UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE GRADUAÇÃO DAS EXATAS E NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

THAIS MAIA GALVÃO DE SOUZA

ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OS SIGNIFICADOS PARTE-TODO E OPERADOR DE FRAÇÕES

RECIFE - PE
2019

THAIS MAIA GALVÃO DE SOUZA

ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OS SIGNIFICADOS PARTE-TODO E OPERADOR DE FRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador(a): Prof. Jadilson Almeida

RECIFE - PE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G182e Maia, Thaís
ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OS SIGNIFICADOS PARTE-TODO E OPERADOR DE FRAÇÕES / Thaís Maia. - 2019.
45 f. : il.

Orientador: Jadilson .
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2019.

1. Frações. 2. Matemática. 3. Metodologia. 4. Resolução de problemas. I. , Jadilson, orient. II. Título

CDD 510

ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OS SIGNIFICADOS PARTE-TODO E OPERADOR DE FRAÇÕES

Discente: Thaís Maia Galvão de Souza

Orientador: Prof. Dr Jadilson Ramos de Almeida

____

Prof. Dr Jadilson Ramos de Almeida

____

Prof. Dr. Severino Barros de Melo

____

Profª. Drª. Elisângela Bastos de Melo Espíndola

RECIFE - PE
2019

Dedico esse trabalho a meus pais e a todos aqueles que de alguma forma estiveram próximos a mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, pela oportunidade que tive de estudar e aprender. À minha família, principalmente para meus pais Janaína Maia, a todo momento esteve confiante que eu ia conseguir chegar até o fim e Messias Gomes, quem me orientou e sempre me incentivou aos estudos nunca deixando faltar nada nesse processo.

Agradeço à meu noivo Vital Lima, que me apoiou e teve muita paciência na reta final do curso.

À prof.ª Cleide Oliveira, pelo acompanhamento, orientação, amizade e companheirismo no qual foi primordial para o meu processo de ensino.

Aos professores Anette Soares, Ângela Didier, Eberson Ferreira, Severino Barros, Yane Lisley, Wagner Rodrigues e Wanderson Aleksander pelo processo de formação.

Ao professor Jadilson Almeida pela orientação desse trabalho.

Aos colegas e amigos de classe Naara, Victória, Marcelo, Jeandson, Tayslane, Hugo, Yasmim, Anne, dentre outros que me ajudaram e estiveram juntos nos bons e maus momentos.

Por fim, meu agradecimento especial vai para a reitoria da Universidade Federal Rural de Pernambuco que permitiu durante a formação que eu tivesse um ensino de qualidade.

RESUMO

Ensinar matemática é um grande desafio para os professores, uma vez que essa disciplina carrega o estigma de ser de difícil compreensão e distante das aplicações práticas do dia a dia. A fim de transpor esse desafio, é importante que o processo de ensino aprendizagem de matemática consiga envolver aspectos práticos, que a tornem mais próxima da realidade dos alunos. Nesse sentido, a metodologia de resolução de problemas se apresenta como uma boa ferramenta para esse fim. No caso do ensino de frações, que muitas vezes é um assunto um tanto abstrato para os alunos, essa metodologia se mostra ainda mais útil, principalmente no ambiente do sexto ano do ensino fundamental, que representa grandes mudanças na rotina dos alunos, com o aumento do número de disciplinas e professores. Este trabalho tem o objetivo de abordar a metodologia da resolução de problemas para o ensino de frações especificamente para turmas do 6° ano do ensino fundamental, citando os principais significados de frações e apresentando dois problemas sobre alguns dos tópicos desse assunto, que foram aplicados numa turma de 6° ano do ensino fundamental. A forma de solução desses problemas foi analisada e os resultados apontam que os alunos têm mais facilidade com questões do tipo parte-todo.

Palavras-chave: Frações. Matemática. Metodologia. Resolução de Problemas.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática é uma atividade desafiadora principalmente para a atual geração de jovens, que foi a primeira a crescer em um mundo no qual a tecnologia é presença dominante, em que computadores e aparelhos celulares com muitos recursos e diversos outros acessórios eletrônicos são utilizados para se comunicar, se divertir e também para estudar. Diante desse cenário, a busca por alternativas de ensino que possam ser mais interessantes para os alunos deve ser constante e se configura um grande desafio para os docentes.

Na área da educação, um dos desafios que se encontra principalmente na área das ciências exatas, é ter opções de ferramentas metodológicas eficazes no processo de ensino aprendizagem. Sabe-se que o processo do ensino é baseado na construção do conhecimento, e nesse processo é importante o educador ter uma sensibilidade no ato de ensinar. Souza e Dourado (2015) afirmam que promover uma reforma que possa acompanhar o desenvolvimento científico, tecnológico, social, econômico e ambiental é um dos maiores desafios da educação atualmente, pois um dos objetivos maiores da educação é o desenvolvimento de uma sociedade mais justa, socialmente e economicamente.

Pensadores e estudiosos do ramo do ensino, tais como Comenius, Locke, Pestalozzi, Froebel, Herbart, Dewey, Poincaré, Montessori, Piaget e Vygotsky, dentre outros, refletiram sobre como o processo da construção do conhecimento pode ser facilitada (LORENZATO, 2012). Sendo essas ferramentas facilitadoras devem ter características variadas, seja em forma de jogos, brincadeiras, material tátil e visual, dentre outros recursos didáticos. Uma das propostas metodológicas para facilitar o processo de construção do conhecimento matemático é a utilização de metodologia da resolução de problemas.

Muitos confundem situação-problema e exercício. O exercício consiste, basicamente, na fixação através da repetição. A situação-problema já trabalha com uma gama de fatores: leitura e intepretação dos dados, compreensão do problema, tomada de decisão, verificação da resposta de maneira crítica, criatividade para encontrar a solução, não ter a solução imediata, dentre outros.

Esses problemas podem ser trabalhados e resolvidos em grupos, discutindo as possíveis maneiras de resolvê-los, se há mais de uma forma de chegar à solução, criando situações de desequilíbrio na sala de aula.

A metodologia da resolução de problemas também se aplica para o ensino de frações, e se apresenta como uma boa ferramenta para isso. Essa metodologia se mostra ainda mais útil, principalmente no ambiente do sexto ano do ensino fundamental, que representa grandes mudanças na rotina dos alunos.

No ensino de frações, são trabalhados alguns significados importantes como a relação parte-todo, o quociente entre duas variáveis, o número na reta numérica, o operador e a medida. Assim, o conceito de fração poderá ser construído se contemplado um conjunto de situações, explorando seus diferentes significados, dentro de um contexto de quantidades contínuas e discretas.

As orientações curriculares (BNCC) para o sexto ano do ensino fundamental referenciam o ensino de frações e a resolução de problemas nos seguintes tópicos: EF06MA09, EF06MA10, EF06MA11, EF06MA13 e EF06MA15, que serão abordadas mais adiante.

Diante disso, nosso objetivo de pesquisa é analisar as estratégias de alunos do 6º ano na resolução de problemas envolvendo os significados parte todo e operador de frações.

1. METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A metodologia da resolução de problemas advoga que se constrói conceitos matemáticos por meio de situações-problema, a qual estimula a curiosidade matemática, investigação e exploração de novos conceitos (SÀ et al, 2016). Para Souza e Dourado (2015) a resolução de problemas vem conquistando espaço nas instituições de ensino (seja no básico, cursos de graduação e pós-graduação), podendo ser aplicado em diversas disciplinas, não somente na matemática. Como mencionado sobre essa metodologia ganhar espaço, é de fato reconhecido institucionalmente, como pode ser visto a proposta de resolução de problema sugerido em Brasil (2002, p.112).

> A resolução de problemas é peça central para o ensino da matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação são passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

Deste modo, esse documento ministerial sugere que os professores possam realizar um ensino de forma que seja desenvolvido essas competências de reflexão da matemática baseado em situação-problema. Da mesma forma no documento estadual os Parâmetros da Educação Básica, Pernambuco (2012, p. 29) considera que:

> Um primeiro caminho para levar o estudante a ‘fazer matemática é privilegiar a resolução de problemas como estratégica de ensino e aprendizagem. A resolução de problemas é um tema central quando se discute qualidade no ensino da matemática. Diversos autores ressaltam a importância da estratégia de resolução de problemas na construção do conhecimento matemático e afirmam que a atividade de resolver problemas está no cerne da ciência matemática.

Assim, é importante ver a resolução de problemas como uma metodologia reconhecida institucionalmente para o ensino da ciência matemática. Pois de tal modo, possibilita que professores que utilizam dessa ferramenta possam estar mais abertos a novas formas de ensinar, devido à visibilidade que é dado para a metodologia de resolução de problemas.

O fato de uma metodologia estar ligado ao ‘problema’ é explicado por Nuñes et al (2004, p. 151) dizendo que “o problema é uma palavra de caráter polissêmico, tendo como noções mais comuns, na linguagem cotidiana, uma dificuldade, uma questão por resolver, um obstáculo, um conflito, um dano, a causa de uma situação não desejada, etc.”, sendo assim, uma forma de provocar o aluno a construir um pensamento matemático.

Van De Walle (2009, p.57), um dos estudiosos nessa área diz que “A maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados através da Resolução de Problemas.”, para acrescentar essa afirmação Chambers e Timblin (2015, p.30) reforça que “Se a matemática é principalmente uma ferramenta para resolver problemas sua razão de ser no currículo é clara: ela existe para que os alunos possam adquirir as habilidades que necessitam para resolver problemas.”. Então, a proposta metodológica de resolução de problemas vai além de uma forma de ensinar, como também permite que o aluno possa desenvolver formas de pensar matematicamente.

Nessa perspectiva de desenvolver junto ao aluno a capacidade do pensamento matemático, é necessário que a prática pedagógica do professor possa dialogar com a ferramenta da metodologia de resolução de problemas. A prática pedagógica se baseia partindo do conhecimento prévio dos alunos, é uma tendência que está ocorrendo no ensino do século XXI, tornando a aula um momento dinâmico onde é despertado o criticismo para a aprendizagem (SÀ et al, 2016).

Nesse processo de trabalhar com o conhecimento prévio do aluno, é interessante também que o aluno tenha autonomia em relação ao aprendizado, assim como aponta Freire (2011) que “ensinar exige respeito à autonomia do educando”, dito isto, o processo do aprendizado utilizando a proposta metodológica de resolução de problemas, além de ser uma ferramenta didática, também auxilia no processo de formação do aluno como cidadão ativo, como explicitado por Mendes (2009, p. 80):

> A resolução de problemas pode ser tomada como uma das tendências metodológicas em educação matemática que pode contribuir amplamente para a formação de um aluno autônomo, consciente das possibilidades criativas que a matemática lhe oferece, bem como das suas ações como cidadão. Outrossim, se essa capacidade criadora, emancipatória e cidadã não for estimulada nas atividades de resolução de problemas, certamente estaremos contribuindo para a exclusão desse processo emancipatório e cidadão.

Vê-se que é uma alternativa interessante trilhar o caminho da aprendizagem baseando em problematizações para que se possa construir um conhecimento sólido importantes para a formação crítica do aluno, em que o professor é um mediador auxiliando na construção das ideias autônomas do educando. (SÀ et al, 2016).

Para Polya (1978), um professor de matemática tem a responsabilidade de estimular nos alunos a curiosidade e despertar o gosto pelo pensamento independente. É necessário que o professor de matemática tenha um aporte teórico e prático além dos conteúdos da disciplina, como também na didática. Isso se gratifica que o profissional de ensino seja construtivista.

O professor construtivista sempre está procurando situações rotineiras que possam ser usadas para despertar o pensamento numérico com seus alunos (KAMIL, 1996), desta forma a metodologia de resolução de problemas tem um significado maior se o educador estiver comprometido com a qualidade do aprendizado do aluno, e não somente em prepará-lo para avaliações.

A proposta metodológica da resolução de problemas tem um sentido mais eficaz se aplicado para desenvolver o pensamento numérico dos alunos, como dito anteriormente. Porém, devido ao método de ensino tradicional dito por Saviani (2003), em que o professor é o detentor do conhecimento e não tem a relação de solidariedade entre professor e aluno. Tal forma de ensino foi criticada por Freire (2011) que a considera um sistema bancário, no qual o professor faz o ‘depósito’ no aluno, e a realização da ‘retirada’ desse valor é realizado no momento das avaliações.

O ensino baseado somente para aplicação de provas, também é comentado por Van de Walle (2009, p. 31-32), para ele, o ensino da matemática deve ir além dos exames de vestibular:

> As pressões das pontuações dos testes estatais têm uma tendência para reforçar as abordagens de “exercícios de adestramento’ embora demonstrem consistentemente que tais métodos são ineficazes. Os exercícios podem, em curto prazo produzir bons resultados em testes tradicionais, mas os seus efeitos têm produzido, em longo prazo, uma nação de cidadãos felizes em admitir que não conseguem fazer ou compreender matemática.

Essa preocupação no ensino baseada em problemas também é vista e comentada nos Parâmetros curriculares de Pernambuco (2012, p. 31):

> O problema aberto procura auxiliar o estudante na aquisição de um processo de resolução de problemas em que desenvolve a capacidade de realizar as quatro ações realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testar essas hipóteses e validar resultados. A prática, em sala de aula, desse tipo de problema, acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos, e entre os alunos e o conhecimento matemático, que passa a ser visto como algo provido de uma dinâmica particular, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado nas avaliações.

Para que o ensino seja parcialmente satisfatório, é necessário que o professor tenha uma postura didática correta e coerente com a aplicação de resolução de problemas, e para isto Wan De Walle (2009) diz que o problema deve ser relacionado com o cotidiano do aluno, assim, a seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão dos mesmos.

No que concerne a trazer um problema contextualizado com a realidade do estudante, Dante (1994, p. 52) comenta das dificuldades que o professor de matemática pode enfrentar para elaborações na sua prática educativa:

> Ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais complexa do que “ensinar algoritmos e equações.” Na resolução de problemas, o professor deve funcionar como incentivador e moderador das ideias geradas pelos próprios alunos. Nesse caso, as crianças participam ativamente “fazendo matemática”, e não ficam passivamente “observando” a matemática “ser feita” pelo professor.

O material utilizado também deve ser adequado para que o professor tenha uma boa performance no ato de ensinar. Porém, muitos materiais ainda são baseados em exercícios de repetição, como relatado nos Parâmetros curriculares de Pernambuco (2012, p. 30) “Na maioria dos livros didáticos [...] o conteúdo era apresentado aos alunos, seguindo de alguns problemas resolvidos, que serviriam de modelo para os exercícios de fixação, uma bateria extremamente longa de problemas de mesma estrutura.”.

Então o sucesso dessa proposta metodológica vai além do método em si. Ele precisa ser refletido e exercitado sempre pelo docente. Ainda sobre a questão da aplicação da abordagem da resolução de problemas, Nuñes (2004, p. 155-156) comenta que:

> As tarefas-problema são as atividades que se organizam para propiciar aos alunos maior participação e dinâmica na busca do desconhecido, a partir do conhecido, representando um eixo de mediação entre o problema e a busca de sua solução. Essas tarefas caracterizam-se por promover nos alunos novas perguntas, novos exemplos, novas dúvidas, novos questionamentos, polemizando sobre as possíveis alternativas e posicionamentos inerentes aos problemas, os quais contribuem para alcançar o objetivo desejado.

Como dito em Pernambuco (2012), a proposta de ensino tradicional está ainda muito arraigado, e quando os alunos se deparam com uma questão em que está envolvido a resolução de problemas, eles são condicionados a não se preocupar com o enunciado da questão, e sim, identificar os números presentes e descobrir qual operação deverá ser utilizada para chegar no resultado esperado. Assim, priva o aluno de desenvolver senso crítico, e vai totalmente contra ao método de resolução de problemas, que é analisar a situação e realizar a tomada de decisões a partir dessas reflexões.

2 FRAÇÕES: SIGNIFICADOS E ENSINO

O ensino de frações no 6º ano do Ensino Fundamental abrange a resolução de problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural. Envolve também adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária e apresentem números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação.

O conteúdo no sexto ano trata de porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros e que abordem a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

2.1. SIGNIFICADOS DE FRAÇÕES

Fração é uma maneira de representação de uma quantidade partindo de um valor que é dividido por um determinado número de partes iguais. Em linhas gerais, a fração **a/b** é a representação genérica do valor **a** que é dividido por **b** partes iguais, sendo **b ≠ 0.** Na fração, o termo superior é chamado de numerador e o termo inferior chamamos de denominador. Em nossa fração genérica temos que o termo a é o numerador e o termo b é o seu denominador (MONTEIRO, 2010).

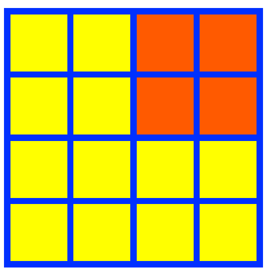
Figura 1 - Representação de Fração

$$\frac{a}{b}\begin{array}{l} \longleftarrow \text{Numerador} \\ \\ \longleftarrow \text{Denominador} \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria

A seguir, será abordada a forma de interpretação de frações. Dada uma figura dividida em 16 partes iguais, das quais tomamos 4. Neste caso temos 4 como numerador e 16 como denominador. Daí podemos concluir que o denominador representa o total de partes iguais que a figura foi dividida e o numerador representa quantas partes foram tomadas (http://www.matematicadidatica.com.br/Fracao.aspx).

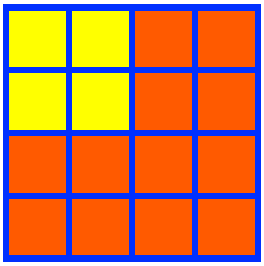
Figura 2 - Representação de Numerador e Denominador - 01



Fonte: http://www.matematicadidatica.com.br/Fracao.aspx

Então podemos representar a fração 4/16 que significa que do total das 16 partes componentes da figura, tomamos 4 delas, ou seja, quatro dezesseis avos da figura. Já na figura a seguir, representamos que das mesmas 16 partes componentes da figura vamos tomar 12. A fração nesse caso passa a ser 12/16 ou doze dezesseis avos da figura (http://www.matematicadidatica.com.br/Fracao.aspx).

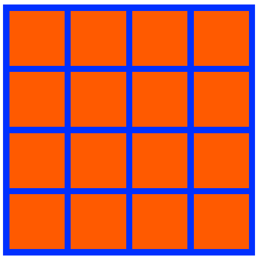
Figura 3 - Representação de Numerador e Denominador - 02



Fonte: http://www.matematicadidatica.com.br/Fracao.aspx

No caso de tomarmos todas as partes da figura, termos uma fração representada por 16/16, que equivale a 1. A figura abaixo representa esse caso.

Figura 4 - Representação de Numerador e Denominador - 03



Fonte: http://www.matematicadidatica.com.br/Fracao.aspx

2.2. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: O QUE DIZEM ALGUMAS PESQUISAS

Já se pode observar nas escolas que o processo de ensino e aprendizagem passa por uma constante mudança para ser diversificado, com apresentação de metodologias e mecanismos que proporcionem maior participação do aluno para a construção do seu próprio conhecimento. É de suma importância o reconhecimento e a individualidade de cada aluno, para que assim possam ser oferecidas condições adequadas de ensino compreendendo a diferença de cada indivíduo e maximizando o processo de ensino e aprendizagem (MONTEIRO, 2010, p. 19).

Pesquisas feitas por Magina e Campos (2008), Merlini (2005), Monteiro (2010) e Nunes e Bryant (1997), apontam que a aprendizagem de frações é um dos conteúdos que os alunos apresentam bastante dificuldades e uma delas está relacionada ao conceito e aos diversos significados de frações.

Monteiro (2010), por exemplo, destaca que, o estudo de frações não é absorvido pelos alunos, pois mesmo iniciando seu estudo nas séries iniciais, quando estão nos anos finais do Ensino Fundamental, ainda não compreendem corretamente os significados associados e aos procedimentos de cálculos envolvendo frações. O autor aponta que uma possível explicação para a dificuldade de aprendizagem pode ter ligação com a ruptura da noção de números naturais que os alunos possuem. Com isso, é importante a compreensão das frações e sua amplitude, em primeiro momento pelo professor, ao reconhecer a individualidade de aprendizado de cada aluno, para que ele possa compreender o conteúdo das frações e conseguir aplicar.

Ainda de acordo com Monteiro (2013):

> Existe uma grande quantidade de algoritmos, conceitos e regras que compõem o estudo das Frações. Lellis e Imenes (1994) ilustram que, para os alunos, há que extrair inteiros, há de dividir “multiplicando pela inversa da segunda Fração”, há que transformar números mistos em Frações impróprias e entre outros (MONTEIRO, 2013, p. 25).

De acordo com David e Fonseca (1997) ao se optar por um tratamento de cunho conceitual, se faz necessária uma reflexão sobre os diversos significados associados à representação fracionária.

O significado é uma relação do sujeito com as situações, assim, são os esquemas evocados por uma situação que constitui o significado dessa situação. Estes esquemas são, portanto, os comportamentos e suas organizações. Uma situação dada ou um simbolismo particular não evoca em um indivíduo todos os esquemas disponíveis, isto é, quando se diz que uma palavra tem determinado significado, estamos recorrendo a um subconjunto de esquemas e, dessa forma, operando uma restrição ao conjunto dos esquemas possíveis.

Tomando um significante qualquer como, por exemplo, 1/5. O significado desse símbolo dependerá dos esquemas que o sujeito possui para dar significado a essa representação, bem como a situação em que ele está envolvido.

Os seguintes significados podem ser atribuídos:

- Relação Parte-todo, ou seja, um terreno dividido em 5 partes congruentes, sendo que uma delas está ocupada com uma construção.
- Quociente entre duas variáveis: 1 terreno dividido entre 5 proprietários.
- Número na reta numérica, ou seja, 0,20.
- Como operador, ou seja 1/5 de um litro de água = 200 ml de água.
- Medida: a chance de tirar 1 carta vermelha quando se tem uma carta vermelha e 4 cartas pretas.

Assim, o conceito de fração poderá ser construído se contemplado um conjunto de situações, explorando seus diferentes significados, dentro de um contexto de quantidades contínuas e discretas.

Cabe explicitar que entende-se por quantidades contínuas aquelas que são passíveis de serem divididas, sem que, necessariamente percam as suas características. Por exemplo: um chocolate pode ser dividido em inúmeras partes sem deixar de ser chocolate. Por outro lado, quantidades discretas dizem respeito a um único todo, cujo resultado da divisão deverá produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades.

Assim, em uma situação, por exemplo, na qual precisamos dividir 7 bolinhas para 3 crianças, teremos como resultado dessa divisão 2 bolinhas para cada criança e sobrará 1 bolinha. Portanto, as frações não funcionam como ferramenta bem adaptada para resolver tal situação.

Em contrapartida se lançarmos mão de uma situação em que devemos distribuir 7 chocolates para 3 crianças encontraremos na fração uma ferramenta bem adaptada para expressar o resultado de tal situação, isto é, cada criança receberá 2 1/3 de chocolate.

Então existem diferentes classificações a priori dos tipos de situações e de significados das frações, sem que a importância dessas classificações para o ensino tenha sido esclarecida.

Esses significados, apresentados a seguir, são da fração como parte-todo, fração como medida, fração como quociente ou como divisão indicada, fração como razão e fração como operador

2.2.1 A fração como parte-todo

A ideia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, na qual cada parte pode ser representada como 1/n.

Então, o significado Parte-todo pode ser assumido como um dado todo (contínuo ou discreto) dividido em partes iguais em situações estáticas, em que o uso de um procedimento de contagem consegue chegar a uma representação correta, isto é, esse procedimento consiste em quantas partes o todo foi dividido (denominador) e o número de partes tomadas (numerador).

2.2.2 A fração como medida

O primeiro significado com o qual os alunos têm contato, e conforme apresentado anteriormente nesse trabalho, é a ideia de comparação da parte com o todo. A assimilação desse significado depende do entendimento que se tem da ação de repartir (em partes iguais) regiões geométricas, o que envolve uma compreensão da noção de área. Outras formas de comparação parte-todo são mostradas no quadro a seguir.

Quadro 1 - Outras formas de comparação parte-todo

Forma	Exemplo
Subconjunto e conjunto discreto do qual ele é parte	De um total de 20 balas, 3/4 são de hortelã
Fração na reta numérica	2/3 = ponto que está a 2/3 da unidade de distância do ponto zero

Fonte: Elaborado com base em DAVID e FONSECA (1997).

De acordo com CARAÇA (1984, p. 29), a operação de medição passa necessariamente pela comparação entre duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes etc., mas não se resume nisso.

2.2.3 A fração como quociente ou como divisão indicada

Ocorrem situações em que a ideia de medida associada à representação fracionária é muito evidente. Porém, em outros casos, as frações aparecem muito mais como a expressão de um quociente ou como uma divisão indicada. Como exemplo desses casos podemos citar a resolução de problemas de partilha, como o caso da divisão dos camelos em TAHAN (2007).

Nesta passagem do livro, Beremiz Samir, (o homem que calculava) e seu colega de jornada encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Ao perguntar do que se tratava foi informado que os três irmãos haviam recebido como herança 35 camelos que, de acordo com a vontade do pai deveriam dividir da seguinte forma: O mais velho deveria receber a metade, o segundo filho deveria receber uma terça parte e o mais novo deveria receber apenas a nona parte do lote de camelos. Os irmãos não sabiam como realizar a partilha, visto que a mesma não é exata.

Beremiz propôs-se a realizar a divisão de forma justa e para tal, acrescentou ao lote o seu próprio camelo. Então agora eram 36 camelos a serem divididos. Para o irmão mais velho que receberia a metade de 35, ou seja 17,5 ele entregou a metade de 36, ou seja 18. Para o irmão do meio que receberia um terço de 35, ou seja, 11,67 ele entregou um terço de 36, ou seja 12. Para o irmão mais novo que receberia um nono de 35, ou seja, 3,89 ele entregou um nono de 36, ou seja, 4.

Todos saíram lucrando e ficaram muito satisfeitos com a divisão. Ao somar os camelos distribuídos temos 18 + 12 + 4 = 34, ou seja, Beremiz pegou seu camelo de volta e ainda sobrou 1. A questão é: Qual a explicação matemática para a partilha realizada por Beremiz, de tal forma que além de conceder vantagens aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para si?

A resposta está na adição de frações, ou seja, ao fazermos a operação 1/2 + 1/3 + 1/9, vamos obter: 9/18 + 6/18 + 2/18 = 17/18, ou seja, a partilha resulta menos que um inteiro, sobrando justamente 1/18 que de 36 camelos representa 2 camelos (os que sobraram).

2.2.4 A fração como razão

Conforme David e Fonseca (1997) uma razão é uma expressão da relação entre os elementos de um par ordenado de números, quantidades ou grandezas.

Portanto, a fração, quando associada a uma razão, expressa um índice comparativo. Quando isso se refere a comparação de grandezas de mesma natureza, pode-se compará-las entre uma parte e o todo, entre partes disjuntas e complementares, ou entre partes, que não sejam nem disjuntas e nem complementares, não sendo do interesse da análise o tamanho da parte e nem do todo ou da outra parte, mas somente a relação que existe entre elas. (DAVID e FONSECA, 1997).

Como exemplo podemos citar a capacidade de conversão de gols por jogadores profissionais de futebol em cobranças de pênaltis. Consideremos a seguinte situação: o jogador A marcou 5 gols de pênalti na temporada enquanto o jogador B marcou apenas 3. Não se pode afirmar que o jogador A é mais eficiente que o jogador B até se saber quantos pênaltis cada um bateu na temporada. Supondo que o jogador A cobrou 10 pênaltis e o jogador B cobrou 4 pênaltis, a eficiência do jogador A é 5/10, ou seja 50% enquanto a eficiência do jogador B é 3/4, ou seja, 75%.

2.2.5 A fração como operador

A fração como operador, como o próprio nome já diz, ela tem a função de operar. Isso é bem explicado de acordo com BEHR et al. (1983):

> Quando se associa ao número racional na forma fracionária p/q a ideia de um operador, passa-se a ver esse número como uma função que ora transforma uma figura geométrica em outra, cujo tamanho é p/q vezes o tamanho inicial, ora transforma um conjunto em outro conjunto com uma quantidade de elementos que é p/q vezes sua quantidade inicial de elementos. Quando aplicamos p/q a um objeto contínuo (por exemplo, um comprimento), podemos pensar em p/q como uma combinação de ampliação-redução. Assim, se p/q age sobre um segmento de reta de comprimento L, este segmento tem seu comprimento ampliado de p vezes e depois reduzido par um fator q. Quando p/q opera sobre um conjunto discreto, adora-se uma interpretação de multiplicador-divisor. O número racional p/q transforma um conjunto de n elementos inicialmente num conjunto com np elementos, e depois esse número é reduzido a np/q. (BEHR et. al, 1983).

Assim, dada uma fração qualquer p/q operando com um número inteiro, temos que, essa fração consisti em operador multiplicativo desse número. Exemplo: 2/3 de 30. Podemos calcular de várias maneiras, mas, se multiplicarmos 2 por 30 e posteriormente dividir por 3 teremos o resultado 20. Outros autores, como David e Fonseca (1997) ilustram esse caso com o seguinte exemplo:

> Quando dizemos que, pelos últimos levantamentos, 2/3 dos formandos em Pedagogia ingressarão na carreira do magistério, podemos considerar a fração 2/3 como uma medida: a unidade desta medida é o total de formandos em Pedagogia; ela será dividida em subunidades (terços) que cabem 2 vezes no total de formandos que ingressam na carreira do magistério. Seguindo este raciocínio, se tivermos 96 formandos na Pedagogia, para sabermos quantos ingressarão na carreira de magistério dividiremos 96 por 3 (para achar 1/3) e depois multiplicaremos o resultado por 2. Podemos, entretanto, tomando esta mesma situação, conferir à fração 2/3 a interpretação de um operador: ao aplicarmos o operador 2/3 ao número de formandos em Pedagogia, obteremos o número de formandos que ingressarão na carreira do magistério. Para o caso de 96 formandos, o cálculo seria 96x2:3. Trata-se, portanto de uma mesma situação, mas são interpretações diferentes e geram procedimentos diferentes (DAVID e FONSECA, 1997).

Como podemos observar, nesse caso, a fração funciona como um multiplicador de uma quantidade, como por exemplo para a obtenção do número de formandos que seguirão magistério.

2.3. O ENSINO DE FRAÇÕES NAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC – o ensino de frações inicia-se no 4º ano do Ensino Fundamental. Este primeiro contato dos alunos com os números fracionários tem como objetivo fazê-los reconhecer as frações unitárias - $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ como unidades de medidas menores do que uma unidade (BRASIL, 2016).

No 5° ano, o ensino de frações deve ser desenvolvido de forma que os alunos sejam capazes de identificar e representar frações, associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo; identificar frações equivalentes; comparar e ordenar números racionais positivos. No 6º ano, as definições de frações são retomadas, estudando-se as quatro operações: Adição, subtração, multiplicação e divisão (BRASIL, 2016).

Assim, nos três primeiros anos do Ensino Fundamental, os estudantes lidam com o conceito de números naturais, suas propriedades e os aplicam nas operações matemáticas básicas. Quando as frações e a comparação entre elas aparecem como um novo estímulo, o aluno precisa modificar ou acomodar[1] este estímulo recebido, conforme os esquemas que já possui e assimilar o novo estímulo.

Desse modo, quando o professor pergunta, qual é o maior: 2/9 ou 5/9, o esquema do estudante comparar o tamanho do número é 5 > 2. Assim, quando ele recebe o novo estímulo, ele ativa o esquema existente e, como são frações de mesmo denominador, a comparação é realizada pelo número de partes (5 contra 2). Depois, esse estímulo é agrupado e imediatamente é feita a assimilação (PATRONO; FERREIRA, 2011).

Nesse caso, percebe-se que, intuitivamente, o aluno consegue saber qual fração é maior justamente pelo maior número presente no numerador. Assim, ele consegue perceber que mais partes com relação ao todo presente no denominador, significam uma fração maior.

Nota-se que, quando se tem frações com numeradores iguais, o estudante tende a pensar no mesmo raciocínio e no caso de, por exemplo, 1/4 e 1/5, achar que a maior é a que tem o denominador maior, pois 5 > 4. Acredita-se que uma forma de mostrar que isso não se aplica neste caso é utilizar materiais manipulativos, como por exemplo o kit de frações, em que o estudante terá a oportunidade de visualizar a situação e refletir sobre ela, descobrindo novas maneiras de mudar o esquema anterior, buscando a efetivação da assimilação. O objetivo será alcançado e proveitoso quando o professor tiver capacidade de realizar as comparações sem precisar usar, obrigatoriamente, o material manipulativo (PATRONO; FERREIRA, 2011).

Fazer comparação de frações pode parecer algo muito simples de ensinar. Por outro lado, as frações podem nos enganar quando se faz uma comparação determinando a maior somente com base no numerador ou denominador. É

---

[1] Segundo a Teoria de Piaget, o crescimento cognitivo da criança se dá por assimilação e acomodação. O indivíduo constrói esquemas de assimilação mentais para abordar a realidade. Para o autor, esquemas são estruturas mentais capazes de assimilar, reconhecer, interpretar e classificar os dados do ambiente.
Para Piaget (1956, p.13), assimilação é "[...] uma integração à estruturas prévias, que podem permanecer invariáveis ou são mais ou menos modificadas por esta própria integração, mas sem descontinuidade com o estado precedente, isto é, sem serem destruídas, mas simplesmente acomodando-se à nova situação." Ou seja, entrada e processamento de estímulos externos aos esquemas (mudança quantitativa – modificação de conteúdo).
Ainda, segundo o autor, acomodação é "toda modificação dos esquemas de assimilação sob a influência de situações exteriores (meio) ao quais se aplicam (1956, p. 18)." Ou seja, reorganização interna. Ajusta ou cria-se esquemas visando uma melhor adaptação (mudança qualitativa - modificação de estrutura).
O autor afirma que não há assimilação sem acomodações - anteriores ou atuais -, também não existem acomodações sem assimilação.

importante deixar claro e mostrar para os alunos que essa lógica nem sempre funciona. Para tanto, a metodologia de resolução de problemas no ensino de matemática é opção excelente para o desenvolvimento do aprendizado do aluno neste contexto.

Por meio de recursos em que o aluno visualiza as partes fracionárias, ele percebe que 1/4, é maior do que 1/5, porque o inteiro está dividido em menos pedaços, isto é, quanto mais dividido for o inteiro, menores serão as partes. Esta ideia não é natural, deve ser uma construção.

Uma outra forma, diferente das duas anteriores, onde os esquemas de comparação não podem ser utilizados rapidamente, observando denominadores e numeradores, é quando as frações a serem comparadas não possuem nem os numeradores e nem os denominadores iguais. Um novo esquema terá que ser criado, levando o aluno a perceber que só será possível comparar se as frações tiverem o mesmo numerador ou denominador.

É importante que o estudante consiga resolver mesmo sem o uso de materiais manipulativos ou desenhos. Nessa hora, é essencial a participação do professor para elaborar questões que ajudem na comparação, fazendo com o que o aluno pense na equivalência de frações como uma forma de resolver a questão. Caso haja esta assimilação, os esquemas de semelhança serão utilizados para conseguir frações com o mesmo numerador ou denominador. A partir delas, verifica-se qual é a que tem maior número de partes ou a que está dividia em menos partes.

Quando o aluno compreende a comparação de frações, ele faz a coordenação da compreensão antiga e da nova, isto é, ativa esquemas já desenvolvidos para a comparação dos números, mudando-os e inserindo novos estímulos (FERREIRA, 2001).

É claro que aprender sobre a comparação de frações requer tempo, dedicação e desenvolvimento do pensamento, pelo fato deste conteúdo ser grande e precisar de uma capacidade de abstração. Alguns professores ainda entendem que o estudo deste conteúdo por determinado intervalo de tempo já é suficiente para o domínio do assunto.

Isso necessariamente não é verdade, pois, os alunos precisam entender o motivo de estarem aprendendo aquele conteúdo e saberem onde podem aplicar e como está relacionado com o contexto em que vivem. Só assim que eles realmente aprenderão de forma mais significativa e não ficarão somente memorizando regras e algoritmos.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), há uma grande dificuldade dos alunos na aprendizagem de números racionais. Acredita-se que, ao avançar com o conceito de números racionais, os alunos irão encontrar dificuldades com as rupturas de ideias construídas pelo conjunto dos números naturais. Jesus (2013) afirma que uma dessas dificuldades poderia estar nas diferentes formas de escritas fracionárias para representar um mesmo número.

Seguindo a linha de raciocínio de Jesus (2013), se existe essa dificuldade na compreensão dessas representações, faz-se necessário uma maior atenção ao ensino das frações equivalentes. Afinal, o conceito de fração equivalente é um dos mais importantes no ensino-aprendizagem das frações.

> O conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes é fundamental para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números (BRASIL, 1998, p. 103).

Mediante o exposto acima, acredita-se que o aluno tendo uma compreensão consistente sobre equivalência de frações, certamente aprenderá as propriedades que envolvem, por exemplo, a soma e a subtração de números fracionários com um esforço consideravelmente menor.

Em Brasília, Nunes (2002) apresentou uma palestra na III Conferência Nacional de Educação, Cultura e Desporto, falando sobre o ensino dos números fracionários e os pré-conceitos apresentados sobre ele. Já no início, ela citou uma frase dita por inúmeros professores: “Fração é um bicho de sete cabeças, não tem na vida diária, não podemos usar conhecimentos de frações da vida diária!” (2002, p. 1).

Se os próprios professores acreditam nessa ideia equivocada, como haverá de fato uma aprendizagem por parte de seus alunos? Tal conflito não acontece apenas na realidade da escola brasileira, como apresentado nesse trecho dito pela autora:

> Quais são os erros comuns que aparecem entre jovens nos estudos sobre as dificuldades das frações? Note-se que esses estudos não são feitos só no Brasil, em estudos internacionais aparecem esses mesmos erros, muito comuns em lugares onde as pessoas tiveram um

> ensino igual ao meu, porque esse ensino existia há 50 anos e existe hoje também (NUNES, 2002, p. 3).

Sendo assim, Nunes (2002) começa a formular sua estratégia para a agregação dos números fracionários no dia a dia, argumentando que “usamos muito o raciocínio de frações na prática, o que não usamos é a formalização, a escrita de frações. A autora afirma que a ideia principal é de que a base conceitual do ensino das frações está na divisão. Para entendermos frações, temos de pensar em divisão” (2002, p. 3) e tal termo é amplamente associado há algumas situações cotidianas.

Segundo sua proposta pedagógica, o ensino poderia ser facilitado se os professores partissem da compreensão do conceito em si e não da escrita de fração, aquela velha nomenclatura de um número em cima do outro dividido por um tracinho. Ela apresenta então três ideias que trazem resultados melhores do que os conseguidos pelo ensino dito tradicional.

Em sua primeira ideia, aborda que o estudo da fração pode estar presente desde o primeiro dia de aula, através de raciocínios lógicos que resolvam problemas simples, sem dar ao aluno uma nomenclatura a seguir e permitindo que ele racionalize sozinho. Partindo para a segunda ideia, o principal objetivo é proporcionar a reflexão por parte dos alunos. O professor deve encaminhar a comparação de frações e equivalências de uma maneira conceitual e não como um conjunto de regras.

Para finalizar, em sua terceira ideia, apresenta o contexto de interdisciplinaridade tão falado nos dias atuais: conectar os conceitos de divisão, multiplicação e parte/todo, contextualizados a casos reais do cotidiano (NUNES, 2002), através de pesquisa do docente em diversas fontes sobre o assunto a ser trabalhado em sala, levando em consideração o contexto no qual se inserem os alunos. O docente deve planejar e aplicar metodologias que venham a ajudar seus alunos de forma que todos tenham a capacidade de reconhecer a aplicabilidade do que foi estudado, neste caso, as frações.

Para exemplificar e comprovar que sua maneira de abordar frações realmente funciona, a autora apresenta o seguinte problema:

> Vocês verão que começamos com uma questão muito simples, mas uma questão de frações. Dois meninos e três meninas têm uma torta. As meninas vão repartir a torta delas igualmente. Os meninos também vão repartir a torta deles igualmente. São três meninas

> repartindo uma torta e dois meninos repartindo outra torta. Quando eles terminarem de repartir e forem comer seus pedaços de torta, cada menina vai comer a mesma quantidade de torta que cada menino? Essa questão também é fácil; a partir de mais ou menos 6 anos as crianças já sabem que não, que as meninas vão ganhar pedaços menores. Qual é a fração que os meninos vão comer? A professora então ensina que uma torta dividida por dois, escreve-se 1: 2 ou 1/2 e que essa fração se chama meio ou metade. Qual é a fração que as meninas vão comer? E interessante que a professora leve os alunos a escrever 1: 3 e pergunte como se pode escrever de outra maneira e ensine o termo — um terço (NUNES, 2002, p. 4-5).

Utilizando um problema de fácil compreensão, introduzindo os alunos no conceito do problema e abordando a fração de uma maneira natural, sem a imposição da nomenclatura e sem denominar regras a serem decoradas, Nunes comprova que a fração não precisa ser um conceito de difícil entendimento, basta que o professor tenha a sensibilidade de transformar o modelo conceitual matemático em um conceito de vida que chegará próximo da realidade da criança, suscitando a afinidade entre matemática e a vida diária.

A autora apresenta ainda que seu objetivo, no início do estudo, era comparar turmas que haviam tido o ensino de frações a partir do método tradicional e turmas que tivessem tido a matéria partindo do pressuposto da divisão.

Contudo, ela argumenta que:

> [...] tornou-se impossível fazer essa comparação, porque os alunos submetidos a esse ensino de frações a partir da divisão se motivavam, se envolviam, discutiam, enquanto os outros, que estudavam pelo mesmo método pelo qual eu aprendi, estavam todos a bocejar, não havia motivação, ninguém se envolvia. [...] A comparação seria muito artificial, porque em um grupo as crianças se envolviam, resolviam problemas etc. e no outro grupo elas não tinham esse tipo de participação (NUNES, 2002, p. 10).

Sua fala acabou comprovando o que outros autores, como Lopes e Jesus, já abordavam: O método tradicional é desconexo à realidade; sendo assim, sua base é o decorar e não a aprendizagem. Dessa maneira, os alunos que aprendem os números racionais na forma tradicional, principalmente voltados para o caso dos números fracionários, esquecem como utilizá-los assim que saem do ambiente escolar. Por esse motivo, é importante a associação do modelo conceitual com a prática, trazendo para a sala de aula situações do cotidiano associadas ao contexto do aluno.

Ainda partindo da dificuldade dos alunos em compreender conceitos matemáticos com números racionais, vamos trazer outro exemplo do ensino de equivalência. Segundo Garcez (2013), podemos dizer que as relações de equivalências são usadas para classificar os elementos de um conjunto em subconjuntos cujos elementos possuem propriedades comuns. Para melhor compreensão, o autor usa como exemplo a seguinte situação: Imaginar uma caixa contendo bolas de cores variadas. Esse "conjunto de bolas" admite a seguinte relação: "ter a mesma cor que". Isso quer dizer que a relação é que uma bola específica terá a mesma cor que outra bola do conjunto.

Garcez afirma que a importância do conceito de equivalência "pode ser vista na sua utilização para se comparar e ordenar frações, e para realizar operações. Compreender frações equivalentes à uma fração dada, em alguns casos, é a chave para o sucesso na resolução de inúmeros problemas" (2013, p. 62-63). Foram destacados três pontos que o autor acredita serem fundamentais para o entendimento do conceito de equivalência, tanto para os alunos quanto para os professores. Eles são:

1. Compreender que duas frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade, isto é, se forem o mesmo número.
2. Compreender que ao se multiplicar e/ou dividir os termos da fração por um mesmo número, diferente de zero, podemos encontrar uma fração equivalente a inicial.
3. Compreender a propriedade principal que nos leva a reconhecer se as duas frações são equivalentes. (GARCEZ, 2013, p.63)

Direcionado para os professores, Garcez argumenta que, em relação à aplicação das atividades em aula, "o professor seja um mediador do conhecimento, questionando cada pensamento e insistindo para que seus alunos argumentem de maneira clara cada descoberta, ficando livre para intervir quando necessário" (2013, p. 40).

Utilizando essa metodologia, é possibilitado ao aluno o desenvolvimento de etapas intelectuais importantes para a compreensão plena do conceito, o que poderá assegurar a efetividade do aprendizado.

A fim de contribuir com o ensino da equivalência fracionária, o autor desenvolve em seu estudo atividades lúdicas que podem ser aplicadas em sala de aula, tais como a confecção de dobraduras ou bandeiras, e até mesmo a elaboração de uma planta de escritório.

A partir do uso de novas metodologias de ensino, o docente evita que a sua abordagem perca o seu significado reduzindo-se a uma exploração mecanizada de algum algoritmo, ou seja, a compreensão do conceito deve ser priorizada em detrimento à memorização do algoritmo (GARCEZ, 2013, p. 63).

A cada nova geração de alunos, o ensino matemático atravessa diversos obstáculos em sua busca de efetuar uma aprendizagem duradoura, pois, acredito que os materiais didáticos, muitas vezes não acompanham a evolução que acontece em velocidade recorde em nosso mundo globalizado.

Precisamos abordar os números fracionários, mais especificamente a equivalência de fração, de forma condizente com a realidade e mostrar como frações podem ser interessantes e divertidas, aprimorando o intelecto dos nossos alunos para as áreas de exatas e quebrando pré-conceitos negativos.

Segundo Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993), os resultados de estudos desenvolvidos pelo Rational Number Project sugerem que a compreensão de número racional está relacionada com três características do pensamento dos alunos: (i) a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de número racional; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) a independência cada vez maior das representações concretas.

Os alunos que têm pouca experiência na utilização e na conversão entre as diferentes representações de número racional têm grandes dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

3 METODOLOGIA

O objetivo dessa pesquisa é analisar as estratégias de alunos do 6º ano na resolução de problemas envolvendo os significados parte todo e operador de frações. Para análise das estratégias dos alunos do 6° ano ensino fundamental II (anos finais) em relação a resolução de problemas sobre os significados parte todo e operador de frações, foram aplicados dois problemas, um sobre o significado parte todo e o outro sobre o significado operador.

Escolhemos esses dois significados pois, de acordo com a BNCC, são apenas eles que são propostos para o 6º ano do ensino fundamental. Os problemas foram aplicados numa turma com 32 (trinta e dois) alunos, numa escola particular de Recife-PE, e a aplicação durou cerca de uma aula, ou seja, 1 hora. Enumeramos os alunos de 1 a 32 para não ser revelada a sua identidade.

A seguir temos os problemas que compôs o teste com o significado da fração em cada problema e a solução esperada.

Problema 1: *Letícia comprou uma pizza para dividir com seus 3 amigos. Luiz comeu dois pedaços, Bernardo comeu 3 pedaços, Camila comeu apenas 1 pedaço e Letícia não quis comer. Sabendo que a pizza foi dividida em 8 pedaços iguais, que parte da pizza foi consumida em relação ao total?*

É uma questão que trata de parte-todo, uma vez que temos um todo dividido em oito partes iguais. É intuitivo entender que foram consumidas 6 partes, das 8 em que a pizza foi dividida. Portanto o conceito de 6/8 se torna acessível.

Pode ser assumido como um todo dividido em partes iguais que nesse caso foi 2 pedaços que Luiz comeu, três pedaços que Bernardo comeu e 1 pedaço de Camila. Em que se somarmos tudo o que foi consumido com o que restou chegaremos no todo. Vai consistir em quantas partes o todo foi dividido (denominador) e o número de partes consumidas (numerador).

<u>Solução esperada da questão:</u>

$2/8 + 3/8 + 1/8 = 6/8$

Problema 2: *Nos jogos internos de uma escola, 5/7 dos participantes são do sexo feminino. Sabendo que 350 estudantes se inscreveram para o evento esportivo, quantos meninos foram inscritos?*

Apresenta a ideia de operador, uma vez que podemos considerar a fração 2/7 como uma medida: a unidade desta medida é o total de 350 estudantes; ela será dividida em subunidades que cabem 2 vezes no total.

<u>Solução esperada da questão:</u>

Como 5/7 foram meninas

Então 2/7 são meninos

2/7 x 350=

(2 x 350): 7=

700/7 = 100 meninos se inscreveram no evento esportivo.

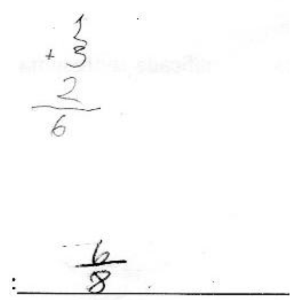
Um estudo conduzido por Fi e Degner (2012), demonstrou que os professores, quando se envolvem na busca de uma formalização matemática para resolver um problema permeado pelo uso de um tabuleiro de xadrez, podem perceber a condução a ser desenvolvida em sala de aula. Em linhas gerais, essa condução abrangeria proporcionar aos alunos que tenham tempo de propor e apresentar suas **estratégias**, evidenciando os conceitos matemáticos que dominam e de avaliar o entendimento do processo seguido.

4 RESULTADOS

Nesse tópico vamos analisar, diante das respostas, qual o rendimento dos alunos e como eles entendem os significados de fração parte-todo e operador. O quadro abaixo trata do quantitativo de alunos que acertaram e erraram cada questão. Nenhum aluno deixou sem resposta.

A **questão parte-todo** teve mais acertos, do total de 32 alunos, 24 alunos conseguiram responder de forma correta. O restante errou na interpretação do problema, mas, nenhum aluno deixou a resposta em branco. Observe como 21 dos 24 alunos que acertaram responderam a essa questão na figura 6 abaixo.

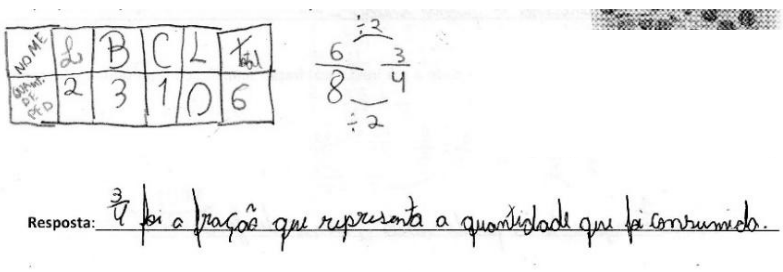
Figura 5 – Resposta do aluno 1



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

A maioria dos alunos que acertaram, ou seja, 21 alunos, responderam como mostra na figura 5. Somou o que cada personagem consumiu da pizza e colocou sobre o total 8. A seguir, mostraremos como três alunos que acertaram, além de somar, no final houve a simplificação. Nas respostas corretas a estratégia foi igual em todos os casos, exceto esses três alunos, do total de 24 que acertaram, que simplificaram a resposta como mostraremos na figura abaixo.

Figura 6 – Resposta do aluno 8

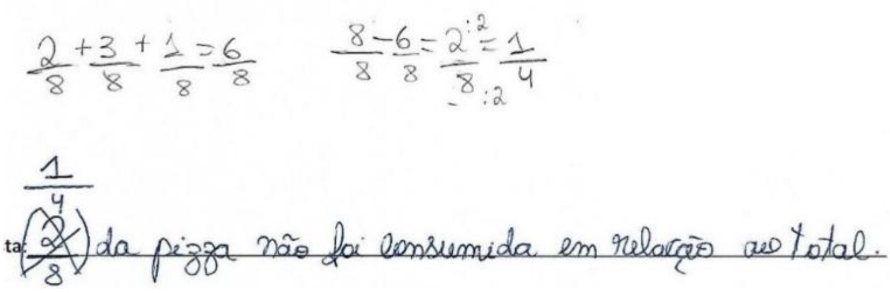


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Não só a questão da simplificação, mas, a tabela comprova que o aluno tem domínio sobre o assunto e organização para fazer a questão. Com isso, mostramos as duas estratégias que foram adotadas pelos alunos que acertaram a questão.

Agora vamos discutir, que os resultados apontam que os alunos têm mais facilidade com questão que se trata de parte-todo, pois, dos oito que erraram quatro deles entenderam que a questão estava pedindo quanto **sobrou** e não quanto foi consumido. Vejamos a seguir exemplos de respostas desses quatro alunos, o que irá nos ajudar a entender o raciocínio deles.

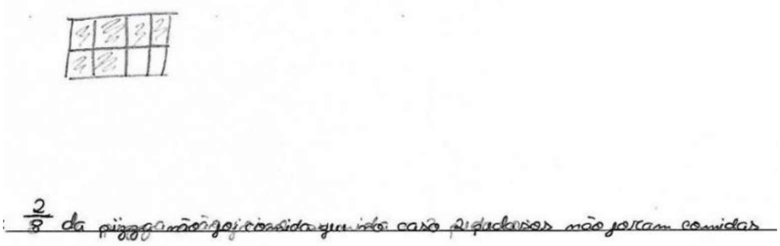
Figura 7 – Resposta do aluno 16



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Perceba que o aluno 16 (figura 7) somou a quantidade que foi consumida, calculou a parte sobre o todo e depois subtraiu do todo (8/8) até encontrar o restante que foi o número 2 e depois simplificou a fração. Ou seja, esse aluno sabe calcular, apenas entendeu errado o que a questão pedia colocando "*1/4 da pizza não foi consumida em relação ao total*". Além desse aluno, mais 3 alunos deram como resposta o que sobrou da pizza, ou seja, entenderam o problema de forma errada. Observe na figura abaixo.

Figura 8 – Resposta do aluno 22

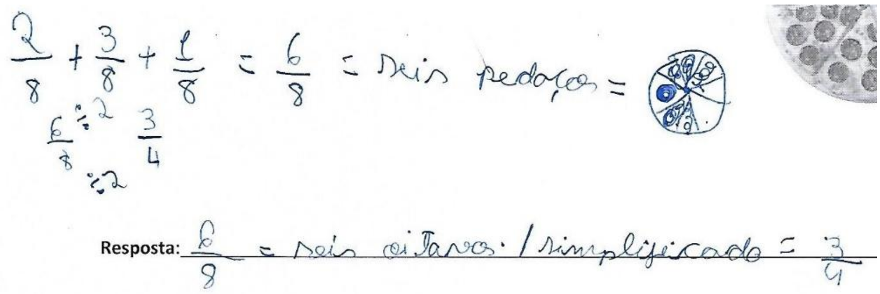


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

O aluno respondeu: *“2/8 da pizza não foi comida que no caso 2 pedações não foram comidos”.*

Como dito anteriormente, quatro alunos calcularam quanto faltava para completar o todo em vez de calcular o quanto foi consumido. Mesmo esses alunos, eles entenderam a parte do todo que estava faltando e esqueceram a parte do todo que foi consumida. Note que na figura 8 o aluno 22 fez um desenho para chegar na resposta, dividiu o desenho em 8 partes que é o todo e pintou o que cada personagem consumiu.

Figura 9 – Resposta do aluno 24



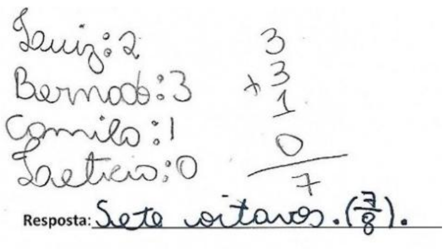
Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Outro aluno fez um desenho, só que ele desenhou uma pizza e pintou na pizza as partes consumidas. Apenas dois alunos desenharam, um acertou a questão, como mostra a figura acima e o outro (figura 9) confundiu colocando quanto faltava. Segundo Schroeder e Lester (1989), compreender Matemática diz respeito à ideia de relacionar e esses alunos relacionaram bem o **todo** com o desenho.

Dessa forma, essa compreensão aumenta quando o aluno é capaz de estabelecer relações entre determinada ideia matemática e uma variedade de contextos, entre as ideias matemáticas expressas em um problema e entre o problema e as ideias matemáticas implícitas.

Seguindo com a análise, apenas dois alunos dos oito que erraram, efetuaram a soma incorretamente e colocaram que foi consumido 7 pedaços ao invés de 6. Foi um erro de cálculo e não de interpretação, pois eles entenderam corretamente que é para ser calculado quanto foi consumido no total de cada pizza. Como podemos observar na figura abaixo:

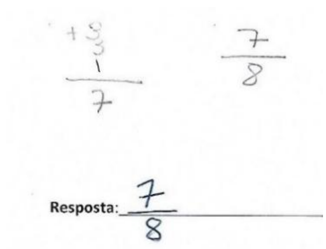
Figura 10 – Resposta do aluno 15



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

O aluno 15 (figura 10), coloca a quantidade certa de cada personagem e na hora da soma troca o número 2 por 3 e efetua a soma errada. Calculando a parte 7 sobre o todo 8 em vez de 6 sobre 8.

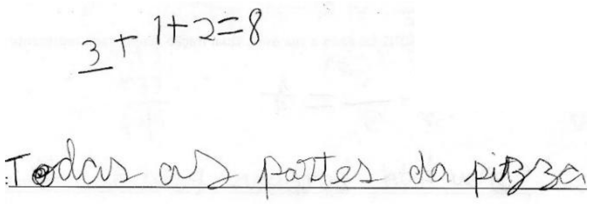
Figura 11 – Resposta do aluno 21



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Nesse caso parece que o aluno coloca 3+3+1 porque são os números que apareceu no enunciado. É um caso diferente do caso anterior porque o aluno 15 colocou certo os dados e depois trocou na hora da soma, já o aluno 22 colocou direto os números. Os outros dois alunos que erraram, um confundiu na soma e o outro realmente não soube responder. Observe as figuras 12 e 13 abaixo para analisar.

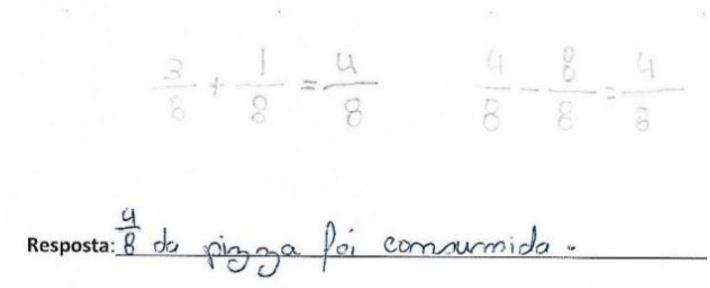
Figura 12 – Resposta do aluno 4



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Perceba que o aluno 4 (figura 13) soma 3 + 1 + 2, que é a quantidade consumida pelos personagens, mas, ao invés de colocar o resultado 6 sobre 8, esse aluno simplesmente iguala a 8. Fazendo a lógica da resposta ficar sem sentido e não trata corretamente o que a questão pede, que é a parte consumida pelo todo. Ou seja, ele erra na soma, mas percebe que 8 representa o todo da pizza. Aparentemente ele tem uma certa noção de parte todo, mas errou na operação.

Figura 13 – Resposta do aluno 27



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Essa resposta é bem interessante. O aluno esqueceu o número 2 (dois) que está escrito por extenso. O número 2 está na linguagem natural (dois), normalmente os alunos utilizam os números do enunciado de forma direta. Parece que ele entendeu a ideia, mas esqueceu de fazer uma operação. Posteriormente ele subtrai o número encontrado 4/8 pelo inteiro 8/8. E acaba que a resposta fica 4/8.

Sob a perspectiva do desenvolvimento cognitivo, é importante levar os alunos a desenvolver o pensamento matemático. Esse pensamento deveria abranger o entendimento dos processos dedutivos e indutivos, teste de hipóteses, formas de representações, relações estruturais, avaliações e monitoramento das próprias ações entre outras (CHARLES, 1985; SCHOENFELD, 1990).

Sendo assim, analisando de forma geral a grande maioria, 31 alunos participantes da pesquisa conseguem visualizar o todo na questão, que são 8 pedaços. Apenas mudando de formas diferentes as interpretações sejam respostas certas ou erradas, mas, o conceito de parte-todo está bem claro na resolução porque é possível observar, mesmo através dos erros, eles identificam a parte do todo 8.

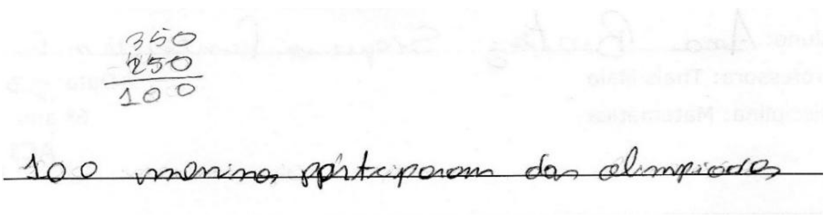
Na questão que trata de operador mostraremos como foi que eles interpretaram para chegar ao erro, mas antes, vamos observar também as quatro estratégias usadas pelos 19 alunos que acertaram essa questão. Iniciaremos nossa análise com as estratégias para os acertos e, posteriormente, analisar os erros mais frequentes que apareceram.

A questão que tratava do significado de operador foi:

“Nos jogos internos de uma escola, 5/7 dos participantes são do sexo feminino. Sabendo que 350 estudantes se inscreverem para o evento esportivo, quantos meninos foram inscritos?”

Mostraremos a seguir as quatro estratégias usadas pelos alunos para responderem a questão operador. Note a resposta do aluno 1 a seguir.

Figura 14 – Resposta do aluno 1

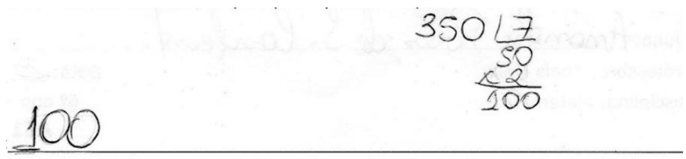


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Observe que o aluno 1 (figura 14) calculou primeiramente a quantidade de meninas, ou seja, fazendo a operação 5/7 de 350 que é exatamente 250 e subtraiu do total de inscritos 350. Resultando em 100, que é a resposta correta. Esse aluno que utilizou o conceito de operador, ao calcular 5/7 de 350, não deixa claro na resposta como ele calculou, mas esse mesmo aluno atingiu a resposta certa na questão parte todo. Dos 19 alunos que responderam de forma correta essa questão, 5 fizeram dessa mesma maneira.

Já outro aluno adotou uma estratégia diferente e dividiu o número pelo todo que representa 7. Observe abaixo:

Figura 15 – Resposta do aluno 2

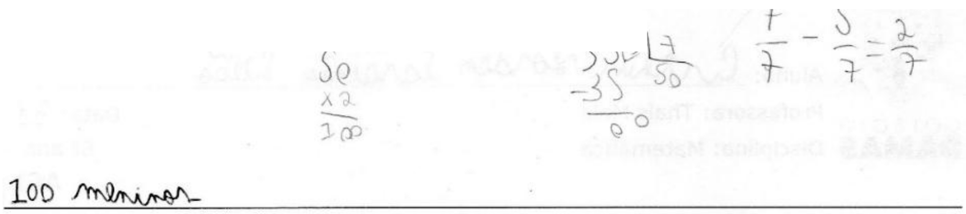


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Na figura 15 o aluno 2 já faz uso de outra estratégia. Ele dividiu o total de inscritos, 350, pelo denominador da fração, ou seja, por 7. Indicando perceber que o total deve ser dividido em partes iguais. Em seguida ele multiplica por 2, que é o total de partes de meninos inscrito. Dos 19 alunos, 7 fizeram dessa maneira e todos eles também acertaram a questão parte-todo.

Outra estratégia também adotada pelos alunos foi como mostra na figura 16 abaixo na resposta do aluno 3.

Figura 16 – Resposta do aluno 3

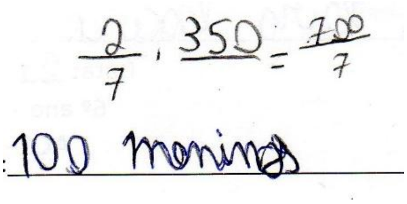


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

O aluno 3, ao que tudo indica, iniciou a resposta subtraindo os 5/7 do todo, indicado na conta 7/7 – 5/7 = 2/7 e obtém a fração 2/7, ou seja, ele subtraiu a quantidade de alunas do todo para encontrar a fração que indicava a quantidade de meninos inscritos. A partir daí ele opera da mesma maneira que o aluno 2 (figura 17), dividindo o total de inscritos pelo todo que a fração representa e depois multiplicando por 2. Dos 19 alunos, 2 fizeram dessa maneira.

A última estratégia utilizada pelos alunos foi da figura 17 abaixo, eles utilizaram o conceito de operador.

Figura 17 – resposta do aluno 6

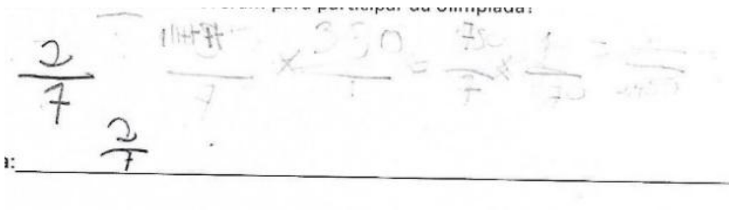


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

O aluno 6 da figura 17 faz a multiplicação de 2/7 por 350. Depois ele dividiu 700 por 7 para obter a resposta correta, mesmo não tendo o resultado da divisão na conta realizada. O resultado, o 100, só aparece na resposta final do aluno, e dos 19 alunos que acertaram, 5 escolheram esse raciocínio. Nessa questão teve mais estratégias diferentes que levaram a resposta correta que a questão parte-todo, entretanto, todos que acertaram identificaram que 7 era o todo e queríamos calcular 2 partes de 7.

Analisaremos que dos 13 alunos que erraram, quatro desses alunos colocaram a fração e não calculou a quantidade que se pedia referente a essa fração que eles próprios identificaram.

Figura 18 – Resposta do aluno 12



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Conseguimos verificar que esse aluno (figura 18), apesar de ter colocado apenas a fração, pois 2/7 faz parte do cálculo para responder, faltou entender a fração como operador, pois não chegou ao final da resposta, ou seja, não conseguiu perceber que o que foi solicitado no problema foi a quantidade de meninos inscritos e não a fração que representava essa quantidade.

No exemplo abaixo temos a resposta de um aluno que parece ter entendido a fração como operador, mas não chegou na resposta final, não dividiu os 700 por 7.

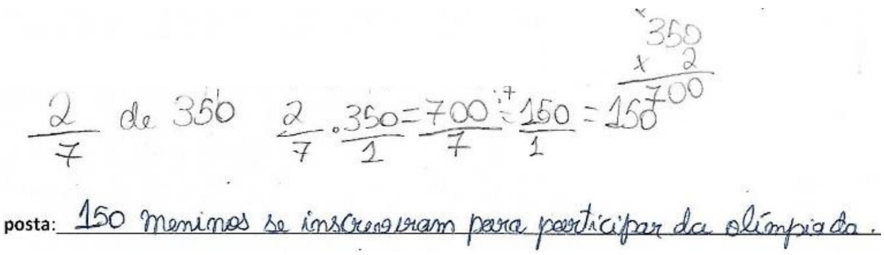
Figura 19 – Resposta do aluno 11

Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Note que o aluno 11, na figura 19 acima, parece entender o que o problema pede, ele sabe que devemos calcular 2/7 de 350. Mas, não concluiu a conta, contudo apesar de não ter terminado consideramos que esse aluno sabe fração como operador, apenas não sabe como executá-la, pois ele sabe fração como parte-todo também.

No aluno abaixo percebemos que ele sabia utilizar a fração como operador e na hora de executar é que houve o erro, como mostra a figura baixo.

Figura 20 – Resposta do aluno 16

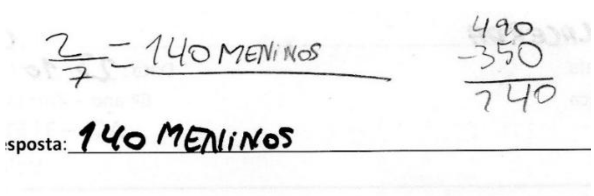


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Esses dois alunos acima tentaram calcular 2/7 de 350 e não conseguiram. O aluno 16 tentou simplificar a fração 700/7, entretanto errou na divisão 700:7, colocando, como resposta dessa operação 150, observe acima que esse mesmo aluno 16, errou (na figura 7) por falta de interpretação de texto. Não temos base suficientes para julgar, mas, aparenta ser distração.

Outros dois erros frequentes nessas respostas foram desses outros dois alunos, aluno 5 e aluno 14 abaixo.

Figura 21 – Resposta do aluno 5

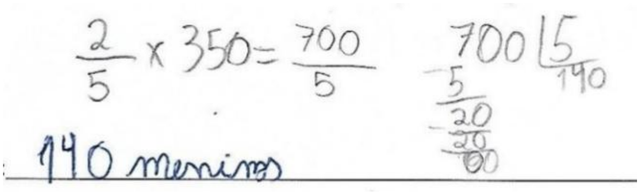


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Acreditamos que o aluno 5 calculou errado a quantidade de meninas e se confundiu na hora de subtrair. Confiando que 2/7 representava 140, e se 2/7 representa 140 então o todo seria 490. Ele subtrai o número que ele acredita ser o todo pelo número dado na questão, resultando no final 490 – 350 = 140. E colocou como resposta. Ou seja, ele acreditou que 350 representava 5/7 do problema.

Observe que apesar de ter dado a mesma resposta, o aluno abaixo fez outra operação para chegar ao 140.

Figura 22 – Resposta do aluno 14

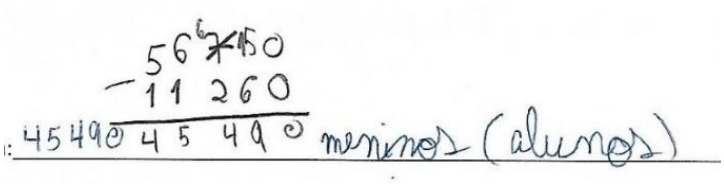


Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Já o aluno 14 fez toda a operação certa, mas com a fração errada, obtendo 140 da mesma maneira que o aluno acima. Como podemos observar os dois alunos acima responderam igualmente, mas, o aluno 5, usou a fração 2/7 e colocou 140 como resposta. O aluno 14 calculou 2/5 de 350, provavelmente por um erro de distração e sendo assim errou da mesma forma.

A seguir mostraremos, por fim, exemplos de um aluno que não conseguimos compreender bem a resposta.

Figura 23 - Aluno 4



Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Observe que esse aluno colocou uma conta incompreensível e o mesmo na figura 12 apresentou essa mesma incompreensão. Essa resposta acima foi um exemplo de outros 6 alunos que colocaram respostas incompreensíveis. Foram um total de 7 alunos que não encontramos uma lógica na resposta e acredita-se que eles responderam isso apenas para não deixar em branco.

Por fim, identificamos que quando a questão é de parte todo parece ficar mais claro o entendimento desses alunos sobre a questão, visto que o número de acertos foi maior, com uma diferença de 5 alunos a mais. Como mostra na tabela a seguir, é possível identificar que foi pouca a diferença:

Quadro 2 – Demonstração dos acertos dos alunos

Questão	Quantitativo de acertos	Quantitativo de erros
Questão parte-todo	24 alunos acertaram	8 alunos erraram
Questão operador	19 alunos acertaram	13 alunos erraram

Fonte: dados da pesquisa, 2019.

Mesmo quando erraram, conseguiram entender o total 8. Mas, de acordo com a resposta desses alunos, quando a questão é de operador, ela parece que se torna mais incompreensível, fácil de eles se confundirem e fazerem a operação errada.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem de situações-problema permite a aplicação do modelo conceitual e do algoritmo e a realização de exercícios, trabalhando fundamentalmente conteúdos procedimentais (uso do algoritmo), bem como conteúdos conceituais (compreensão dos conceitos) e atitudinais (diálogos entre alunos e professor). Os problemas aplicados permitem estudar as estratégias adotadas pelos alunos e entender qual a maior dificuldade que eles apresentam. Foi possível observar que os alunos do sexto ano do ensino fundamental, conseguem entender o significado de número inteiro facilitando a compreensão pela fração parte-todo, os alunos que compreendem a fração como parte-todo chegaram mais próximos a resposta da questão operador.

De acordo com a análise na questão parte todo houve 24 alunos que acertaram, 8 alunos que erraram e desses 8 alunos apenas 1 identificamos total incompreensão da fração parte-todo. Em relação a questão operador 19 alunos acertaram, houve 13 alunos que erraram e desses 13, 7 responderam de forma incompreensível para análise. Ressaltamos, também, que todos os alunos que acertaram a questão operador acertaram a questão parte-todo.

Assim, em sala de aula, se os conteúdos fossem abordados tendo um problema como ponto de partida (BRASIL, 1997), o professor poderia explorar as atitudes e conhecimentos que os alunos trazem no momento em que tentam resolver problemas de Matemática, identificando, entre outros aspectos, suas dificuldades, seus avanços e seus conceitos errôneos. Os autores mostram a relevância desse entendimento facultado aos professores para que, em sala de aula, propiciem aos alunos se envolverem, de maneira gradativa, com uma trajetória de formalizações matemáticas, possibilitando a construção do processo de abstração. No caso do conteúdo de frações podemos sair da identificação do inteiro para parte-todo e assim, trabalhar fração como operador construindo esse conhecimento de forma gradativa acompanhando as estratégias que eles utilizam para ensinar. Ou seja, os alunos que já entendem fração parte-todo, utilizar desse conhecimento prévio para ensinar fração como operador impulsionaria o processo de ensino.

Podemos concluir que o trabalho baseado na abordagem da resolução de problemas implicaria em ações baseadas em aspectos que contemplem a introdução de um problema, momento em que o professor precisa conduzir a aula de modo que os alunos articulem seus conhecimentos prévios ao problema, que discutam suas estratégias e que leve os alunos a relacionarem o que fizeram ao novo conteúdo/conceito a ser ensinado e aprendido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M., LESH, R., POST. T e SILVER E. (1983). **Rational Number Concepts.** In: LESH, R. e LANDAU, M. (ed) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.* Orlando-Florida: Academic Press INC., p. 91-126.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**. Matemática. Brasília: MEC / SEF, 2015.

BRASIL/MEC, **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984.

CHAMBERS, P; TIMBLIN, R. **Ensinando matemática para adolescentes.** 2. Ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

CHARLES, R. I. The role of problem solving. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 32, p. 48-50, Feb. 1985.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Editora Àtica S. A. 1994.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. 1997. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária.** Belo Horizonte. Presença Pedagógica. Edição Especial: Educação Matemática. V.3 n.14 mar/abr. 1997.

FERREIRA, Ana Cristina. **Números Racionais e frações**. Mimeo, 2001.

FI, C. D.; DEGNER, K. M. Teaching through problem solving. **Mathematics Teacher**, Reston, v. 105, n. 6, Feb. p. 455-459, Feb. 2012.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 50. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

GARCEZ, E. F. A fenomenologia e o “sentido” de biblioteca escolar para o ser-aluno: ensaio de proposta de investigação1. **Revista Interamericana de Bibliotecología (Colombia)**, v. 36, n. 3, p. 197-205, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/20.500.11959/brapci/83167>. Acesso em: 18 nov. 2019.

JESUS, Amanda Botega Masson de. **Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento**. Dissertação de Mestrado. Lavras: Universidade Federal de Lavras, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Mestrado Profissional em Matemática, 2013.

KAMIL, C. **Aritmética: novas perspectivas – implicações da teoria de Piaget.** 5 ed. Campinas: Papirus, 1996.

LORENZATO, S. (org). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3 ed. Capinas-SP: Autores Associados, 2012.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. **A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental.** Bolema, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 23-40, dez. 2008.

MENDES, I. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MERLINI, V.L., et al. O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (mestrado em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2005

MONTEIRO CERVANTES, P. B. Uma formação continuada sobre as frações. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNIBAN/SP, São Paulo. 2010.

NUNES, A. R. S. C. A. **O Lúdico na Aquisição da Segunda Língua.** (2004) Disponível on-line em: <http://www.linguaestrangeira.pro.br/artigos_papers/ludico_linguas.htm>. Acesso em 30-04-2006.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças Fazendo Matemática. Tradução de: COSTA, S. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PATRONO, Rosângela Milagres. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º na do Ensino Fundamental: análise de uma proposta de ensino**. Dissertação de Mestrado. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, Mestrado Profissional em Matemática, 2011.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do estado de Pernambuco: Parâmetros curriculares de Matemática.** Educação de Jovens e Adultos. Secretaria de Educação. Pernambuco, 2012.

PIAGET, J. Psicologia da inteligência. Editora fundo de cultura, 1956.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: **um novo aspecto do método matemático.** Tradução de: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POST, T., CRAMER, K., BEHR, M., LESH, R., & HAREL, G. (1993). **Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts**. Disponível em http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/93_6.html. Acesso em 01/09/2019.

SÁ, A. V. M.; JUNIOR, L. N. R.; MIRANDA, S. (orgs). **Ludicidade: desafios e perspectivas em educação.** Jundiaí: Paco Editorial, 2016.

SAVIANI, D. **Escola e democracia.** 36.ed. Campinas: Autores Associados, 2003

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in context(s). In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. 3. ed. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1990, p. 82-92.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SOUZA, S. C.; DOURADO, L. **Aprendizagem baseada em problemas (abp): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo.** HOLOS. 2015. ISSN: 1518-1634. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=481547288017. Acesso em 05/10'/2019.

TAHAN, Malba, **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2007.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.