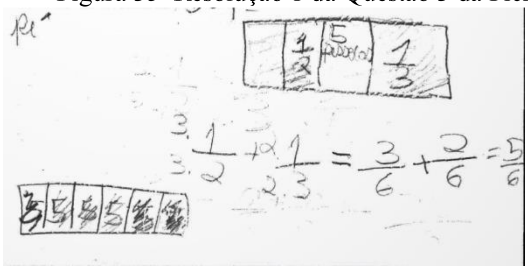
Figura 34 - Questão 3 da Ficha 2

Questão 3 - (Página 63, Questão 8 - Modificada) Os alunos do Educandário Santa Maria vão ao Espaço Ciência. A metade dos alunos irão a pé; $\frac{1}{3}$, de bicicleta; e 5, de carro. Quantos alunos vão sair em excursão? Quantos vão a pé? Quantos vão de bicicleta?

Fonte: Autoria própria

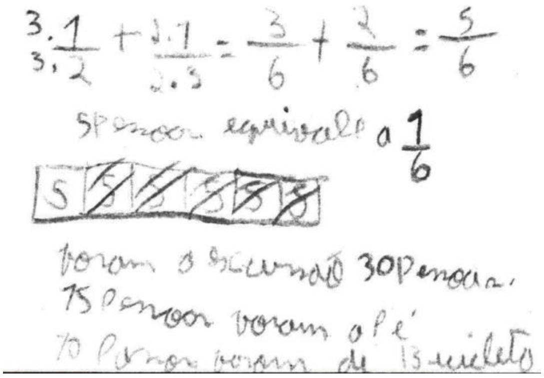
Na questão 3, os alunos tentaram usar da mesma estratégia utilizada na primeira questão, porém as partes citadas no problema não estavam todas adequadamente representadas. Entretanto, a maioria concordou que ao somar os dados informados na questão daria o inteiro citado (que no caso era a quantidade de alunos que foram à excursão). Eu sugeri que representassem essas “partes” visualmente. Feito isso, os alunos perceberam que o problema era que a parte do que foi informado não estava representado como parte do inteiro (não se sabia que parte 5 unidades representava do inteiro). Sem saberem o que fazer, optei por sugerir que realizassem a soma daquilo que daria para se somar, que no caso se referia as partes representadas por frações. Ao somar encontraram $\frac{5}{6}$. Então, logo associaram que as 5 pessoas que foram de carro equivaliam a $\frac{1}{6}$ do total de pessoas (podemos perceber isso na Figura X), ou seja cada quadradinho valia 5 pessoas. Assim conseguiram solucionar o problema de número 3.

Figura 35–Resolução 1 da Questão 3 da Ficha 2



Fonte: Aluno A

Figura 36 - Resolução 2 da Questão 3 da Ficha 2



Fonte: Aluno C

Figura 37 - Questão 4 da Ficha 2

Questão 4 - (Página 62, Questão 2) Vicente vendeu uma peça de tecido para três clientes. O primeiro ficou com 8/3 da peça; o segundo, com ⅖ do que havia sobrado; e o terceiro, com o restante.

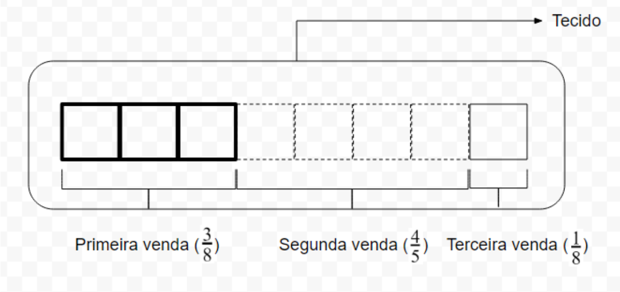
a) Calcule a fração correspondente à compra de cada um em relação a peça toda.

b) Sabendo que toda a peça tinha 10m, calcule o quanto cada cliente comprou, em metros.

Fonte: Autoria própria

A questão 4 teve a resolução da sua primeira alternativa iniciada pelos alunos através do apelo visual.

Figura 38 - Esboço de como se trabalhou a Questão 4 da Ficha 2



Fonte: Autoria própria

Depois de representar a peça de tecido como o inteiro da questão (desenhou-se uma barra) esboçou-se nela a compra do primeiro cliente ($\frac{3}{8}$). O segundo cliente comprou $\frac{4}{5}$ em cima do que sobrou, ou seja, $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{8}$. A identificação desta segunda quantidade na peça do tecido também aconteceu visualmente, ao analisar o desenho da peça e o desenho da compra do segundo cliente. No restante da peça haviam sobrado $\frac{5}{8}$ e o cliente comprou $\frac{4}{5}$, então associou essas cinco partes em que o restante estava distribuído as partes que sobraram da peça, e concluiu-se que equivalia a $\frac{4}{8}$, ainda notaram através do esboço da resposta final que $\frac{4}{8}$ era equivalente a $\frac{1}{2}$ da peça. Em seguida, foi facilmente identificado que o terceiro cliente comprou $\frac{1}{8}$ da peça. Depois de identificadas as partes que cada compra representava, a alternativa b pede para os alunos descobrirem quantos metros equivale cada compra feita, como já sabiam quanto valia $\frac{1}{8}$ do tecido conseguiram encontrar a resposta dessa alternativa sem problemas.

Ao observar o desenvolvimento dos alunos nessa última questão pode-se perceber que o conceito de fração, ou mais especificamente, a compreensão da representação (visual e quantitativa) fracionária, está sendo bem dominada pelos alunos ao vê-los articular a noção de fração equivalente e a habilidade de associar quantidade à fração.

Figura 39 - Questão 5 da Ficha 2

Questão 5 (elaborada por mim).

A escola Santa Maria realizou um campeonato de corrida de revezamento. A equipe formada por Karol, Cauã e Léo participaram do evento. Em uma das corridas foi observado que Karol correu ½ do percurso, Cauã atuou em ⅓ do trajeto, e Léo fechou com 3km corridos. Quantos quilômetros tem o trajeto? Quantos quilômetros Karol correu? E quantos quilômetros Cauã fez na corrida?

Fonte: Autoria própria

A questão elaborada teve sua construção voltada a inserir o problema num contexto que fosse do interesse dos alunos, os nomes citados na questão são nomes de alunos da turma. Os alunos pareceram orgulhosos ao ver seus nomes citados. LOPES (2008) disserta sobre ter preocupação acerca do contexto que se utiliza ao querer ensinar algum assunto quando diz:

> A preocupação pela busca de contextos realistas a qualquer custo leva alguns professores e autores a propor enunciados com referência a frações de polegadas, associadas à medida de parafusos e canos. Reconheço a boa intenção, mas discordo da eficácia nestes casos. (p.8)

O problema proposto tem resolução semelhante à primeira questão, por isso o objetivo desse exercício era fazer os alunos praticarem a estratégia desenvolvida no início da atividade. E como atrativo para os estudantes, a questão foi construída utilizando alguns dos alunos como personagem, e num cenário envolvendo a escola. A reação da turma foi bastante positiva, pois os alunos conheciam a técnica que utilizariam para encontrar a solução, além de parecer uma brincadeira para eles se imaginarem naquela situação. É possível notar aqui a contribuição de usar o cotidiano dos alunos como contexto na elaboração da questão, assim como a contribuição que o lúdico proporciona, porque "os alunos lidam com as atividades (lúdicas) de forma prazerosa e demonstram seu interesse em participar ativamente da construção do conhecimento" (PASUCH *et al*, 2013, p.7).

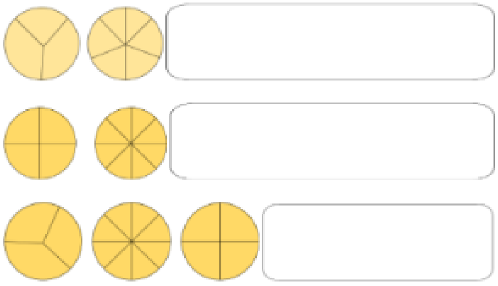
4.3.Terceiro momento

No primeiro momento trabalhou-se com os alunos a construção da compreensão dos números fracionários sob uma perspectiva visual, isto é, quantitativa, e no segundo momento buscou-se refinar essa ideia construída sobre fração e utilizar com questões em cenários próximos à realidade do aluno. Visto isso, esse terceiro momento tem como objetivo refinar ainda mais o conceito de fração adquirido pelos alunos fazendo-os entrar em contato direto com questões que trazem diferentes subconstrutos (parte-todo, quociente e operador), além de verificar o desempenho deles nas questões envolvendo esses subconstrutos e o que foi abordado nos dois primeiros momentos. Sobre as questões temos que as 5 primeiras questões da Ficha 3 foram de autoria minha, enquanto as questões restantes foram retiradas da internet e adaptadas.

Figura 40 – Questão 1 da Ficha 3

Ficha 3

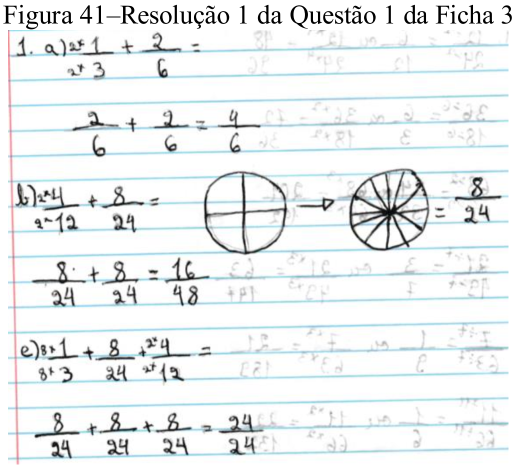
Questão 1- Quanto fica a divisão de cada caso se formos dividir para três pessoas os pedaços desses círculos?



Fonte: Autoria própria

O objetivo desta questão era fazer os alunos recordarem da atividade feita em classe com os materiais manipulativos, e com as estratégias desenvolvidas para resolver os problemas propostos. Embora a questão não mais fizesse referência a pizza, o problema era o mesmo que foi trabalhado anteriormente, mas agora com cada círculo dividido em quantidades diferentes de pedaços congruentes. Os alunos conseguiram resolver bem o exercício devido a atividade realizada nas aulas do primeiro momento. Percebe-se aqui a contribuição da atividade lúdica feita com material manipulativo.

Figura 41–Resolução 1 da Questão 1 da Ficha 3



1. a) $\frac{2\times 1}{2\times 3} + \frac{2}{6} =$

$\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

b) $\frac{2\times 4}{2\times 12} + \frac{8}{24} =$ $= \frac{8}{24}$

$\frac{8}{24} + \frac{8}{24} = \frac{16}{48}$

c) $\frac{8\times 1}{8\times 3} + \frac{8}{24} + \frac{2\times 4}{2\times 12} =$

$\frac{8}{24} + \frac{8}{24} + \frac{8}{24} = \frac{24}{24}$

Fonte: Aluno D

Figura 42 - Resolução 2 da Questão 1 da Ficha 3

Q. 1:

a) $\frac{1}{3}^{\times 2}_{\times 2} + \frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

b) $\frac{4}{12}^{\times 2}_{\times 2} + \frac{8}{24} = \frac{8}{24} + \frac{8}{24} = \frac{16}{24}$

c) $\frac{1}{3}^{\times 8}_{\times 8} + \frac{8}{24} + \frac{4}{12}^{\times 2}_{\times 2} = \frac{8}{24} + \frac{8}{24} + \frac{8}{24} = \frac{24}{24}$ (Como são 3 pizzas para três pessoas, cada uma ganhou/ficou com uma pizza inteira.

Fonte: Aluno B

As próximas quatro questões, que se tratavam de questões inseridas no contexto da matemática pura, apenas tinha como objetivo fazer os alunos trabalharem conceitos específicos que foram vistos rapidamente em sala de aula através de aula expositiva. Os conceitos foram ver a fração como uma divisão e realizar a divisão (fração quociente), localizar o número fracionário na reta numerada, e a partir de uma fração encontrar uma equivalente. Esses conceitos foram vistos em sala sem muitos detalhes por motivo de estarem presentes no conteúdo programático da escola, enquanto o professor se dispunha a investir mais de seu tempo na elaboração das aulas que trabalhariam os subconstrutos aqui destacados, pois meu objetivo neste trabalho foi contribuir com a construção de conceitos fracionários a partir da compreensão dos subconstrutos parte-todo, quociente e operador através de materiais manipulativos e resolução de problemas.

Figura 43 – Questões de matemática pura da Ficha 3

Ficha 3

Questão 2 - Qual dos números racionais abaixo representam um número inteiro, e diga qual é esse número inteiro.

a) $\frac{27}{4}$ b) $\frac{36}{6}$ c) $\frac{68}{17}$ d) $\frac{46}{3}$ e) $\frac{2}{4}$ f) $\frac{81}{3}$ g) $\frac{2222}{2}$ h) $\frac{2019}{1}$

Questão 3 - Localize os números racionais abaixo na reta numérica e coloque as frações em ordem decrescente.

$\frac{1}{10}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{14}{4}$ $-\frac{5}{2}$ $\frac{10}{4}$ $-\frac{1}{4}$ $-\frac{6}{8}$ $\frac{18}{12}$

Questão 4 - Encontre duas frações equivalentes às frações abaixo, uma por meio da transformação por produto, e a outra por meio da transformação por divisão.

a) $\frac{12}{24}$ b) $\frac{36}{18}$ c) $\frac{68}{64}$ d) $\frac{21}{49}$ e) $\frac{7}{63}$ f) $\frac{11}{66}$

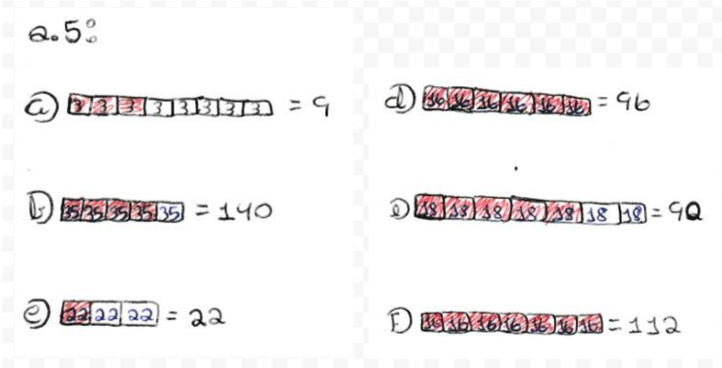
Questão 5 - Calcule quanto vale cada parte solicitada de seu respectivo inteiro.

a) $\frac{3}{8}$ *de* 24 b) $\frac{4}{5}$ *de* 175 c) $\frac{1}{3}$ *de* 66 d) $\frac{6}{4}$ *de* 64 e) $\frac{5}{7}$ *de* 126 f) $\frac{7}{6}$ *de* 96

Fonte: Autoria própria

Vale salientar que a questão de número 5 tem como princípio estabelecer o primeiro contato com os alunos do conceito do subconstruto operador que será trabalhado com mais afinco nas questões posteriores. Nas questões porvir da lista estão exercícios elaborados em um contexto que pode se fazer presente no cotidiano dos alunos envolvendo o conceito do subconstruto operador, parte-todo e quociente.

Figura 44–Resolução da Questão 5 da Ficha 3



Fonte: Aluno E

Na resolução da questão que introduz o subconstruto operador podemos notar que o Aluno E estabeleceu uma relação direta com o subconstruto parte-todo abordado no primeiro e segundo momento se apropriando do mesmo na construção do conceito de fração como operador.

Figura 45 – Questões 6, 7, 8, 9 e 10 da Ficha 3

Ficha 3

Questão 6 - Um livro tem 176 páginas. Íris já leu $\frac{5}{11}$ desse livro. Quantas páginas Íris já leu desse livro?

Questão 7 - Uma escola tem 36 professores. Desses, $\frac{8}{12}$ são do sexo feminino. Quantas professoras há nessa escola?

Questão 8 - Em uma corrida de fórmula um, 32 carros iniciaram a corrida. Desses carros, $\frac{3}{16}$ abandonaram a corrida por defeitos mecânicos. Quantos carros terminaram a corrida?

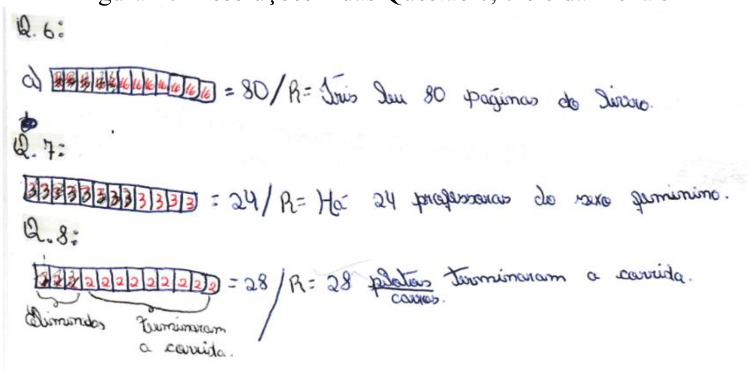
Questão 9 - O mostrador de gasolina de um carro mostra que o tanque está cheio até os seus $\frac{3}{5}$. Se o tanque está com 55 litros de gasolina, quantos cabem, ao todo, no tanque desse carro?

Questão 10 - No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{7}{8}$ dos apartamentos, o que corresponde a 56 apartamentos. Quantos apartamentos há por andar, sabendo que esse prédio tem 16 andares?

Fonte: <https://sites.google.com/site/conteudosdobimestre1/7o-ano/2----problemas-envolvendo-fracoes>

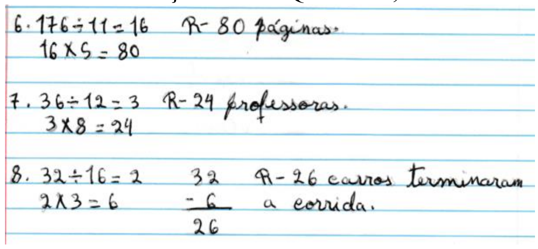
As questões 6, 7 e 8 trabalha o subconstruto operador em sua resolução. Foi facilmente identificado pelos alunos os elementos que seriam operados sob o uso desse subconstruto, e operar sob o uso do conceito visto aconteceu sem adversidades. A questão 9 e 10 já exigem uma articulação diferente dentro do conceito do subconstruto abordado nas três questões anteriores. Nessas questões não se conhece o número que opera diretamente com a fração citada, mas se tem conhecimento do resultado dessa operação. Pode-se recorrer ao conceito do subconstruto parte-todo para uma interpretação mais visual do problema proposto, porém para finalizar a resolução do exercício, será preciso utilizar o conceito de fração-operador. E foi assim de fato que ocorreu. Os alunos iniciaram a resolução recorrendo a interpretação visual por meio de representar o inteiro e em seguida realizar a sua divisão nas partes iguais sugeria pela fração da questão. Depois de realizar os desenhos, os alunos facilmente identificaram o valor de cada uma das partes (através do subconstruto quociente).

Figura 46–Resoluções 1 das Questão 6, 7 e 8 da Ficha 3



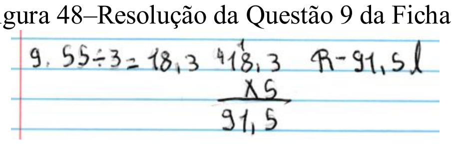
Fonte: Aluno B

Figura 47 – Resoluções 2 das Questão 6, 7 e 8 da Ficha 3



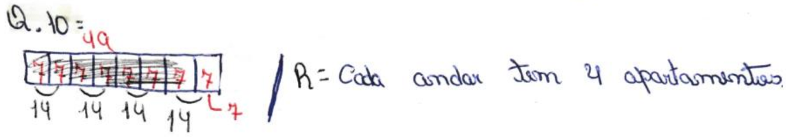
Fonte: Aluno D

Figura 48–Resolução da Questão 9 da Ficha 3



Fonte: Aluno D

Figura 49–Resolução da Questão 10 da Ficha 3



Fonte: Aluno B

Nas resoluções observadas nas questões de 6 à 10, percebe-se a forte frequência que os alunos recorrem ao apelo visual para articular o conceito aprendido e assim alcançar a solução do problema. Fica ainda mais claro a contribuição que as aulas do primeiro momento proporcionaram através do lúdico e do material manipulativo, pois é evidente que por meio destes os alunos conseguiram construir o conceito abordado. E, além disso, pode notar-se que no segundo momento, durante o refinamento do conceito de fração, o apelo visual foi bastante requisitado para o desenvolvimento da atividade e finalização do processo. As dificuldades que surgiram durante a resolução dessas questões citadas tinham como origem a não compreensão da representatividade que o número fracionário pode assumir, e consequentemente, os alunos não conseguiam entender o que de fato aquela fração representava na questão.

Okuma (2010) em seu trabalho realizou uma atividade lúdica com seus alunos mesclando fração e literatura. Sua intervenção aconteceu com a contação de três pequenas histórias onde cada uma abordava um subconstruto diferente (parte-todo, número, operador multiplicativo). Além de conseguir a atenção dos seus alunos com o uso de atividade lúdica, a mesma constatou resultados positivos ao comparar a aplicação inicial feita na sondagem e a final onde trouxe situações-problemas envolvendo fração.

Figura 50 – Questão 12 da Ficha 3

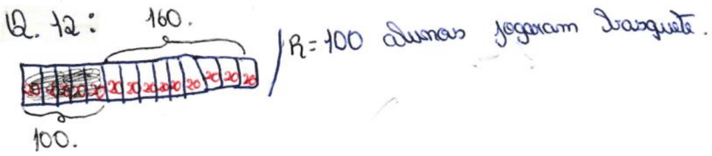
Ficha 3

Questão 12 - Aos alunos de 6° ao 9° ano do Educandário Santa Maria são dadas duas opções para atividade de educação física: basquete e vôlei. Sabe-se que $\frac{5}{13}$ dos alunos se inscreveram para basquete, enquanto 160 alunos se inscreveram para o vôlei. Nessas condições, quantos alunos têm no Educandário Santa Maria e quantos alunos se inscreveram para o basquete?

Fonte: <https://sites.google.com/site/conteudosdobimestre1/7o-ano/2----problemas-envolvendo-fracoes>

Na questão 12, os alunos, depois de interpretar visualmente a situação sob a perspectiva do conceito de fração parte-todo, percebem que precisam associar a quantidade descrita do inteiro à parte desse mesmo inteiro. Em seguida, depois de efetuar o quociente entre o valor discriminado e a quantidade de partes que ele representa do inteiro, os alunos encontram a solução do problema.

Figura 51–Resolução da Questão 12 da Ficha 3



Fonte: Aluno B

Mais uma vez fica evidente que uma das maiores dificuldades dos alunos convergia para a ruim interpretação da questão, ou melhor, a não identificação do inteiro (ou de sua natureza) abordado no problema.

Figura 52 –Questão 13 da Ficha 3

> Ficha 3
>
> Questão 13 - Em um jogo de basquete, Cauã acertou $\frac{5}{9}$ dos arremessos de meia distância e $\frac{1}{3}$ dos arremessos de lances livres. Se ele acertou 16 arremessos, quantos arremessos ele fez à cesta nessa partida?

Fonte: <https://sites.google.com/site/conteudosdobimestre1/7o-ano/2----problemas-envolvendo-fracoes>

Na questão 13 aconteceu de maneira clara a articulação do subconstruto parte-todo com o quociente. O parte-todo é utilizado para interpretar a situação trazida pelo problema (identificar a que parte do inteiro a quantidade de cestas informadas vale, $\frac{5}{9} + \frac{1}{3}$), e o quociente é usado pelos alunos para encontrar a solução ($\frac{8}{9}$ equivale a 16 cestas, logo $\frac{1}{9}$ equivale a 2 cestas).

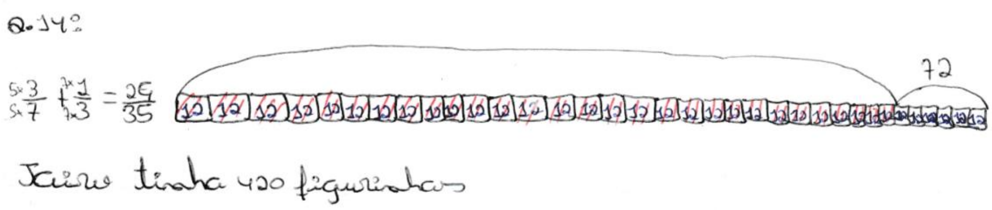
Figura 53 – Questão 14 da Ficha 3

> Ficha 3
>
> Questão 14 - Das figurinhas que Jairo possuía, $\frac{3}{7}$ ele perdeu e $\frac{2}{5}$ foram dadas a um dos irmãos dele, ficando 72 com Jairo. Quantos figurinhas Jairo possuía?

Fonte: <https://sites.google.com/site/conteudosdobimestre1/7o-ano/2----problemas-envolvendo-fracoes>

A última questão trabalhada foi em sala foi a de número 14. De início, os alunos perceberam que a solução se daria em somar as duas frações dadas com um número 72 para obter-se o total, porém, se fazia necessária entender a que parte do todo se referia 72. Para isso somaram as frações, e notaram que as partes que restavam para se formar o inteiro daquela soma equivalia a 72. Então, ao associar $\frac{6}{35}$ a 72, logo resolveram a questão.

Figura 54–Resolução da Questão 14 da Ficha 3



Fonte: Aluno E

As questões que constam na lista trabalhada neste terceiro momento e não foram mencionadas na análise tiveram seu aproveitamento no momento de correção que ocorreu após o momento apenas para verificação de desenvolvimento do conhecimento que foi construído na sala de aula.

Ao fim desse último momento foi notado um bom desempenho da turma no geral quanto a desenvoltura dos alunos na resolução das questões 6 a 18 da lista. Concluímos que o contato direto dos estudantes com os subconstrutos bem definidos em questões pertencentes a um contexto perto da realidade dos alunos foi bastante benéfico para a construção e aprimoramento dos seus conhecimentos sobre fração.

Quadro 2 - Desempenho da turma no terceiro momento

Aluno	Acertou	Errou	Meio acerto	Subconstruto mais difícil.
A	11	4	3	Quociente
B	16	1	1	-
C	12	4	2	Quociente
D	16	0	2	-
E	17	1	0	-
F	10	6	2	Quociente/Parte-todo
G	15	2	1	Quociente
H	12	4	2	Quociente
I	13	0	5	-
J	14	3	1	Quociente
K	12	4	2	Parte-todo
L	15	2	1	-
M	13	0	5	Quociente/Parte-todo
N	10	7	1	Quociente
O	10	4	4	Quociente

Fonte: Autoria própria

Pela tabela 1 percebe-se que o subconstruto quociente foi dito como o mais difícil de articular no momento de resolução. Percebe-se isso ao verificar que na verdade o problema reside no conhecimento prévio sobre divisão, que não está bem definido por motivo de negligência do aluno ou trabalho inadequado em anos anteriores. Porém, pode-se ver que o desempenho da turma foi com uma média de acertos de 73%.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades realizadas tiveram seu planejamento voltado para a compreensão do ensino e da aprendizagem de conceitos de fração, conteúdos considerados desafiantes, tanto do ponto de vista de quem ensina quanto de quem aprende. O aluno foi participante ativo da construção do seu conhecimento. Essa construção se deu de forma contínua, perpassando um conjunto de atividades separadas neste trabalho em três momentos, tanto para fins de análise de dados, como também estruturantes da organização didática. As atividades pensadas tiveram início no diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos até a facilidade dos mesmo para responderem os exercícios do último momento.

Neste trabalho também destacamos a relevância do material manipulativo como contribuintes da aprendizagem dos alunos. O contato com o material concreto pode ter influenciado no processo mental do aluno quanto a associação da quantidade tratada e o número fracionário.

Outra observação é que por meio deste trabalho percebemos que os alunos desenvolveram seus conceitos, principalmente, sobre o que a fração representa, ou seja, foi perceptível que os alunos ampliaram seus conhecimentos sobre o que as frações podem representar no mundo fora da aula de matemática. Além do contato direto com três interpretações (ou subconstrutos) dos números fracionários. As atividades foram pensadas de modo que os alunos manipulassem esses números para solucionar problemas propostos em contextos mais próximos do cotidiano do aluno, agregando a isso novos conhecimentos sobre o que são os números fracionários e suas diferenças a partir de seus subconstrutos.

Pode-se notar também que, além da contribuição do uso do material manipulativo, a utilização da resolução de problemas como proposta metodológica foi bastante interessante no processo final das atividades, pois permitiu aos alunos entrarem em contato direto com dois subconstruto (quociente e operador) e os agregarem aos seus esquemas mentais sobre fração através de problemas inseridos em contextos conectados, total ou parcialmente, à sua realidade.

Ao fim das atividades, como poderemos perceber na análise dos resultados, do desempenho dos alunos obtido que o aprendizado nesse momento foi significativo para eles, pois os mesmos, além de resolverem os problemas propostos, sentia-se mais confiante e interessado sobre o assunto. Portanto, o trabalho com material manipulativo e resolução de problemas é bastante interessante para trabalhar o assunto de fração.

Finalizando, agradecendo a todos que fizeram parte dessa fase da minha formação e em especial aos meus alunos que, tão inocentes, foram sujeitos dessa pesquisa. De fato, a formação inicial é só uma fase, pois já tenho a consciência que outros processos formativos virão e que, principalmente, é preciso refletir sobre as relações que precisamos criar entre conteúdos específicos e pedagógicos. Gostaria de reforçar que me sinto apto a contribuir com as aprendizagens de crianças e adolescentes desse país.

6. REFERÊNCIAS

ADJIAGE, R. & PLUVINAGE, F. **Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des reationnels**. Revista Recherches en didactique des mathématiques. v. 20, n. 1, p. 41-88, 2000.

ALLEVATO, N S. G. e ONUCHIC, Lourdes de la R. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos,avanços e novas perspectivas.** Research on Problem Solving: directions, advances and new perspectives. Bolema, ISSN: 0103-636X.Rio Claro (SP), Ano 25, nº41, 2011, pp. 73 a 98.

AZEVEDO, M. V. R. **Jogando e construindo matemática:** a influência dos jogos emateriais pedagógicos na construção dos conceitos em matemática. São Paulo: VAP, 1999.

BEHR, M. J. *et al*.. **Rational number, ratio, and proportion**. Revista Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. p. 296-333, 1992.

BERTONI, N. E. **Módulo VI: Educação e linguagem matemática IV: frações e números fracionários**. Universidade de Brasília. Brasília. 2009.

BOYER, C.B. **História da matemática**; tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAVALCANTI, L. B. **O uso de material concreto com representações retangulares na construção do conceito de decomposição multiplicativa**. Dissertação (mestrado).

CAZORLA, I. M. & SANTANA, E. R. dos S. **Concepções, atitudes e crenças em relação a**

Matemática na formação do professor da educação Básica. Publicação da 28ª Reunião da

ANPED. 2005. Acesso em 20 de Out de 2011. Em <http://www.anped.org.br/reunioes/28/textos/gt19/gt191140int.doc>

Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação.Pernambuco, 2006.

COSTA, L.V.O. **Números reais no ensino fundamental: alguns obstáculos epistemológicos.** Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação. São Paulo, 2014.

CUNHA, E. C. **Reforço Escolar: O uso de jogos e materiais manipuláveis no Ensino de Frações**. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho - RO, 2016.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2007.

DANTE, Luís Roberto. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Editora1 Ática, 1998.

JESUS, M.A.S. **As atitudes e o desempenho em operações aritméticas do ponto de vista da aprendizagem significativa**. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinhas, Faculdade de Educação. Campinas-SP, 2005.

JUSTULIN, Andresa Maria. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas**. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2014.

LOPES, A. J. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**. Revista Boletim de Educação Matemática, v. 21, n. 31, p. 1-22. 2008.

MAMEDE, E. **Sobre o ensino e aprendizagem de frações nos níveis elementares de ensino**. Actas do ProfMat. Universidade do Minho.2011.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2005.

MOYER, Patricia S. **Ainda estamos nos divertindo? Como os professores usam materiais manipulativos para ensinar matemática.** Educational Studies in Mathematics,n 47. 2001. Acesso em abril de 2019. Em <https://pt.scribd.com/document/285790222/Como-Os-Professores-Usam-Materiais-Manipulativos-Para-Ensinar-Matematica>

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U., & HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford. jun. 2003.

OKUMA, E. **Ensino e aprendizagem de fração: um estudo comparativo e uma intervenção didática**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia). Centro Universitário Católico Salesiano Auxilium, Lins - SP, 2011.

PAIS, L.C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria.** Acesso em abril de 2018. Em

<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>

PASUCH, A., BARBOZA, J. V., & BASSANI, L. T. **A Utilização Do Lúdico No Processo De Ensino-Aprendizagem De Frações**. in: Encontro Nacional de Educação Matemática. 9. Curitiba. 2013.

PERNAMBUCO. **Secretaria de Educação Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática**. Recife, Secretaria de Educação, 2008.

PONTE, J. P. and QUARESMA, M. **O papel do contexto nas tarefas matemáticas**. Revista Interacções. v. 22.1, p. 196-216, 2012.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional: relações necessárias à sua compreensão**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, SP, 1997.

SARMENTO, A. K. C. **A utilização dos materiais manipulatives nas aulas de**

matemática. In VI Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI, 2010.

SILVA, F., & SANTO, A. O. **A contextualização: uma questão de contexto**. in: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Pernambuco.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP. 2005.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Revista Bolema-Boletim de Educação Matemática. v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOUZA, N. F. **Contextualização no ensino da Matemática: Análise de uma coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

VALERO, P. **Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia**. Revista Quadrante. v.11, n. 1, p. 33-40, 2002.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez: Autores associados (Coleção temas básico a de pesquisa-ação), 1992.

TRIPP, D. **Pesquisa-ação: Uma introdução metodológica**. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. Educação e Pesquisa, v, 31, n, 3, São Paulo, 2005.