



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
UNIDADE ACADÊMICA DO CABO DE SANTO AGOSTINHO
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL**

VITOR CARNEIRO DE SANTANA

**ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS RETANGULARES SUBMETIDAS A
CARREGAMENTOS ESTÁTICOS TRAPEZOIDAIS**

CABO DE SANTO AGOSTINHO - PE

2019

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
UNIDADE ACADÊMICA DO CABO DE SANTO AGOSTINHO
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL**

VITOR CARNEIRO DE SANTANA

**ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS RETANGULARES SUBMETIDAS A
CARREGAMENTOS ESTÁTICOS TRAPEZOIDAIS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo, orientador.

CABO DE SANTO AGOSTINHO - PE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Esmeraldina Pereira da Silva, Cabo de Santo Agostinho-PE, Brasil

S232a Santana, Vitor Carneiro de
Análise estrutural de placas retangulares submetidas a carregamentos estáticos trapezoidais / Vitor Carneiro de Santana. – 2019.
61 f.: il.

Orientador: Wesley Imperiano Gomes de Melo
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, Cabo de Santo Agostinho, BR- PE, 2019.

Inclui referências, anexos e apêndices

1. Análise estrutural 2. Placas (Engenharia) 3. Equações diferenciais I. Melo, Wesley Imperiano Gomes de, orient. II. Título

CDD 624

VITOR CARNEIRO DE SANTANA

**ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS RETANGULARES SUBMETIDAS A
CARREGAMENTO ESTÁTICO TRAPEZOIDAL**

**Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da
Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito para obtenção do grau de
Bacharel em Engenharia Civil.**

Data de aprovação: 12/07/2019

Banca examinadora:

Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo, UACSA, UFRPE
orientador

Prof. Me. Jordlly Reydson de Barros Silva, UACSA, UFRPE
examinador

Prof. Dr. Romildo Morant de Holanda, DTR, UFRPE
examinador

Dedico este trabalho aos meus pais, Ezequiel Maximiano de Santana e Joeci Carneiro dos Santos de Santana, e meu irmão Andersson Carneiro de Santana, pelo amor incondicional e os inumeráveis ensinamentos, apoiando-me incessantemente e sempre acreditando que era possível atingir meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao Senhor Deus, autor da minha vida e da minha fé, porque dEle, por meio dEle e para Ele são todas as coisas.

Ao Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo, pela dedicação em suas orientações, o qual, com muita paciência e sabedoria, auxiliou-me a elaborar este trabalho com excelência.

Ao estudante do curso de Engenharia Civil da UACSA/UFRPE, Pedro Vitor Carvalho de Alencar Luz, meu companheiro de Projeto de Extensão, pelo empenho e enorme colaboração nas ideias desenvolvidas neste trabalho.

A toda equipe do Projeto de Extensão (composta pelo Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo e pelos discentes Pedro Vitor Carvalho de Alencar Luz e Laelson Andrade de Amorim Júnior), pelo compartilhamento de informações, conhecimentos e experiências, os quais contribuíram significativamente neste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Me. Jordlly Reydson de Barros Silva e Prof. Dr. Romildo Morant de Holanda, pelas excelentes observações e compartilhamento de conhecimentos.

Aos meus grandes amigos e companheiros de curso, Eng. Civil Lucas Costa do Nascimento e Eng. Civil Laelson Andrade de Amorim Júnior, pessoas com quem tive o privilégio de conviver e compartilhar diversas experiências ao longo desses cinco anos.

A todos os meus familiares e amigos pelo suporte, carinho e sabedoria, os quais, contribuíram direta ou indiretamente com esta conquista.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, junto com todo seu corpo docente e de servidores que, com muita dedicação e empenho, cooperaram na minha formação acadêmica.

“Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Uma das etapas fundamentais de um projeto estrutural é a análise dos esforços internos e deslocamentos iniciais de determinado elemento, quando este for solicitado por um carregamento externo. Para o caso de elementos estruturais de superfície, esta análise torna-se mais complexa devido ao efeito bidimensional nos esforços de flexão, sendo necessário a utilização de métodos que descrevam o comportamento da estrutura de maneira simplificada. Um dos métodos comumente utilizados em placas é a análise estática do elemento segundo a teoria da flexão de placas delgadas, onde, a partir da resolução da equação diferencial da placa (também denominada de equação de Sophie-Germain-Lagrange), são geradas tabelas para os cálculos dos esforços internos e deflexões. Um dos parâmetros cruciais das equações diferenciais dos esforços e deslocamento transversal é o coeficiente de Poisson, sendo comumente fixados num valor 0,20 para lajes de concreto. Este estudo apresenta uma análise da influência da variação do coeficiente de Poisson nos esforços internos e deflexão de placas simplesmente apoiadas sujeitas a carregamentos linearmente distribuídos (formato trapezoidal). Para isso, a partir da resolução da equação de diferencial de Sophie-Germain-Lagrange pelo método de Navier, foram geradas tabelas de cálculo para carregamentos constantes e triangulares, com o coeficiente de Poisson variando de 0,00 a 0,40. A validação destas tabelas se deu mediante a análises comparativas dos resultados com bibliografias estabelecidas e com o *software* ANSYS Student 2019 R1, obtendo-se diferenças percentuais de até 3,19% e 7,12% para carregamento constante e triangular, respectivamente. A partir dos resultados, foi verificado que o aumento nos valores do coeficiente de Poisson acarretaram em momentos fletores maiores e na redução dos momentos torçores e esforços cortantes.

PALAVRAS-CHAVE: placas finas, equação de Sophie-Germain-Lagrange, solução de Navier, coeficiente de Poisson.

ABSTRACT

One of the fundamental steps in structural design is the internal force analysis and initial displacements of a given element when it is subject to an external loading. In the case of surface structural elements, this analysis becomes more complex due to the two-dimensional effect on bending forces, requiring the use of methods that describe the structure behavior in a simplified manner. One of the methods commonly used in plates is the static plate analysis according to Kirchoff's theory for thin plates, where, by solving the differential plate equation (also called the Sophie-Germain-Lagrange equation), tables are generated for the calculations of internal forces and deflections. One of the crucial parameters of differential stress and transverse displacement equations is the Poisson's ratio, which is commonly set at a value of 0.20 for concrete slabs. This study presents an analysis of the influence of Poisson's ratio variation on internal forces and deflection of simply supported plates, subjected to linearly distributed loads (trapezoidal shape). For this, from the resolution of the Sophie-Germain-Lagrange differential equation by the Navier method, calculation tables were generated for constant and triangular loads, with the Poisson's ratio ranging from 0.00 to 0.40. These tables were validated by comparative analysis of the results with established bibliographies and the ANSYS Student 2019 R1 software, obtaining percentage differences of up to 3.19% and 7.12% for constant and triangular loading, respectively. From the results, it was verified that the increase in Poisson's ratio values resulted in larger bending moments and in the reduction of torsional moments and shear forces.

KEYWORDS: thin plates, Sophie-Germain-Lagrange equation, Navier's solution, Poisson's ratio.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Sistema estrutural convencional de uma edificação	15
Figura 2: Empuxo sobre muro de contenção – carregamento em variação linear.....	19
Figura 3: Chapa	20
Figura 4: Placa	20
Figura 5: Casca	21
Figura 6: Deflexão e rotação de uma placa (vista lateral)	22
Figura 7: Placa submetida a um carregamento normal $q(x,y)$	23
Figura 8: Seção transversal deformada.....	23
Figura 9: Estado de tensões num elemento infinitesimal	25
Figura 10: Tensões em uma fibra genérica.....	28
Figura 11: Esforços de momento em um elemento diferencial de uma placa sujeita a uma carga $q(x,y)$	29
Figura 12: Esforços cortantes em um elemento diferencial de uma placa sujeita a uma carga $q(x,y)$	30
Figura 13: Condições de apoio de uma placa	33
Figura 14: Binários equivalentes ao momento torçor no bordo livre	34
Figura 15: Placa simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída genérica $q(x,y)$.	35
Figura 16: Placa simplesmente apoiada, submetida a um carregamento trapezoidal em x	40
Figura 17: Curvas de convergência dos coeficientes w_z , m_x , m_y e m_{xy} – carregamento constante	45
Figura 18: Curvas de convergência dos coeficientes v_x e v_y – carregamento constante	45
Figura 19: Deslocamento máximo da placa, segundo o ANSYS Student 2019 R1	49
Figura 20: Curvas de convergência dos coeficientes w_z , m_x , m_y e m_{xy} – carregamento triangular.....	50
Figura 21: Curvas de convergência dos coeficientes v_x e v_y – carregamento triangular.....	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Média dos coeficientes de Poisson (ν) para diferentes espécies de madeira e direção das fibras.....	19
Tabela 2: Valores dos coeficientes segundo a variação dos índices m e n - carregamento constante.....	44
Tabela 3: Valores dos coeficientes das equações da flecha e esforços internos.....	46
Tabela 4: Comparativo entre os valores do deslocamento e esforços internos segundo o autor (2019) e Araújo (2014, v.2, p.64-66).....	47
Tabela 5: Comparativo entre os valores do deslocamento máximo segundo o autor (2019) e o <i>software</i> ANSYS.....	48
Tabela 6: Valores dos coeficientes segundo a variação dos índices m e n - carregamento triangular.....	50
Tabela 7: Valores dos coeficientes dos momentos fletores - o autor (2019).....	52
Tabela 8: Valores dos coeficientes dos momentos fletores - Pinheiro (2007).....	53
Tabela 9: Valores dos coeficientes das equações da flecha e esforços internos.....	54
Tabela 10: Variação dos coeficientes segundo o coeficiente de Poisson.....	55
Tabela 11: Variação do deslocamento e esforços internos segundo o coeficiente de Poisson.....	55
Tabela 12: Variação percentual dos esforços internos e deflexão, em relação aos valores destes parâmetros quando $\nu = 0,00$	56
Tabela 13: Variação percentual dos esforços internos e deflexão em relação aos valores de $\nu = 0,20$	57

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto romano

h : espessura da placa;

L_x, L_y : dimensões da placa na direção x e y , respectivamente;

q : carregamento distribuído, normal ao plano médio da placa;

x, y e z : eixos cartesianos;

u, v e w : deslocamentos dos pontos do plano médio da placa, nas direções x, y, z , respectivamente;

dx, dy, dz : elementos infinitesimais na direção x, y, z , respectivamente;

E : módulo de elasticidade longitudinal;

G : módulo de elasticidade transversal;

D : rigidez da placa à flexão;

M_x, M_y : momentos de flexão na direção x e y , respectivamente;

M_{xy}, M_{yx} : momentos de torção perpendiculares ao x e y , respectivamente;

Q_x, Q_y : esforços cortantes na direção x e y , respectivamente;

V_x, V_y : esforços cortantes na direção x e y , respectivamente, acrescidos pela parcela dos esforços cortantes de Kirchhoff;

q_{mn} : coeficiente da equação do carregamento q , segundo a solução de Navier;

w_{mn} : coeficiente da equação do deslocamento w , segundo a solução de Navier;

w_z : coeficiente para cálculo da flecha máxima normal ao eixo z ;

m_x, m_y : coeficientes para o cálculo dos momentos fletores máximos na direção x e y , respectivamente;

m_{xy} : coeficiente para o cálculo do momento torçor máximo;

v_x, v_y : coeficientes para o cálculo dos esforços cortantes máximos na direção x e y , respectivamente;

m, n : índices dos somatórios.

Alfabeto grego

ν : coeficiente de Poisson;

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$: rotação de seções da placa nas direções x, y, z , respectivamente;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: deformações normais às direções x, y, e z, respectivamente;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: ângulos de deformação por cisalhamento das seções da placa;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: tensões normais às direções x, y e z, respectivamente;

$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$: tensões tangenciais das seções da placa;

λ : razão entre as dimensões L_y e L_x da placa.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT: Associação Brasileira de Normas Técnicas;

ACI: *American Concrete Institute*;

EPS: Poliestireno expandido;

EVA: Etileno acetato de vinila;

MEF: Método dos elementos finitos;

NBR: Norma Brasileira Regulamentadora;

PTC: Parametric Technology Corporation Inc..

SUMÁRIO

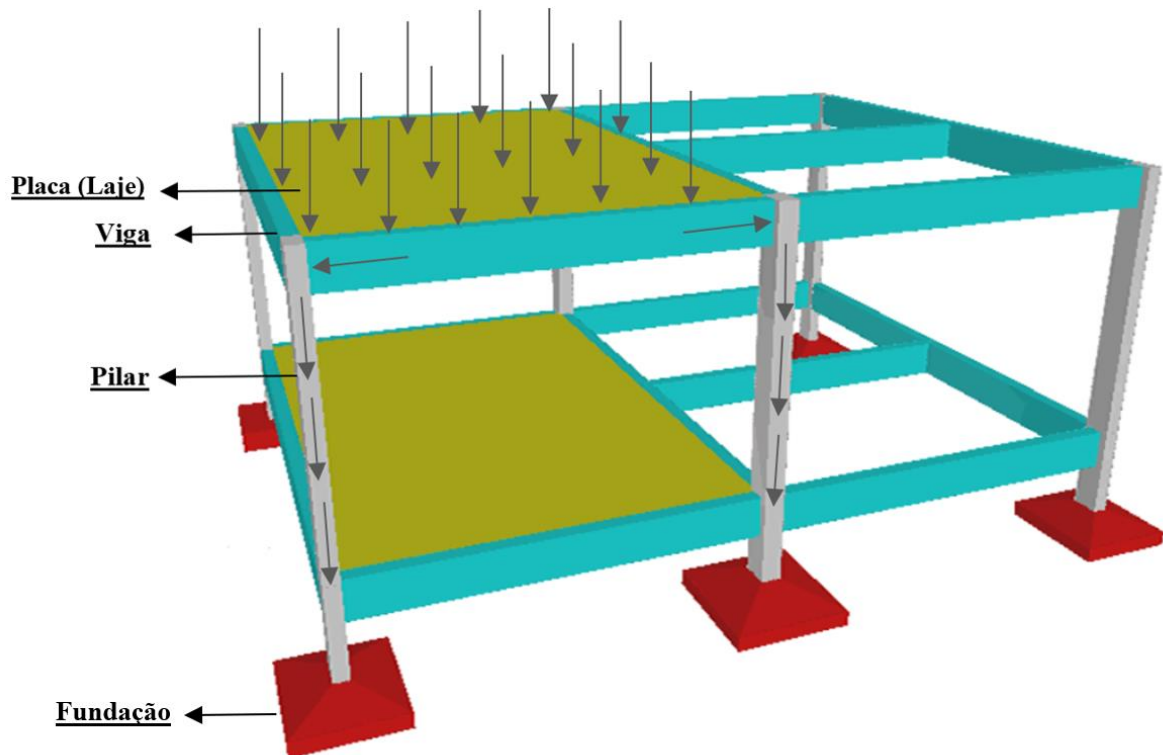
RESUMO.....	6
ABSTRACT	7
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	8
LISTA DE TABELAS	9
LISTA DE SÍMBOLOS	10
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	12
SUMÁRIO	13
1. INTRODUÇÃO.....	15
1.1. OBJETIVOS	17
1.1.1. Objetivo geral.....	17
1.1.2. Objetivo específicos	17
1.2. JUSTIFICATIVA	18
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1. CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS	20
2.2. TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS FINAS	22
2.2.1. Relações entre deslocamentos e deformações.....	23
2.2.2. Estado de tensões num ponto qualquer de uma placa.....	25
2.2.3. Cálculo dos momentos	28
2.2.4. Equação de Sophie-Germain-Lagrange	29
2.2.5. Solução da equação de Sophie-Germain-Lagrange.....	32
3. METODOLOGIA.....	38
3.1. CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO	38
3.2. VARIÁVEIS DO ESTUDO	38
3.3. COLETA, PROCESSAMENTO E ANÁLISE DE DADOS	38
4. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA PLACA	40

4.1. SOLUÇÃO DE NAVIER PARA PLACAS SIMPLEMENTE APOIADAS - CARREGAMENTO LINEARMENTE DISTRIBUÍDO EM X	40
5. RESULTADOS	44
5.1. TABELAS PARA CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO	44
5.1.1. Validação das tabelas – carregamento uniformemente distribuído.....	46
5.2. TABELAS PARA CARREGAMENTO TRIANGULAR EM X	49
5.2.1. Validação das tabelas – carregamento triangular	51
5.3. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE POISSON	54
5.3.1. Análise da variação dos esforços quando $\nu = 0,00$	56
5.3.2. Análise da variação dos esforços quando $\nu = 0,20$	57
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	59
REFERÊNCIAS	61
APÊNDICE A – Tabelas para placas retangulares, simplesmente apoiadas nos quatro bordos, com carregamento uniformemente distribuído	63
APÊNDICE B - Tabelas para placas retangulares, simplesmente apoiadas nos quatro bordos, com carregamento triangular	69
APÊNDICE C – Condições de contorno para valores máximos dos esforços e deflexões – carregamento triangular	75
ANEXO A – Tabelas para placas retangulares, com carregamento triangular – Pinheiro (2007).....	82

1. INTRODUÇÃO

As placas são elementos bidimensionais de espessura muito inferior às demais dimensões, cujo carregamento se dá por forças perpendiculares ao seu plano médio. Esses elementos podem desempenhar diversas funções numa estrutura, sendo comumente utilizados para o recebimento das cargas de utilização das edificações (cargas aplicadas sobre os pisos) e transmiti-las aos seus apoios (vigas ou pilares), que por sua vez, transferem estes esforços às fundações (conforme indicado na Figura 1).

Figura 1: Sistema estrutural convencional de uma edificação



Fonte: Parente (2011, adaptado).

De maneira distinta às vigas e pilares, os esforços de flexão de placas se dispõem biaxialmente, de forma que há interferência dos esforços de uma direção na outra – tornando mais complexa a análise estrutural destes elementos. Para a obtenção dos esforços solicitantes em lajes, há disponíveis diversos métodos de cálculo, dentre os quais, vale destacar:

- **Teoria das grelhas:** é um método simplificado em que é admitido o comportamento elástico linear do material, sendo considerado que a placa não possui rigidez à torção. A partir desta teoria, se deriva o método de Marcus (ARAÚJO, v.2, 2014).

- **Teoria das linhas de ruptura:** Essa teoria parte do pressuposto que o material possui comportamento rígido-plástico. A estabilidade da placa é obtida a partir da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais e desprezando-se a contribuição de deformações elásticas (ARAÚJO, v.2, 2014).
- **Teoria da flexão de placas finas:** Desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange (com contribuições de Marie-Sophie Germain) em 1811, para a qual são consideradas válidas as chamadas hipóteses de Kirchhoff (DINIS, 2003), a teoria clássica das placas finas é um dos métodos de cálculo de esforços internos e deflexão de placas delgadas isotrópicas. Essa é a teoria que descreve o comportamento da placa segundo os princípios da teoria da elasticidade, onde a obtenção dos esforços internos é feita mediante a resolução de uma equação diferencial de quarta ordem (equação de Sophie-Germain-Lagrange), junto com as condições de contorno. A explanação detalhada deste modelo é encontrada na obra de Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959).
- **Analogia de grelha equivalente:** A analogia de grelha foi usada por Euler em 1766 para a solução de problemas de membranas elásticas e por Hrennikoff em 1941 para a análise de placas através de uma formulação denominada *Lattice Analogy*, sendo, portanto, um dos procedimentos de cálculo mais antigos. Para a análise de uma placa por analogia de grelha, deve-se discretizá-la em uma série de faixas com determinada largura, formando-se uma grelha equivalente, onde as grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós ou pontos nodais (LONGO, 2018). A relação entre força e deslocamento da estrutura, é baseada no método da rigidez, sob auxílio de programas computacionais. Este método é um dos mais utilizados em lajes de concreto armado, sendo implementados em diversos *softwares* comerciais.
- **Método das diferenças finitas:** Este é um método numérico em que se admite o comportamento elástico linear do material, sendo também possível incluir a sua não linearidade física. Devido à dificuldade da generalização das condições de contorno e carregamento, este método tem entrado em desuso.
- **Método dos elementos finitos:** O método dos elementos finitos (MEF) consiste em transformar um meio contínuo em uma associação de elementos discretos e descrever as equações de equilíbrio e compatibilidade entre eles. Para isso, são admitidas funções contínuas que descrevem o campo de deslocamentos no domínio de um

elemento, a fim de que seja obtido o estado de deformações que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento (COSTA, 2008). Baseado nos métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin, a formulação do MEF não está vinculada a um pesquisador ou a um grupo de pesquisadores contemporâneos, mas sua formulação foi ao longo de inúmeros estudos e contribuições marcantes ao longo da história (ASSAN, 2003), onde seus primeiros trabalhos datam da década de 1960, mas a sua popularização se deu na década de 1990 com a maior ampla de disponibilidade de microcomputadores, com bases matemáticas perfeitamente esclarecidas e é rotineiramente utilizado em projetos de engenharia. Neste método numérico é possível a consideração da não linearidade física e geométrica, bem como os diferentes formatos da placa, condições de contorno, carregamento, etc. (ARAÚJO, v.2, 2014). É um método de grande aplicação nos dias atuais, sendo utilizado através de ferramentas computacionais.

O presente trabalho destina-se em analisar dos esforços internos e deflexões em placas retangulares delgadas, simplesmente apoiadas. Para isso, são considerados os princípios da teoria da flexão de placas finas e, a partir da resolução da equação diferencial da placa por desenvolvimento em séries de Fourier (solução de Navier), obtém-se tabelas para placas sob condições de carregamento em variação linear (formato trapezoidal) e distintos valores do coeficiente de Poisson.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo geral

Gerar tabelas de esforços solicitantes em placas retangulares delgadas sob carregamento trapezoidal, adotando-se o coeficiente de Poisson com valores distintos de 0,20.

1.1.2. Objetivo específicos

- Explicar a demonstração da equação diferencial de Sophie-Germain-Lagrange para as placas finas retangulares;
- Equacionar placas retangulares simplesmente apoiadas sob carregamentos linearmente distribuídos (distribuição trapezoidal);

- Gerar tabelas para o cálculo de esforços internos e deflexões de placas sujeitas a carregamentos constante e triangular, com diferentes valores do coeficiente de Poisson;
- Validar as tabelas mediante análises comparativas dos esforços internos e deflexões com bibliografias estabelecidas e pelo *software* ANSYS Student 2019 R1;
- Analisar a influência da variação do coeficiente de Poisson nos valores das solicitações mecânicas e deslocamentos transversais.

1.2. JUSTIFICATIVA

Uma etapa fundamental na realização de projetos estruturais é a obtenção dos esforços a qual o elemento em análise está submetido. Devido ao comportamento estrutural bidimensional das placas e suas distintas formas de interação mecânica com as condições de apoio, uma das tarefas mais complexas na análise estrutural é a obtenção dos esforços e deslocamentos nestes elementos. Para isto, diversos modelos de cálculo (dos mais simplificados aos mais precisos) podem ser adotados. Os fundamentos da teoria da flexão de placas finas conseguem descrever satisfatoriamente o comportamento físico de placas, dentro de condições elástico-lineares. Todavia, devido à complexidade em solucionar as equações diferenciais associadas ao modelo, torna-se mais conveniente recorrer ao uso de tabelas com soluções previamente calculadas, sendo este um meio amplamente utilizado em projetos estruturais, até mesmo nos dias atuais.

Apesar da disponibilidade de tabelas em diversas fontes bibliográficas, devido ao emprego de valores convencionais na resolução das equações da placa, muitas destas podem ser inadequadas em determinados projetos. O coeficiente de Poisson, que é uma variável dependente do tipo de material da placa, por muitas vezes é fixado no valor de 0,20 para lajes de concreto armado. Todavia, com o desenvolvimento da tecnologia dos materiais, há situações em que o concreto pode apresentar variações em seu coeficiente de Poisson. Almeida (2002) afirma que os dados experimentais têm indicado que o coeficiente de Poisson do concreto simples varia entre 0,11 a 0,21. Hibbeler (2010) recomenda o emprego do valor de 0,15 para concretos de alta ou baixa resistência. Para o caso de concretos leves, onde há a substituição dos agregados convencionais por agregados leves (como EPS, argila expandida, vermiculita, EVA ou incorporação de ar no material), Silva (2003) *apud* ACI 213 R-87 (1999) disserta que ensaios têm indicado valores de 0,15 a 0,25 para o coeficiente de Poisson.

Ademais, existem aplicações de outros tipos de materiais em placas. No caso de placas compostas por ligas de aço estrutural, como A-36, o coeficiente de Poisson apresenta valor médio de 0,30 (HIBBELER, 2010). Se constituídas por madeira, este coeficiente apresenta variações segundo a espécie da madeira e direção das fibras (longitudinal, tangencial ou radial), conforme indica a Tabela 1:

Tabela 1: Média dos coeficientes de Poisson (ν) para diferentes espécies de madeira e direção das fibras

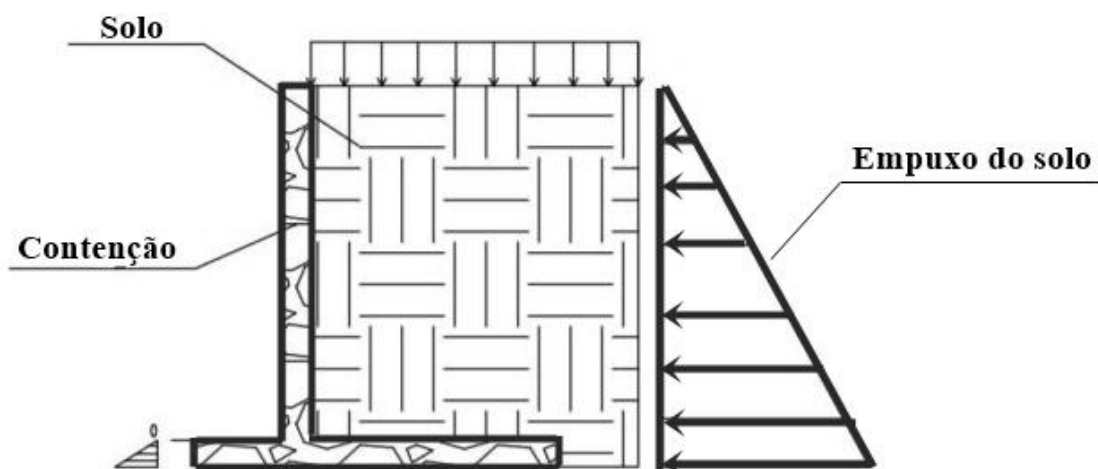
Coefficiente de Poisson	Coníferas	Folhosas
ν_{LR}	0,37	0,37
ν_{LT}	0,42	0,50
ν_{RT}	0,47	0,67
ν_{TR}	0,35	0,33
ν_{RL}	0,04	0,04
ν_{TL}	0,03	0,03

L: eixo longitudinal; R: eixo radial; T: eixo tangencial

Fonte: Ballarin e Nogueira (2003).

Outro parâmetro comumente adotado nas tabelas de cálculo, é o formato de carregamento uniformemente distribuído sobre placas. Todavia, há situações em que os carregamentos sofrem variação linear, como é no caso do empuxo sobre muros de contenção (Figura 2) ou barragens.

Figura 2: Empuxo sobre muro de contenção – carregamento em variação linear



Fonte: Cava (2018, adaptado).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Segundo Martinelli, Montanari e Savassi (1986), os elementos estruturais podem ser subdivididos em três grandes categorias, conforme a relação entre suas dimensões:

- a) Elementos estruturais lineares (ou barras): possuem duas de suas dimensões pequenas em relação à terceira, tais como: pilares, tirantes, vigas, pórticos, grelhas, etc.;
- b) Elementos estruturais de superfície (ou laminares, ou folhas): têm uma das dimensões pequena em relação às outras duas (ex: lajes, placas metálicas, etc.);
- c) Elementos estruturais tridimensionais (ou blocos): são aqueles em que as três dimensões possuem a mesma ordem de grandeza, como é o caso de sapatas, blocos de coroamento, etc.

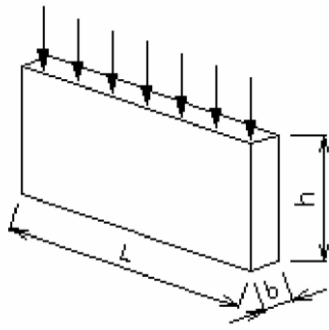
De acordo com o seu formato e direção de aplicação dos esforços externos, os elementos estruturais de superfície também podem ser subdivididos em três subcategorias:

- a) Chapas: superfície média plana e esforços externos aplicados longitudinalmente a este plano (Figura 3);
- b) Placas: superfície média plana e esforços externos normais a esse plano (Figura 4);
- c) Cascas: superfície média curva, poliédrica, prismática, etc. (Figura 5).

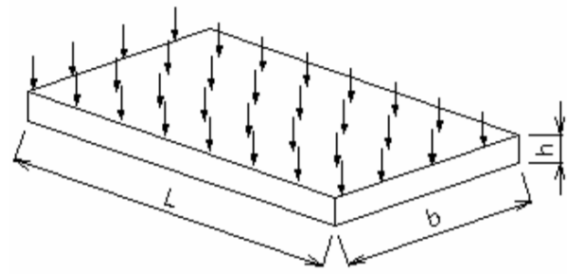
Para o caso de esforços externos oblíquos em elementos com superfície média plana, em geral, o estudo é feito por meio da decomposição destes esforços e superposição do comportamento de chapa e placa.

Figura 3: Chapa

Figura 4: Placa

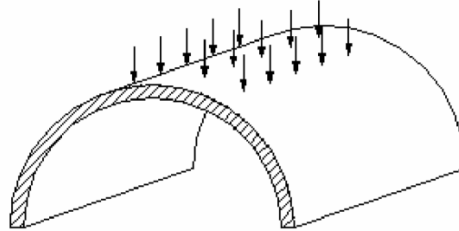


Fonte: Chaer (2004, p.3).



Fonte: Chaer (2004, p.3).

Figura 5: Casca



Fonte: Chaer (2004, p.3).

Dessa maneira, define-se como placa o elemento estrutural, simétrico em relação ao plano médio, cuja dimensão normal (isto é, a espessura) é pequena em relação às demais, e que é solicitado por esforços normais a esse plano médio (MARTINELLI, MONTANARI e SAVASSI, 1986).

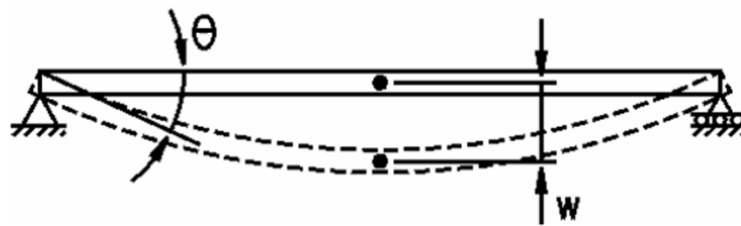
O termo "espessura pequena", por muitas vezes é uma expressão vaga. Martinelli, Montanari e Savassi (1986) definem que esta expressão é válida para relações h/L (h : espessura; L : menor vão da placa) de ordem inferior a $1/5$. No grupo das lajes mais espessas (com relação h/L em torno de $1/5$) se encontram as obras especiais, como barragens e outras obras hidráulicas. Para relações entre $1/10$ e $1/30$ se encontram as lajes de pontes. Em lajes usuais de edifícios, h/L varia entre $1/40$ e $1/80$. Para relações h/L na ordem de $1/100$, ou menos, se encontram as placas metálicas.

De acordo com a relação h/L , as placas ainda podem ser classificadas como muito delgadas, delgadas (ou finas) e espessa. Para determinação dos esforços internos, são utilizadas teorias específicas para cada tipo de placa. No caso das placas delgadas (ou finas), a análise é realizada mediante a chamada teoria clássica das placas finas, que, em geral, interpreta suficientemente bem o comportamento de placas com relações h/L em torno de $1/5$ e $1/100$ (MARTINELLI, MONTANARI e SAVASSI, 1986).

As placas podem ter diferentes geometrias, formatos de carregamento e condições de contorno, de forma a apresentar pequenos ou grandes deslocamentos lineares e angulares. Segundo Soares (2004), uma placa possui comportamento fisicamente e geometricamente linear quando seguem a lei de Hooke e as rotações de suas seções são inferiores a 10^{-3} rad, e pode considerada fina com pequenos deslocamentos, quando as seguintes hipóteses forem admitidas:

- I. A relação entre a espessura (h) da placa e a menor dimensão da superfície (L) for inferior a 5%, ou seja, $(h/L) < 1/20$;
- II. A relação entre a deflexão vertical (w) e a espessura (h) da placa é inferior a 20%, ou seja, $w/h < 1/5$;
- III. As rotações (θ), são da ordem de 10^{-3} radianos (Figura 6).

Figura 6: Deflexão e rotação de uma placa (vista lateral)



Fonte: Soares (2004, p.24).

2.2. TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS FINAS

Dentro da teoria da elasticidade, as hipóteses básicas variam de acordo com o tipo de placa considerada (podendo ser muito finas, finas ou espessas, a depender da relação h/L). Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), na teoria clássica das placas finas com pequenas deformações, são consideradas admitidas as hipóteses de Kirchhoff:

- I. O material da placa é elástico linear, homogêneo e isotrópico;
- II. A espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões;
- III. As deflexões são pequenas em relação à espessura da placa;
- IV. As rotações da superfície média deformada são pequenas relação à unidade;
- V. Linhas retas, inicialmente normais à superfície média, permanecem retas e após as deformações. Esta hipótese é equivalente à hipótese das seções planas da teoria de vigas e consiste em desprezar as deformações por corte;

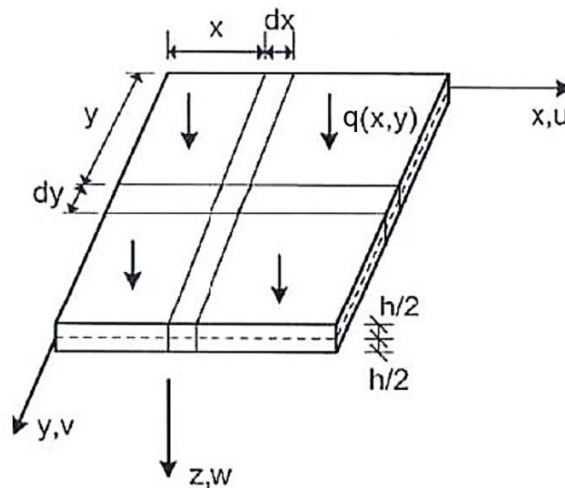
- VI. As deflexões da placa são normais ao plano indeformado inicial;
- VII. As tensões normais à superfície média são desprezíveis ($\sigma_z \approx 0$).

(ARAÚJO, 2014, v.2, p.41)

2.2.1. Relações entre deslocamentos e deformações

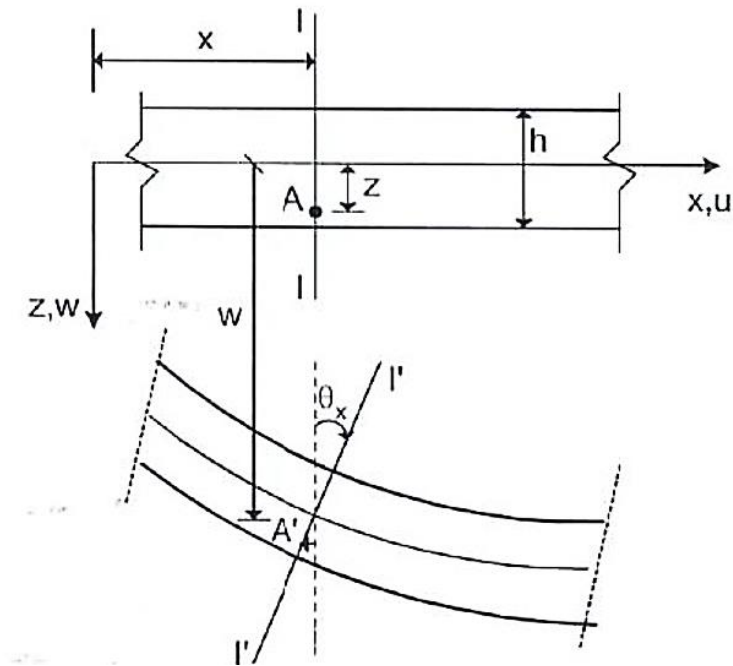
Na Figura 7, é demonstrada uma placa sob ação de uma carga externa genérica $q(x,y)$, normal ao plano médio. Este carregamento gera deflexões (w) em função de x e y . Para a obtenção das relações entre as deformações e deslocamentos, considera-se a seção transversal deformada, paralela ao eixo x (Figura 8):

Figura 7: Placa submetida a um carregamento normal $q(x,y)$



Fonte: Araújo (2014, v.2, p. 42, adaptado).

Figura 8: Seção transversal deformada



Fonte: Araújo (2014, v.2, p. 42).

Visto que não há deformações em z (hipótese VII – item 2.2), o deslocamento (w) depende apenas de x e y – enquanto que os deslocamentos u e v dependem das três direções.

$$w = w(x, y) \quad (1)$$

$$u = u(x, y, z) \quad (2)$$

$$v = v(x, y, z) \quad (3)$$

da Figura 8, por meio de relações trigonométricas, obtém-se que:

$$\tan \theta_x = \frac{-u}{z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

ainda da Figura 8, como o ângulo θ_x é pequeno, têm-se que $\tan \theta_x \cong \theta_x$, portanto:

$$u = -z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

concluindo a análise dos deslocamentos da Figura 8, define-se o deslocamento do ponto A, na direção y:

$$v = -z\theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6)$$

Empregando as equações (4), (5) e (6) nas relações entre as componentes de deformação e deslocamento, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8)$$

uma vez que não há deformações normais ao plano médio da placa (hipótese VII – item 2.2):

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Os ângulos de distorção nos planos xy, xz e yz, são dados por:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

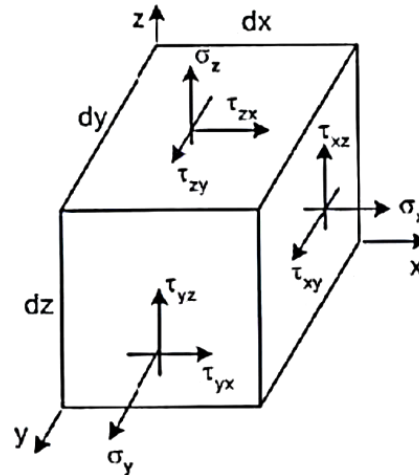
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

2.2.2. Estado de tensões num ponto qualquer de uma placa

Para a representação do estado de tensões de um corpo tridimensional submetido a ações externas, considera-se um elemento infinitesimal em formato paralelepípedo com faces paralelas ao plano (Figura 9):

Figura 9: Estado de tensões num elemento infinitesimal



Fonte: Araújo (2014, v.2, p. 37).

No regime elástico linear de material isotrópico (hipótese I, item 2.2), a lei de Hooke generalizada, na forma matricial, é expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde:

E: módulo de elasticidade longitudinal;

ν : coeficiente de Poisson;

G: é o módulo de elasticidade transversal, o qual se relaciona com o módulo de elasticidade longitudinal de acordo com a seguinte expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (14)$$

empregando-se as expressões (9), (11) e (12), na equação (13), onde é considerado que a deformação normal (ε_z) e os ângulos de distorção nos planos xz e yz (τ_{xz} e τ_{yz}) são nulos, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

aplicando-se as equações (7), (8), (10) na equação (13), obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

realizando-se o produto entre as matrizes, e simplificando o sistema de equações lineares, obtêm-se:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (20)$$

$$0 = \frac{\tau_{xz}}{G} \therefore \tau_{xz} = 0 \quad (21)$$

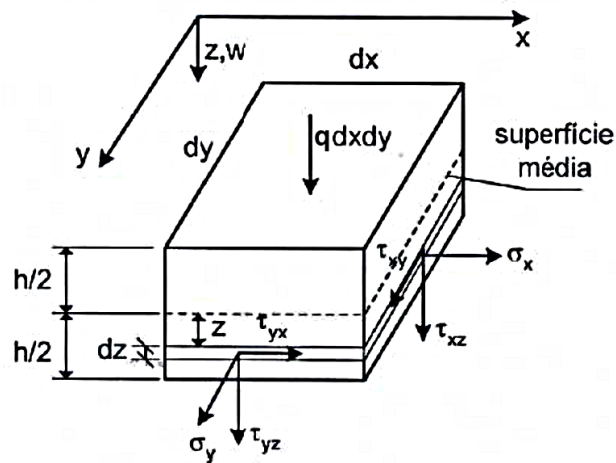
$$0 = \frac{\tau_{yz}}{G} \therefore \tau_{yz} = 0 \quad (22)$$

A partir das equações (17), (18) e (19), nota-se que as tensões num ponto qualquer de uma placa podem ser obtidas a partir da obtenção da deflexão w e sua posição z .

2.2.3. Cálculo dos momentos

Na Figura 10, apresenta-se uma fibra genérica da placa, de espessura diferencial dz , situada a uma distância z da superfície média, juntamente com as respectivas componentes de tensão.

Figura 10: Tensões em uma fibra genérica



Fonte: Araújo (2014, v.2, p.44, adaptado).

As tensões normais σ_x e σ_y geram os momentos fletores M_x e M_y na placa, enquanto que as tensões tangenciais τ_{xy} e τ_{yx} geram os momentos torçores M_{xy} e M_{yx} . Os momentos fletores são obtidos a partir da integração das tensões normais ao longo da espessura da placa, conforme indicado nas seguintes equações:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (23)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (24)$$

aplicando as equações (17) e (18) nas equações (23) e (24) e realizando as integrações, obtêm-se:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (25)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (26)$$

onde, D é a rigidez da placa à flexão, e possui por expressão:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (27)$$

Analogamente, os momentos torçores são obtidos a partir da integração das tensões tangenciais ao longo da espessura da placa (vide Figura 10).

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (28)$$

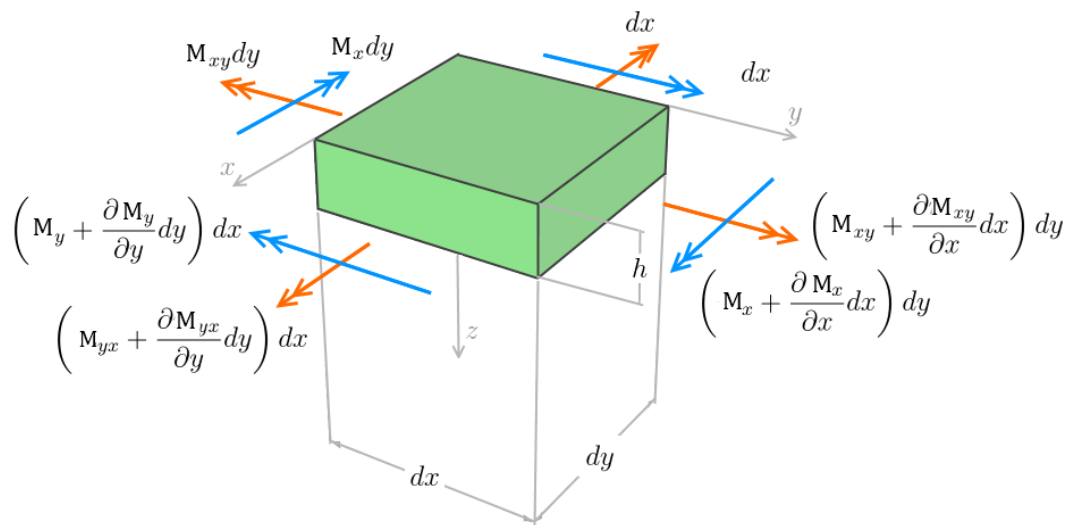
substituindo a equação (19) na equação (28) e realizando as integrações, obtém-se:

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (29)$$

2.2.4. Equação de Sophie-Germain-Lagrange

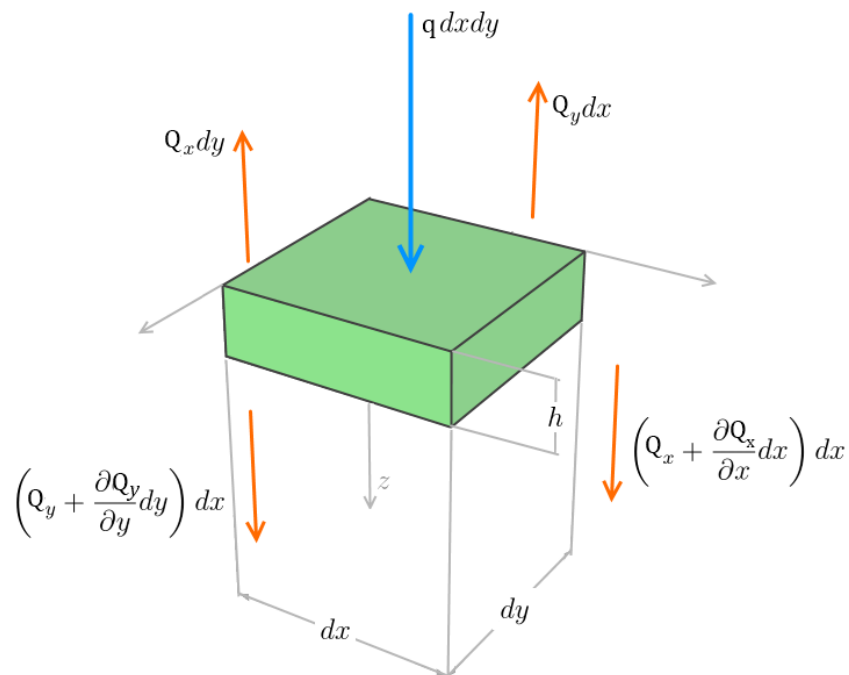
A equação de Sophie-Germain-Lagrange, também denominada de equação diferencial da placa, é obtida a partir da análise dos esforços internos de um elemento infinitesimal de uma placa, sujeita a ação de um carregamento qualquer $q(x,y)$ (Figura 11 e Figura 12), no qual são impostas as condições de equilíbrio.

Figura 11: Esforços de momento em um elemento diferencial de uma placa sujeita a uma carga $q(x,y)$



Fonte: Longo (2018, adaptado).

Figura 12: Esforços cortantes em um elemento diferencial de uma placa sujeita a uma carga $q(x,y)$



Fonte: Longo (2018, adaptado).

Equilíbrio dos momentos em torno do eixo y

Aplicando a condição de equilíbrio dos momentos em torno do eixo y, obtém-se:

$$\begin{aligned}
M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x dx}{\partial x} \right) dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x dx}{\partial x} \right) \partial y \partial x + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y dy}{\partial y} \right) dx \frac{dx}{2} \\
- Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx} dy}{\partial y} \right) dx - M_{yx} dx + q dx dy \frac{dx}{2} = 0
\end{aligned} \tag{30}$$

Considerando que $M_{xy} = M_{yx}$ (momento torçor simétrico) e desprezando os infinitésimos de ordem superior, obtém-se:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \tag{31}$$

aplicando as equações (25) e (29) e derivando os elementos, o esforço cortante Q_x também pode ser expresso em função da flecha w , como:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{32}$$

Equilíbrio dos momentos em torno do eixo x

Analogamente ao item anterior, aplicando a condição de equilíbrio dos momentos em torno do eixo x, obtém-se:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{33}$$

aplicando as equações (26) e (29) e derivando os elementos, o esforço cortante Q_y também pode ser expresso em função da flecha w , como:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{34}$$

Equilíbrio das forças na direção z

Aplicando a condição para o equilíbrio das forças na direção z, obtém-se:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q(x, y) dx dy = 0 \quad (35)$$

ao simplificar a equação (35), reescreve-se:

$$q(x, y) = -\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) \quad (36)$$

Equação diferencial da placa

Substituindo as equações (32) e (34) em (36), obtém-se a equação diferencial da placa em função da flecha w :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (37)$$

a equação (37) pode ser representada pelo operador biarmônico (∇^4):

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (38)$$

$$\text{onde: } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

A equação (37), também conhecida como equação de Sophie-Germain-Lagrange, é válida para uma placa com rigidez à flexão constante. Trata-se de uma equação parcial de quarta ordem, não homogênea e com coeficientes constantes, sendo também uma equação linear, uma vez que as derivadas de w não possuem expoente superior a 1.

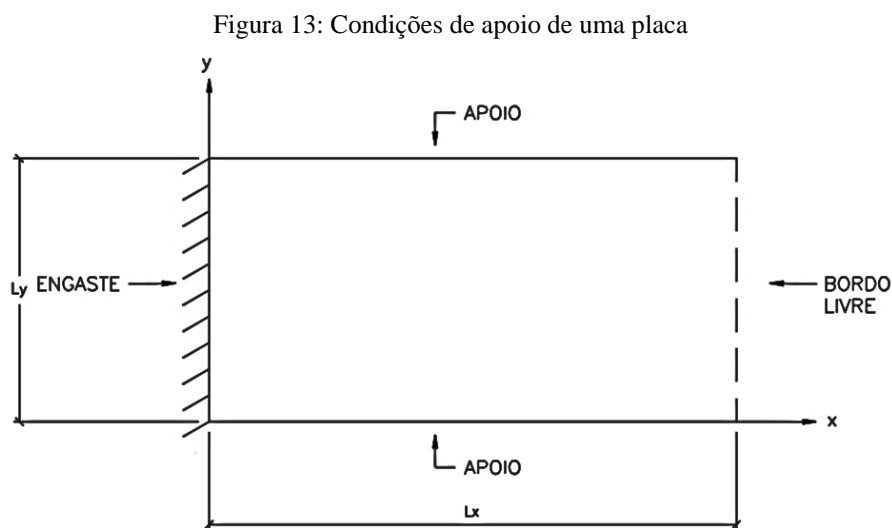
Portanto, para a obtenção dos esforços internos de uma placa, torna-se necessária a determinação de uma expressão para a superfície deformada $w(x, y)$ que satisfaça, simultaneamente, a equação diferencial de equilíbrio da placa (37) e as respectivas condições de contorno (ARAÚJO, v.2, 2014).

2.2.5. Solução da equação de Sophie-Germain-Lagrange

Condições de contorno

Por ser uma equação diferencial de quarta ordem, duas condições de contorno são necessárias para sua resolução. Essas condições de contorno podem ser geométricas (estabelecendo valores para deslocamentos e rotações no contorno), mecânicas (prescrevendo esforços solicitantes) ou condições mistas entre a geométrica e mecânica (ARAÚJO, 2014).

Estas condições de contorno são obtidas mediante a predefinição das condições de apoio a qual a placa está submetida: bordo livre, bordo apoiado ou bordo engastado – realizando as combinações possíveis entre esses tipos de apoio. A Figura 13 apresenta uma representação genérica das condições de apoio de uma placa.



Fonte: o autor (2019).

Bordo engastado:

Na condição de apoio de engaste, a flecha (w) e a rotação ($\frac{\partial w}{\partial x}$) são nulas.

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Bordo simplesmente apoiado:

Nos apoios simplesmente apoiados, a flecha (w) e o momento fletor são nulos.

$$w=0 \quad M_y = 0$$

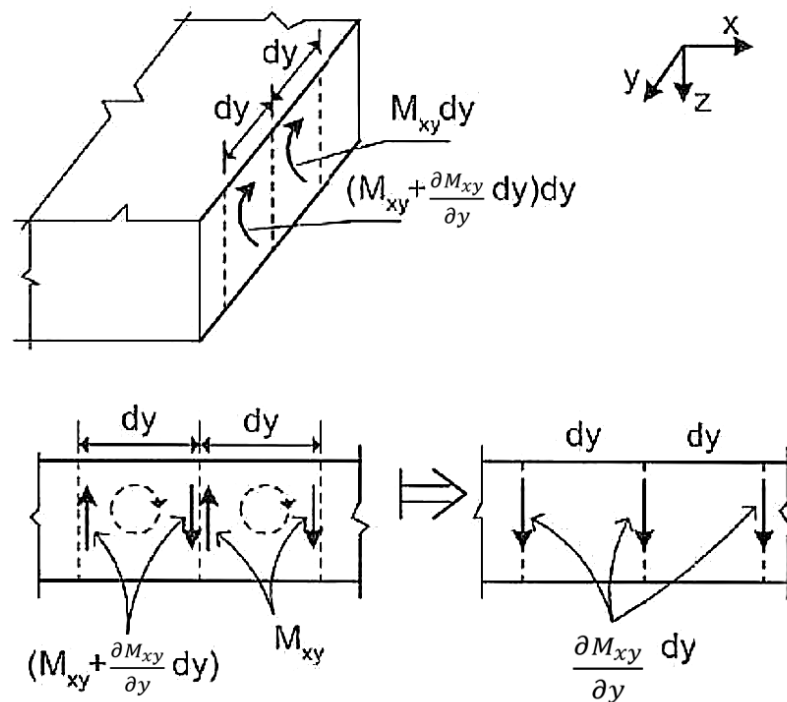
Bordo livre:

Nos bordos livres, os esforços internos são nulos:

$$M_x = 0 \quad M_{xy} = 0 \quad Q_x = 0$$

Todavia, como a equação diferencial é de quarta ordem, apenas duas condições de contorno devem ser introduzidas. Para solucionar este problema, Kirchhoff formulou uma condição de contorno em que o esforço cortante e o momento torçor são compatibilizados. Para isso, o momento torçor é substituído por binários equivalentes, gerando forças verticais em sentidos contrários, as quais se diferem num valor de $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ (ARAÚJO, 2014, v.2), conforme é representado na Figura 14.

Figura 14: Binários equivalentes ao momento torçor no bordo livre



Fonte: Araújo (2014, v.2, p.51, adaptado).

Dessa maneira, a partir do equilíbrio de forças verticais, surge uma força cortante adicional de módulo $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$, denominada força cortante de Kirchhoff. Portanto, o esforço cortante efetivo no bordo livre é dado por:

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (39)$$

Analogamente, o esforço cortante efetivo na direção y, é expresso por:

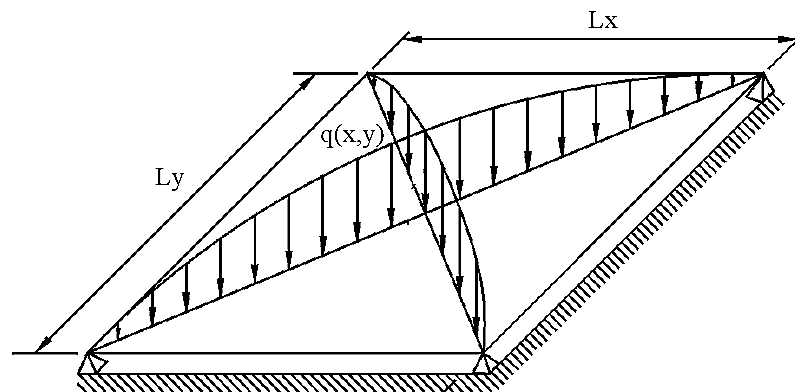
$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (40)$$

Solução de Navier

As soluções exatas da equação de Sophie-Germain-Lagrange limitam-se a geometrias e condições de contorno simples (como é o caso de placas circulares ou placas retangulares com carregamento do tipo senoidal). Para outras condições de contorno e carregamento, torna-se necessário fazer uso de expansões em séries numéricas, dentre as quais, se destacam o método de Navier e de Levy.

Considerando-se uma placa retangular simplesmente apoiada nos quatro bordos, submetida a um carregamento genérico $q(x,y)$ – (Figura 15):

Figura 15: Placa simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída genérica $q(x,y)$



Fonte: Soares (2004, p.25, adaptado).

a fim de possibilitar a resolução da equação diferencial da placa, este carregamento pode ser representado através de duplas séries trigonométricas de Fourier, da seguinte maneira:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (41)$$

onde:

m e n são números inteiros positivos (número de meias-ondas);

enquanto que o coeficiente q_{mn} pode ser obtido mediante a integração de $q(x,y)$ ao longo do contorno da placa (de 0 a L_x e de 0 a L_y):

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (42)$$

a utilização de dupla série para permite a representação de $q(x,y)$ para quaisquer formatos de distribuição de cargas aplicadas sobre placas retangulares.

Substituindo equação (42) na equação (38), têm-se:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (43)$$

Para placas retangulares simplesmente apoiadas, as seguintes condições de contorno devem ser atendidas:

- Em $x=0$ e $x=L_x$: $w = 0$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
- Em $y=0$ e $y=L_y$: $w = 0$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Uma solução possível que atende simultaneamente a equação de Sophie-Germain-Lagrange – equação (37) e as condições de contorno para placas retangulares simplesmente apoiadas é a chamada solução de Navier, a qual se considera a deflexão $w(x,y)$ uma função tipo série dupla de senos (DINIS, 2003):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (44)$$

podendo ser também representada por:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (45)$$

$$\text{Onde: } w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2}$$

Logo, aplicando a equação (44) nas equações (25), (26), (29), (32), (34), obtêm-se a solução de Navier para as equações dos esforços internos:

$$M_x = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \nu \frac{n^2}{L_y^2} \right) \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (46)$$

$$M_y = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right) \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (47)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_x} \frac{n}{L_y} \right) \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (48)$$

$$Q_x = \frac{1}{\pi L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (49)$$

$$Q_y = \frac{1}{\pi L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (50)$$

Estas equações são aplicáveis a placas retangulares simplesmente apoiadas, solicitadas a quaisquer formatos de carregamento – sendo necessária a determinação do coeficiente q_{mn} para a resolução das equações.

3. METODOLOGIA

3.1. CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO

O presente estudo possui uma abordagem quantitativa dos efeitos mecânicos e geométricos em placas retangulares, de forma que a partir da exploração dos modelos matemáticos que descrevem o comportamento físico destes elementos, formulou-se tabelas de cálculo auxiliares à análise estrutural de placas.

3.2. VARIÁVEIS DO ESTUDO

As variáveis deste estudo podem ser classificadas como dependentes e independentes. As variáveis dependentes possuem valores em função de outras variáveis predefinidas, sendo elas: a deflexão (w) e os esforços internos da placa – momentos fletores e forças cortantes em relação ao eixo x e y (M_x , M_y , V_x e V_y , respectivamente) e momento torçor (M_{xy}).

Por outro lado, as variáveis independentes, isto é, os parâmetros que causam alteração nos valores dos esforços solicitantes, são: as condições de apoio, formato de carregamento, coeficiente de Poisson (ν) e razão entre as dimensões da placa (λ). Neste estudo foram predefinidas condições de apoio de segundo gênero nas placas, submetendo-as a carregamentos linearmente distribuídos: com variação linear em relação ao eixo x (carregamento triangular) e com distribuição uniforme (carregamento constante). Para o coeficiente de Poisson, foram estabelecidos valores num intervalo de 0,00 a 0,40, enquanto que para $\lambda = L_y/L_x$, foi definido um intervalo de 0,50 a 2,00.

3.3. COLETA, PROCESSAMENTO E ANÁLISE DE DADOS

A partir das equações dos esforços internos (oriundas da solução de Navier) realizou-se técnicas de simplificação com o fim de deixá-las em função de parâmetros adimensionais: coeficiente de Poisson (ν), razão entre dimensões da placa (λ), e coeficientes para as equações da flecha máxima, momento fletor na direção do eixo x , momento fletor na direção do eixo y , esforço cortante na direção do eixo x e esforço cortante na direção do eixo y (w_z , m_x , m_y , v_x e v_y , respectivamente).

O procedimento de obtenção das tabelas se deu mediante a resolução das equações dos coeficientes dos esforços internos. Para a resolução das séries de Fourier, utilizou-se o programa computacional PTC Mathcad Express, onde foi realizado o truncamento dos somatórios dentro de um intervalo de 1 a 150.

A validação das tabelas foi realizada mediante a utilização de exemplos numéricos, onde foram calculados os valores de momentos, forças cortantes e deslocamento. Estes valores foram analisados de forma comparativa com os dados da obra de Araújo (2014, v.2, p.64-66) e pelas tabelas postuladas por Pinheiro (2007). Além disso, para a validação dos deslocamentos máximos das placas, foi utilizado o programa computacional ANSYS Student 2019 R1 – *software* de análise estrutural que utiliza o método dos elementos finitos.

Uma vez validada as tabelas do presente estudo, examinou-se, através de exemplos numéricos, a influência da variação do coeficiente de Poisson nos valores das variáveis mecânicas (esforços internos) e geométrica (flecha máxima) da placa.

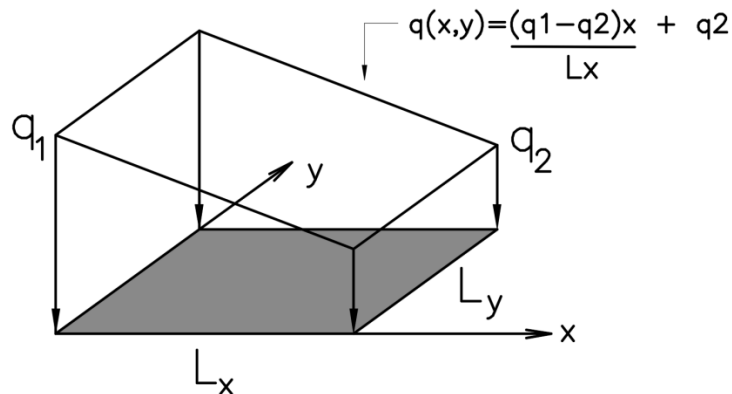
4. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA PLACA

4.1. SOLUÇÃO DE NAVIER PARA PLACAS SIMPLEMENTE APOIADAS - CARREGAMENTO LINEARMENTE DISTRIBUÍDO EM X

Na Figura 16 é indicada uma placa simplesmente apoiada em seu contorno, solicitada por um carregamento com variação linear em x (formato trapezoidal). A partir desta, verifica-se que o carregamento $q(x,y)$ é descrito pela função:

$$q(x,y) = \frac{(q_1 - q_2)x}{L_x} + q_2 \quad (51)$$

Figura 16: Placa simplesmente apoiada, submetida a um carregamento trapezoidal em x



Fonte: o autor (2019).

aplicando a equação (51) na equação (42), obtém-se o coeficiente q_{mn} característico ao carregamento trapezoidal:

$$q_{mn} = \frac{8(q_1 + q_2)}{m n \pi^2} \quad (52)$$

empregando a equação (52) nas equações (46), (47), (48), (49) e (50), obtém-se as equações da deflexão e esforços internos para uma placa sob carregamento em variação linear em x:

$$w = \frac{8(q_1 + q_2)}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (53)$$

$$M_x = \frac{8(q_1 + q_2)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + v \frac{n^2}{L_y^2}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (54)$$

$$M_y = \frac{8(q_1 + q_2)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(v \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (55)$$

$$M_{xy} = \frac{-8(q_1 + q_2)(1 - v)}{\pi^4 L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (56)$$

$$Q_x = \frac{8(q_1 + q_2)}{\pi^3 L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (57)$$

$$Q_y = \frac{8(q_1 + q_2)}{\pi^3 L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (58)$$

Para a determinação do esforço cortante efetivo V_x (equação (39)), é necessária a obtenção da força adicional de Kirchhoff $\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)$:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{8(q_1 + q_2)(1 - v)}{\pi^3 L_x L_y^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (59)$$

analogamente, para a obtenção esforço cortante efetivo V_y (equação (40)), requer-se a obtenção da força adicional de Kirchhoff de módulo $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{8(q_1 + q_2)(1 - v)}{\pi^3 L_x^2 L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (60)$$

A fim de tornar as tabelas abrangentes a diversas dimensões de placas, as equações dos esforços internos e deflexão foram simplificadas em função dos coeficientes adimensionais ν (coeficiente de Poisson) e $\lambda = L_y/L_x$:

$$w = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^4}{D\pi^6} \mathbf{w}_z \quad (61)$$

$$M_x = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^2}{\pi^4} \mathbf{m}_x \quad (62)$$

$$M_y = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^2}{\pi^4} \mathbf{m}_y \quad (63)$$

$$M_{xy} = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^2}{\pi^4} \mathbf{m}_{xy} \quad (64)$$

$$V_x = \frac{8(q_1 + q_2)L_x}{\pi^3} \mathbf{v}_x \quad (65)$$

$$V_y = \frac{8(q_1 + q_2)L_x}{\pi^3} \mathbf{v}_y \quad (66)$$

onde:

$$w_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^5 n + \frac{2m^3 n^3}{\lambda^2} + \frac{mn^5}{\lambda^4})} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (55-a)$$

$$m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \lambda^2 + \nu n^2}{(m^5 n \lambda^2 + \frac{mn^5}{\lambda^2} + 2m^3 n^3)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (56-a)$$

$$m_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^2 m^2 \lambda^2 + n^2}{(m^5 n \lambda^2 + \frac{mn^5}{\lambda^2} + 2m^3 n^3)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (57-a)$$

$$m_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu - 1)}{(m^4 \lambda + \frac{2m^2 n^2}{\lambda} + \frac{n^4}{\lambda^3})} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (58-a)$$

$$v_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(m^2 n + \frac{n^3}{\lambda^2})} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right] + \left[\frac{n(1 - \nu)}{(m^4 \lambda^2 + \frac{n^4}{\lambda^2} + 2m^2 n^2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right] \right\} \quad (59-a)$$

$$v_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(m^3 \lambda + \frac{mn^2}{\lambda})} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right] + \left[\frac{m \lambda (1 - \nu)}{(m^4 \lambda^2 + \frac{n^4}{\lambda^2} + 2m^2 n^2)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right] \right\} \quad (60-a)$$

Estas equações podem ser utilizadas para obtenção da deflexão e esforços internos em determinado ponto (x, y) de uma placa retangular delgada, sobre apoios de segundo gênero em seu contorno, solicitada por carregamentos linearmente distribuídos – portanto, aplicáveis a carregamentos uniformemente distribuídos (formato retangular) ou com variação linear (formato triangular).

5. RESULTADOS

5.1. TABELAS PARA CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO

Para as placas sujeitas a carregamento constante, considera-se que $q_1 = q_2 = q$. Neste caso, a partir das equações (61), (62) e (63), verifica-se que os valores máximos de deflexão (w) e momentos fletores (M_x e M_y) ocorrem no centro da placa ($x = L_x/2$ e $y = L_y/2$), enquanto que o momento torçor possui valor máximo nos cantos dos bordos apoiados. Quanto aos esforços cortante, estes atingem valores máximos no centro dos bordos apoiados.

Ao aplicar nas equações (61), (62), (63), (64), (65) e (66) as condições de contorno para deflexão e esforços internos máximos, calculou-se os coeficientes adimensionais das w_z , m_x , m_y , m_{xy} , v_x e v_y , gerando-se as tabelas listadas no APÊNDICE A. As tabelas foram geradas para valores do coeficiente de Poisson num intervalo de 0,00 e 0,40 e valores de $\lambda = L_y/L_x$ num intervalo de 0,50 a 2,00.

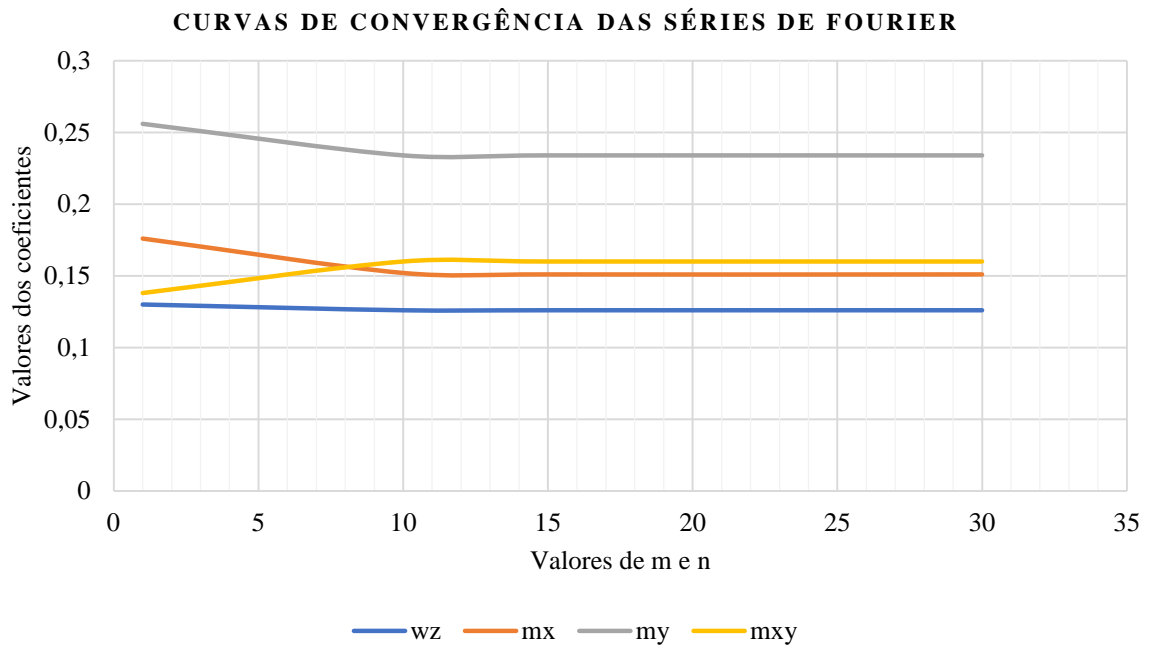
As séries numéricas de Fourier foram calculadas através do *software* PTC Mathcad Express. Uma vez que séries trigonométricas possuem rápida convergência, foi estabelecido que os truncamentos das séries se dessem para valores de m e n de 0 a 150. Na Figura 17 e Figura 18 são indicadas as curvas de convergência das séries de Fourier utilizadas para o cálculo dos coeficientes w_z , m_x , m_y , v_x e v_y . Os coeficientes foram calculados para valores de $\nu = 0,20$ e $\lambda=0,75$, conforme a variação dos índices m e n (Tabela 2).

Tabela 2: Valores dos coeficientes segundo a variação dos índices m e n - carregamento constante

m e n	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
1	0,13	0,176	0,256	0,138	0,544	0,618
5	0,126	0,153	0,235	0,160	0,395	0,468
10	0,126	0,152	0,234	0,160	0,377	0,453
15	0,126	0,151	0,234	0,160	0,382	0,456
20	0,126	0,151	0,234	0,160	0,380	0,454
25	0,126	0,151	0,234	0,160	0,381	0,456
30	0,126	0,151	0,234	0,160	0,380	0,455
35	0,126	0,151	0,234	0,160	0,381	0,455
40	0,126	0,151	0,234	0,160	0,380	0,455

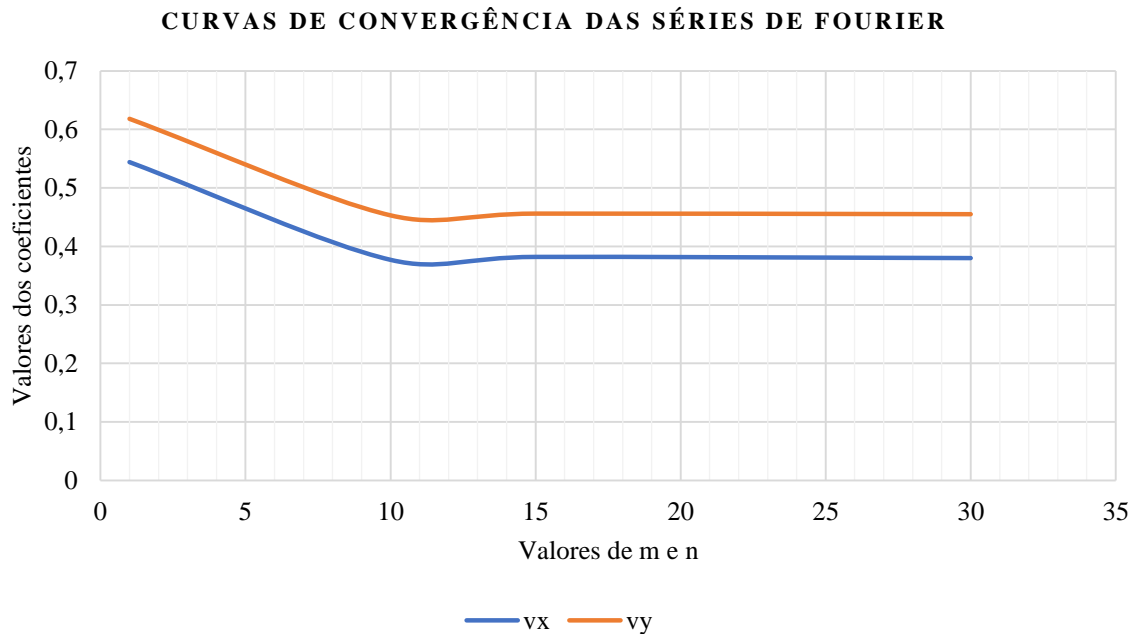
Fonte: o autor (2019).

Figura 17: Curvas de convergência dos coeficientes w_z , m_x , m_y e m_{xy} – carregamento constante



Fonte: o autor (2019).

Figura 18: Curvas de convergência dos coeficientes v_x e v_y – carregamento constante



Fonte: o autor (2019).

A partir da Figura 17 e Figura 18, verifica-se que os coeficientes w_z , m_x , m_y , m_{xy} , v_x e v_y apresentam convergência de resultados, quando os índices m e n atingem o valor de 15.

5.1.1. Validação das tabelas – carregamento uniformemente distribuído

Validação bibliográfica - Araújo (2014)

Para a validação das tabelas, utilizou-se o exemplo numérico apresentado na obra de Araújo (2014, v.2, p.64-66), onde são predefinidos os seguintes parâmetros:

- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,20$
- Espessura da laje: $h = 10 \text{ cm}$
- Dimensões: $L_x = 4,00 \text{ m}$; $L_y = 3,00 \text{ m}$
- Carga constante: $q_1 = q_2 = q = 5,00 \text{ kN/m}^2$
- Módulo de elasticidade: $E = 28518 \text{ MPa}$

Logo, o coeficiente λ é dado por:

$$\lambda = \frac{L_y}{L_x} = \frac{3,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = 0,75$$

Conforme indicado na equação (27), a rigidez da placa à flexão (D) é obtida a partir da expressão:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = 2476 \text{ kN.m}$$

Para $\nu = 0,20$ e $\lambda = 0,75$, utiliza-se a Tabela AP 5 (APÊNDICE A), obtendo-se os seguintes coeficientes:

Tabela 3: Valores dos coeficientes das equações da flecha e esforços internos

λ	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	ν_x	ν_y
0,75	0,126	0,151	0,234	0,160	0,381	0,455

Fonte: o autor (2019).

Portanto, as deflexões e esforços internos são calculados pelas expressões:

$$w = \frac{16q_0L_x^4}{D\pi^6} w_z = \frac{16 \cdot (5,00 \frac{kN}{m^2}) \cdot (4,00m)^4}{(2476 kN \cdot m) \cdot \pi^6} \cdot 0,126 = 0,001084 m$$

$$M_x = \frac{16q_0L_x^2}{\pi^4} m_x = \frac{16 \cdot (5,00 \frac{kN}{m^2}) \cdot (4,00m)^2}{\pi^4} \cdot 0,151 = 1,9842 kN \cdot m/m$$

$$M_y = \frac{16q_0L_x^2}{\pi^4} m_y = \frac{16 \cdot (5,00 \frac{kN}{m^2}) \cdot (4,00m)^2}{\pi^4} \cdot 0,234 = 3,0749 kN \cdot m/m$$

$$M_{xy} = \frac{16q_0L_x^2}{\pi^4} m_{xy} = \frac{16 \cdot (5,00 \frac{kN}{m^2}) \cdot (4,00m)^2}{\pi^4} \cdot 0,160 = 2,1025 kN \cdot m/m$$

$$V_x = \frac{16q_0L_x}{\pi^3} v_x = \frac{16 \cdot (5,00 \frac{kN}{m^2}) \cdot (4,00m)}{\pi^3} \cdot 0,381 = 3,9321 kN \cdot m$$

$$V_y = \frac{16q_0L_x}{\pi^3} v_y = \frac{16 \cdot (5,00 \frac{kN}{m^2}) \cdot (4,00m)}{\pi^3} \cdot 0,455 = 4,6958 kN \cdot m$$

Na Tabela 4, estão explicitados os valores da deflexão e esforços internos obtidos a partir das tabelas geradas no presente estudo e por Araújo (2014, v.2). Para efeitos comparativos, os valores calculados foram arredondados para a mesma quantidade de casas decimais definidas por Araújo (2014, v.2, p.64-66).

Tabela 4: Comparativo entre os valores do deslocamento e esforços internos segundo o autor (2019) e Araújo (2014, v.2, p.64-66)

Método	w	M _x	M _y	M _{xy}	V _x	V _y
Tabelas - o autor (2019)	0,001 m	1,98 kN.m/m	3,08 kN.m/m	2,10 kN.m/m	3,93 kN.m/m	4,70 kN.m/m
Tabelas - Araújo (2014, v.2, p.64-66)	0,001 m	1,99 kN.m/m	3,07 kN.m/m	2,08 kN.m/m	3,95 kN.m/m	4,55 kN.m/m
Diferença percentual (%)	0,00 %	0,51 %	-0,32 %	-0,95 %	0,51%	-3,19%

Fonte: o autor (2019).

Para o cálculo dos esforços e deslocamentos do exemplo supracitado, Araújo (2014, v.2, p.64-66) adotou as tabelas de Kalmanok (1961), reproduzidas com algumas modificações. A partir dos valores da Tabela 4, verifica-se a consonância entre os resultados, com pequenas diferenças percentuais. Estas diferenças podem ser justificadas pelos

procedimentos de cálculo de ambos os autores, gerando erros de arredondamento e de truncamento¹.

Todavia, para o caso de lajes em concreto armado, estas diferenças podem ser facilmente absorvidas pelas considerações da NBR 6118 (ABNT, 2014) em utilizar coeficientes de majoração em 40% (para o caso de carregamentos em combinação normal) e pela minoração das resistências do concreto em 71,43 % (coeficiente de 1,40) e do aço em 86,96% (coeficiente de 1,15).

Validação via método dos elementos finitos

Outro método de validação adotado neste estudo foi a análise comparativa do deslocamento máximo, através do *software* ANSYS Student 2019 R1, que utiliza o método dos elementos finitos (MEF) como modelo de análise estrutural. Para esta análise foram adotados os parâmetros do item 0:

- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,20$
- Espessura da laje: $h = 10$ cm
- Dimensões: $L_x = 4,00$ m; $L_y = 3,00$ m
- Carga constante: $q_1 = q_2 = q = 5,00$ kN/m²
- Módulo de elasticidade: $E = 28518$ MPa

A Tabela 5 apresenta os valores do deslocamento transversal máximo da placa segundo o método das tabelas do autor (2019) e pelo *software* ANSYS Student 2019 R1 (Figura 19):

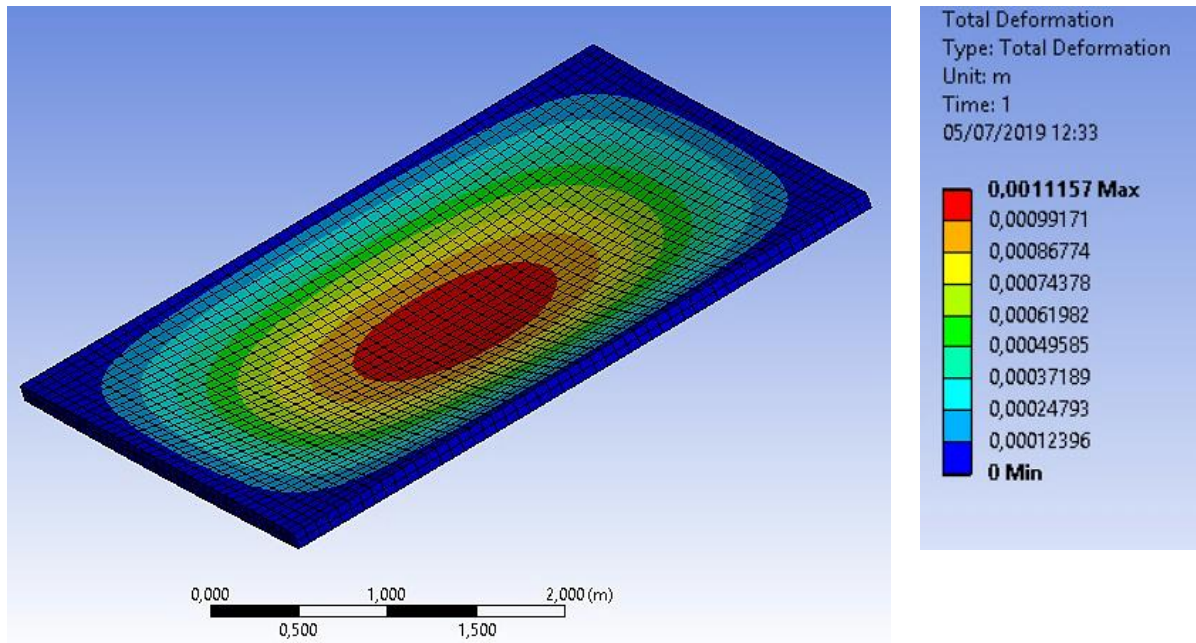
Tabela 5: Comparativo entre os valores do deslocamento máximo segundo o autor (2019) e o *software* ANSYS

Método	w
Tabelas – o autor (2019)	0,0010845 m
ANSYS Student 2019 R1	0,0011157 m
Diferença percentual (%)	2,877 %

Fonte: o autor (2019).

¹ São erros inerentes ao modelo de cálculo, devido à substituição de um processo infinito de operações por outro finito.

Figura 19: Deslocamento máximo da placa, segundo o ANSYS Student 2019 R1



Fonte: o autor (2019).

A partir da Tabela 5, verifica-se que o valor do deslocamento máximo, segundo as tabelas deste trabalho, resultou em 0,0010845 m, enquanto que a partir do ANSYS Student 2019 R1 foi obtido um valor de 0,0011157 m, ou seja, com uma diferença percentual de 2,877%. Dessa forma, devido à pequena diferença percentual entre os valores, verifica-se a validade das tabelas desenvolvidas neste estudo. Além disso, conforme abordado no item 0, para uma laje de concreto armado, esta diferença percentual também pode ser facilmente absorvida pelas considerações da NBR 6118 (ABNT, 2014) de majoração das cargas e minoração da resistência do material.

5.2. TABELAS PARA CARREGAMENTO TRIANGULAR EM X

Para as placas sujeitas a carregamento com variação linear no eixo x (formato triangular), os valores de q_1 e q_2 são distintos, sendo um deles igual a zero. Neste caso, verifica-se, a partir da demonstração contida no APÊNDICE C, que os valores máximos de deflexão (w) ocorrem nos pontos $x = 0,481L_x$ e $y = L_y/2$, enquanto que os momentos fletores (M_x e M_y) ocorrem nos pontos $x = 0,423L_x$ e $y = L_y/2$. Para o momento torçor, o

valor máximo se encontra nos cantos dos bordos apoiados. Quanto aos esforços cortante, estes atingem valores máximos no centro geométrico dos bordos simplesmente apoiados.

Dessa maneira, ao empregar as condições de contorno de deslocamento e esforços internos máximos; valores do coeficiente de Poisson de 0,00 a 0,40 e; valores de $\lambda = L_y/L_x$ num

intervalo de 0,50 a 2,00; foram obtidas as tabelas dos coeficientes w_z , m_x , m_y , m_{xy} , v_x e v_y para formato de carregamento triangular (contidas no APÊNDICE B). Semelhantemente ao carregamento uniformemente distribuído (item 5.1), as expansões das séries de Fourier foram realizadas por intermédio do *software* PTC Mathcad Express, com truncamento de m e n de 0 a 150. Na

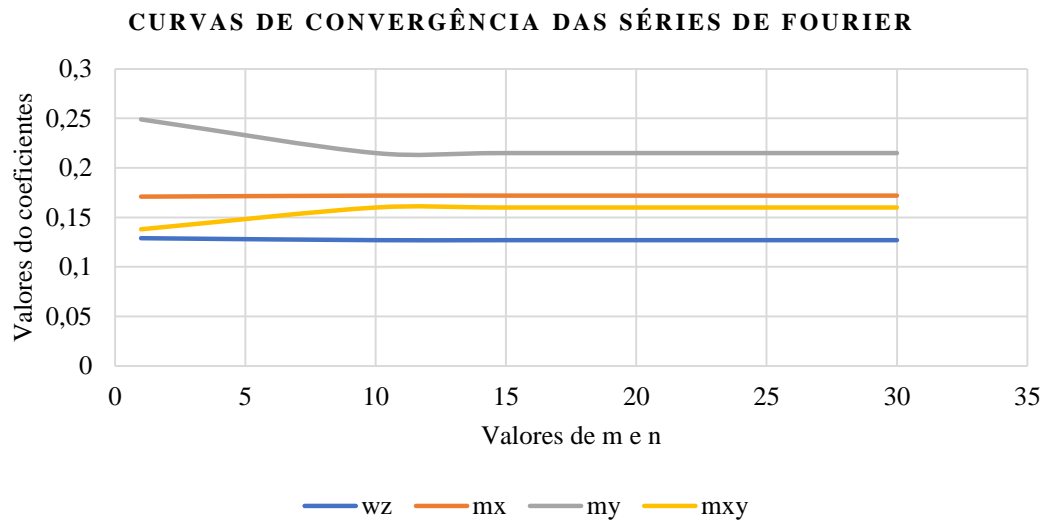
Figura 20 e Figura 21 são apresentadas as curvas de convergência dos coeficientes das tabelas, conforme a variação nos valores de m e n. Os coeficientes foram calculados para valores de $\nu = 0,20$ e $\lambda=0,75$, conforme a variação dos índices m e n (Tabela 6).

Tabela 6: Valores dos coeficientes segundo a variação dos índices m e n - carregamento triangular

m e n	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
1	0,129	0,171	0,249	0,138	0,528	0,618
5	0,127	0,170	0,216	0,160	0,409	0,468
10	0,127	0,172	0,215	0,160	0,392	0,453
15	0,127	0,172	0,215	0,160	0,398	0,456
20	0,127	0,172	0,215	0,160	0,395	0,454
25	0,127	0,172	0,215	0,160	0,397	0,456
30	0,127	0,172	0,215	0,160	0,396	0,455
35	0,127	0,172	0,215	0,160	0,396	0,455
40	0,127	0,172	0,215	0,160	0,396	0,455

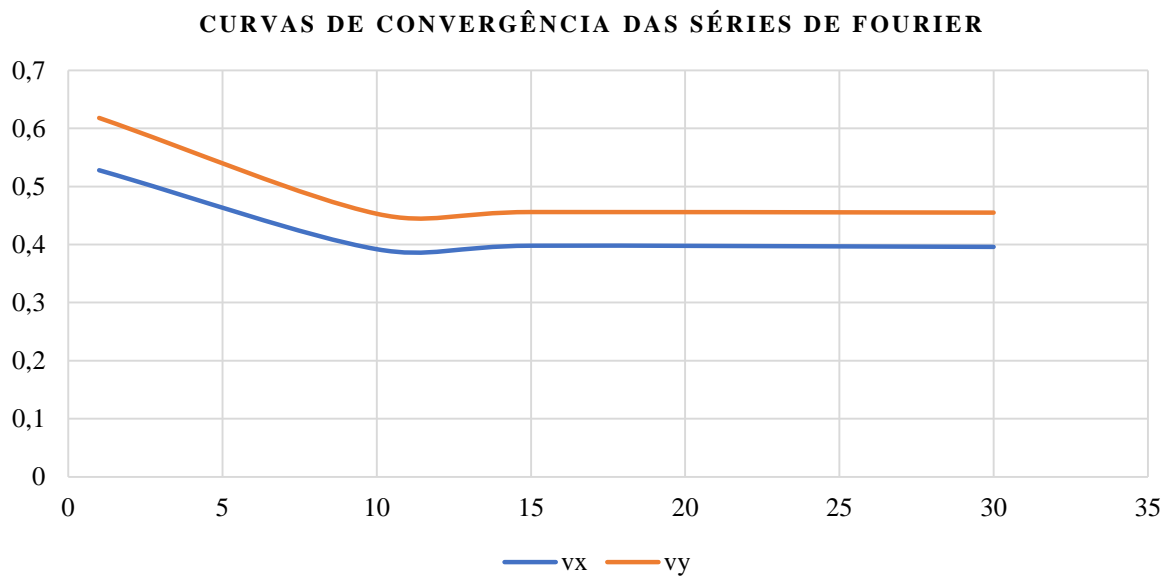
Fonte: o autor (2019).

Figura 20: Curvas de convergência dos coeficientes w_z , m_x , m_y e m_{xy} – carregamento triangular



Fonte: o autor (2019).

Figura 21: Curvas de convergência dos coeficientes v_x e v_y – carregamento triangular



Fonte: o autor (2019).

Logo, a partir das Figura 20 e Figura 21, verifica-se que os coeficientes w_z , m_x , m_y , m_{xy} , v_x e v_y apresentam convergência de resultados, quando os índices m e n atingem o valor de 15.

5.2.1. Validação das tabelas – carregamento triangular

Para o carregamento triangular, o procedimento de validação se deu por intermédio de um exemplo genérico, onde foram calculados o deslocamento máximo (w) e os momentos

fletores M_x e M_y segundo as tabelas produzidas neste trabalho e as de Pinheiro (2007) (Tabela AN 1, ANEXO A). Assim analisou-se de maneira comparativa os resultados obtidos.

Dados:

- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,20$
- Espessura da placa: $h = 12 \text{ cm}$
- Dimensões: $L_x = 3,00 \text{ m}$; $L_y = 5,00 \text{ m}$
- Cargas: $q_1 = 4,50 \text{ kN/m}^2$ | $q_2 = 0,00 \text{ kN/m}^2$
- Módulo de elasticidade: $E = 28000 \text{ MPa}$

Tabelas do autor:

O coeficiente λ é dado por:

$$\lambda = \frac{L_y}{L_x} = \frac{5,00 \text{ m}}{2,50 \text{ m}} = 2,00$$

Conforme indicado na equação (27), a rigidez da placa à flexão (D) é obtida a partir da expressão:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 4278 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para $\nu = 0,20$ e $\lambda = 2,00$, utiliza-se a Tabela AP 14 (APÊNDICE B), obtendo-se os seguintes coeficientes:

Tabela 7: Valores dos coeficientes dos momentos fletores - o autor (2019)

λ	w_z	m_x	m_y
2,00	0,610	0,632	0,210

Fonte: o autor (2019).

Logo, o deslocamento e os momentos fletores são calculados pelas expressões:

$$w = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^4}{D\pi^6} w_z = \frac{8q_1 L_x^4}{D\pi^6} w_z = \frac{8 \cdot (4,50 \frac{kN}{m^2}) \cdot (2,50m)^4}{(4278 kN \cdot m) \cdot \pi^6} \cdot 0,610 = 0,021 \text{ cm}$$

$$M_x = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^2}{\pi^4} m_x = \frac{8q_1 L_x^2}{\pi^4} m_x = \frac{8 \cdot (4,50 \frac{kN}{m^2}) \cdot (2,50m)^2}{\pi^4} \cdot 0,632 = 1,461 \text{ kN} \cdot m/m$$

$$M_y = \frac{8(q_1 + q_2)L_x^2}{\pi^4} m_y = \frac{8q_1 L_x^2}{\pi^4} m_y = \frac{8 \cdot (4,50 \frac{kN}{m^2}) \cdot (2,50m)^2}{\pi^4} \cdot 0,210 = 0,485 \text{ kN} \cdot m/m$$

Tabelas de Pinheiro (2007):

O coeficiente λ é dado por:

$$\lambda = \frac{L_x}{L_y} = \frac{2,50 \text{ m}}{5,00 \text{ m}} = 0,50$$

O momento de inércia I_z é obtido a partir da seguinte expressão:

$$I = \frac{L_x \cdot h^3}{12} = 3,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Para $\nu = 0,20$ e $\lambda = 0,50$, utiliza-se a Tabela AN 1 (ANEXO A), obtendo-se os seguintes coeficientes:

Tabela 8: Valores dos coeficientes dos momentos fletores - Pinheiro (2007)

λ	α	μ_x	μ_y
0,50	5,93	5,14	1,60

Fonte: Pinheiro (2007).

Logo, o deslocamento e os momentos fletores são calculados pelas expressões:

$$w = \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{L_x}{12} \cdot \frac{q_1}{E} \cdot \frac{L_x^4}{I_z} = \frac{5,93}{100} \cdot \frac{(2,50m)}{12} \cdot \frac{(4,50 \frac{kN}{m^2})}{(28000MPa)} \cdot \frac{(2,50m)^4}{(3,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4)} = 0,021 \text{ cm}$$

$$M_x = \frac{\mu_x q_1 L_x^2}{100} = \frac{5,14 \cdot (4,50 \frac{kN}{m^2}) \cdot (2,50m)^2}{100} = 1,446 \text{ kN} \cdot m/m$$

$$M_y = \frac{\mu_y q_1 L_x^2}{100} = \frac{1,60 \cdot (4,50 \frac{kN}{m^2}) \cdot (2,50m)^2}{100} = 0,450 \text{ kN} \cdot m/m$$

Em resumo, têm-se:

Tabela 9: Valores dos coeficientes das equações da flecha e esforços internos

Método	w	M _x	M _y
O autor (2019)	0,021 m	1,524 kN.m/m	0,491 kN.m/m
Pinheiro (2007)	0,021 m	1,446 kN.m/m	0,450 kN.m/m
Diferença percentual (%)	1,364 %	-1,032 %	-7,122 %

Fonte: o autor (2019).

A partir da Tabela 9, nota-se as pequenas diferenças percentuais entre os deslocamentos e momentos. Conforme mencionado no item 5.1.1, estas diferenças são inerentes ao modelo de cálculo, ocasionados pelo truncamento das séries de Fourier a um número finito de termos. Para o caso de lajes em concreto armado, estas diferenças também são facilmente absorvidas pelos coeficientes de majoração e minoração estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

5.3. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE POISSON

Para a verificação da influência da variação do coeficiente de Poisson nos valores dos esforços internos, adota-se um exemplo numérico com os seguintes dados:

- Espessura da placa: $h = 30 \text{ mm}$
- Dimensões: $L_x = 4,00 \text{ m}$; $L_y = 2,00 \text{ m}$
- Carregamento: $q_1 = q_2 = q = 2,00 \text{ kN/m}^2$
- Módulo de elasticidade: $E = 210 \text{ GPa}$

O coeficiente λ é dado por:

$$\lambda = \frac{L_y}{L_x} = \frac{2,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = 0,50$$

A rigidez da placa à flexão (D) é obtida a partir da seguinte expressão:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = 472,50 \text{ kN.m}$$

Os coeficientes foram obtidos a partir das tabelas do APÊNDICE A, para $\lambda = 0,50$ e com o coeficiente de Poisson (ν) variando entre os valores de 0,00 a 0,40:

Tabela 10: Variação dos coeficientes segundo o coeficiente de Poisson

$\lambda = 0,50$						
ν	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,00	0.038	0.027	0.147	0.118	0.229	0.341
0,05	0.038	0.034	0.148	0.112	0.223	0.339
0,10	0.038	0.041	0.149	0.106	0.218	0.336
0,15	0.038	0.049	0.151	0.100	0.212	0.334
0,20	0.038	0.056	0.152	0.094	0.206	0.331
0,25	0.038	0.063	0.153	0.088	0.201	0.328
0,30	0.038	0.071	0.155	0.082	0.195	0.326
0,35	0.038	0.078	0.156	0.077	0.190	0.323
0,40	0.038	0.085	0.157	0.071	0.184	0.321

Fonte: o autor (2019).

Aplicando os coeficientes nas equações do deslocamento, momentos e esforços cortantes, têm-se:

Tabela 11: Variação do deslocamento e esforços internos segundo o coeficiente de Poisson

$\lambda = 0,50$						
ν	w (cm)	M_x (N.m/m)	M_y (N.m/m)	M_{xy} (N.m/m)	V_x (N/m)	V_y (N/m)
0,00	0.069	139.301	771.675	619.422	943.632	1409
0,05	0.068	177.884	778.640	588.451	920.837	1398
0,10	0.068	216.468	785.605	557.480	898.041	1388
0,15	0.067	255.052	792.57	526.509	875.246	1377
0,20	0.066	293.636	799.535	495.538	852.451	1366
0,25	0.064	332.219	806.500	464.567	829.656	1356
0,30	0.062	370.803	813.465	433.596	806.861	1345
0,35	0.060	409.387	820.430	402.624	784.066	1334
0,40	0.058	447.971	827.395	371.653	761.271	1323

Fonte: o autor (2019).

A partir da Tabela 11, constata-se que o aumento do coeficiente de Poisson ocasionou a redução do deslocamento máximo direcional em z (w), todavia, esta variação se mostrou pouco significativa: na ordem de 1,45 % a 3,33%. Esta diferença é esperada devido à influência do coeficiente de Poisson na rigidez da placa à flexão (D), tornando a deflexão e o

coeficiente de Poisson grandezas com relação inversa (vide equações (61) e (27)). Logo, conforme o aumento do coeficiente de Poisson, maior será a rigidez da placa à flexão, e, conseqüentemente, haverá redução na deflexão. Todavia, segundo Park e Gamble (2000), essas variações na rigidez da placa são muito menores às variações esperadas pelo módulo de elasticidade do material (E).

No caso dos momentos fletores M_x e M_y , verifica-se uma relação direta com o coeficiente de Poisson, isto é, a utilização de materiais com coeficiente de Poisson mais elevados, implica em maiores esforços de flexão sobre a placa.

Quanto ao momento torçor e esforços cortantes em x e y, verifica-se uma relação indireta com o coeficiente de Poisson, ou seja, os materiais com maiores coeficiente de Poisson tendem a possuir maior resistência a esforços de torção e de cisalhamento.

5.3.1. Análise da variação dos esforços quando $\nu = 0,00$

Em alguns estudos de lajes de concreto armado, há situações em que os autores desconsideram a influência do coeficiente de Poisson. Então, a partir da Tabela 12, foram verificadas as implicações da desconsideração dos efeitos dessa variável nos esforços de uma placa:

Tabela 12: Variação percentual dos esforços internos e deflexão, em relação aos valores destes parâmetros quando $\nu = 0,00$

Variação percentual em relação aos valores de $\nu = 0,00$						
ν	w	M_x	M_y	M_{xy}	V_x	V_y
0,00	-	-	-	-	-	-
0,05	-1.45%	27.70%	0.90%	-5.00%	-2.42%	-0.78%
0,10	-1.45%	55.40%	1.81%	-10.00%	-4.83%	-1.49%
0,15	-2.90%	83.09%	2.71%	-15.00%	-7.25%	-2.27%
0,20	-4.35%	110.79%	3.61%	-20.00%	-9.66%	-3.05%
0,25	-7.25%	138.49%	4.51%	-25.00%	-12.08%	-3.76%
0,30	-10.14%	166.19%	5.42%	-30.00%	-14.49%	-4.54%
0,35	-13.04%	193.89%	6.32%	-35.00%	-16.91%	-5.32%
0,40	-15.94%	221.58%	7.22%	-40.00%	-19.33%	-6.10%

Fonte: o autor (2019).

De acordo com a Tabela 12, nota-se que a desconsideração do coeficiente de Poisson ($\nu=0,00$) pode gerar erros significativos na análise estrutural da placa. Para o coeficiente de Poisson no valor de 0,20, o momento fletor na direção x, apresenta mais do que o dobro do

valor do momento M_x para $\nu=0,00$ (diferença de 110,79%). Se considerado o coeficiente de Poisson no valor de 0,40, o valor de M_x apresenta mais do que o triplo do valor de M_x para $\nu=0,00$ (diferença de 221,58%). Para o caso do momento torçor, há uma redução de 20,00% e 40,00% para o coeficiente de Poisson de 0,20 e 0,40, respectivamente.

Entretanto, como o presente estudo se delimita ao comportamento de placas homogêneas (visto na hipótese I do item 2.2), estes valores não descrevem a influência deste parâmetro quando a placa apresenta fissurações. Segundo Park e Gamble (2000), o coeficiente de Poisson possui menor influência na resistência de uma laje de concreto armado fissurada do que em uma placa homogênea. Os autores dissertam que, uma vez que as barras de aço (dispostas na direção x e y) não estão ligadas em conjunto, as tensões nas armaduras na direção x só podem ser transmitidas às barras na direção y através do concreto. Caso esse material possua um alto grau de fissuração, essa transferência não seria eficiente.

Ainda segundo Park e Gamble (2000), o coeficiente de Poisson teria maior influência nas tensões de compressão do concreto, porém estas tensões não estão controlando a maioria dos sistemas de placas.

5.3.2. Análise da variação dos esforços quando $\nu = 0,20$

Para a análise estrutural de lajes de concreto, a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda a adoção de um valor de 0,20 para o coeficiente de Poisson. Todavia, uma vez que os dados experimentais apontam que o coeficiente de Poisson oscila num intervalo de 0,11 a 0,21 para concreto simples (ALMEIDA, 2002) e de 0,15 a 0,25 para concretos leves (SILVA, 2003 *apud* ACI 213 R-87, 1999) – vide item 1.2, torna-se relevante analisar a variação dos esforços internos e deflexão para ν dentro de intervalo de 0,10 a 0,25.

Tabela 13: Variação percentual dos esforços internos e deflexão em relação aos valores de $\nu = 0,20$

Variação percentual em relação aos valores de $\nu = 0,20$						
ν	w	M_x	M_y	M_{xy}	V_x	V_y
0,10	3.03%	-26.28%	-1.74%	12.50%	5.35%	1.61%
0,15	1.52%	-13.14%	-0.87%	6.25%	2.67%	0.81%
0,20	-	-	-	-	-	-
0,25	-3.03%	13.14%	0.87%	-6.25%	-2.67%	-0.73%

Fonte: o autor (2019).

A partir da Tabela 13, nota-se a razoabilidade na consideração de 0,20 no valor de coeficiente de Poisson para a análise estrutural de lajes, visto que, à exceção do momento

fletor na direção x (M_x), a maior variação percentual se deu numa ordem de $\pm 13.14\%$, podendo ser absorvida pelos coeficientes de majoração dos esforços solicitantes e de minoração da resistência do concreto e do aço, estabelecidos na NBR 6118 (ABNT, 2014). Quanto ao momento fletor em x , para $v = 0,10$, este apresentou uma diferença de $26,28\%$, logo, a consideração do valor de $v = 0,20$ ao invés de $0,10$ se mostra favorável à segurança estrutural.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos resultados obtidos, pode-se afirmar a compatibilidade da solução de Navier para resolução da equação diferencial de Sophie-Germain-Lagrange. Também pode-se assegurar a validade das tabelas reproduzidas neste estudo (atestadas por bibliografia e pelo *software* ANSYS Student 2019 R1), para descrever o comportamento elástico-linear de placas retangulares, simplesmente apoiadas, com carregamentos linearmente distribuídos.

Todavia, vale destacar que, conforme os princípios da teoria da elasticidade, os resultados obtidos se delimitam ao comportamento elástico da placa. Logo, não são considerados efeitos de fluência do material, esforços axiais, deformações por cisalhamento, não linearidade física e os demais efeitos de segunda ordem sobre placa.

Com relação à influência do coeficiente de Poisson nos efeitos mecânicos de uma placa, foi verificado que este parâmetro deve ser considerado nas análises estruturais de placas finas homogêneas, uma vez que a sua alteração pode acarretar em variações significativas do deslocamento em z , momentos fletores, momento torçor e esforços cortantes. Entretanto, segundo Park e Gamble (2000), os efeitos desta variável na resistência de uma placa se reduzem significativamente quando o material constituinte não possui homogeneidade, como é o caso de lajes de concreto armado fissuradas.

Apesar das tabelas geradas durante este projeto serem aplicáveis para placas com o coeficiente de Poisson variando de 0,00 a 0,40, e com λ de 0,50 a 2,00, caso seja realizada uma análise com parâmetros físicos ou geométricos que extrapolem os intervalos das tabelas, pode-se recorrer às equações (61), (62), (63), (64), (65) e (66).

Cabe também ressaltar a relevância científica deste estudo, devido a flexibilidade das tabelas em possibilitar os cálculos dos esforços internos e deflexões para placas finas retangulares, simplesmente apoiadas, com valores distintos de 0,20 para o coeficiente de Poisson. Logo, este trabalho consegue complementar as literaturas existentes.

Sugestões de trabalhos futuros:

- Aplicar a teoria de flexão em placas delgadas, isso afim de gerar tabelas para placas com diferentes configurações geométricas (ex: placas circulares), formatos de carregamento (ex: carga concentrada e senoidal) e condições de apoio (combinação entre bordos engastados, simplesmente apoiados e livres);

- Realizar um estudo comparativo entre os resultados dos esforços internos e deslocamentos, calculados por diferentes métodos: teoria das grelhas, teoria das linhas de ruptura, teoria da métodos de análise de placas flexão de placas, analogia de grelha equivalente, método das diferenças finitas, método dos elementos finitos;
- Analisar os efeitos de segunda ordem em placas retangulares delgadas;
- Desenvolver de aplicativos para dispositivos móveis que possibilitem a utilização das tabelas;
- Analisar a aplicabilidade de concretos não convencionais para fins estruturais.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. C. D. **Concreto (Notas de aula da disciplina)**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2002.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. Rio Grande do Sul: Dunas, v. 2, 2014.
- ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos**. 2. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - procedimento**. Rio de Janeiro. 2014.
- BALLARIN, A. W.; NOGUEIRA, M. Caracterização elástica da madeira de Eucalyptus Citriodora. **CERNE**, Lavras, v. 9, n. 1, p. 066-080, 2003.
- CAVA, F. Mecânica dos solos – “empuxo de terra”. **Além da inércia**, 2018. Disponível em: <<https://alemdainercia.wordpress.com/2018/03/05/mecanica-dos-solos-empuxo-de-solo/>>. Acesso em: 2019 julho 21.
- CHAER, A. V. **Estruturas de Concreto Armado I (Notas de Aula)**. UCG. Goiânia. 2004.
- COSTA, R. C. D. **Formulações do método dos elementos de contorno para análise de placas viscoelásticas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - EESC/USP. São Carlos. 2008.
- DINIS, L. M. **Teoria Clássica das Placas Finas**. Universidade do Porto. Porto, p. 33. 2003.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- KALMANOK, A. S. **Manual para cálculo de placas**. Montevidéu: Inter Ciência, 1961.
- LEAL, C. E. F. **Formulação do método dos elementos finitos para a análise elástica linear de placas delgadas**. UTFPR. Campo Grande, p. 135. 2015.
- LONGO, L. F. Análise de placas pela Teoria da Elasticidade. **AltoQi**, 2018. Disponível em: <<https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/360003053334-An%C3%A1lise-de-placas-pela-Teoria-da-Elasticidade>>. Acesso em: 05 julho 2019.
- LONGO, L. F. Analogia de grelha para lajes em concreto armado. **AltoQi**, 2018. Disponível em: <<https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/360003164693-Analogia-de-grelha-para-lajes-em-concreto-armado>>. Acesso em: 05 jul. 2019.
- MARTINELLI, D. A. O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. **Placas estáticas (Notas de aula)**. USP. São Carlos, p. 114. 1986.
- MENDONÇA, P. T. R. **Materiais Compostos & Estruturas - Sanduíche**. Florianópolis: Manole, 2005.
- PARENTE, V. Adotando a espera do pilar de fundação igual a bitola do pilar superior. **AltoQi**, 2011. Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/content/279/948/pt-br/adotando-a->

espera-do-pilar-de-funda%C3%A7%C3%A3o-igual-a-bitola-do-pilar-superior.html?highlight=sa>. Acesso em: 21 julho 2019.

PARK, R.; GAMBLE, W. L. **Reinforced Concrete Slabs**. 2^a. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2000.

PINHEIRO, L. M. **Tabelas de lajes**. Universidade de São Paulo. São Carlos, p. 24. 2007.

SILVA, M. D. D. **Estudo comparativo entre a utilização dos concretos convencional e leve nos elementos horizontais das estruturas de edifícios**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - UFMG. Belo Horizonte, p. 147. 2003.

SILVA, R. C. D. **Formulações do método dos elementos de contorno para análise de placas viscoelásticas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - EESC/USP. São Carlos. 2008.

SOARES, A. M. **Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - UNIFEI. Itajubá. 2004.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. 2. ed. International Edition: McGraw-Hill Book Company, 1959.

APÊNDICE A – Tabelas para placas retangulares, simplesmente apoiadas nos quatro bordos, com carregamento uniformemente distribuído

Tabela AP 1: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,00$

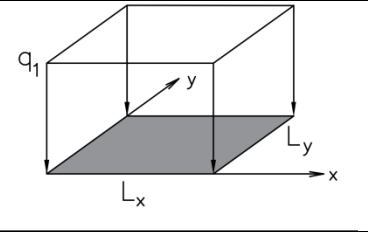
$\nu = 0,00$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,027	0,147	0,118	0,229	0,341
0,55	0,052	0,039	0,164	0,135	0,268	0,375
0,60	0,067	0,053	0,180	0,153	0,307	0,406
0,65	0,085	0,070	0,193	0,170	0,346	0,434
0,70	0,105	0,088	0,204	0,186	0,382	0,460
0,75	0,126	0,109	0,212	0,200	0,417	0,482
0,80	0,148	0,130	0,218	0,214	0,448	0,502
0,85	0,172	0,153	0,223	0,227	0,478	0,518
0,90	0,195	0,176	0,225	0,238	0,505	0,532
0,95	0,220	0,200	0,225	0,248	0,529	0,542
1,00	0,244	0,224	0,224	0,256	0,551	0,551
1,05	0,268	0,248	0,222	0,263	0,570	0,556
1,10	0,293	0,272	0,219	0,269	0,587	0,560
1,15	0,316	0,296	0,214	0,274	0,602	0,562
1,20	0,340	0,319	0,209	0,277	0,616	0,562
1,25	0,362	0,341	0,204	0,280	0,627	0,561
1,30	0,384	0,363	0,198	0,281	0,637	0,558
1,35	0,405	0,384	0,191	0,282	0,646	0,554
1,40	0,426	0,405	0,184	0,282	0,653	0,549
1,45	0,445	0,424	0,178	0,281	0,659	0,543
1,50	0,464	0,443	0,171	0,280	0,665	0,537
1,55	0,482	0,461	0,164	0,278	0,669	0,530
1,60	0,499	0,478	0,157	0,276	0,673	0,523
1,65	0,516	0,494	0,150	0,273	0,676	0,515
1,70	0,531	0,510	0,143	0,271	0,678	0,507
1,75	0,546	0,524	0,136	0,267	0,680	0,499
1,80	0,560	0,538	0,130	0,264	0,681	0,491
1,85	0,573	0,552	0,124	0,260	0,682	0,482
1,90	0,586	0,564	0,118	0,257	0,682	0,474
1,95	0,597	0,576	0,112	0,253	0,683	0,466
2,00	0,609	0,587	0,106	0,249	0,683	0,457

Tabela AP 2: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,05$

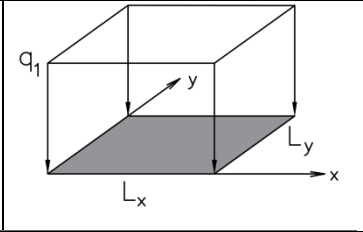
$\nu = 0,05$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,034	0,148	0,112	0,223	0,339
0,55	0,052	0,047	0,166	0,129	0,262	0,371
0,60	0,067	0,062	0,182	0,145	0,300	0,402
0,65	0,085	0,079	0,196	0,161	0,338	0,429
0,70	0,105	0,099	0,208	0,176	0,374	0,454
0,75	0,126	0,119	0,218	0,190	0,408	0,475
0,80	0,148	0,141	0,225	0,203	0,439	0,494
0,85	0,172	0,164	0,230	0,215	0,468	0,510
0,90	0,195	0,188	0,234	0,226	0,495	0,523
0,95	0,220	0,211	0,235	0,235	0,519	0,533
1,00	0,244	0,235	0,235	0,243	0,541	0,541
1,05	0,268	0,259	0,234	0,250	0,560	0,546
1,10	0,293	0,283	0,232	0,255	0,577	0,549
1,15	0,316	0,306	0,229	0,260	0,592	0,551
1,20	0,340	0,329	0,225	0,263	0,606	0,550
1,25	0,362	0,352	0,221	0,266	0,618	0,549
1,30	0,384	0,373	0,216	0,267	0,628	0,546
1,35	0,405	0,394	0,210	0,268	0,637	0,542
1,40	0,426	0,414	0,205	0,268	0,644	0,537
1,45	0,445	0,433	0,199	0,267	0,651	0,531
1,50	0,464	0,451	0,193	0,266	0,657	0,525
1,55	0,482	0,469	0,187	0,264	0,661	0,518
1,60	0,499	0,486	0,181	0,262	0,665	0,511
1,65	0,516	0,502	0,175	0,260	0,668	0,503
1,70	0,531	0,517	0,169	0,257	0,671	0,495
1,75	0,546	0,531	0,163	0,254	0,673	0,487
1,80	0,560	0,545	0,157	0,251	0,675	0,479
1,85	0,573	0,558	0,151	0,247	0,676	0,471
1,90	0,586	0,570	0,146	0,244	0,677	0,463
1,95	0,597	0,582	0,140	0,240	0,677	0,454
2,00	0,609	0,593	0,135	0,237	0,678	0,446

Tabela AP 3: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,10$

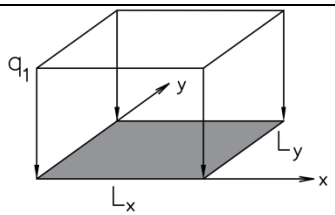
$\nu = 0,10$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,034	0,148	0,112	0,223	0,339
0,55	0,052	0,047	0,166	0,129	0,262	0,371
0,60	0,067	0,062	0,182	0,145	0,300	0,402
0,65	0,085	0,079	0,196	0,161	0,338	0,429
0,70	0,105	0,099	0,208	0,176	0,374	0,454
0,75	0,126	0,119	0,218	0,190	0,408	0,475
0,80	0,148	0,141	0,225	0,203	0,439	0,494
0,85	0,172	0,164	0,230	0,215	0,468	0,510
0,90	0,195	0,188	0,234	0,226	0,495	0,523
0,95	0,220	0,211	0,235	0,235	0,519	0,533
1,00	0,244	0,235	0,235	0,243	0,541	0,541
1,05	0,268	0,259	0,234	0,250	0,560	0,546
1,10	0,293	0,283	0,232	0,255	0,577	0,549
1,15	0,316	0,306	0,229	0,260	0,592	0,551
1,20	0,340	0,329	0,225	0,263	0,606	0,550
1,25	0,362	0,352	0,221	0,266	0,618	0,549
1,30	0,384	0,373	0,216	0,267	0,628	0,546
1,35	0,405	0,394	0,210	0,268	0,637	0,542
1,40	0,426	0,414	0,205	0,268	0,644	0,537
1,45	0,445	0,433	0,199	0,267	0,651	0,531
1,50	0,464	0,451	0,193	0,266	0,657	0,525
1,55	0,482	0,469	0,187	0,264	0,661	0,518
1,60	0,499	0,486	0,181	0,262	0,665	0,511
1,65	0,516	0,502	0,175	0,260	0,668	0,503
1,70	0,531	0,517	0,169	0,257	0,671	0,495
1,75	0,546	0,531	0,163	0,254	0,673	0,487
1,80	0,560	0,545	0,157	0,251	0,675	0,479
1,85	0,573	0,558	0,151	0,247	0,676	0,471
1,90	0,586	0,570	0,146	0,244	0,677	0,463
1,95	0,597	0,582	0,140	0,240	0,677	0,454
2,00	0,609	0,593	0,135	0,237	0,678	0,446

Tabela AP 4: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,15$

$\nu = 0,15$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,049	0,151	0,100	0,212	0,334
0,55	0,052	0,063	0,170	0,115	0,249	0,364
0,60	0,067	0,080	0,188	0,130	0,286	0,393
0,65	0,085	0,099	0,203	0,144	0,322	0,419
0,70	0,105	0,119	0,217	0,158	0,357	0,442
0,75	0,126	0,141	0,229	0,170	0,390	0,462
0,80	0,148	0,163	0,238	0,182	0,420	0,479
0,85	0,172	0,186	0,246	0,193	0,449	0,493
0,90	0,195	0,210	0,251	0,202	0,475	0,505
0,95	0,220	0,234	0,255	0,210	0,499	0,514
1,00	0,244	0,258	0,258	0,218	0,520	0,520
1,05	0,268	0,282	0,259	0,224	0,540	0,525
1,10	0,293	0,305	0,259	0,229	0,557	0,527
1,15	0,316	0,328	0,259	0,233	0,573	0,528
1,20	0,340	0,350	0,257	0,236	0,586	0,527
1,25	0,362	0,372	0,255	0,238	0,599	0,525
1,30	0,384	0,393	0,252	0,239	0,609	0,522
1,35	0,405	0,413	0,249	0,240	0,619	0,518
1,40	0,426	0,432	0,245	0,240	0,627	0,513
1,45	0,445	0,451	0,241	0,239	0,634	0,507
1,50	0,464	0,469	0,237	0,238	0,640	0,501
1,55	0,482	0,485	0,233	0,236	0,646	0,494
1,60	0,499	0,501	0,228	0,235	0,650	0,487
1,65	0,516	0,517	0,224	0,232	0,654	0,479
1,70	0,531	0,531	0,220	0,230	0,657	0,472
1,75	0,546	0,545	0,215	0,227	0,660	0,464
1,80	0,560	0,558	0,211	0,224	0,662	0,456
1,85	0,573	0,570	0,206	0,221	0,664	0,448
1,90	0,586	0,582	0,202	0,218	0,665	0,440
1,95	0,597	0,593	0,198	0,215	0,666	0,432
2,00	0,609	0,603	0,194	0,212	0,667	0,424

Tabela AP 5: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,20$

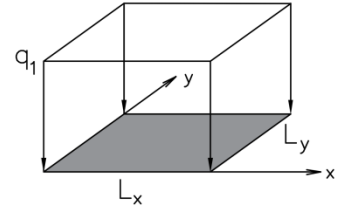
$\nu = 0,20$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,056	0,152	0,094	0,206	0,331
0,55	0,052	0,071	0,172	0,108	0,243	0,361
0,60	0,067	0,089	0,190	0,122	0,279	0,389
0,65	0,085	0,108	0,207	0,136	0,314	0,414
0,70	0,105	0,129	0,221	0,148	0,348	0,436
0,75	0,126	0,151	0,234	0,160	0,381	0,455
0,80	0,148	0,174	0,245	0,171	0,411	0,471
0,85	0,172	0,197	0,253	0,181	0,439	0,485
0,90	0,195	0,221	0,260	0,190	0,465	0,496
0,95	0,220	0,245	0,265	0,198	0,489	0,504
1,00	0,244	0,269	0,269	0,205	0,510	0,510
1,05	0,268	0,293	0,272	0,210	0,530	0,514
1,10	0,293	0,316	0,273	0,215	0,547	0,516
1,15	0,316	0,339	0,273	0,219	0,563	0,517
1,20	0,340	0,361	0,273	0,222	0,577	0,516
1,25	0,362	0,382	0,272	0,225	0,589	0,514
1,30	0,384	0,403	0,270	0,225	0,600	0,510
1,35	0,405	0,423	0,268	0,226	0,610	0,506
1,40	0,426	0,442	0,265	0,226	0,618	0,501
1,45	0,445	0,460	0,262	0,225	0,626	0,495
1,50	0,464	0,477	0,259	0,224	0,632	0,489
1,55	0,482	0,494	0,256	0,223	0,638	0,482
1,60	0,499	0,509	0,252	0,221	0,643	0,475
1,65	0,516	0,524	0,249	0,219	0,647	0,467
1,70	0,531	0,538	0,245	0,216	0,650	0,460
1,75	0,546	0,552	0,241	0,214	0,653	0,452
1,80	0,560	0,564	0,238	0,211	0,656	0,444
1,85	0,573	0,576	0,234	0,208	0,658	0,436
1,90	0,586	0,588	0,230	0,205	0,659	0,429
1,95	0,597	0,598	0,227	0,202	0,661	0,421
2,00	0,609	0,608	0,223	0,199	0,662	0,413

Tabela AP 6: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,25$

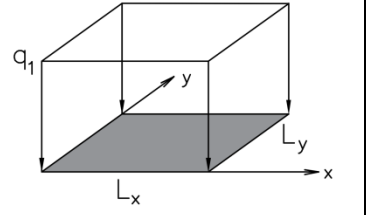
$\nu = 0,25$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,063	0,153	0,088	0,201	0,328
0,55	0,052	0,080	0,174	0,088	0,236	0,358
0,60	0,067	0,098	0,193	0,115	0,272	0,384
0,65	0,085	0,118	0,210	0,127	0,306	0,409
0,70	0,105	0,139	0,226	0,139	0,340	0,430
0,75	0,126	0,162	0,239	0,150	0,372	0,448
0,80	0,148	0,185	0,251	0,161	0,401	0,464
0,85	0,172	0,209	0,261	0,170	0,429	0,477
0,90	0,195	0,233	0,269	0,178	0,455	0,487
0,95	0,220	0,257	0,275	0,186	0,479	0,495
1,00	0,244	0,280	0,280	0,192	0,500	0,500
1,05	0,268	0,304	0,284	0,197	0,520	0,504
1,10	0,293	0,327	0,287	0,202	0,537	0,505
1,15	0,316	0,349	0,288	0,205	0,553	0,506
1,20	0,340	0,371	0,289	0,208	0,567	0,504
1,25	0,362	0,392	0,289	0,210	0,580	0,502
1,30	0,384	0,413	0,288	0,211	0,591	0,498
1,35	0,405	0,432	0,287	0,211	0,601	0,494
1,40	0,426	0,451	0,286	0,211	0,609	0,489
1,45	0,445	0,469	0,284	0,211	0,617	0,483
1,50	0,464	0,486	0,281	0,210	0,624	0,477
1,55	0,482	0,502	0,279	0,209	0,630	0,470
1,60	0,499	0,517	0,276	0,207	0,635	0,463
1,65	0,516	0,532	0,273	0,205	0,639	0,455
1,70	0,531	0,546	0,270	0,203	0,643	0,448
1,75	0,546	0,559	0,268	0,201	0,647	0,440
1,80	0,560	0,571	0,265	0,198	0,649	0,433
1,85	0,573	0,583	0,262	0,195	0,652	0,425
1,90	0,586	0,594	0,259	0,193	0,654	0,417
1,95	0,597	0,604	0,256	0,190	0,655	0,410
2,00	0,609	0,614	0,253	0,187	0,657	0,402

Tabela AP 7: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,30$

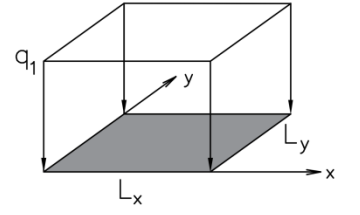
$\nu = 0,30$						
						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,071	0,155	0,082	0,195	0,326
0,55	0,052	0,088	0,176	0,095	0,230	0,354
0,60	0,067	0,107	0,196	0,107	0,265	0,380
0,65	0,085	0,128	0,214	0,119	0,298	0,403
0,70	0,105	0,150	0,230	0,130	0,331	0,424
0,75	0,126	0,172	0,245	0,140	0,363	0,441
0,80	0,148	0,196	0,258	0,150	0,392	0,456
0,85	0,172	0,220	0,268	0,159	0,420	0,468
0,90	0,195	0,244	0,278	0,166	0,445	0,478
0,95	0,220	0,268	0,285	0,173	0,469	0,485
1,00	0,244	0,292	0,292	0,179	0,490	0,490
1,05	0,268	0,315	0,296	0,184	0,509	0,493
1,10	0,293	0,338	0,300	0,188	0,527	0,494
1,15	0,316	0,360	0,303	0,191	0,543	0,494
1,20	0,340	0,382	0,305	0,194	0,557	0,493
1,25	0,362	0,402	0,306	0,196	0,570	0,490
1,30	0,384	0,422	0,306	0,197	0,582	0,486
1,35	0,405	0,442	0,306	0,197	0,592	0,482
1,40	0,426	0,460	0,306	0,197	0,601	0,477
1,45	0,445	0,477	0,305	0,197	0,609	0,471
1,50	0,464	0,494	0,303	0,196	0,616	0,464
1,55	0,482	0,510	0,302	0,195	0,622	0,458
1,60	0,499	0,525	0,300	0,193	0,627	0,451
1,65	0,516	0,539	0,298	0,191	0,632	0,443
1,70	0,531	0,553	0,296	0,189	0,636	0,436
1,75	0,546	0,565	0,294	0,187	0,640	0,428
1,80	0,560	0,577	0,291	0,185	0,643	0,421
1,85	0,573	0,589	0,289	0,182	0,646	0,413
1,90	0,586	0,599	0,287	0,180	0,648	0,406
1,95	0,597	0,610	0,285	0,177	0,650	0,398
2,00	0,609	0,619	0,282	0,174	0,652	0,391

Tabela AP 8: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,35$

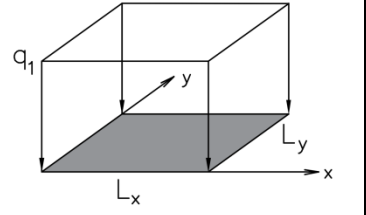
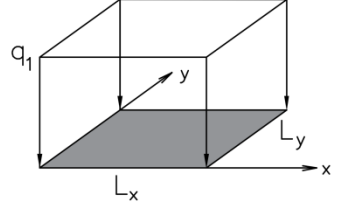
$\nu = 0,35$						
						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,078	0,156	0,077	0,190	0,323
0,55	0,052	0,096	0,178	0,088	0,224	0,351
0,60	0,067	0,116	0,198	0,099	0,257	0,376
0,65	0,085	0,137	0,217	0,110	0,291	0,398
0,70	0,105	0,160	0,235	0,121	0,323	0,418
0,75	0,126	0,183	0,250	0,130	0,354	0,435
0,80	0,148	0,207	0,264	0,139	0,383	0,449
0,85	0,172	0,231	0,276	0,147	0,410	0,460
0,90	0,195	0,255	0,286	0,155	0,435	0,469
0,95	0,220	0,279	0,295	0,161	0,458	0,475
1,00	0,244	0,303	0,303	0,166	0,480	0,480
1,05	0,268	0,326	0,309	0,171	0,499	0,483
1,10	0,293	0,349	0,314	0,175	0,517	0,484
1,15	0,316	0,371	0,318	0,178	0,533	0,483
1,20	0,340	0,392	0,321	0,180	0,548	0,481
1,25	0,362	0,413	0,323	0,182	0,561	0,478
1,30	0,384	0,432	0,325	0,183	0,572	0,475
1,35	0,405	0,451	0,326	0,183	0,583	0,470
1,40	0,426	0,469	0,326	0,183	0,592	0,465
1,45	0,445	0,486	0,326	0,183	0,600	0,459
1,50	0,464	0,503	0,326	0,182	0,608	0,452
1,55	0,482	0,518	0,325	0,181	0,614	0,446
1,60	0,499	0,533	0,324	0,179	0,620	0,439
1,65	0,516	0,547	0,323	0,178	0,625	0,431
1,70	0,531	0,560	0,321	0,176	0,629	0,424
1,75	0,546	0,572	0,320	0,174	0,633	0,417
1,80	0,560	0,584	0,318	0,172	0,637	0,409
1,85	0,573	0,595	0,317	0,169	0,640	0,402
1,90	0,586	0,605	0,315	0,167	0,642	0,394
1,95	0,597	0,615	0,313	0,164	0,644	0,387
2,00	0,609	0,624	0,312	0,162	0,646	0,380

Tabela AP 9: Bordos simplesmente apoiados, carregamento constante, $\nu = 0,40$

$\nu = 0,40$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,038	0,085	0,157	0,071	0,184	0,321
0,55	0,052	0,104	0,104	0,081	0,217	0,347
0,60	0,067	0,125	0,201	0,092	0,250	0,372
0,65	0,085	0,147	0,221	0,102	0,283	0,393
0,70	0,105	0,170	0,239	0,111	0,314	0,412
0,75	0,126	0,194	0,256	0,120	0,345	0,428
0,80	0,148	0,218	0,271	0,129	0,373	0,441
0,85	0,172	0,242	0,284	0,136	0,400	0,452
0,90	0,195	0,266	0,295	0,143	0,425	0,460
0,95	0,220	0,290	0,305	0,149	0,448	0,466
1,00	0,244	0,314	0,314	0,154	0,470	0,470
1,05	0,268	0,337	0,321	0,158	0,489	0,472
1,10	0,293	0,360	0,327	0,161	0,507	0,473
1,15	0,316	0,381	0,333	0,164	0,523	0,472
1,20	0,340	0,403	0,337	0,166	0,538	0,470
1,25	0,362	0,423	0,340	0,168	0,551	0,467
1,30	0,384	0,442	0,343	0,169	0,563	0,463
1,35	0,405	0,461	0,345	0,169	0,574	0,458
1,40	0,426	0,478	0,346	0,169	0,583	0,452
1,45	0,445	0,495	0,347	0,169	0,592	0,446
1,50	0,464	0,511	0,348	0,168	0,600	0,440
1,55	0,482	0,526	0,348	0,167	0,606	0,433
1,60	0,499	0,541	0,348	0,166	0,612	0,427
1,65	0,516	0,554	0,348	0,164	0,618	0,419
1,70	0,531	0,567	0,347	0,162	0,623	0,412
1,75	0,546	0,579	0,346	0,160	0,627	0,405
1,80	0,560	0,590	0,345	0,158	0,630	0,398
1,85	0,573	0,601	0,344	0,156	0,634	0,390
1,90	0,586	0,611	0,343	0,154	0,637	0,383
1,95	0,597	0,621	0,342	0,152	0,639	0,376
2,00	0,609	0,630	0,341	0,150	0,641	0,369

APÊNDICE B - Tabelas para placas retangulares, simplesmente apoiadas nos quatro bordos, com carregamento triangular

Tabela AP 10: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $v = 0,00$

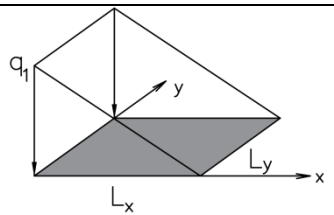
$v = 0,00$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,036	0,132	0,118	0,235	0,341
0,55	0,053	0,051	0,149	0,135	0,277	0,375
0,60	0,069	0,068	0,164	0,153	0,318	0,309
0,65	0,087	0,086	0,177	0,170	0,358	0,434
0,70	0,106	0,107	0,188	0,186	0,397	0,460
0,75	0,127	0,129	0,197	0,200	0,434	0,482
0,80	0,150	0,152	0,204	0,214	0,469	0,502
0,85	0,173	0,176	0,208	0,227	0,502	0,518
0,90	0,197	0,200	0,211	0,238	0,532	0,532
0,95	0,221	0,225	0,212	0,248	0,560	0,542
1,00	0,246	0,250	0,212	0,256	0,585	0,551
1,05	0,270	0,274	0,210	0,263	0,608	0,556
1,10	0,294	0,299	0,208	0,269	0,629	0,560
1,15	0,318	0,322	0,204	0,274	0,648	0,562
1,20	0,341	0,346	0,199	0,277	0,665	0,562
1,25	0,364	0,368	0,194	0,280	0,681	0,561
1,30	0,386	0,390	0,189	0,281	0,694	0,558
1,35	0,407	0,411	0,183	0,282	0,707	0,554
1,40	0,428	0,431	0,177	0,282	0,718	0,549
1,45	0,447	0,451	0,170	0,281	0,727	0,543
1,50	0,466	0,469	0,164	0,280	0,736	0,537
1,55	0,484	0,487	0,157	0,278	0,743	0,530
1,60	0,501	0,504	0,151	0,276	0,750	0,523
1,65	0,517	0,520	0,144	0,273	0,756	0,515
1,70	0,533	0,536	0,138	0,271	0,761	0,507
1,75	0,548	0,550	0,131	0,267	0,765	0,499
1,80	0,561	0,564	0,125	0,264	0,769	0,491
1,85	0,575	0,577	0,119	0,260	0,772	0,482
1,90	0,587	0,589	0,113	0,257	0,774	0,474
1,95	0,599	0,601	0,108	0,253	0,777	0,466
2,00	0,610	0,612	0,102	0,249	0,778	0,457

Tabela AP 11: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $v = 0,05$

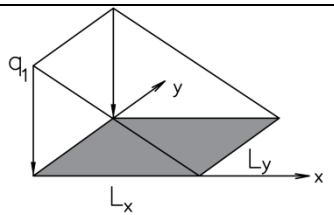
$v = 0,05$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,044	0,133	0,112	0,230	0,339
0,55	0,053	0,060	0,150	0,129	0,270	0,371
0,60	0,069	0,077	0,166	0,145	0,310	0,402
0,65	0,087	0,096	0,180	0,161	0,350	0,429
0,70	0,106	0,117	0,192	0,176	0,388	0,454
0,75	0,127	0,140	0,202	0,190	0,425	0,475
0,80	0,150	0,163	0,209	0,203	0,459	0,494
0,85	0,173	0,187	0,215	0,215	0,491	0,510
0,90	0,197	0,212	0,219	0,226	0,521	0,523
0,95	0,221	0,236	0,221	0,235	0,549	0,533
1,00	0,246	0,261	0,222	0,243	0,574	0,541
1,05	0,270	0,285	0,221	0,250	0,597	0,546
1,10	0,294	0,309	0,219	0,255	0,618	0,549
1,15	0,318	0,333	0,217	0,260	0,637	0,551
1,20	0,341	0,356	0,213	0,263	0,654	0,550
1,25	0,364	0,378	0,209	0,266	0,670	0,549
1,30	0,386	0,400	0,205	0,267	0,684	0,546
1,35	0,407	0,421	0,200	0,268	0,696	0,542
1,40	0,428	0,441	0,195	0,268	0,707	0,537
1,45	0,447	0,460	0,189	0,267	0,717	0,531
1,50	0,466	0,478	0,184	0,266	0,726	0,525
1,55	0,484	0,495	0,178	0,264	0,734	0,518
1,60	0,501	0,512	0,172	0,262	0,741	0,511
1,65	0,517	0,528	0,167	0,260	0,747	0,503
1,70	0,533	0,543	0,161	0,257	0,752	0,495
1,75	0,548	0,557	0,155	0,254	0,756	0,487
1,80	0,561	0,570	0,150	0,251	0,760	0,479
1,85	0,575	0,583	0,144	0,247	0,764	0,471
1,90	0,587	0,595	0,139	0,244	0,767	0,463
1,95	0,599	0,606	0,134	0,240	0,769	0,454
2,00	0,610	0,617	0,129	0,237	0,771	0,446

Tabela AP 12: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $v = 0,10$

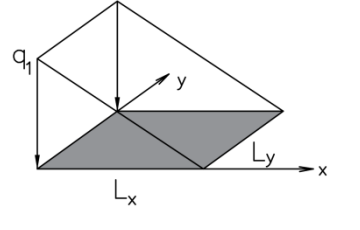
$v = 0,10$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,052	0,134	0,106	0,224	0,336
0,55	0,053	0,068	0,152	0,122	0,263	0,368
0,60	0,069	0,086	0,168	0,138	0,303	0,397
0,65	0,087	0,106	0,183	0,153	0,342	0,424
0,70	0,106	0,128	0,195	0,167	0,379	0,448
0,75	0,127	0,151	0,206	0,180	0,415	0,469
0,80	0,150	0,174	0,215	0,193	0,449	0,487
0,85	0,173	0,198	0,221	0,204	0,481	0,502
0,90	0,197	0,223	0,226	0,214	0,511	0,514
0,95	0,221	0,247	0,229	0,223	0,538	0,523
1,00	0,246	0,272	0,231	0,230	0,563	0,530
1,05	0,270	0,296	0,232	0,237	0,586	0,535
1,10	0,294	0,320	0,231	0,242	0,607	0,538
1,15	0,318	0,344	0,230	0,246	0,626	0,539
1,20	0,341	0,366	0,227	0,249	0,643	0,539
1,25	0,364	0,388	0,225	0,252	0,659	0,537
1,30	0,386	0,410	0,221	0,253	0,673	0,534
1,35	0,407	0,430	0,217	0,254	0,686	0,530
1,40	0,428	0,450	0,213	0,254	0,697	0,525
1,45	0,447	0,468	0,208	0,253	0,707	0,519
1,50	0,466	0,486	0,204	0,252	0,716	0,513
1,55	0,484	0,503	0,199	0,250	0,724	0,506
1,60	0,501	0,520	0,194	0,248	0,731	0,499
1,65	0,517	0,535	0,189	0,246	0,738	0,491
1,70	0,533	0,550	0,184	0,243	0,743	0,483
1,75	0,548	0,563	0,179	0,241	0,748	0,475
1,80	0,561	0,576	0,174	0,238	0,752	0,467
1,85	0,575	0,589	0,170	0,234	0,756	0,459
1,90	0,587	0,601	0,165	0,231	0,759	0,451
1,95	0,599	0,612	0,160	0,228	0,762	0,443
2,00	0,610	0,622	0,156	0,224	0,764	0,435

Tabela AP 14: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $v = 0,20$

Tabela AP 13: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $v = 0,15$

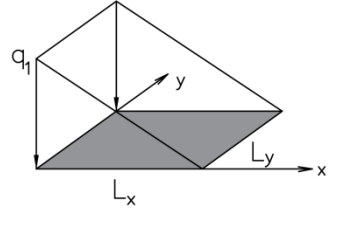
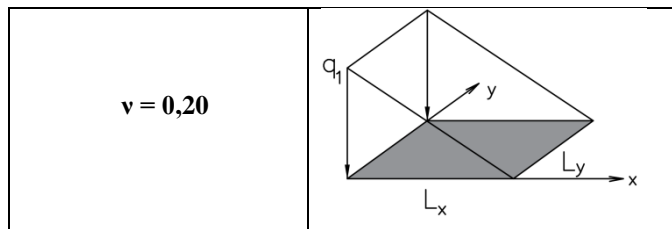
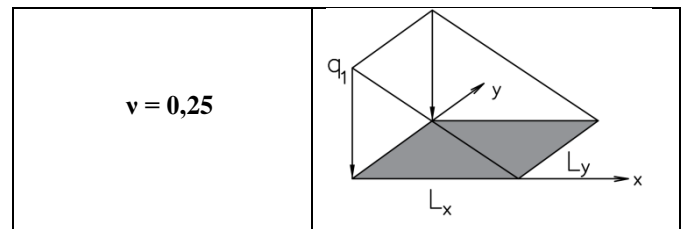
$v = 0,15$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,060	0,135	0,100	0,218	0,334
0,55	0,053	0,077	0,153	0,115	0,257	0,364
0,60	0,069	0,096	0,170	0,130	0,296	0,393
0,65	0,087	0,116	0,186	0,144	0,334	0,419
0,70	0,106	0,138	0,199	0,158	0,371	0,442
0,75	0,127	0,161	0,210	0,170	0,406	0,462
0,80	0,150	0,185	0,220	0,182	0,439	0,479
0,85	0,173	0,209	0,228	0,193	0,471	0,493
0,90	0,197	0,234	0,234	0,202	0,500	0,505
0,95	0,221	0,259	0,238	0,210	0,527	0,514
1,00	0,246	0,283	0,241	0,218	0,552	0,520
1,05	0,270	0,307	0,243	0,224	0,575	0,525
1,10	0,294	0,331	0,243	0,229	0,596	0,527
1,15	0,318	0,354	0,243	0,233	0,615	0,528
1,20	0,341	0,377	0,242	0,236	0,632	0,527
1,25	0,364	0,398	0,240	0,238	0,648	0,525
1,30	0,386	0,419	0,237	0,239	0,662	0,522
1,35	0,407	0,439	0,234	0,240	0,675	0,518
1,40	0,428	0,459	0,231	0,240	0,687	0,513
1,45	0,447	0,477	0,227	0,239	0,697	0,507
1,50	0,466	0,495	0,224	0,238	0,706	0,501
1,55	0,484	0,511	0,220	0,236	0,715	0,494
1,60	0,501	0,527	0,215	0,235	0,722	0,487
1,65	0,517	0,542	0,211	0,232	0,729	0,479
1,70	0,533	0,557	0,207	0,230	0,734	0,472
1,75	0,548	0,570	0,203	0,227	0,740	0,464
1,80	0,561	0,583	0,199	0,224	0,744	0,456
1,85	0,575	0,595	0,195	0,221	0,748	0,448
1,90	0,587	0,606	0,191	0,218	0,752	0,440
1,95	0,599	0,617	0,187	0,215	0,755	0,432
2,00	0,610	0,627	0,183	0,212	0,757	0,424

Tabela AP 15: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $v = 0,25$



$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,068	0,136	0,094	0,213	0,331
0,55	0,053	0,085	0,155	0,108	0,250	0,361
0,60	0,069	0,105	0,172	0,122	0,288	0,389
0,65	0,087	0,126	0,188	0,136	0,325	0,414
0,70	0,106	0,149	0,202	0,148	0,362	0,436
0,75	0,127	0,172	0,215	0,160	0,396	0,455
0,80	0,150	0,196	0,225	0,171	0,429	0,471
0,85	0,173	0,221	0,234	0,181	0,460	0,485
0,90	0,197	0,245	0,241	0,190	0,489	0,496
0,95	0,221	0,270	0,247	0,198	0,516	0,504
1,00	0,246	0,294	0,251	0,205	0,541	0,510
1,05	0,270	0,318	0,253	0,210	0,564	0,514
1,10	0,294	0,342	0,255	0,215	0,585	0,516
1,15	0,318	0,365	0,256	0,219	0,604	0,517
1,20	0,341	0,387	0,256	0,222	0,621	0,516
1,25	0,364	0,408	0,255	0,225	0,637	0,514
1,30	0,386	0,429	0,253	0,225	0,652	0,510
1,35	0,407	0,449	0,251	0,226	0,665	0,506
1,40	0,428	0,468	0,249	0,226	0,676	0,501
1,45	0,447	0,486	0,246	0,225	0,687	0,495
1,50	0,466	0,503	0,243	0,224	0,696	0,489
1,55	0,484	0,519	0,240	0,223	0,705	0,482
1,60	0,501	0,535	0,237	0,221	0,713	0,475
1,65	0,517	0,550	0,234	0,219	0,720	0,467
1,70	0,533	0,564	0,230	0,216	0,726	0,460
1,75	0,548	0,577	0,227	0,214	0,731	0,452
1,80	0,561	0,589	0,223	0,211	0,736	0,444
1,85	0,575	0,601	0,220	0,208	0,740	0,436
1,90	0,587	0,612	0,216	0,205	0,744	0,429
1,95	0,599	0,623	0,213	0,202	0,747	0,421
2,00	0,610	0,632	0,210	0,199	0,750	0,413



$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,075	0,136	0,088	0,207	0,328
0,55	0,053	0,094	0,156	0,088	0,244	0,358
0,60	0,069	0,114	0,174	0,115	0,281	0,384
0,65	0,087	0,136	0,191	0,127	0,317	0,409
0,70	0,106	0,159	0,206	0,139	0,353	0,430
0,75	0,127	0,183	0,219	0,150	0,387	0,448
0,80	0,150	0,207	0,231	0,161	0,419	0,464
0,85	0,173	0,232	0,240	0,170	0,450	0,477
0,90	0,197	0,257	0,249	0,178	0,479	0,487
0,95	0,221	0,281	0,255	0,186	0,505	0,495
1,00	0,246	0,306	0,260	0,192	0,530	0,500
1,05	0,270	0,330	0,264	0,197	0,553	0,504
1,10	0,294	0,353	0,267	0,202	0,574	0,505
1,15	0,318	0,376	0,269	0,205	0,593	0,506
1,20	0,341	0,397	0,270	0,208	0,610	0,504
1,25	0,364	0,419	0,270	0,210	0,626	0,502
1,30	0,386	0,439	0,270	0,211	0,641	0,498
1,35	0,407	0,458	0,269	0,211	0,654	0,494
1,40	0,428	0,477	0,267	0,211	0,666	0,489
1,45	0,447	0,495	0,265	0,211	0,677	0,483
1,50	0,466	0,511	0,263	0,210	0,687	0,477
1,55	0,484	0,527	0,261	0,209	0,695	0,470
1,60	0,501	0,543	0,259	0,207	0,703	0,463
1,65	0,517	0,557	0,256	0,205	0,711	0,455
1,70	0,533	0,571	0,253	0,203	0,717	0,448
1,75	0,548	0,583	0,251	0,201	0,723	0,440
1,80	0,561	0,596	0,248	0,198	0,728	0,433
1,85	0,575	0,607	0,245	0,195	0,732	0,425
1,90	0,587	0,618	0,242	0,193	0,736	0,417
1,95	0,599	0,628	0,239	0,190	0,740	0,410
2,00	0,610	0,638	0,237	0,187	0,743	0,402

Tabela AP 16: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $\nu = 0,30$

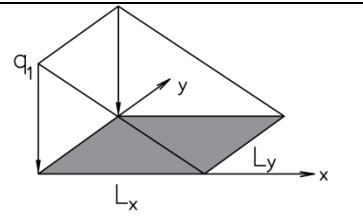
$\nu = 0,30$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,083	0,137	0,082	0,201	0,326
0,55	0,053	0,103	0,157	0,095	0,237	0,354
0,60	0,069	0,124	0,176	0,107	0,273	0,380
0,65	0,087	0,146	0,194	0,119	0,309	0,403
0,70	0,106	0,170	0,210	0,130	0,344	0,424
0,75	0,127	0,194	0,224	0,140	0,377	0,441
0,80	0,150	0,218	0,236	0,150	0,409	0,456
0,85	0,173	0,243	0,247	0,159	0,440	0,468
0,90	0,197	0,268	0,256	0,166	0,468	0,478
0,95	0,221	0,293	0,264	0,173	0,494	0,485
1,00	0,246	0,317	0,270	0,179	0,519	0,490
1,05	0,270	0,341	0,275	0,184	0,542	0,493
1,10	0,294	0,364	0,279	0,188	0,563	0,494
1,15	0,318	0,386	0,282	0,191	0,582	0,494
1,20	0,341	0,408	0,284	0,194	0,599	0,493
1,25	0,364	0,429	0,285	0,196	0,615	0,490
1,30	0,386	0,449	0,286	0,197	0,630	0,486
1,35	0,407	0,468	0,286	0,197	0,644	0,482
1,40	0,428	0,486	0,285	0,197	0,656	0,477
1,45	0,447	0,503	0,284	0,197	0,667	0,471
1,50	0,466	0,520	0,283	0,196	0,677	0,464
1,55	0,484	0,535	0,282	0,195	0,686	0,458
1,60	0,501	0,550	0,280	0,193	0,694	0,451
1,65	0,517	0,564	0,278	0,191	0,701	0,443
1,70	0,533	0,578	0,276	0,189	0,708	0,436
1,75	0,548	0,590	0,274	0,187	0,714	0,428
1,80	0,561	0,602	0,272	0,185	0,720	0,421
1,85	0,575	0,613	0,270	0,182	0,724	0,413
1,90	0,587	0,624	0,268	0,180	0,729	0,406
1,95	0,599	0,633	0,266	0,177	0,733	0,398
2,00	0,610	0,643	0,263	0,174	0,736	0,391

Tabela AP 17: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $\nu = 0,35$

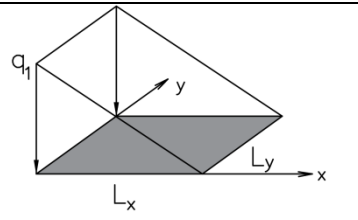
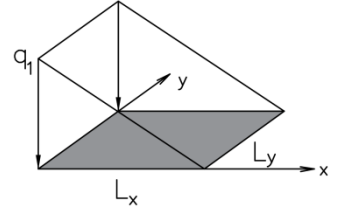
$\nu = 0,35$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,091	0,138	0,077	0,195	0,323
0,55	0,053	0,111	0,159	0,088	0,230	0,351
0,60	0,069	0,133	0,178	0,099	0,266	0,376
0,65	0,087	0,156	0,196	0,110	0,301	0,398
0,70	0,106	0,180	0,213	0,121	0,335	0,418
0,75	0,127	0,205	0,228	0,130	0,368	0,435
0,80	0,150	0,229	0,242	0,139	0,399	0,449
0,85	0,173	0,254	0,253	0,147	0,429	0,460
0,90	0,197	0,279	0,263	0,155	0,457	0,469
0,95	0,221	0,304	0,272	0,161	0,484	0,475
1,00	0,246	0,328	0,280	0,166	0,508	0,480
1,05	0,270	0,352	0,286	0,171	0,531	0,483
1,10	0,294	0,375	0,291	0,175	0,551	0,484
1,15	0,318	0,397	0,295	0,178	0,571	0,483
1,20	0,341	0,418	0,298	0,180	0,588	0,481
1,25	0,364	0,439	0,300	0,182	0,605	0,478
1,30	0,386	0,458	0,302	0,183	0,619	0,475
1,35	0,407	0,477	0,303	0,183	0,633	0,470
1,40	0,428	0,495	0,303	0,183	0,645	0,465
1,45	0,447	0,512	0,304	0,183	0,657	0,459
1,50	0,466	0,528	0,303	0,182	0,667	0,452
1,55	0,484	0,543	0,303	0,181	0,676	0,446
1,60	0,501	0,558	0,302	0,179	0,685	0,439
1,65	0,517	0,572	0,301	0,178	0,692	0,431
1,70	0,533	0,585	0,300	0,176	0,699	0,424
1,75	0,548	0,597	0,298	0,174	0,706	0,417
1,80	0,561	0,608	0,297	0,172	0,711	0,409
1,85	0,575	0,619	0,295	0,169	0,716	0,402
1,90	0,587	0,629	0,294	0,167	0,721	0,394
1,95	0,599	0,639	0,292	0,164	0,725	0,387
2,00	0,610	0,648	0,290	0,162	0,729	0,380

Tabela AP 18: Bordos simplesmente apoiados, carregamento triangular, $\nu = 0,40$

$\nu = 0,40$						
$\lambda = L_y/L_x$	w_z	m_x	m_y	m_{xy}	v_x	v_y
0,50	0,039	0,099	0,139	0,071	0,190	0,321
0,55	0,053	0,120	0,160	0,081	0,224	0,347
0,60	0,069	0,142	0,180	0,092	0,258	0,372
0,65	0,087	0,166	0,199	0,102	0,293	0,393
0,70	0,106	0,190	0,217	0,111	0,326	0,412
0,75	0,127	0,215	0,233	0,120	0,359	0,428
0,80	0,150	0,241	0,247	0,129	0,390	0,441
0,85	0,173	0,266	0,260	0,136	0,419	0,452
0,90	0,197	0,291	0,271	0,143	0,447	0,460
0,95	0,221	0,315	0,281	0,149	0,473	0,466
1,00	0,246	0,339	0,289	0,154	0,497	0,470
1,05	0,270	0,363	0,296	0,158	0,519	0,472
1,10	0,294	0,385	0,303	0,161	0,540	0,473
1,15	0,318	0,407	0,308	0,164	0,560	0,472
1,20	0,341	0,428	0,312	0,166	0,577	0,470
1,25	0,364	0,449	0,315	0,168	0,594	0,467
1,30	0,386	0,468	0,318	0,169	0,609	0,463
1,35	0,407	0,487	0,320	0,169	0,623	0,458
1,40	0,428	0,504	0,322	0,169	0,635	0,452
1,45	0,447	0,521	0,323	0,169	0,647	0,446
1,50	0,466	0,537	0,323	0,168	0,657	0,440
1,55	0,484	0,551	0,323	0,167	0,667	0,433
1,60	0,501	0,566	0,323	0,166	0,675	0,427
1,65	0,517	0,579	0,323	0,164	0,683	0,419
1,70	0,533	0,592	0,323	0,162	0,691	0,412
1,75	0,548	0,603	0,322	0,160	0,697	0,405
1,80	0,561	0,615	0,321	0,158	0,703	0,398
1,85	0,575	0,625	0,320	0,156	0,709	0,390
1,90	0,587	0,635	0,319	0,154	0,713	0,383
1,95	0,599	0,644	0,318	0,152	0,718	0,376
2,00	0,610	0,653	0,317	0,150	0,722	0,369

APÊNDICE C – Condições de contorno para valores máximos dos esforços e deflexões – carregamento triangular

Considera-se um elemento da placa de largura unitária, submetida a um carregamento triangular (Figura AP1):

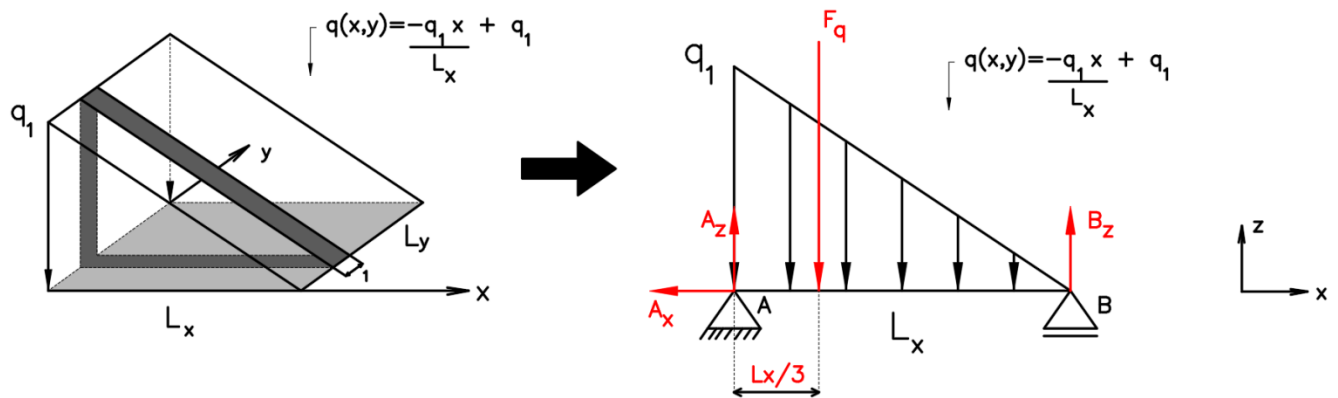


Figura AP 1: Análise de um elemento de largura unitária sujeito a carregamento triangular

A força resultante do carregamento triangular (F_q) é dada por:

$$F_q = \frac{qL_x}{2} \quad \text{Eq. AP (1)}$$

A partir das equações de equilíbrio de forças verticais e de momentos fletores, as reações nos apoios A e B são dadas por:

$$A_x = 0 \quad \text{Eq. AP (2)}$$

$$A_z = \frac{2qL_x}{6} \quad \text{Eq. AP (3)}$$

$$B_z = \frac{qL_x}{6} \quad \text{Eq. AP (4)}$$

1) Cálculo do esforço cortante:

Para encontrar a equação do esforço cortante, é necessário fazer o equilíbrio de forças verticais em cada seção. Para este exemplo, há apenas uma seção (que vai de 0 até L_x), ou seja:

$$\sum F_y + V(x) = 0$$

Eq. AP (5)

onde $V(x)$ é a função do esforço cortante na posição x .

Seção 1 ($0 \leq x \leq L_x$):

Para a realizar da análise da seção 1 ($0 \leq x \leq L_x$), o carregamento trapezoidal foi subdividido em um carregamento triangular (de intensidade q_1) e um carregamento retangular (de intensidade q_2), conforme indicado na Figura AP 2:

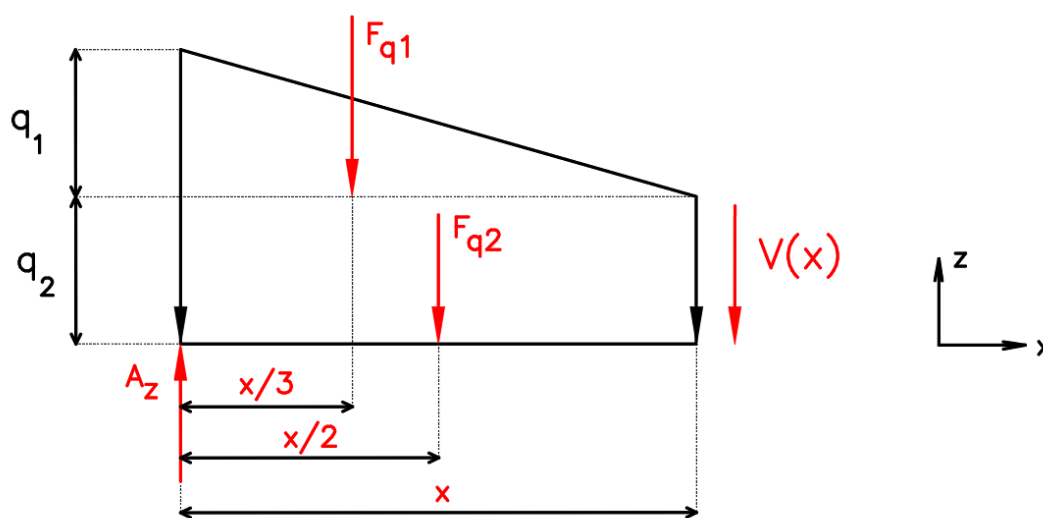


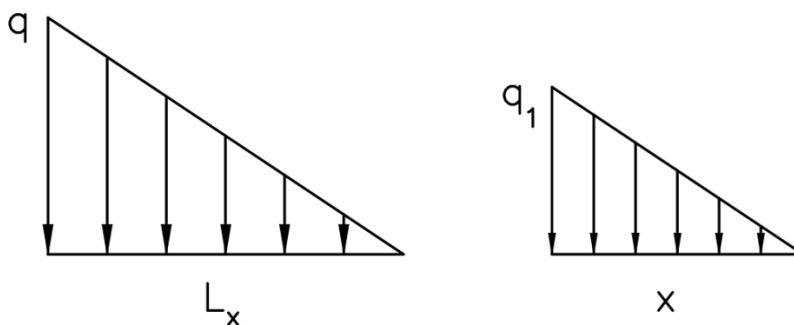
Figura AP 2: Análise do esforço cortante na seção 1 ($0 \leq x \leq L_x$)

Onde:

$$q = q_1 + q_2$$

Eq. AP (6)

A intensidade do carregamento triangular (q_1) pode ser obtida mediante semelhança de triângulos:



$$\frac{q}{L_x} = \frac{q_1}{x} \quad \therefore \quad q_1 = \frac{qx}{L_x} \quad \text{Eq. AP (7)}$$

Para obter a intensidade do carregamento retangular (q_2), substitui-se a Eq. AP (7) na Eq. AP (6):

$$q = q_1 + q_2 \quad \therefore \quad q_2 = q - q_1 \quad \therefore \quad q_2 = q - \frac{qx}{L_x} \quad \text{Eq. AP (8)}$$

A força resultante F_{q1} (que representa o carregamento triangular, sendo aplicado na posição $x/3$) é calculada através da área do triângulo:

$$F_{q1} = \frac{q_1 x}{2} \quad \therefore \quad F_{q1} = \frac{qx^2}{2L_x} \quad \text{Eq. AP (9)}$$

enquanto que a força resultante F_{q2} (que representa o carregamento retangular, sendo aplicado na posição $x/2$) é calculada através da área do retângulo:

$$F_{q2} = q_2 x \quad \therefore \quad F_{q2} = qx - \frac{qx^2}{L_x} \quad \text{Eq. AP (10)}$$

Aplicando o equilíbrio das forças verticais na seção 1 (Eq. AP (5)), obtêm-se:

$$A_z - F_{q1} - F_{q2} - V(x) = 0 \quad \therefore \quad V(x) = A_z - F_{q1} - F_{q2} \quad \text{Eq. AP (11)}$$

substituindo as equações AP (3), AP (9) e AP (10) na Eq. AP (11), obtêm-se:

$$V(x) = \frac{qx^2}{2L_x} - qx - \frac{qL_x}{3} \quad \text{Eq. AP (12)}$$

2) Cálculo do momento fletor:

Para encontrar a equação do momento fletor, é necessário fazer o equilíbrio dos momentos em cada seção. Para este exemplo, há apenas uma seção (que vai de 0 até L_x), ou seja:

$$\sum F_z (x - x_{carga}) \sum M + M(x) = 0 \quad \text{Eq. AP (13)}$$

onde $M(x)$ é a função do momento fletor na posição x .

Seção 1 ($0 \leq x \leq L_x$):

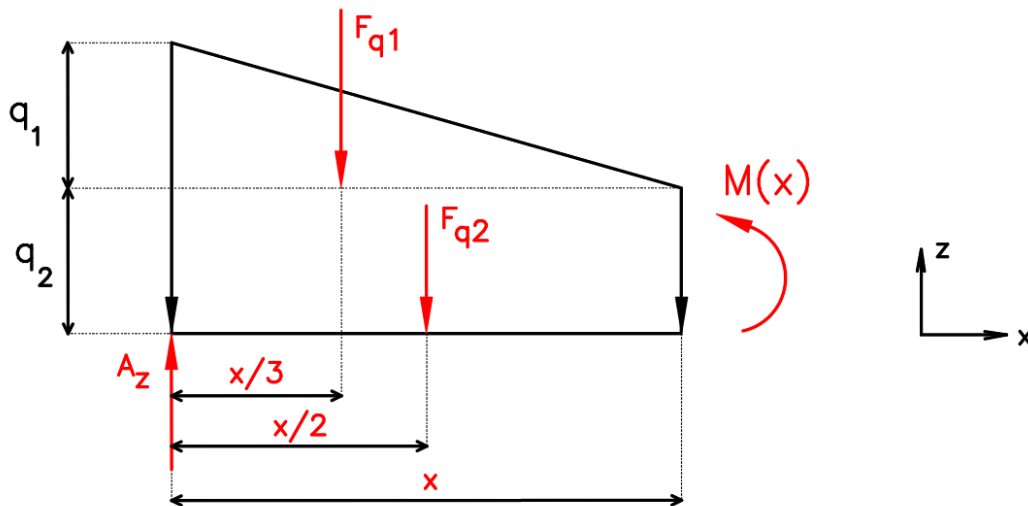


Figura AP 3: Análise do momento fletor na seção 1 ($0 \leq x \leq L_x$)

Aplicando o equilíbrio dos momentos na seção 1 (Eq. AP (13)), obtêm-se:

$$-A_z x + F_{q1} \frac{2x}{3} + F_{q2} \frac{x}{2} + M(x) = 0 \quad \text{Eq. AP (14)}$$

substituindo as equações AP (3), AP (9) e AP (10) na Eq. AP (14), e simplificando-se a equação, obtém-se:

$$M(x) = \frac{q}{6L_x} x^3 - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL_x}{3} x \quad \text{Eq. AP (15)}$$

3) Posição de x para o momento fletor máximo:

Para a determinação da posição de x onde o momento fletor possui valor máximo, é necessário verificar o valor de x onde a derivada da função $M(x)$ apresenta nulidade, ou seja:

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0:$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{6L_x} x^3 - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL_x}{3} x \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{3q}{6L_x} x^2 - \frac{2q}{2} x + \frac{qL_x}{3} = 0$$

simplificando-se a equação, têm-se:

$$\frac{q}{2L_x} x^2 - qx + \frac{qL_x}{3} = 0 \quad \text{Eq. AP (16)}$$

Calculando-se as raízes da equação AP (16), têm-se:

$$x_1 = 0,423L_x$$

$$x_2 = 1,577L_x$$

uma vez que x está contido no intervalo $0 \leq x \leq L_x$, a solução de x_2 não é válida.

Portanto, o momento fletor de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a um carregamento triangular, atinge valor máximo na posição de $x = 0,423L_x$.

4) Cálculo da deflexão transversal:

A partir do método da linha elástica, a deflexão transversal dos pontos situados no eixo longitudinal pode ser representada analiticamente em função de x. A determinação da deflexão (w) em função de x, pode ser obtida por meio da equação diferencial básica para a linha elástica:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = M(x) \quad \text{Eq. AP (17)}$$

substituindo a Eq. AP (15) na Eq. AP (17), têm-se:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{6L_x} x^3 - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL_x}{3} x \quad \text{Eq. AP (18)}$$

realizando-se a integração de ambos os termos da equação, obtêm-se:

$$\int \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx = \int \left(\frac{q}{6L_x} x^3 - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL_x}{3} x \right) dx$$

$$\therefore EI \frac{dw}{dx} = \frac{q}{24L_x} x^4 - \frac{q}{6} x^3 + \frac{qL_x}{6} x^2 + c_1 \quad \text{Eq. AP (19)}$$

realizando-se novamente a integração em ambos os termos da equação, obtêm-se:

$$\int \left(EI \frac{dw}{dx} \right) dx = \int \left(\frac{q}{24L_x} x^4 - \frac{q}{6} x^3 + \frac{qL_x}{6} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$\therefore EIw = \frac{q}{120L_x} x^5 - \frac{q}{24} x^4 + \frac{qL_x}{18} x^3 + c_1 x + c_2$$

$$\therefore w = \frac{1}{EI} \left(\frac{q}{120L_x} x^5 - \frac{q}{24} x^4 + \frac{qL_x}{18} x^3 + c_1 x + c_2 \right) \quad \text{Eq. AP (20)}$$

4.1) Condições de contorno:

Uma vez que a linha elástica não sofre deflexões nos apoios da placa, têm-se:

- $w(x=0) = 0$:

$$\therefore \frac{1}{EI} \left(\frac{q}{120L_x} 0^5 - \frac{q}{24} 0^4 + \frac{qL_x}{18} 0^3 + c_1 0 + c_2 \right) = 0$$

realizando-se as devidas simplificações, têm-se:

$$c_2 = 0 \quad \text{Eq. AP (21)}$$

- $w(x=L_x) = 0$

$$\therefore \frac{1}{EI} \left(\frac{q}{120L_x} L_x^5 - \frac{q}{24} L_x^4 + \frac{qL_x}{18} L_x^3 + c_1 L_x + 0 \right) = 0$$

realizando-se as devidas simplificações, têm-se:

$$c_1 = \frac{-qL_x^3}{45} \quad \text{Eq. AP (22)}$$

Logo, substituindo a Eq. AP (21) e Eq. AP (21) na Eq. AP (20), têm-se:

$$w = \frac{1}{EI} \left(\frac{q}{120L_x} x^5 - \frac{q}{24} x^4 + \frac{qL_x}{18} x^3 - \frac{qL_x^3}{45} x \right) \quad \text{Eq. AP (23)}$$

5) Posição de x para a deflexão máxima:

Para a determinação da posição de x onde a deflexão transversal possui valor máximo, é necessário verificar o valor de x onde a derivada da função w(x) apresenta nulidade, ou seja:

$$\frac{dw(x)}{dx} = 0:$$

$$\begin{aligned} \frac{dw(x)}{dx} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{q}{120L_x} x^5 - \frac{q}{24} x^4 + \frac{qL_x}{18} x^3 - \frac{qL_x^3}{45} x \right) \right] &= 0 \\ \therefore \quad \frac{q}{EI} \left(\frac{5}{120L_x} x^4 - \frac{4}{24} x^3 + \frac{3L_x}{18} x^2 - \frac{L_x^3}{45} \right) &= 0 \end{aligned}$$

simplificando-se a equação, têm-se:

$$\frac{1}{24L_x} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{L_x}{6} x^2 - \frac{L_x^3}{45} = 0 \quad \text{Eq. AP (24)}$$

Calculando-se as raízes da equação AP (16), têm-se:

$$x_1 = -0,315L_x$$

$$x_2 = \mathbf{0,481L_x}$$

$$x_3 = 1,519L_x$$

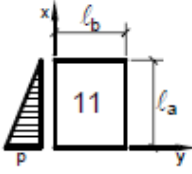
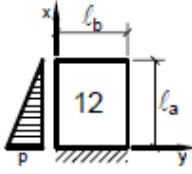
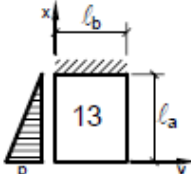
$$x_4 = 2,315L_x$$

uma vez que x está contido no intervalo $0 \leq x \leq L_x$, as soluções de x_1 , x_3 e x_4 não são válidas.

Portanto, a deflexão transversal de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a um carregamento triangular, atinge valor máximo na posição de $x = 0,481L_x$.

**ANEXO A – Tabelas para placas retangulares, com carregamento triangular – Pinheiro
(2007)**

Tabela AN 1: Tabelas para placas retangulares, com carregamento triangular – Pinheiro (2007)

MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA TRIANGULAR									
Tipo									Tipo
	$\gamma = \frac{l_a}{l_b}$	μ_x	μ_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ_x	μ'_x	
< 0,50	6,41	1,60	2,98	6,67	0,92	4,23	5,83	1,28	< 0,50
0,50	5,14	1,60	2,81	6,53	0,92	3,94	5,60	1,28	0,50
0,55	4,83	1,72	2,73	6,41	0,99	3,80	5,46	1,31	0,55
0,60	4,52	1,83	2,65	6,29	1,06	3,66	5,31	1,33	0,60
0,65	4,21	1,92	2,54	6,13	1,12	3,49	5,11	1,39	0,65
0,70	3,90	2,00	2,43	5,97	1,16	3,32	4,90	1,45	0,70
0,75	3,63	2,05	2,31	5,79	1,21	3,15	4,68	1,50	0,75
0,80	3,35	2,09	2,19	5,61	1,23	2,98	4,46	1,55	0,80
0,85	3,11	2,12	2,07	5,42	1,26	2,83	4,24	1,59	0,85
0,90	2,86	2,14	1,94	5,23	1,28	2,67	4,02	1,63	0,90
0,95	2,64	2,13	1,83	5,09	1,31	2,52	3,77	1,67	0,95
1,00	2,41	2,12	1,72	4,95	1,34	2,36	3,52	1,70	1,00
1,05	2,47	2,32	1,78	5,20	1,51	2,44	3,64	1,92	1,05
1,10	2,53	2,51	1,84	5,44	1,68	2,53	3,75	2,13	1,10
1,15	2,58	2,71	1,90	5,68	1,87	2,60	3,86	2,34	1,15
1,20	2,64	2,90	1,96	5,92	2,05	2,68	3,96	2,55	1,20
1,25	2,66	3,10	2,00	6,13	2,23	2,73	4,02	2,76	1,25
1,30	2,70	3,28	2,06	6,37	2,40	2,79	4,07	2,96	1,30
1,35	2,73	3,46	2,10	6,59	2,58	2,83	4,09	3,17	1,35
1,40	2,76	3,64	2,14	6,80	2,75	2,86	4,12	3,37	1,40
1,45	2,79	3,81	2,17	7,00	2,92	2,89	4,14	3,56	1,45
1,50	2,81	3,97	2,21	7,20	3,08	2,93	4,16	3,74	1,50
1,55	2,84	4,12	2,23	7,38	3,24	2,95	4,17	3,92	1,55
1,60	2,87	4,27	2,25	7,55	3,39	2,97	4,17	4,09	1,60
1,65	2,85	4,43	2,25	7,66	3,56	2,95	4,12	4,27	1,65
1,70	2,83	4,59	2,25	7,76	3,72	2,94	4,08	4,46	1,70
1,75	2,84	4,72	2,27	7,92	3,85	2,96	4,06	4,60	1,75
1,80	2,85	4,85	2,30	8,07	3,98	2,98	4,05	4,74	1,80
1,85	2,84	4,98	2,33	8,18	4,11	2,97	4,01	4,89	1,85
1,90	2,84	5,11	2,35	8,29	4,23	2,96	3,97	5,03	1,90
1,95	2,80	5,24	2,34	8,34	4,36	2,92	3,87	5,18	1,95
2,00	2,78	5,36	2,32	8,40	4,48	2,88	3,76	5,32	2,00

Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p \ell^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell =$ menor valor entre ℓ_a e ℓ_b