



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

## O Teorema de Baire e suas aplicações na Análise Funcional

Anne Caroline C. de Albuquerque

Orientador Dr. Clessius Silva

RECIFE

2019





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Anne Caroline C. de Albuquerque**

## **O Teorema de Baire e suas aplicações na Análise Funcional**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Clessius Silva

RECIFE

2019



*À minha família*



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo o que me foi concedido.

A minha família, em especial a minha mãe, pessoa que admiro muito e pelos esforços e dedicação direcionados a mim e a minha irmã, agradeço a minha irmã, Allane e a minha avó Maria de Lourdes (in memoriam).

Agradeço de modo especial ao meu orientador Clessius Silva, pela sua dedicação, imensa paciência e pelas aulas maravilhosas e divertidas de Álgebra Linear II.

Agradeço a todos professores do departamento de matemática e de modo especial aos professores Maria Ângela, pela grande influência na minha vida acadêmica, Eberson Ferreira, pessoa pelo qual sou muito grata pela enorme ajuda e incentivo dados a mim durante a graduação, ao professor Danilo Santos, pelas maravilhosas aulas de Teoria dos Anéis e pela sua paciência em corrigir todas as minhas questões da disciplina e ao professor Rodrigo Gondim, pela orientação e paciência durante o projeto de iniciação científica que foi maravilhoso e inspirador e por ter me apresentado a diversas maravilhas da matemática.

Agradeço também as minhas amigas de curso, Elizabeth Bispo (a dançarina do Cegen), Aline Gonçalves (minha professora) e a Thays Nunes (a menina que mais nega que é dramática), que me proporcionaram conversas e momentos de risadas maravilhosas e a Suellen, minha conselheira do departamento. Vocês para sempre estarão no meu coração.

Agradeço também de modo especial, a Sobral (Bobal, melhor amigo), meu companheiro de almoços do Ru e atualmente de viagens e visitas a cafeterias do Recife, pelo grande apoio, companheirismo e amizade.





*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*



# Resumo

Neste trabalho apresentaremos as aplicações do Teorema de Baire à Análise Funcional, mais especificamente aos resultados clássicos desta área, o Teorema de Banach Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

**Palavras-chave:** Espaços Normados, Espaços de Banach, Teorema de Baire.



# Abstract

In this work, we will present the applications of Baire's Theorem to Functional Analysis, more specifically to the classic results of this area, Banach Steinhaus Theorem, Open Application Theorem and Closed Graph Theorem.

**Keywords:** Normed Spaces, Banach Spaces, Baire's Theorem.



# Sumário

	Introdução . . . . .	15
1	<b>ESPAÇOS MÉTRICOS</b> . . . . .	17
1.1	Espaços Métricos . . . . .	17
1.2	Bolas e Esferas . . . . .	21
1.3	Conjuntos Limitados . . . . .	23
1.4	Funções contínuas . . . . .	23
1.5	Continuidade Uniforme . . . . .	24
1.6	Noções de Topologia Geral . . . . .	25
1.7	Espaços Normados . . . . .	32
1.8	Espaço de Banach . . . . .	35
1.9	Conjuntos convexos . . . . .	39
2	<b>OPERADORES LINEARES</b> . . . . .	41
2.1	Operadores Lineares Limitados e Contínuos . . . . .	42
3	<b>O TEOREMA DE BAIRE E SUAS APLICAÇÕES À ANÁLISE</b>	49
3.1	Teorema de Banach-Steinhaus . . . . .	51
3.2	Teorema da Aplicação Aberta . . . . .	53
3.3	Teorema do Gráfico Fechado . . . . .	56
	Referências . . . . .	58





# Introdução

A Análise Funcional é o ramo da Matemática, mais especificamente, da análise, que estuda o espaço das funções. Esta área faz uso de muitos conceitos da Álgebra Linear, enfatizando o estudo dos espaços vetoriais de dimensão infinita, sendo assim, uma generalização da Álgebra linear clássica. Além disso, desempenha um papel importante em alguns ramos da matemática como análise não-linear, equações diferenciais parciais e teoria dos espaços de Banach.

O objetivo deste trabalho é abordar alguns resultados importantes da Análise Funcional, a saber, Teorema da Limitação Uniforme, Teorema do Gráfico Fechado e Aplicação Aberta, como aplicação do Teorema de Baire, que provém da topologia geral e é um dos teoremas da matemática mais ricos em consequências em diversas áreas e de modo particular na teoria dos espaços de Banach.

Sendo assim, com o intuito de traçar os objetivos estabelecidos abordaremos inicialmente alguns conceitos e resultados importantes da teoria dos espaços métricos junto a noções de Métrica, conjuntos limitados, continuidade e algumas noções básicas de topologia tais como, conjuntos abertos, conjuntos fechados, ponto de acumulação, entre outros.

Prosseguindo, estudaremos os espaços normados, que são espaços vetoriais munidos de uma norma e espaços normados completos que denominam-se espaços de Banach. Trataremos também do estudo de operadores lineares que junto a teoria desenvolvida, citada anteriormente, dão base para desenvolvermos e compreendermos alguns dos teoremas principais da análise funcional que serão abordados no texto. Além disso, elencaremos resultados importantes acerca do estudo de operadores, como por exemplo a equivalência entre os conceitos de operador linear contínuo e limitado, proveniente de F. Riesz.

Por fim, trataremos do Teorema de Baire e como falado anteriormente algumas aplicações do mesmo. Assim, abordaremos o Teorema de Banach-Steinhaus que nos garante que uma família de operadores lineares contínuos é uniformemente limitada sempre que for

pontualmente limitada, seguindo a apresentação deste teorema, foi mostrado um resultado que garante que se um operador é linear, é suficiente a existência da convergência pontual para garantir a continuidade.

No mesmo capítulo, foi apresentado o Teorema da Aplicação Aberta demonstrado pela primeira vez em 1930, por J. Schauder, que garante que se  $E$  e  $F$  são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor é uma aplicação aberta e o Teorema do Gráfico Fechado que estabelece uma relação entre a continuidade de um operador linear e o seu gráfico ser fechado, este teorema nos apresenta condições onde um operador linear fechado é limitado em um espaço de Banach, visto que nem todos os operadores lineares são limitados. Estes resultados foram publicados por Banach em 1932, no livro *Théorie des Opérations Linéaires* e são considerados como o marco para a fundação da Análise Funcional como ramo da Matemática.

# 1 Espaços Métricos

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos e resultados topológicos, bem como a ideia de métrica, que nos fornece a noção de distância e deve satisfazer algumas propriedades. Os resultados sobre os Espaços Métricos são de bastante importância no estudo da Análise Funcional, uma vez que a grande maioria dos espaços estudados nesta área possuem uma métrica induzida por uma norma. Para mais detalhes sobre essa teoria ver (2).

## 1.1 Espaços Métricos

**Definição 1.1.** Uma *métrica* num conjunto  $M$ , não-vazio, é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado  $(x, y) \in M \times M$  um número  $d(x, y)$ , chamado distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

- $d(x, x) = 0$ ;
- Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Ao par  $(M, d)$  damos o nome de *Espaço Métrico*, onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $M$ .

Os elementos de um espaço métrico podem ser números, pontos, matrizes, funções, entre outros. Porém, neste trabalho nos referimos aos elementos do espaço métrico como *pontos de  $M$* .

Mostraremos agora alguns exemplos de espaços métricos:

**Exemplo 1.1. Métrica "zero-um"**- Seja  $M$  um conjunto não-vazio e  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Mostremos que  $d$  cumpre as condições de métrica:

- Por definição,  $d(x, y) = 0$  se  $x = y$ . Logo,  $d(x, x) = 0$ .
- Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = 1 > 0$ .
- Observe que se  $x = y$ ,  $d(x, y) = d(y, x) = 0$ ; e se  $x \neq y$ ,  $d(x, y) = d(y, x) = 1$ . Deste modo,  $d(x, y) = d(y, x)$ , para todo  $x, y \in M$ .
- Para todo  $x, y, z \in M$  temos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . De fato, consideremos os seguintes casos:
  1. Se  $x = z$ , então  $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
  2. Se  $x \neq z$  e  $y = z$ , então  $y \neq x$ . Neste caso,  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 0$  e  $d(y, z) = 1$ , então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
  3. Se  $x \neq z$  e  $y = z$  então  $y \neq x$ . Neste caso  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 0$ , então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
  4. Se  $x \neq z$ ,  $y \neq x$  e  $y \neq z$  então  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 1$ , então  $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 2$ . Assim,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in M$ .

Portanto,  $d$  é uma métrica em  $M$ .

**Exemplo 1.2. O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .** Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são as listas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  onde cada uma das  $n$  coordenadas  $x_i$  é um número real. As três funções que definiremos abaixo são métricas sobre  $\mathbb{R}^n$ . Dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , escreveremos:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Podemos comparar as métricas dadas acima,  $d$ ,  $d'$  e  $d''$ . Para isto, mostraremos um resultado que caracteriza tal relação entre elas.

**Proposição 1.3.** *Sejam  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  as métricas definidas no exemplo anterior. Quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tem-se:*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$$

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

1.  $d''(x, y) \leq d(x, y)$ . De fato,  $d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = |x_j - y_j|$ , para um certo  $j$ , então  $d''(x, y) = |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2}$ . Porém,

$$\sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = d(x, y).$$

Portanto,  $d''(x, y) \leq d(x, y)$ .

2.  $d(x, y) \leq d'(x, y)$ . De fato,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2 + 2 \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|} \\ &= \sqrt{(|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = d'(x, y). \end{aligned}$$

Portanto,  $d(x, y) \leq d'(x, y)$ .

3.  $d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$ . De fato, como  $|x_i - y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ , logo

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \dots + \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = n \cdot d''(x, y).$$

Portanto,  $d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$ .

□

**Exemplo 1.4. Métrica do supremo ou métrica da convergência uniforme.** Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma função real  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada **limitada** quando existe uma constante  $k = k_f > 0$  tal que  $|f(x)| \leq k$ , para todo  $x \in X$ .

Indica-se por  $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$  o conjunto das funções limitadas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiremos uma métrica em  $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ . Dadas  $f, g, h \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$  arbitrárias

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Mostremos então que  $d$  de fato é uma métrica. De fato, para quaisquer  $f, g, h \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ , temos

- $d(f, f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = 0$
- Se  $f \neq g$  então existe  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , daí  $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ . Logo,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq |f(x_0) - g(x_0)| > 0$$

- $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f)$
- $d(f, h) = \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in X} (|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|) \leq \left( \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \right) + \left( \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)| \right) = d(f, g) + d(g, h)$ .

**Exemplo 1.5.** Sabemos que uma métrica é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ . Porém, nem toda função é uma métrica. Para exemplificar esta afirmação consideremos a seguinte função:  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d(x, y) = (x - y)^2$ . Note que:

- $d(x, x) = (x - x)^2 = 0$ , portanto,  $d(x, x) = 0$ .
- $d(x, y) > 0$ , para  $x \neq y$  pois,  $(x - y)^2 \geq 0$  e  $(x - y)^2 = 0$  se, e somente se,  $x - y = 0$ , o que é equivalente a  $x = y$ .
- $d(x, y) = (x - y)^2 = (y - x)^2 = d(y, x)$ .

Perceba que, a função definida acima satisfaz as três propriedades de métrica. Mas, como será mostrado abaixo não satisfaz a última condição:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Note que, se considerarmos  $x = 2$ ,  $y = 4$  e  $z = 5$ , temos:

$$d(x, z) = (2 - 5)^2 = (-3)^2 = 9, d(x, y) = (2 - 4)^2 = (-2)^2 = 4, d(y, z) = (4 - 5)^2 = (-1)^2 = 1$$

Assim,  $d(x, y) \leq (x, y) + (y, z)$  é  $9 \leq 4 + 1$ , ou seja,  $9 \leq 5$ , o que é um absurdo. Portanto, a função  $d(x, y) = (x - y)^2$  não é uma métrica em  $\mathbb{R}$ , pois  $f$  não cumpre a última condição de métrica.

Seja  $(M, d)$  é um espaço métrico. Todo subconjunto  $S \subset M$  pode ser considerado um espaço métrico, basta usarmos entre os elementos de  $S$  a mesma distância que eles possuíam como elementos de  $M$ , ou seja, consideramos a restrição de  $d$  a  $S \times S$ . Dizemos assim que  $S$  chama-se subespaço de  $M$  e a métrica de  $S$  diz-se induzida pela métrica de  $M$ .

## 1.2 Bolas e Esferas

Nesta seção falaremos sobre a noção de bolas, que é bastante importante para o estudo dos espaços métricos.

**Definição 1.2.** Seja  $a$  um ponto qualquer no espaço métrico  $M$ . Dado um número real  $r > 0$  definimos:

1. A *bola aberta* de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a; r)$  dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ . Ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$$

2. A *bola fechada* de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B[a; r]$  dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor ou igual a  $r$  do ponto  $a$ . Ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}$$

3. A *esfera* de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $S(a; r)$  formado pelos pontos  $x \in M$  tais que

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}$$

Um fato interessante acerca do estudo de bolas e esfera é que elas assumem aspectos geométricos inesperados que dependem da métrica utilizada.

*Observação 1.6.* Se a métrica  $d$  é proveniente de uma norma de um espaço vetorial  $E$ , escrevemos:

$$B(a; r) = \{x \in E; |x - a| < r\};$$

$$B[a; r] = \{x \in E; |x - a| \leq r\};$$

$$S(a; r) = \{x \in E; |x - a| = r\}.$$

Se  $X$  é um subespaço do espaço métrico  $M$ . Para cada  $a \in X$  e cada  $r > 0$ , considere a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  relativa a métrica induzida em  $X$ , que denotaremos por  $B_X(a; r)$ . Da definição resultam os seguintes fatos,  $B_X(a; r) = B(a; r) \cap X$ ,  $B_X[a; r] = B[a; r] \cap X$  e  $S_X(a; r) = S(a; r) \cap X$ .

Observe os exemplos abaixo:

**Exemplo 1.7.** Com a métrica usual da reta, para todo  $a \in \mathbb{R}$  e todo  $r > 0$ , a bola aberta  $B(a; r)$  é o intervalo aberto  $(a - r, a + r)$ , pois a condição  $|x - a| < r$  equivale  $-r < x - a < r$ , ou seja,  $a - r < x < a + r$ . De modo análogo, a bola fechada  $B[a; r]$  é o intervalo fechado  $[a - r, a + r]$  e a esfera  $S(a; r)$  tem apenas dois pontos:  $a - r$  e  $a + r$ .

**Exemplo 1.8.** No plano  $\mathbb{R}^2$  para todo  $x = (x_1, x_2)$  e  $a = (a_1, a_2)$ , considerando as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  definidas no Exemplo 1.2, temos:

1. Usando a métrica usual  $d$ , ou seja,  $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$ . Perceba que,  $d(x; a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r$  se e somente se  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$ . Portanto,  $B(a; r)$  é o interior de um círculo de centro  $a = (a_1, a_2)$  e raio  $r$ .
2. Usando a métrica  $d'$ , ou seja,  $d'(x, a) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|$ . Observamos que  $B(a; r)$  corresponde ao interior de um quadrado de centro  $a = (a_1, a_2)$  e diagonais de comprimento  $2r$  sobre os eixos.
3. Usando a métrica  $d''$ , ou seja,  $d''(x, y) = \max\{|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|\}$ . Perceba que  $d''(x; a) = \max\{|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|\} < r$  se e somente se  $|x_1 - a_1| < r$  e  $|x_2 - a_2| < r$ . Portanto,  $B(a; r)$  é o interior de um quadrado de centro  $a = (a_1, a_2)$  e lados de comprimentos  $2r$ , paralelos aos eixos.



## 1.3 Conjuntos Limitados

Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  chama-se *limitado* quando existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d(x, y) \leq c$  para quaisquer  $x, y \in X$ . O menor desses números  $c$  é chamado de diâmetro de  $X$ , denotado por  $diam(X)$ . Dizer que  $d(x, y) \leq c$  para todos  $x, y \in X$ , significa afirmar que  $c$  é uma cota superior para o conjunto das distâncias  $d(x, y)$  entre os pontos de  $X$ . Então o diâmetro de um conjunto limitado  $X \subset M$  é a menor das cotas superiores do conjunto das distâncias  $d(x, y)$  entre os pontos de  $X$ , isto é

$$diam(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in X\}.$$

Dizer que um conjunto *não é limitado*, significa afirmar que todo  $c \in \mathbb{R}$ , existem pontos  $x, y \in X$  tais que  $d(x, y) > c$ .

## 1.4 Funções contínuas

**Definição 1.3.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Dizemos que a aplicação  $f : M \rightarrow N$  é *contínua no ponto*  $a \in M$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, é possível obter  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ , com  $x \in M$ . Quando a aplicação  $f : M \rightarrow N$  é contínua em todos os pontos  $a \in M$ , dizemos que ela é *contínua*.

Um modo equivalente de dizer que  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  é:

- Dada qualquer bola  $B' = B(f(a); \epsilon)$  de centro  $f(a)$  e raio  $\epsilon$ , podemos encontrar uma bola  $B = B(a; \delta)$ , de centro  $a$ , tal que  $f(B) \subset B'$ .

No caso particular em que  $N = \mathbb{R}$  e  $M \subset \mathbb{R}$ , podemos reescrever a definição de continuidade no ponto  $a \in M$  como:

- Dizer que  $f$  é contínua no ponto  $a \in M$  significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in M$  e  $a - \delta < x < a + \delta$  implicam  $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ .

*Observação 1.9.* A noção de continuidade num ponto é local, pois depende do comportamento de  $f$  nas proximidades do ponto.

**Definição 1.4.** Sejam  $M, N$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma função Lipschitziana se existir uma constante  $c > 0$  (chamada constante de Lipschitz) tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

para quaisquer  $x, y \in M$ .

**Teorema 1.10.** *Toda função Lipschitziana é contínua.*

*Demonstração.* Dados  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ . Então  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \epsilon$ .  $\square$

A aplicação  $f : M \rightarrow N$  diz-se *localmente lipschitziana* quando para cada ponto  $a \in M$  existir um  $r > 0$  tal que a restrição  $f|_B$  na bola  $B = B(a; r)$  é lipschitziana. Uma aplicação localmente lipschitziana é contínua.

## 1.5 Continuidade Uniforme

**Definição 1.5.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  chama-se *uniformemente contínua* quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, podemos obter  $\delta > 0$  tal que, para quaisquer  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta$  implica  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

*Observação 1.11.* Toda aplicação uniformemente contínua é de modo particular uma aplicação contínua. Porém, nem toda função contínua é uniformemente contínua, por exemplo, considere a seguinte função contínua  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Dado  $\epsilon > 0$  mostraremos que não podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  implica em  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \epsilon$ . De fato, dado  $\epsilon > 0$ , suponhamos escolhido  $\delta > 0$ . Tomemos um número positivo  $y$  de modo que  $0 < y < \delta$  e  $0 < y < \frac{1}{3\epsilon}$ . Então, para  $x = y + \frac{\delta}{2}$ , temos  $|x - y| < \delta$  mas

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{2}{2y + \delta} - \frac{1}{y} \right| = \frac{\delta}{(2y + \delta)y} > \frac{\delta}{3\delta \cdot y} = \frac{1}{3y} > \epsilon.$$

Portanto,  $f$  não é uniformemente contínua.

Ainda mais, perceba que a continuidade uniforme é um fenômeno global e isto relaciona-se com o comportamento da aplicação  $f$  em todo o espaço de forma simultânea, diferindo-se assim, da continuidade observada anteriormente.

**Exemplo 1.12.** Toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua. De fato, se  $f$  é uma aplicação lipschitziana, existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ , então, dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ . Assim,  $d(x, y) < \delta$  segue que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \leq c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$ .

## 1.6 Noções de Topologia Geral

A Topologia é um ramo da Matemática no qual o objetivo principal é o estudo dos espaços topológicos e as funções contínuas entre esses espaços. Este ramo estuda de forma geral as ideias de limite, de continuidade e conceitos relacionados a essas definições. Nesta seção abordaremos conceitos primordiais que serão importantes para o desenvolvimento do texto.

**Definição 1.6.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Um ponto  $a \in X$  denomina-se *ponto interior* a  $X$  quando é o centro de uma bola aberta contida em  $X$ , isto é, quando existe  $r > 0$  tal que  $d(x, a) < r$  implica  $x \in X$ . Denotaremos por  $\text{int}(X)$  o conjunto formado por todos os pontos interiores a  $X$ .

Dizer que um ponto  $b \in X$  não é interior a  $X$  significa dizer que toda bola aberta de centro  $b$  contém algum ponto que não pertence a  $X$ .

**Definição 1.7.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . A *fronteira* de  $X$  em  $M$  é o conjunto formado pelos pontos  $b \in M$  tais que toda bola aberta de centro  $b$  contém pelo menos um ponto de  $X$  e um ponto do complementar ( $M - X$ ). Denotaremos a fronteira de  $X$  em  $M$  por  $\partial X$ .

**Definição 1.8.** Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  diz-se *aberto* em  $M$  quando todos os seus pontos são interiores, ou seja,  $\text{int}(X) = X$ . Ou seja,  $X \subset M$  é um aberto em  $M$  se para todo  $x \in X$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset X$ .

**Proposição 1.13.** *Seja  $M$  um espaço métrico.  $X \subset M$  é aberto se, e somente se,  $X \cap \partial X = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Se  $X$  é aberto, então todo ponto  $x \in X$  é interior, logo existe  $r > 0$  tal que  $B(x; r) \subset X$ ; sendo assim, existe uma bola que não contém nenhum ponto no complemento  $M - X$ . Portanto  $X \cap \partial X = \emptyset$ .

Reciprocamente, se  $X$  não é aberto, existe  $a \in X$  tal que  $B(a; r) \not\subset X$  para todo  $r > 0$ , logo toda bola centrada em  $a$  contém pontos do complemento  $M - X$  e contém  $a \in X$ , portanto  $a \in \partial X$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

**Proposição 1.14.** *Em qualquer espaço métrico  $M$ , uma bola aberta  $B(a; r)$  é um conjunto aberto.*

*Demonstração.* Considere  $x \in B(a; r)$ . Então  $d(x, a) < r$  e escolhendo  $\epsilon = r - d(x, a)$  tem-se  $B(x, \epsilon) \subset B(a; r)$ . Com efeito, se  $y \in B(x, \epsilon)$  então  $d(x, y) < \epsilon$  e portanto  $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \epsilon = r$ . Logo,  $y \in B(a; r)$ .  $\square$

**Proposição 1.15.** *Seja  $M$  um espaço métrico. Então*

1.  $\emptyset$  e  $M$  são abertos;
2. Se  $A_1, \dots, A_n$  são abertos em  $M$ , então  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  é aberto em  $M$ , ou seja, a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto;
3. Se  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$  uma família qualquer de abertos em  $M$ , onde  $L$  é um conjunto de índices, então  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é aberto em  $M$ , ou seja, a reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

*Demonstração.* 1. É imediato.

2. Suponha  $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$ . Como  $A_1, \dots, A_n$  são abertos, existem  $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$  tais que,  $B(x; r_1) \subset A_1, \dots, B(x; r_n) \subset A_n$ . Considere  $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ . Então,

$$B(x; r) \subset B(x; r_1) \cap \dots \cap B(x; r_n) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$$

daí

$$B(x; r) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n.$$

Logo,  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  é aberto.

3. Seja  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ . Dado  $x \in A$ , existe um índice  $\lambda \in L$  tal que  $x \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(x; r) \subset A_\lambda$ . Logo,  $B(x; r) \subset A$  e, portanto,  $A$  é aberto.

□

*Observação 1.16.* O item 2 da proposição acima não é verdadeiro se considerarmos uma família infinita de abertos, isto é, a interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Com efeito, consideremos  $M = \mathbb{R}$  com a métrica usual, então os intervalos  $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  são conjuntos abertos, entretanto  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$  que não é aberto. Portanto, a interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um aberto.

**Definição 1.9.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Dizemos que um ponto  $a$  é *aderente* a  $X$  quando  $d(a, X) = 0$ . De forma intuitiva, isto significa que existem pontos de  $X$  arbitrariamente próximos de  $a$ , ou seja, para cada  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $x \in X$  tal que  $d(a, x) < \epsilon$ . O conjunto dos pontos de  $M$  que são aderentes a  $X$  é chamado de *fecho* e é denotado por  $\overline{X}$ .

Algumas formas equivalentes de dizer que  $a$  é aderente a  $X$  são:

1. Para todo  $\epsilon > 0$ , tem-se  $B(a; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ ;
2.  $A \cap X \neq \emptyset$  para todo aberto  $A$  que contem  $a$ ;
3.  $a$  é limite de uma sequência de pontos  $x_n \in X$ .<sup>1</sup>

**Exemplo 1.17.**  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ,  $\overline{M} = M$  e  $X \subset \overline{X}$ , para todo  $X \subset M$ .

**Definição 1.10.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Dizemos que  $X$  é *denso* em  $M$  quando  $\overline{X} = M$ , ou seja, quando toda bola aberta em  $M$  contém algum ponto de  $X$ , ou seja, para quaisquer  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$  tem-se

$$B(a, \epsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

**Exemplo 1.18.** O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos racionais e o conjunto dos irracionais  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  são conjuntos densos em  $\mathbb{R}$ . Isto é, todo intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.

<sup>1</sup> Não definimos aqui sequências e limites de sequências.

**Definição 1.11.** Dizemos que um conjunto  $F \subset M$  é dito *fechado* quando  $F = \overline{F}$ , ou seja,  $F$  é igual ao seu fecho.

Veremos na próxima proposição que  $F$  é fechado em um espaço métrico  $M$  é quando seu complementar  $M - F$  é aberto em  $M$ .

**Proposição 1.19.** *Sejam  $M$  um espaço métrico e  $F \subset M$ . Então  $F$  é fechado se, e somente se,  $M - F$  é aberto.*

*Demonstração.* Suponha que  $F$  é fechado, ou seja,  $\overline{F} = F$ . Seja  $a \in M - F$ , ou seja,  $a \notin F = \overline{F}$ , logo  $a$  não é aderente a  $F$ . Disto segue que, existe uma bola aberta  $B(a; r)$  que não contém os pontos de  $F$ , isto é, existe  $r > 0$  tal que  $B(a; r) \subset M - F$ . Portanto  $M - F$  é aberto.

Reciprocamente, se  $M - F$  é aberto, então para todo ponto  $a \in M - F$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(a; r) \subset M - F$ , ou seja, existe uma bola aberta  $B(a; r)$  que não contém pontos de  $F$ . Neste caso, os pontos que não pertencem a  $F$  não são aderentes a  $F$ . Logo,  $\overline{F} = F$  e portanto,  $F$  é fechado.  $\square$

*Observação 1.20.* 1. Quando um conjunto não é fechado, não se pode concluir que ele seja aberto. A exemplo disto, considere  $M = \mathbb{R}$  com a métrica usual, então o intervalo  $i = [0, 1)$  não é um conjunto aberto (pois 0 não é ponto interior de  $I$ ) nem fechado (pois 1 é um ponto de aderência que não pertence a  $I$ ).

2. Quando um conjunto é aberto, não se pode concluir que ele não é fechado. Por exemplo, considere no espaço dos números racionais  $\mathbb{Q}$  munido da métrica induzida da métrica usual de  $\mathbb{R}$ , o conjunto  $C = \{r \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} < r < \pi\}$  é aberto<sup>2</sup> e além disso é também fechado<sup>3</sup>, pois seu complementar em  $\mathbb{Q}$  é o subconjunto aberto  $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\pi, +\infty)$ .

**Proposição 1.21.** *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico  $M$  gozam das seguintes propriedades:*

1. o conjunto vazio  $\emptyset$  e o espaço inteiro  $M$  são fechados;

<sup>2</sup> A prova que  $C$  é aberto (sem muitos detalhes) é que  $C = (\sqrt{2}, \pi) \cap \mathbb{Q}$ .

<sup>3</sup> A prova que  $C$  é fechado (sem muitos detalhes) é que  $C = [\sqrt{2}, \pi] \cap \mathbb{Q}$ .

2. a reunião  $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$  de um número finito de subconjuntos fechados  $F_1, \dots, F_n \subset M$  é um subconjunto fechado de  $M$ ;
3. a interseção  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  de uma família qualquer  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  (finita ou infinita) de subconjuntos fechados  $F_\lambda \subset M$  é um subconjunto fechado de  $M$ .

*Demonstração.* 1. É imediato;

2. Seja  $A_1 = F_1^c, \dots, A_n = F_n^c$  abertos em  $M$ . Desse modo,  $A_1 \cap \dots \cap A_n = F_1^c \cap \dots \cap F_n^c = (F_1 \cup \dots \cup F_n)^c$  é aberto e portanto  $F_1 \cup \dots \cup F_n$  é fechado em  $M$ .

3. Seja  $A_\lambda = F_\lambda^c$  para cada  $\lambda \in L$ . Então cada  $A_\lambda$  é aberto e portanto a união  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^c = \left[ \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \right]^c$  é aberto em  $M$ . Logo,  $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  é fechado.

□

*Observação 1.22.* A união de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Por exemplo, se considerarmos os intervalos fechados  $I_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ , percebemos que a união desses fechados em  $\mathbb{R}$  é o intervalo aberto  $I = (-1, 1)$  que não é fechado em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.12.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Um ponto  $a \in M$  chama-se *ponto de acumulação* de  $X$  quando toda bola de centro  $a$  contém algum ponto de  $X$  diferente do ponto  $a$ . Denotaremos por  $X'$  o conjunto dos pontos de acumulação de  $X$  em  $M$ , também chamado de *derivado* do conjunto  $X$ .

**Definição 1.13.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Uma *cobertura* de  $X$  é uma família  $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de  $M$  tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . Isso significa que, para cada  $x \in X$ , existe pelo menos um índice  $\lambda \in L$  tal que  $x \in C_\lambda$ . A cobertura  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$  diz-se *finita* quando  $L$  é um conjunto finito. Se existir um subconjunto  $L' \subset L$  tal que, para cada  $x \in X$ , ainda pode-se obter  $\lambda \in L'$  com  $x \in C_\lambda$ , i.e.,  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$ , então a subfamília  $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$  chama-se uma *subcobertura* de  $\mathcal{C}$ . Uma cobertura  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  diz-se *aberta* quando cada conjunto  $A_\lambda, \lambda \in L$ , é aberto em  $M$ .

A seguir introduziremos a definição de conjuntos compactos, ressaltamos que tal definição pode ser apresentada em contextos mais gerais, a saber, em espaços topológicos não-metrizáveis.

**Definição 1.14.** Um espaço métrico  $M$  chama-se *compacto* quando toda cobertura aberta possui subcobertura finita. Um subconjunto  $K$  de um espaço métrico  $M$  é *compacto* quando o subespaço métrico  $K$  é compacto.

*Observação 1.23.* Note que  $K$  ser um subconjunto compacto de  $M$  significa que de toda cobertura aberta  $K = \bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda$  com  $A'_\lambda$  aberto em  $K$ , pode-se extrair uma subcobertura finita. Como, para cada  $\lambda \in L$ , existe um aberto  $A_\lambda$  em  $M$ , tal que  $A'_\lambda = K \cap A_\lambda$ , então

$$K = \bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Logo  $K$  é um subconjunto compacto de  $M$  se, e somente se, de cada cobertura  $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , por abertos  $A_\lambda$  de  $M$ , pode-se extrair uma subcobertura finita.

Em espaços métricos, existe uma relação forte entre fechados e compactos, resumida na seguinte proposição.

**Proposição 1.24.** *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

*Demonstração.* Sejam  $M$  compacto e  $F \subset M$  fechado. Dada uma cobertura aberta  $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , obtemos a cobertura aberta  $M = (\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup (M - F)$ , da qual extraímos um subcobertura finita  $M = (A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}) \cup (M - F)$ . Como  $F \cap (M - F) = \emptyset$ , temos  $F \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Logo  $F$  é compacto.

Reciprocamente, seja  $K \subset M$  um subconjunto compacto de um espaço métrico  $M$ . Suponha por contradição que  $K$  não é fechado, logo existe  $x \in \overline{K} - K$ . Pondo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = M - B[x; \frac{1}{n}] = (B[x; \frac{1}{n}])^c$ , então  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma cobertura aberta de  $K$ , pois  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x; \frac{1}{n}] = \{x\}$  e daí  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B[x; \frac{1}{n}])^c = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x; \frac{1}{n}] \right)^c = M - \{x\} \supset K$ . Como  $K$  é compacto e  $A_n \subset A_m$  sempre que  $n < m$ , logo  $K \subset A_{n_0}$  para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Isto significa que  $K \cap B[x; \frac{1}{n_0}] = \emptyset$ , o que é uma contradição, pois  $x \in \overline{K}$ .  $\square$

Como consequência imediata, temos o seguinte resultado.



**Corolário 1.25.** *Qualquer interseção  $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$  de compactos  $K_\lambda \subset M$  é compacta.*

*Demonstração.* Com efeito, cada  $K_\lambda$  sendo fechado em  $M$ , a interseção  $K$  é fechado em  $M$ , logo é fechado em cada  $K_\lambda$ . Portanto  $K$  é compacto.  $\square$

Como esperado, espaços métricos também admitem a seguinte boa propriedade.

**Proposição 1.26.** *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

*Demonstração.* Como  $M$  é compacto, da cobertura aberta  $M = \bigcup_{x \in M} B(x; 1)$  podemos extrair uma subcobertura finita  $M = B(x_1; 1) \cup \dots \cup B(x_n; 1)$ . Portanto  $M$  é limitado.  $\square$

O seguinte resultado fornece uma forma de verificar a compacidade de um espaço métrico.

**Proposição 1.27.** *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

*Demonstração.* Sejam  $f : M \rightarrow N$  contínua e  $K \subset M$  compacto. Dada uma cobertura aberta  $f(K) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , obtemos a cobertura aberta  $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda)$ , da qual extraímos uma subcobertura finita  $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$  e daí  $f(K) \subset f(f^{-1}(A_{\lambda_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_{\lambda_n})) \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Logo  $f(K)$  é compacto.  $\square$

**Corolário 1.28.** *Se  $M$  é compacto, toda aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  é fechada, i.e., leva conjuntos fechados em  $M$ , em conjuntos fechados em  $N$ .*

*Demonstração.* Com efeito, dado  $F \subset M$  fechado, como  $M$  é compacto, segue que  $F$  é compacto, logo  $f(F)$  é compacto, donde é fechado em  $N$ .  $\square$

**Corolário 1.29.** *Se  $M$  é compacto, toda bijeção contínua  $f : M \rightarrow N$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Com efeito, sendo  $f$  uma aplicação fechada, sua inversa  $g : N \rightarrow M$  é tal que, para todo  $F \subset M$  fechado,  $g^{-1}(F) = f(F) \subset N$  é fechado. Logo,  $g$  é contínua.  $\square$

**Corolário 1.30.** *Se  $M$  é compacto, então toda função contínua  $f : M \rightarrow N$  é limitada.*

*Demonstração.* Com efeito,  $f(M) \subset N$ , sendo compacto, é limitado.  $\square$

## 1.7 Espaços Normados

Nesta seção introduziremos o conceito de norma e exibiremos algumas propriedades dos espaços vetoriais normados.

**Definição 1.15.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  que denota,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Uma função

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma **norma** se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in E$  e  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  para quaisquer  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ ;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para quaisquer  $x, y \in E$  (desigualdade triangular).

Dizemos que o par  $(E, \|\cdot\|)$  é um **espaço vetorial normado**.

Um espaço normado  $(E, \|\cdot\|)$  pode ser considerado um espaço métrico  $(E, d)$ , basta definirmos a seguinte métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E$$

De fato, note que os axiomas da métrica são satisfeitos, para quaisquer  $x, y, z \in E$ :

- $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$ ;
- Se  $x \neq y$ , então  $x - y \neq 0$ , logo,  $d(x, y) = \|x - y\| > 0$ , por definição de norma;
- $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$ ;
- $d(x, z) = \|x - z\| = \|x + (-y + y) - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ .

Assim, todo espaço normado  $(E, \|\cdot\|)$  é um espaço métrico  $(E, d)$ , com  $d$  sendo a métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|$ . De modo particular, todo espaço normado é um espaço topológico.

**Proposição 1.31.** *Seja  $\|\cdot\|$  uma norma qualquer em  $E$ . Então, para todo  $x, y \in E$  tem-se*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

*Demonstração.* Usando a desigualdade triangular, note que

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e isto implica que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

De modo análogo,

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

daí,

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$

que resulta em,  $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$ . Assim,

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Portanto,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

□

**Lema 1.32.** *Toda norma é uma função contínua.*

*Demonstração.* Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todos  $x, y \in E$  com  $\|x - y\| < \delta$ .

Tomando  $\delta = \epsilon$  temos pela Proposição 1.31,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \delta = \epsilon.$$

□

**Exemplo 1.33.** Abaixo mostraremos três normas que estão definidas sobre o  $\mathbb{R}^n$ .

1. Norma Euclidiana:

$$\|x\| = \left( \sum_i^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Norma da soma:

$$\|x\|_1 = \sum_i^n |x_i|$$

3. Norma do máximo:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$$

Portanto,  $\mathbb{R}^n$  munido com qualquer das três normas definidas acima é um espaço vetorial normado.

**Definição 1.16.** Sejam  $\|\cdot\|_0$  e  $\|\cdot\|_1$  normas definidas sobre o espaço vetorial  $E$ . Dizemos que  $\|\cdot\|_0$  e  $\|\cdot\|_1$  são equivalentes se existirem constantes positivas  $c_1, c_2$  tais que

$$c_1\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_0 \leq c_2\|\cdot\|_1$$

**Teorema 1.34.** Em um espaço de vetorial normado de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.

*Demonstração.* Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão finita e  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $E$ . Para cada  $x \in E$  existem únicos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$  tais que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Definamos a norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

Mostraremos que qualquer norma  $\|\cdot\|_0$  em  $E$  é equivalente à  $\|\cdot\|_1$ . De fato,

$$\|x\|_0 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|_0 \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|e_i\|_0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_0 \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = c_2 \|x\|_1$$

com  $c_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_0$ . Logo,  $\|x\|_0 \leq c_2 \|x\|_1$ .

Analisando a outra desigualdade, suponhamos que não existe  $c_1$  positivo tal que  $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_0$ , para todo  $x \in E$ . Deste modo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in E$  tal que  $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_0$ . Defina  $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$ , obteremos então uma sequência  $(y_n)$  tal que  $\|y_n\|_1 = 1$ .

Como a bola fechada é compacta em dimensão finita, segue que existe uma subsequência  $(y_{n_k})$  de  $(y_n)$  que converge para um ponto de  $y$  em  $(E, \|\cdot\|_1)$ . Pela continuidade da norma, temos  $\|y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k}\|_1 = 1$ , logo  $y \neq 0$ . Usando a desigualdade anterior, temos

$$\|y\|_0 = \|y - y_{n_k} + y_{n_k}\|_0 \leq \|y - y_{n_k}\|_0 + \|y_{n_k}\|_0 \leq c_2\|y - y_{n_k}\|_1 + \frac{\|x_{n_k}\|_0}{\|x_{n_k}\|_1} \leq c_2\|y - y_{n_k}\|_1 + \frac{1}{n_k}$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  obtemos  $\|y\|_0 = 0$ , portanto,  $y = 0$ . O que é uma contradição. Logo, existe  $c_1 > 0$  tal que  $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_0$ , para todo  $x \in E$ .

□

*Observação 1.35.* Pode ocorrer a existência de normas não equivalentes, caso o espaço vetorial normado não seja de dimensão finita.

*Observação 1.36.* No espaço  $\mathbb{R}^n$  todas as normas definidas no Exemplo(1.33) são equivalentes.

## 1.8 Espaço de Banach

Nesta seção, apresentaremos uma classe especial de espaços vetoriais normados, os conhecidos espaços de Banach.

**Definição 1.17.** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $M$  chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implica  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

Intuitivamente, à medida que o índice  $n$  cresce, os termos da sequência de Cauchy se tornam mais próximos.

**Teorema 1.37.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  um sequência convergente no espaço métrico  $M$ , com  $\lim x_n = x$ . Por definição de limite, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implique em

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, se  $m, n > n_0$ , pela desigualdade triangular, segue que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. □

**Teorema 1.38.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $M$ , então pela definição, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m, n > n_0$  implica em

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Tome  $\epsilon = 1$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implica  $d(x_m, x_n) < 1$ , em particular,  $d(x_{n_0+i}, x_{n_0+1}) < \epsilon$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , logo o conjunto  $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado, como  $\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$  é finito, logo é limitado. Portanto, Segue que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

é limitado. □

**Definição 1.18.** Dizemos que um espaço métrico é *completo* quando toda sequência de Cauchy neste espaço métrico é convergente.

Para mostrar que um espaço métrico  $M$  não é completo, basta mostrar que existe uma sequência de Cauchy em  $M$  que não seja convergente.

**Exemplo 1.39.** Todo espaço métrico munido da métrica zero-um é completo. De fato, qualquer sequência de Cauchy é constante a partir de um determinado índice e portanto, convergente.

Observe que, se considerarmos  $X = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ , munido da métrica induzida de  $\mathbb{R}$ , a sequência  $(x_n)$  definida por  $x_n = \frac{1}{n}$  é uma sequência de Cauchy

não convergente. Deste modo, podemos tirar a seguinte conclusão, nem todo espaço discreto é completo.

O próximo resultado apresenta um dos exemplos mais importantes de espaço métrico completo, a reta real.

**Proposição 1.40.** *A reta real é um espaço métrico completo.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Note que,  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$  e que os conjuntos  $X_n$  são limitados, pois são finitos. Seja  $a_n = \inf X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b = \sup X_1$ . Como toda sequência monotóna e limitada de números reais é convergente, existe  $\lim a_n = a$ .

**Afirmção**  $\lim x_n = a$ . Para provar a afirmação, basta mostrar que  $a$  é limite de uma subsequência de  $(x_n)$ , como  $\lim a_n = a$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m > n_0$ ,  $|a_m - a| < \epsilon$ , isto é,  $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$ .

Para cada  $m$ , como  $a_m = \inf X_m$  existe  $n_m \geq m$  tal que  $a_m < x_{n_m} < a + \epsilon$ , com  $x_{n_m} \in X_m$ . Assim, temos  $(x_{n_m})$  uma subsequência de  $(x_n)$  tal que  $a - \epsilon < x_{n_m} < a + \epsilon$ , para todo  $n_m > n_0$ , ou seja,  $|x_{n_m} - a| < \epsilon$  e portanto,  $\lim x_n = a$ . Portanto,  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo. □

**Definição 1.19.** Um espaço vetorial normado é chamado *Espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em  $E$  é convergente em  $E$ .

**Exemplo 1.41.** O espaço  $\mathbb{R}^n$  com a norma definida por  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  é um espaço de Banach.

Mais adiante veremos que todo espaço de dimensão finita é completo e o resultado a seguir é fundamental para este resultado.

**Lema 1.42.** *Para um conjunto linearmente independente  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de vetores em um espaço vetorial normado  $E$ , existe um número real positivo  $c$  tal que para qualquer escolha*

de escalares  $a_1, \dots, a_n$  vale a desigualdade

$$\|a_1x_1 + \dots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \dots + |a_n|)$$

*Demonstração.* Se  $|a_1| + \dots + |a_n| = 0$  não há o que demonstrar. Suponhamos  $|a_1| + \dots + |a_n| > 0$ . Então mostrar a desigualdade acima equivale a mostrar que existe  $c > 0$  tal que

$$\|d_1x_1 + \dots + d_nx_n\| \geq c$$

para quaisquer  $d_j$  da forma

$$d_j = \frac{a_j}{|a_1| + \dots + |a_n|}$$

Portanto, basta mostrar isso com

$$\sum_{j=1}^n |d_j| = 1$$

Suponha que isso não aconteça. Então, existe uma sequência  $(y_m)$  de elementos de  $E$ ,

$$y_m = \sum_{j=1}^n b_{j,m}x_j$$

e

$$\sum_{j=1}^n |b_{j,m}| = 1$$

tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m\| = 0.$$

Como  $\sum_{j=1}^n |b_{j,m}| = 1$ , temos  $|b_{j,m}| \leq 1$  para cada  $j$  e cada  $m$ . Então, para cada  $j = 1, \dots, n$  fixo, a sequência

$$(b_{j,m})_{m=1}^{\infty} = (b_{1,j}, b_{2,j}, \dots)$$

é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass,  $(b_{1,m})_{m=1}^{\infty}$  possui uma subsequência convergente. Seja  $b_1$  o limite dessa subsequência. Seja  $(y_{1,m})$  a subsequência correspondente de  $(y_m)$ . Usando o mesmo argumento,  $(y_{1,m})$  possui uma subsequência  $(y_{2,m})$  para a qual a sequência correspondente  $(b_{2,m})_{m=1}^{\infty}$  converge. Procedendo dessa forma, após  $n$  etapas, obtemos uma subsequência

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^n c_{j,m}x_j$$

com

$$\sum_{j=1}^n |c_{j,m}| = 1$$



e, para cada  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_{j,m} = b_j.$$

Assim

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_{n,m} = \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

com

$$\sum_{j=1}^n |b_j| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |c_{j,m}| = 1.$$

Portanto nem todos os  $b_j$  são nulos e, como  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é L.I., segue que

$$y := \sum_{j=1}^n b_j x_j \neq 0.$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_{n,m} = y$ , segue que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_{n,m}\| = \|y\|$ . Temos,  $\|y_m\| \rightarrow 0$ , e como  $(y_{n,m})$  é subsequência de  $(y_m)$ , temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_{n,m}\| = 0.$$

Daí  $\|y\| = 0$ , e isso contradiz o fato de ser  $y \neq 0$ . □

## 1.9 Conjuntos convexos

Nesta seção apresentaremos o conceito de conjunto convexo num espaço vetorial normado e algumas de suas propriedades, que serão utilizadas na demonstração do Teorema da Aplicação Aberta. Algumas demonstrações podem ser omitidas por motivos de brevidade, mas indicamos as referências (1, 3) para consulta.

**Definição 1.20.** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço vetorial normado  $X$ . Dizemos que  $A$  é convexo quando

$$tx + (1-t)y \in A, \quad \forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Exemplo 1.43.** Seja  $X$  um espaço vetorial normado, e sejam  $x \in X$  e  $r > 0$ . As bolas  $B(x; r)$  e  $B[x; r]$  são conjuntos convexos. De fato, dados  $u, v \in B(x, r)$  e  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \|x - (tu + (1-t)v)\| &= \|t(x-u) + (1-t)(x-v)\| \\ &\leq t\|x-u\| + (1-t)\|x-v\| \\ &< tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

logo  $(tu + (1 - t))v \in B(x; r)$ . Portanto  $B(x; r)$  é convexo. De maneira análoga pode-se provar que  $B[x; r]$  é convexo.

**Proposição 1.44.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear. Se  $A$  é um conjunto convexo de  $X$ , então  $T(A)$  é um conjunto convexo de  $Y$ .*

*Demonstração.* Dados  $T(x_1), T(x_2) \in T(A)$  com  $x_1, x_2 \in A$ , então para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$  e daí

$$tT(x_1) + (1 - t)T(x_2) = T(tx_1 + (1 - t)x_2) \in T(A).$$

Portanto  $T(A)$  é convexo. □

**Proposição 1.45.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $A$  um conjunto convexo de  $X$ . Então  $A + A = 2A$ .*

*Demonstração.* É claro que  $2A \subset A + A$ . Por outro lado, dados  $x, y \in A$ , pela convexidade de  $A$ ,  $u = \frac{1}{2}(x + y) \in A$ . Sendo assim,

$$x + y = 2\left[\frac{1}{2}(x + y)\right] = 2u \in 2A.$$

Portanto  $A + A \subset 2A$ . Por conseguinte,  $A + A = 2A$ . □

O seguinte resultado pode ser encontrado em (3)[Capítulo 1].

**Proposição 1.46.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $A \subset X$  um conjunto convexo. Então  $\bar{A}$  e  $\text{int}(A)$  são conjuntos convexos.*

## 2 Operadores Lineares

Para todo o texto,  $\mathbb{K}$  denotará o corpo  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que uma função  $T : E \rightarrow F$  é um *operador linear* de  $E$  em  $F$ , se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i)  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ ;
- (ii)  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo  $x \in E$ .

Observamos que as condições (i) e (ii) equivalem a condição:

- $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$  e qualquer  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Segue abaixo alguns exemplos de operadores lineares.

**Exemplo 2.1.** A aplicação  $I : E \rightarrow E$  definida por  $I(v) = v$  para todo  $v \in E$  é um operador linear, chamado *operador identidade*. De fato, dados  $u, v \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , então

$$I(\alpha u + v) = \alpha u + v = \alpha I(u) + I(v),$$

portanto,  $I$  é um operador linear.

**Exemplo 2.2.** A aplicação  $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  definida por

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

é um operador linear. De fato, dados  $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} (T(\alpha f + g))(x) &= \int_0^x (\alpha f + g)(t) dt \\ &= \int_0^x [\alpha f(t) + g(t)] dt \\ &= \int_0^x \alpha f(t) dt + \int_0^x g(t) dt \\ &= \alpha \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt \\ &= \alpha (Tf)(x) + (Tg)(x). \end{aligned}$$

Logo,  $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$ . Por conseguinte,  $T$  é um operador linear.

## 2.1 Operadores Lineares Limitados e Contínuos

Os espaços normados estão dotados de uma estrutura algébrica de espaços vetoriais e uma estrutura topológica de espaços métricos nas quais estão associadas respectivamente, os operadores lineares e as funções contínuas. Nesta seção, trataremos dos operadores lineares limitados e contínuos e dos resultados importantes associados a esses operadores. Iniciaremos definindo esses tipos de operadores.

Vamos agora analisar uma classe bastante importante de operadores lineares, os operadores lineares contínuos.

**Definição 2.1.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . Um operador linear  $T : E \rightarrow F$  é chamado *contínuo* se for uma função contínua, isto é, para todos  $x_0 \in E$  e  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$  sempre que  $x \in E$  e  $\|x - x_0\| < \delta$ .

O conjunto formado por todos os operadores lineares contínuos de  $E$  em  $F$  denota-se por  $\mathcal{L}(E, F)$ . Não é difícil verificar que  $\mathcal{L}(E, F)$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  munido das operações usuais de funções. Quando  $F$  é o corpo  $\mathbb{K}$ , denotamos  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  por  $E'$  e dizemos que  $E'$  é o espaço dual topológico de  $E$  ou, resumidamente, o dual de  $E$ . Os elementos de  $E'$  são chamados *funcionais lineares contínuos*.

**Definição 2.2.** Um operador linear  $T : E \rightarrow F$  entre dois espaços normados é chamado *limitado* se existe uma constante  $C \geq 0$  tal que

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Veremos agora um resultado, provado por F. Riesz, que nos permite estabelecer uma equivalência entre os conceitos de operador linear limitado e de operador linear contínuo.

**Teorema 2.3.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados, ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . Dado  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  as seguintes condições são equivalentes:

1.  $T$  é lipschitziano.
2.  $T$  é uniformemente contínuo.

3.  $T$  é contínuo.
4.  $T$  é contínuo em algum ponto de  $E$ .
5.  $T$  é contínuo na origem.
6.  $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$ .
7.  $T$  é limitado.

*Demonstração.* As implicações (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3) e (3)  $\Rightarrow$  (4) são imediatas.

(4)  $\Rightarrow$  (5) Suponha que  $T$  contínuo em um ponto  $x_0 \in E$ . Logo, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon \text{ sempre que } \|x - x_0\| < \delta.$$

Portanto, sendo  $x \in E$  tal que  $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$ , então  $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$  e por conseguinte

$$\|T(x) - T(0)\| = \|T(x) - T(x_0) + T(x_0) - T(0)\| \leq \|T(x) - T(x_0)\| + \|T(x_0) - T(0)\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Logo,  $T$  é contínuo na origem.

(5)  $\Rightarrow$  (6) Suponha que  $T$  contínuo na origem. Tomando  $\epsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| < 1$  sempre que  $\|x\| = \|x - 0\| < \delta$ . Observamos que

$$\left\| \frac{\delta}{2}x \right\| = \frac{\delta}{2}\|x\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \text{ sempre que } \|x\| \leq 1,$$

portanto

$$\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\| \leq 1 \text{ sempre que } \left\| \frac{\delta}{2}x \right\| < \delta \text{ e } \|x\| \leq 1,$$

por conseguinte,  $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$ .

(6)  $\Rightarrow$  (7) Seja  $C = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ , então para todo  $x \in E$  não-nulo

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| \leq C \|x\|.$$

(7)  $\Rightarrow$  (1) Suponha que existe  $C > 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in E$ . Logo, se  $x_1, x_2 \in E$

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

Portanto,  $T$  é lipschitziano com constante  $C$ . □

Da proposição anterior podemos fazer a seguinte observação, quando uma aplicação não é necessariamente linear, dizemos que esta aplicação é contínua se ela for contínua em todos os pontos do seu domínio. Porém, se a aplicação é um operador linear, basta garantir que ela é contínua em um único ponto do domínio para concluir que é contínua em todos os pontos do domínio.

*Observação 2.4.* Podemos definir a norma de  $T$  no espaço das transformações. Temos da definição que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  assim, se  $x \neq 0$  existe  $C \geq 0$  de modo que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq C$$

Para definirmos essa norma consideramos o supremo de  $\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, \forall x \in E - \{0\} \right\}$ . Desta forma, a norma de  $T$  no espaço dos operadores pode ser definida da seguinte forma:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Fazendo  $C = \|T\|$  tem-se que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$$

No caso de funcionais lineares, para todo espaço normado  $E$  e funcional  $\varphi \in E'$ , podemos definir a norma de operadores da seguinte forma:

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

Utilizando o item (6) do Teorema 2.3, vamos agora definir uma norma sobre o espaço  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Proposição 2.5.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados.*

1. A expressão  $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$  define uma norma sobre o espaço  $\mathcal{L}(E, F)$ .
2.  $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  para todos  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $x \in E$ .
3. Se  $F$  for de Banach, então  $\mathcal{L}(E, F)$  é de Banach.

*Demonstração.* 1. Mostremos que  $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$  define uma norma. Primeiro observamos que, como  $\|Tx\| \geq 0$  para todo  $x \in E$ , logo

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq 0,$$

além disso, se  $\|T\| = 0$ , então  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = 0$ , logo  $\|T(x)\| = 0$  para todo  $x$  tal que  $\|x\| \leq 1$ . Portanto, para todo  $x \neq 0$

$$\|T(x)\| = \|x\| \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|x\| \cdot 0 = 0;$$

daí  $T(x) = 0$  para todo  $x \in E$ , ou seja,  $T \equiv 0$ .

Agora notamos que

$$\|\alpha \cdot T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha \cdot T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha| \|T(x)\| = |\alpha| \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = |\alpha| \cdot \|T\|.$$

Por fim, vamos demonstrar a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \|T + S\| &:= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T + S)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} (\|T(x) + S(x)\|) \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|T(x)\| + \|S(x)\|) \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(x)\| \\ &:= \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

Pelo exposto acima, a expressão  $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$  define uma norma sobre o espaço  $\mathcal{L}(E, F)$ .

2. Como  $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$ , logo  $\|T(x)\| \leq \|T\|$  para todo  $x \in E$  tal que  $\|x\| = 1$ . Se  $x \neq 0$ , logo  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ , daí

$$\left\| \left( T \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \|T\| \quad \forall x \neq 0,$$

então

$$\frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| \leq \|T\| \quad \forall x \neq 0,$$

portanto,

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E.$$

3. Suponha que  $F$  é um espaço de Banach. Seja  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(E, F)$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n - T_m\| < \epsilon$  para todo  $n, m \leq n_0$ . Assim, pelo item 2,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \epsilon \|x\| \quad (2.1)$$

para todos  $x \in E$  e  $n, m \geq n_0$ . Portanto, para cada  $x \in E$ ,  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy em  $F$ , logo convergente, pois por hipótese  $F$  é de Banach. Desta forma, defina

$$T : E \longrightarrow F$$

em que

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Note que, pelas propriedades dos limites, a linearidade de  $T$  é verificada. De fato, sejam  $x, y \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$  então

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n(\alpha x) + T_n(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) \\ &= \alpha T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Fazendo,  $m \rightarrow \infty$  em (2.1), obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad (2.2)$$

para todos  $x \in E$  e  $n \geq n_0$ . De modo particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

para todo  $x \in E$ , isto nos garante que  $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$ . Logo, como  $\mathcal{L}(E, F)$  é um espaço vetorial

$$T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F).$$

De (2.2) segue que  $\|T_n - T\| \leq \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Assim,  $T_n \rightarrow T$  em  $\mathcal{L}(E, F)$ .

□



O próximo resultado mostra que todo operador linear definido num espaço de dimensão finita é limitado e portanto contínuo.

**Proposição 2.6.** *Todo operador linear cujo domínio tem dimensão finita é contínuo.*

*Demonstração.* Seja  $T : E \rightarrow F$  um operador linear, com  $E$  e  $F$  espaços vetoriais onde a  $\dim E = n < \infty$ . Considere  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $E$ . Dado  $x = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$ ,

$$\|T(x)\| = \left\| T \left( \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|T(e_i)\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\| \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Faça  $k = \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|$  e perceba que, pelo Lema (1.42), existe  $c > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \frac{\|x\|}{c}.$$

Logo,

$$\|T(x)\| \leq \frac{k}{c} \|x\|.$$

Portanto,  $T$  é um operador limitado.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{k}{c} \|x\| = \frac{k}{c} \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = \frac{k}{c}.$$

Assim, pelo Teorema 2.3,  $T$  é um operador contínuo.  $\square$

Finalizaremos este capítulo com alguns exemplos de operadores lineares limitados.

**Exemplo 2.7.** A transformação identidade  $I : E \rightarrow E$ , definida como  $I(x) = x$  para todo  $x \in E$ , é uma transformação limitada com norma  $\|I\| = 1$ . De fato, para todo  $x \in E$

$$\|I(x)\| = \|x\| = 1\|x\|,$$

logo  $I$  é um operador limitado; além disso,

$$\begin{aligned} \|I\| &= \sup\{\|I(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|x\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.8.** Considere o operador  $T : \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$  definida por

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

em que a função  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada núcleo de  $T$ , é uma função contínua sobre o quadrado fechado  $G = [0, 1] \times [0, 1]$  no plano  $t\tau$ . O operador  $T$  é limitado. De fato, a continuidade de  $k$  sobre o quadrado fechado  $G$  implica que  $k$  é limitado, ou seja, existe  $k_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$|k(t, \tau)| \leq k_0, \quad \forall (t, \tau) \in G.$$

Além disso, como  $f$  é contínua e o intervalo  $[0, 1]$  é um conjunto compacto, logo  $f$  é limitada e

$$|f(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| := \|f\|_\infty, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 k(t, \tau) f(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 |k(t, \tau)| |f(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^1 k_0 |f(\tau)| d\tau \\ &= k_0 \int_0^1 |f(\tau)| d\tau \\ &\leq k_0 \int_0^1 \sup_{s \in [0, 1]} |f(s)| d\tau \\ &= k_0 \|f\|_\infty \int_0^1 d\tau = k_0 \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim,  $\|T(f)\| \leq k_0 \|f\|_\infty$  para todo  $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ .

### 3 O Teorema de Baire e suas aplicações à Análise

Resultado proveniente da Topologia Geral, o Teorema de Baire se apresenta como uma ferramenta útil em diversas áreas da matemática, devido ao fato de apresentar um grande leque de consequências. Na Análise Funcional, resultados bastante importantes relacionados a teoria dos espaços de Banach são obtidos e um destes resultados é o Princípio da Limitação Uniforme ou Teorema de Banach-Steinhaus, publicado em 1927 por Stefan Banach e Hugo Steinhaus, que nos garante que uma família de operadores lineares contínuos é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada. Outras consequências do Teorema de Baire são o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado, que também apresentaremos neste capítulo.

**Teorema 3.1** (Teorema de Baire). *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $(F_n)_{n \geq 1}$  uma seqüência de subconjuntos fechados de  $M$  tais que  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F_{n_0}$  tem interior não vazio.*

*Demonstração.* Mostremos por absurdo, e para isto, suponha que  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $A_n = (F_n)^c = (M - F_n)$ , assim, cada  $A_n$  é aberto e

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = F_n^c \cup \partial F_n^c = F_n^c \cup \partial F_n = (\text{int}(F_n))^c = \emptyset^c = M$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, cada  $A_n$  é não vazio, pois, caso contrário ocorreria  $\overline{A_n} = \emptyset$ . Uma vez que  $\overline{A_n} = M$ , ou seja,  $\overline{A_n}$  é denso em  $M$ , então para todo  $r > 0$  e cada  $x \in M$

$$B(x; r) \cap A_n \neq \emptyset.$$

Seja  $x_1 \in A_1$ , pelo fato de  $A_1$  ser aberto, existe  $\delta_1 \in (0, 1)$  tal que  $B[x_1, \delta_1] \subset A_1$ . De  $\overline{A_2} = M$ , temos  $A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$ . Além disso, como  $A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$  é um aberto, pois interseção de abertos é aberto, logo existem  $x_2 \in A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$  e  $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$  de modo que

$$B[x_2, \delta_2] \subset A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \subset A_2 \cap B[x_1, \delta_1].$$

Continuando com o processo iterativo até  $A_n$ , obtemos que como  $\overline{A_n} = M$ , logo  $A_n \cap B(x_{n-1}, \delta_{n-1}) \neq \emptyset$ , e isto implica que existem  $x_n \in A_n \cap B(x_{n-1}, \delta_{n-1})$  e  $\delta_n \in (0, \frac{1}{n})$  tais que

$$B[x_n, \delta_n] \subset A_n \cap B(x_{n-1}, \delta_{n-1}) \subset A_n \cap B[x_{n-1}, \delta_{n-1}].$$

Assim, existe uma sequência  $(x_n)$  tal que  $(x_n) \in A_n \cap B(x_{n-1}, \delta_{n-1}) \neq \emptyset$  e existe também  $\delta_n < \frac{1}{n}$  tal que  $B[x_n, \delta_n] \subset A_n \cap B(x_{n-1}, \delta_{n-1})$ . Desta forma, construímos então uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $M$  e uma sequência  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais tais que  $\delta_n < \frac{1}{n}$  e  $B[x_n, \delta_n] \subset A_n \cap B[x_{n-1}, \delta_{n-1}]$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Afirmamos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $M$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$  considere  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$ . Portanto, se  $m, n > n_0$ , então  $x_m \in B[x_m, \delta_m] \subset B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$  e  $x_n \in B[x_n, \delta_n] \subset B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$ , logo  $x_m, x_n \in B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$ , e pela desigualdade triangular

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq \delta_{n_0} + \delta_{n_0} = 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \epsilon,$$

ou seja,

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \text{para todos } m, n > n_0.$$

Portanto  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $M$ . Como  $M$  é completo por hipótese, existe um  $x \in M$  tal que  $x$  é limite da sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $x_m \in B[x_m, \delta_m] \subset B[x_n, \delta_n]$  sempre que  $m \geq n$ , então  $x$  é um ponto aderente a  $B[x_n, \delta_n]$ , por outro lado, sabemos que  $B[x_n, \delta_n]$  é um conjunto fechado, deste modo

$$x \in B[x_n, \delta_n] \subset A_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)^c = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = M^c = \emptyset.$$

O que é um absurdo, e isto conclui a demonstração.

□

### 3.1 Teorema de Banach-Steinhaus

Nesta seção demonstraremos o Teorema de Banach-Steinhaus também chamado de Teorema da Limitação Uniforme. Como já comentamos, este teorema garante que uma família de operadores lineares contínuos é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada e tem várias aplicações na Análise.

**Teorema 3.2** (Banach-Steinhaus, Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados com  $E$  completo e seja  $(T_i)_{i \in I}$  uma família de operadores lineares contínuos de  $E$  em  $F$ . Se para cada  $x \in E$  existe  $C_x < \infty$  tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x,$$

então existe  $C > 0$  tal que

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < C.$$

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja

$$A_n = \{x \in E; \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n\} = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n \forall i \in I\}.$$

Como

$$A_n = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n \forall i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

logo  $A_n$  é fechado, pois é escrito como interseção de fechados, uma vez que  $T_i$  é contínuo então  $\{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$  é fechado.

Provemos agora que  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . De fato, é claro que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset E$ , pois  $A_n \subset E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, dado  $x \in E$ , como  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x$ , tomando  $n > C_x$  segue que  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < n$ , o que implica que  $x \in A_n$ . Portanto,  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Por conseguinte,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Desta forma, pelo Teorema de Baire podemos afirmar que algum  $A_n$  possui interior não vazio. Disto, consideremos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $A_{n_0}$  tenha interior não vazio e sejam  $a \in \text{int}(A_{n_0})$  e  $r > 0$  tais que

$$B[a; r] = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\} \subseteq \text{int}(A_{n_0}).$$

Seja  $y \in E$  com  $\|y\| \leq 1$ . Se  $x = a + ry$ , então  $\|x - a\| = \|ry\| \leq r$ , portanto,  $x \in B(a; r) \subset A_{n_0}$ . Pela linearidade de  $T$  e usando a desigualdade triangular, segue

$$\|T_i(x - a)\| = \|T_i(x) - T_i(a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0, \quad \forall i \in I.$$

Logo,  $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0$  e isto implica que

$$\|r \cdot T_i(y)\| \leq 2n_0,$$

daí,

$$\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{|r|}, \quad \forall i \in I \text{ e } \forall y, \text{ com } \|y\| \leq 1.$$

Portanto,

$$\sup_{i \in I} \left\{ \sup_{y \in B[0;1]} \{\|T_i(y)\|\} \right\} \leq \frac{2n_0}{r}$$

o que é equivalente a

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Sendo assim, basta tomar  $C = \frac{2n_0}{r}$  para concluir a demonstração.  $\square$

Do ponto de vista da Análise Real, podemos analisar os limites de funções contínuas definidas em um intervalo da reta de forma pontual e uniforme. Desta forma, analisar o limite uniforme de uma função contínua em um intervalo da reta nos dá uma função contínua, porém a análise pontual deste limite pode não nos garantir uma função contínua. Dito isto, provaremos agora um resultado que nos garante que se o operador é linear é suficiente a existência da convergência pontual para garantir a continuidade.

**Corolário 3.3.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um espaço normado. Seja  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência em  $\mathcal{L}(E; F)$  tal que  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  seja convergente em  $F$  para cada  $x$  em  $E$ .*

*Se definirmos  $T : E \rightarrow F$  por*

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

*então  $T$  é um operador linear contínuo.*

*Demonstração.* Note que,  $T$  é linear, pois para cada  $n$ ,

$$T_n(\alpha x + y) = \alpha T_n(x) + T_n(y)$$

e fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando as propriedades de limites, obtemos

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Perceba que, por hipótese, para cada  $x$  em  $E$  a sequência  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  é convergente e como toda sequência convergente é limitada, temos  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  limitada. Assim,

$$C_x = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty \text{ para todo } x \in E.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus existe  $c > 0$  tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < c$ . Daí,

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq c\|x\|$$

para todo  $x \in E$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Deste modo, fazendo  $n \rightarrow \infty$  teremos  $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ , para todo  $x \in E$ . Logo,  $T$  é contínuo.  $\square$

## 3.2 Teorema da Aplicação Aberta

O Teorema da Aplicação Aberta devido a Banach (1929), se apresenta como um dos mais importantes da Análise Funcional e garante que se  $E$  e  $F$  são espaços de Banach, então toda aplicação linear contínua e sobrejetiva é uma aplicação aberta. Para demonstrá-lo, faremos uso do seguinte lema.

**Lema 3.4.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados, com  $E$  completo e  $T \in \mathcal{L}(E; F)$ . Se existirem  $R, r > 0$  tais que*

$$\overline{T(B_E(0; R))} \supset B_F(0; r), \quad (3.1)$$

então

$$T(B_E(0; R)) \supset B_F\left(0; \frac{r}{2}\right). \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Como para todo  $M \subset E$  e  $a \in \mathbb{K}$  tem-se  $\overline{aM} = a\overline{M}$ , segue de (3.1) que

$$\overline{T(B_E(0; aR))} \supset B_F(0; ar) \quad (3.3)$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$  positivo. Logo, dado  $y \in B_F(0; \frac{r}{2})$ , por (3.3),  $y \in \overline{T(B_E(0; \frac{R}{2}))}$ , isto é,  $y$  é valor de aderência de  $T(B_E(0; \frac{R}{2}))$ , logo existe  $x_1 \in B_E(0; \frac{R}{2})$  tal que

$$\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$$

isto é,  $y - Tx_1 \in B_F(0; \frac{r}{4})$ . Novamente por (3.3), existe  $x_2 \in B_E(0; \frac{R}{4})$  tal que

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{r}{8}$$

Procedendo por indução, podemos, para cada  $j = 1, \dots, n$  achar  $x_j \in B_E(0; \frac{R}{2^j})$  tal que

$$\|y - Tx_1 - \dots - Tx_n\| < \frac{r}{2^{n+1}}. \quad (3.4)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{2^n} = R.$$

Como  $E$  é espaço de Banach, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge para um certo  $x$  em  $E$ . Então

$$\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < R$$

e portanto,  $x \in B_E(0; R)$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (3.4) obtemos

$$\|y - Tx\| \leq 0$$

e conseqüentemente  $y = Tx$ . Daí,

$$y \in T(B_E(0; R))$$

e o resultado está provado. □

**Teorema 3.5** (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T : E \rightarrow F$  operador linear, contínuo e sobrejetivo. Então  $T$  é uma aplicação aberta. Em particular, se  $T$  é bijetiva, então  $T^{-1}$  é contínua.*

*Demonstração.* Temos

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0; n)$$

e como  $T$  é sobrejetivo,

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0; n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}$$

Pelo Teorema de Baire, existe  $n_0$  natural tal que  $\overline{T(B_E(0; n_0))}$  tem interior não-vazio.

Assim, existe uma bola de centro  $b \in F$  e raio  $r > 0$ , tal que

$$B_F(b; r) \subset \overline{T(B_E(0; n_0))}$$



Como  $B_E(0; n_0) = -B_E(0; n_0)$ , logo

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} = -\overline{T(B_E(0; n_0))},$$

daí

$$B_F(-b; r) = -B_F(b; r) \subset -\overline{T(B_E(0; n_0))} = \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Como  $x = (b + \frac{1}{2}x) + (-b + \frac{1}{2}x)$  segue que

$$B_F(0; 2r) \subset B_F(b; r) + B_F(-b; r) \subset \overline{T(B_E(0; n_0))} + \overline{T(B_E(0; n_0))}, \quad (3.5)$$

e como  $\overline{T(B_E(0; n_0))}$  é convexo (ver seção 1.9), logo

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} + \overline{T(B_E(0; n_0))} = 2\overline{T(B_E(0; n_0))}. \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6), obtemos

$$B_F(0; r) \subset \overline{T(B_E(0; n_0))}. \quad (3.7)$$

Pelo lema anterior

$$T(B_E(0; n_0)) \supset B_F(0; \rho)$$

para  $\rho = \frac{r}{2}$ . Assim, sabemos que

$$T(B_E(0; cn_0)) \supset B_F(0; c\rho)$$

para todo real positivo  $c$ . Portanto,

$$T(B_E(x; cn_0)) \supset B_F(Tx; c\rho)$$

para todo  $x \in E$  e todo escalar  $c$ . De fato,

$$B_E(x; cn_0) = x + B_E(0; cn_0)$$

donde

$$\begin{aligned} T(B_E(x; cn_0)) &= Tx + T(B_E(0; cn_0)) \\ &\supset Tx + B_F(0; c\rho) \\ &= B_F(Tx; c\rho). \end{aligned}$$

Agora podemos provar que  $T(U)$  é aberto em  $F$  para cada  $U$  aberto em  $E$ . Sejam  $x \in U$  e  $c > 0$  tais que

$$B_E(x; cn_0) \subset U$$

Então

$$T(U) \supset T(B_E(x; cn_0)) \supset B_F(Tx; c\rho)$$

e  $T(U)$  é aberto. □

### 3.3 Teorema do Gráfico Fechado

Trataremos agora de um dos principais teoremas da Análise Funcional, o Teorema do Gráfico Fechado. Publicado por Banach, em 1932 no livro *Théorie des Opérations Linéaires*, este teorema estabelece uma relação entre a continuidade de um operador linear e o seu gráfico ser fechado. A importância deste teorema consiste no fato de apresentar condições onde um operador linear fechado é limitado em um espaço de Banach, visto que nem todos os operadores lineares são limitados.

Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T : E \rightarrow F$  um operador linear. Definimos o **gráfico de  $T$**  como o conjunto

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F$$

Como  $T$  é um operador linear, não é difícil verificar que  $G(T)$  é um subespaço vetorial de  $E \times F$ , porém nem sempre este subespaço vetorial é um subespaço fechado de  $E \times F$ . Se  $G(T)$  é um subespaço fechado em  $E \times F$ , dizemos que  $T$  é uma **aplicação fechada**. Consideramos em  $E \times F$  as operações usuais e norma definida por

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

**Teorema 3.6** (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T : E \rightarrow F$  um operador linear. Então  $T$  é contínuo se, e somente se,  $G(T)$  é fechado em  $E \times F$ .*

*Demonstração.* Suponha  $T$  contínuo, provaremos então que  $G(T)$  é fechado. Note que,  $G(T) = \{(x, y) \in E \times F; \|y - T(x)\| = 0\}$  e que  $G(T) = f^{-1}(\{0\})$ , por meio de uma

função  $f$  definida da seguinte forma

$$f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \|y - T(x)\|$$

Como por hipótese  $T$  é contínua, isto implica que  $f$  é contínua, e portanto  $f^{-1}(\{0\})$  é fechado, pois é imagem inversa através da função contínua  $f$  do fechado  $\{0\}$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $G(T)$  é fechado. Sabemos que  $G(T)$  é subespaço vetorial de  $E \times F$ , assim por hipótese  $G(T)$  é subespaço vetorial fechado, logo  $G(T)$  é um espaço de Banach. Considere a seguinte aplicação  $\pi : G(T) \rightarrow E$  definida por

$$\pi(x, T(x)) = x.$$

Note que a aplicação é linear e bijetiva. Além disso,  $\pi$  é contínua pois

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|$$

Logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta,  $\pi^{-1}$  é um operador contínuo. Assim, existe  $C > 0$  tal que  $\|\pi^{-1}(x)\| = \|(x, T(x))\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in E$ . Portanto,

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\| \leq C\|x\|$$

para todo  $x \in E$ . Logo,  $T$  é contínuo. □

# Referências

- 1 BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*, Rio de Janeiro: SBM, (2015).
- 2 LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, (2009).
- 3 BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.*, Universitext. Springer, New York, 2010.
- 4 DINIZ, D. *Aplicações entre espaços de Banach que atingem a norma*, Anais das Jornadas de Iniciação Científica do IMPA (2004), 448-477.