UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Introdução à Álgebra Comutativa: um estudo sobre tensores e sequências exatas

Ewellyn Carolaine Rodrigues da Silva

Orientador: Danilo da Nóbrega Santos

RECIFE

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ewellyn Carolaine Rodrigues da Silva

Introdução à Álgebra Comutativa: um estudo sobre tensores e sequências exatas

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciada em matemática.

Orientador: Prof. Danilo da Nóbrega Santos

RECIFE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586i Silva, Ewellyn Carolaine Rodrigues da
Introdução à Álgebra Comutativa: um estudo sobre tensores e sequências exatas / Ewellyn Carolaine Rodrigues da Silva. - 2019.
59 f.

Orientador: Danilo da Nobrega Santos.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2020.

1. Módulos. 2. Sequências Exatas. 3. Produto Tensorial. I. Santos, Danilo da Nobrega, orient. II. Título

CDD 510

Ewellyn Carolaine Rodrigues da Silva

Introdução à Álgebra Comutativa: um estudo sobre tensores e sequências exatas

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciada em matemática.

Trabalho aprovado em 19 de dezembro de 2019:

Danilo da Nóbrega Santos
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Bárbara Costa da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Gabriel Araújo Guedes
Universidade Federal Rural de Pernambuco

RECIFE
2019

"Sempre em frente

Não temos tempo a perder"

Tempo Perdido - Legião Urbana

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois sem ele eu nada seria.

Agradeço a minha família, em especial, a minha mãe Elizabeth Rocha que sempre esteve ao meu lado, aos meus irmãos José Ithalo, Alex Stanlley e Emerson Pedro, a minha avó, Dona Rosa, e as minhas sobrinhas Ellen e Eduarda.

Á todos os meus amigos e companheiros de jornada, que enfrentaram e enfrentam todas as batalhas comigo.

Á esta universidade, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro.

Á todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional.

Ao meu orientador, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar e demonstrar alguns resultados básicos sobre Módulos, dando ênfase a sua aplicação nas Sequências Exatas e na construção do Produto Tensorial. Além disso, exibimos alguns exemplos para facilitar a compreensão destes conceitos.

Palavras-chave: Módulos, Sequências Exatas, Produto Tensorial.

Abstract

The objective of this work is to present and demonstrate some basic results about Modules, emphasizing their application in Exact Sequences and in the construction of Tensor Product. Furthermore we have shown some examples to make these concepts easier to understand.

Keywords: Modules, Exact Sequences, Tensor Product.

Sumário

Introdução

A álgebra comutativa estuda anéis comutativos, seus ideais e módulos. O conceito de módulo sobre um anel é visto, inicialmente, como forma de generalização da noção de espaço vetorial, em que, em vez de um corpo, temos um anel como o conjunto de escalares. Porém, os módulos têm diversas aplicações, como as sequências exatas e os tensores.

Dessa forma, dispomos por meio de uma pesquisa bibiográfica, um levantamento de resultados importantes acerca da teoria dos módulos e sua aplicação na construção dos tensores e, nas sequências exatas, tendo como referência principal [1].

Para o entendimento do trabalho é necessário algum conceito básico sobre Teoria de Anéis e Grupos. Assim, o capítulo inicial aborda esses conceitos que são primordiais. Já no segundo capítulo tratamos dos conceitos de módulos, submódulos e módulos quocientes e resultados sobre eles.

Por fim, apresentamos as Sequências Exatas, suas propriedades e sua aplicação Lema da Serpente, a construção do Produto Tensorial e algumas propriedades dos tensores e, mostramos um resultado que agrega todos os conceitos anteriores, o qual chamamos aqui, Propriedade Exata do Produto Tensorial.

1 Resultados preliminares

Este capítulo aborda conceitos básicos e resultados da Teoria de Anéis e Grupos que serão relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Por este motivo, alguns dos resultados apresentados neste capítulo terão suas demonstrações omitidas. Entretanto, pode-se encontrar facilmente tais demonstrações em [2],[3] e [4].

1.1 Anéis

Definição 1.1. Considere $(A, +, \cdot)$, onde A um conjunto não-vazio e $+, \cdot$ são duas operações binárias em A chamadas soma e produto, respectivamente. Diremos que A é um **anel** se satisfaz as propriedades a seguir para qualquer que seja a, b e $c \in A$:

1. Comutatividade da soma: $a + b = b + a$
2. Associatividade da soma: $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Elemento neutro da soma: $\exists\, 0 \in A$ tal que $0 + a = a + 0$, $\forall \in A$
4. Inverso aditivo: Para cada $a \in A$, $\exists\,(-a) \in A$ tal que $a + (-a) = 0$
5. Distributividade entre soma e produto: $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$
6. Associatividade do Produto: $(ab)c = a(bc)$

Observação 1.1. Note que o produto no anel não precisa ser comutativo ($ab = ba$; $\forall\, a, b \in A$). Quando isso acontece diremos que o anel é **comutativo**.

Observação 1.2. O anel não precisa ter elemento neutro para o produto. Isto é, existe $1 \in A$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in A$. Quando isso acontece diremos que A é anel com **unidade** ou **identidade**.

Definição 1.2. Seja A um anel e $x \in A$ com $x \neq 0$. Diremos que x é **divisor de zero** se existem $a \in A$ tal que $ax = xa = 0$.

Definição 1.3. Os aneis comutativos com unidade que não tiverem divisores de zero, ou seja, se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$, chamaremos de **domínio de integridade**. Um domínio de integridade em que todos os elementos não nulos são invertiveis (para cada $a \in A^* \, \exists \, b \in A$ tal que $ab = 1$), chamaremos **corpo**. No que segue todos os anéis aqui tratados serão comutativos com identidade.

Exemplo 1.1. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, com a soma e produto usuais, é anel e domínio de integridade, mas não é corpo.

Exemplo 1.2. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, reais $\mathbb{R}$ e complexos $\mathbb{C}$, com a soma e produto usuais, são corpos.

Exemplo 1.3. O anel das matrizes $n \times n$ não é comutativo para todo $n > 1$.

Definição 1.4. Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não-vazio de A. Diremos que I é **subanel** de A se (I,+,$\cdot$) é anel.

Teorema 1.1. *Sejam A um anel e $I \subseteq A$. Então I é subanel de A se, e somente se,* $\forall \, a, b \in I$

1. $a - b \in I$;
2. $ab \in I$.

Exemplo 1.4. Dado $n \in \mathbb{Z}_+$ o conjunto $n\mathbb{Z} = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$ é subanel em $\mathbb{Z}$.

Definição 1.5. Seja I subanel de A, diremos que I é **ideal** de A se

$$ab \in I, \forall \, a \in A \text{ e } \forall \, b \in I$$

.

Exemplo 1.5. Sejam A um anel e $x_1, \cdots, x_n \in A$. O conjunto $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, : \, a_i \in A \right\}$ é um ideal de A chamado de **ideal gerado por** $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Em particular $n\mathbb{Z}$ do Exemplo 1.4 é ideal em $\mathbb{Z}$ e $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$.

Observação 1.3. Quando um ideal I é gerado por um único elemento, diremos que I é **ideal principal**.

Definição 1.6. Seja A um domínio de integridade. Diremos que A é um **domínio principal** ou **domínio de ideais principais** quando todo ideal de A for principal.

Definição 1.7. Seja A um anel. Um ideal próprio I de A é chamado um **ideal maximal** se não existe um outro ideal próprio $J \subset A$ tal que I é um subconjunto de J.

Teorema 1.2. *Seja $A \neq \{0\}$ anel. Então existe $I \subseteq A$ ideal maximal.*

1.1.1 Anéis Quocientes

Seja A um anel e I um ideal de A. Defina em A a relação de equivalência $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$

Assim, como toda relação de equivalência definida em um conjunto determina uma partição do mesmo, temos que A será a reunião disjunta das classes de equivalência: $A = \bigcup\limits_{x \in A} \overline{x}$, onde

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \{y \in A : y \sim x\} \\ &= \{y \in A : y - x \in I\} \\ &= \{y \in A : y \in x + I\} \end{aligned}$$

Usaremos as notações $x + I = \overline{x}$ e $A/I = \{\overline{x} : x \in A\}$. Em A/I defina as operações

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_1 + x_2}$$

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

A/I com as operações acima é um anel denominado **anel quociente**.

Exemplo 1.6. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$ e considere o ideial $\langle n \rangle \subseteq \mathbb{Z}$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana $\mathbb{Z}/\langle n \rangle = \mathbb{Z}_n$ é formado pelas classes dos restos na divisão por n. Em outras palavras $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Observação 1.4. Dado A anel e $I \subseteq A$ ideal, então $\overline{1} = 1 + I$ é a classe da unidade e, a classe do elemento nulo é o ideal $\overline{0} = I$.

1.1.2 Homomorfismo de Anéis

Definição 1.8. Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \odot)$ anéis, diremos que uma função $f : A \to B$ é um **homomorfismo de anéis** se, para quaisquer $a, a' \in A$ vale as relações:

$$f(a + a') = f(a) \oplus f(a')$$

$$f(a \cdot a') = f(a) \odot f(a').$$

Se f é homomorfismo bijetivo, diremos que é **isomorfismo**. Neste caso diremos que A e B são **isomorfos**, e usaremos a notação $A \simeq B$

Exemplo 1.7. A função nula

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & 0 \end{array}$$

é homomorfismo.

Exemplo 1.8. A função identidade

$$\begin{array}{rccc} g: & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

é homomorfismo.

Definição 1.9. Seja $f : A \to B$ homomorfismo de anéis. Definimos o núcleo de f como o conjunto $Ker(f) = \{a \in A : \ f(a) = 0\}$ e a imagem de f como $Im(f) = \{f(A) : v \in A\}$.

Observação 1.5. $Ker(f)$ é um ideal de A e $Im(f)$ é um ideal de B.

Proposição 1.3. *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis.*

1. *f é injetiva se, e somente se, Ker(f)={0}.*

2. *A/Ker(f) e Im(f) são anéis isomorfos.*

Proposição 1.4. *Seja $f : A \to B$ homomorfismo sobrejetor de anéis. Se A é domínio principal então B é domínio principal.*

1.2 Grupos

Definição 1.10. Seja G um conjunto não vazio, e $(*)$ uma operação binária em G. Diremos que $(G, *)$ é **grupo** se $\forall\, a, b$ e $c \in$ G são satisfeitas

1. Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)$

2. Elemento Neutro: Existe $e \in$ G tal que $e * a = a * e = a$

3. Elemento Inverso: Para cada $a \in$ G exite $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Exemplo 1.9. $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ são grupos com a operação soma usual.

Quando a operação é soma, chamaremos o grupo de **grupo aditivo**.

Exemplo 1.10. Seja A um grupo aditivo e $t \in \mathbb{Z}_+^*$, o conjunto $A^t = \{(a_1, a_2, \cdots, a_t) : a_i \in A\}$ é um grupo aditivo com a operação:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_t) + (a'_1, a'_2, \cdots, a'_t) = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \cdots, a_t + a'_t)$$

Exemplo 1.11. Considere $S = \{1, \cdots, n\}$ e $S_n = \{\sigma : S \to S \text{ é bijeção}\}$. Então $(S_n, \circ)$, onde $\circ$ é a composição de funções, é um grupo chamado grupo das permutações finitas. Note que os elementos $\sigma \in S_n$ são unicamente determinados por uma lista do tipo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Definição 1.11. Seja H um subconjunto não-vazio de G. Diremos que H é **subgrupo** de G se $(H, *)$ é grupo.

Teorema 1.5. *Seja $(G, *)$ um grupo. Um $H \subset G$ não-vazio é subgrupo de G se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $h * h' \in H, \forall\, h, h' \in H$

2. *dado $h \in H$ teremos, $h^{-1} \in H$.*

Exemplo 1.12. Dado $n \in \mathbb{Z}_+$. Temos que $(n\mathbb{Z}, +)$ é subgrupo de $\mathbb{Z}$.

Exemplo 1.13. Sejam G um grupo e $G_1, G_2, \cdots, G_t$ subgrupos de G. Os conjuntos

$$\sum_{i=1}^{t} G_i = \left\{ \sum_{i=1}^{t} g_i : g_i \in G_i \right\}$$

$$\cap G_i = G_1 \cap \cdots \cap G_t$$

são subgrupos de G.

Definição 1.12. Sejam $(G, *)$ grupo e $a \in G$. Definamos a potência n-éssima de a como

$$a^n = \begin{cases} a^{n-1} * a & \text{se } n > 0 \\ e & \text{se } n = 0 \\ a^{n+1} * a^{-1} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Note que, se n>0, $a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n-vezes}$.

Exemplo 1.14. Observe que $\forall\, b \in \mathbb{Z}$ temos que $b = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{b-vezes}$, se $b > 0$. Se $b < 0$, então $-b > 0$ e $-b = (1 + 1 + \cdots + 1)$, e se $b = 0$ temos que $b = 0 = 1 \cdot 0$. Logo $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. Isto é, $\mathbb{Z}$ é gerado por um único elemento, quando isso acontece chamamos o grupo de **ciclíco**.

Exemplo 1.15. O conjunto gerado por $a \in G$, $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ é subgrupo de G.

1.2.1 Grupo Quociente

Seja G um grupo e H subgrupo de G. Dados $a, b \in G$, considere sobre G a relação $\sim_d$ de modo que $a \sim_d b$ se existe $h \in H$ tal que $a = bh$.

A relação definida acima é de equivalência, logo temos as classes de equivalência:

$$\begin{aligned} Hx &= \{y \in G : y \sim_d x\} \\ &= \{y \in G : y = hx, \text{ com } h \in H\} \\ &= \{hx : h \in H\} \end{aligned}$$

O conjunto Hx é denominado **classe lateral à direita** de H em G.

Observação 1.6. De maneira análoga, temos a seguinte classe de equivalência

$$xH = \{xh : h \in H\}$$

e é denominada **classe lateral à esquerda** de H em G.

Observação 1.7. Quando G é abeliano, então $xH = Hx$, $\forall\, x \in G$.

Proposição 1.6. *(Propriedade das Classes Laterais) Seja G grupo e H subgrupo de G.*

1. *Dados $a, b \in G$ se $b \in aH$ então $aH = bH$.*

2. *Duas classes, aH e bH são iguais ou $aH \cap bH = \varnothing$.*

3. $G = \dot{\bigcup\limits_{a \in G}} aH$

Definição 1.13. Sejam G grupo e $H \subset G$ subgrupo. O conjunto das classes laterais a esqueda de H em G será chamado **conjunto quociente** e será denotado por $G/H = \{aH : a \in G\}$.

Exemplo 1.16. Seja $(G, *)$ grupo e H subgrupo de G e considere $G/H = \{aH : a \in G\}$. Induzidos pela operação de G poderiamos tentar dar estrutura de grupo a G/H, definindo a operação, dados $a, b \in G$

$$aH \odot bH = (a * b)H.$$

Mas, nem sempre um conjunto quociente é grupo. Considere o grupo S_3, das bijeções de $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$. Cujos componentes podem ser representadas da forma:

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considere o subgrupo $H = \{f_0, f_1\}$, $a = f_3$ e $b = f_2$. Note que $aH = \{f_3, f_4\}$ e $bH = \{f_2, f_5\}$. Dessa forma,

$$f_3H \odot f_2H = (f_3 \odot f_2)H = f_5H = \{f_5, f_3\}$$

que é diferente de

$$f_3H \odot f_5H = (f_3 \odot f_5)H = f_5H = \{f_2, f_5\}$$

logo $\odot$ não está bem definido em S_3/H.

Teorema 1.7. *Sejam G grupo e $H \subset G$ subgrupo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $gH = Hg, \forall\, g \in G$

2. $gHg^{-1} \subset H$

3. $gHg^{-1} = H$.

O subgrupo de G que satisfaz qualquer uma das condições anteriores é chamado de **subgrupo normal** de G.

Exemplo 1.17. Para todo G grupo o subgrupo $\{e\}$ é normal a G.

Exemplo 1.18. Seja $G = \mathbb{Z}$ grupo aditivo, os subgrupos $n\mathbb{Z}$ com $n \in \mathbb{Z}_+$ são subgrupos normais de G.

Exemplo 1.19. Se G é abeliano, então qualquer subgrupo de G é normal.

Observação 1.8. Sejam G grupo e H subgrupo normal de G. Então G/H com a operação definida no Exemplo 1.16 tem estrutura de grupo. Dado $g \in G$, os elementos de G/H serão denotdos por $\overline{g}$. Além disso, note que $\overline{g} = e \Leftrightarrow g \in H$.

1.2.2 Homomorfismos de Grupos

Sejam $(G_1, *)$ e $(G_2, \cdot)$ grupos. Uma função $\phi : G_1 \to G_2$ é **homomorfismo de grupos** se $\forall\, a, b \in G_1$

$$\phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

.

Se ϕ for bijetiva diremos que ϕ é **isomorfismo** de grupos. Neste caso diremos que G_1 e G_2 são **isomorfos**, e usaremos a notação $G_1 \simeq G_2$

Exemplo 1.20. A função

$$\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, \cdot) \\ & a & \longmapsto & e^a \end{array}$$

é isomorfismo.

Definição 1.14. Seja $\phi : G_1 \to G_2$ homomorfismo de grupos. O **núcleo** de ϕ é o o conjunto $ker(\phi) = \{g \in G_1 : \phi(g) = e_{G_2}\}$ e a **imagem** de ϕ é $Im(\phi) = \{\phi(g_1) : g_1 \in G_1\}$.

Observação 1.9. Seja $\phi : G_1 \to G_2$ um homomorfismo grupos. Então $Ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ são subgrupos de G_1 e G_2, respectivamente. Além disso, $Ker(f)$ é um subgrupo normal de G_1. E, se W é um subgrupo de G_2, então $\phi^{-1}(W) = \{g_1 \in G_1 : \phi(m) \in W\}$ é subgrupo de G_1.

Teorema 1.8. *Sejam $\phi : G_1 \to G_2$ homomorfismo de grupos. Então*

1. *ϕ é injetiva se, e somente se, $Ker(\phi) = \{e_{G_1}\}$*

2. *$G/ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ são isomorfos.*

2 Módulos

Neste capítulo abordaremos o conceito de módulos, submódulos, módulos quocientes, módulos finitamente gerados e algumas de suas propriedades, como a soma e interseção de submódulos.

2.1 A-Módulo e A-Submódulos

Definição 2.1. Seja A um anel. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado da multiplicação escalar:

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \rightarrow & M \\ (a, m) & \mapsto & am \end{array}$$

é dito um A-**módulo** se $\forall\, a_1, a_2 \in A$ e $\forall\, m_1, m_2 \in$ M:

1. $1m_1 = m_1$
2. $(a_1a_2)m_1 = a_1(a_2m_1)$
3. $(a_1 + a_2)m_1 = a_1m_1 + a_2m_1$
4. $a_1(m_1 + m_2) = a_1m_1 + a_1m_2$

Exemplo 2.1. Seja A um corpo. Então a noção de A-módulo coincide com a noção de A-espaço vetorial. Este exemplo explicita que A-módulos são uma generalização de espaços vetorias.

Exemplo 2.2. A^t com $t \in \mathbb{Z}_+^*$ soma defida no Exemplo 1.10 e a multiplicação por escalar

$$a(a_1, \cdots, a_t) = (aa_1, \cdots, aa_t)$$

é um A-módulo.

Exemplo 2.3. Seja A um anel, com a soma e produto usuais. Os ideias de A são A-módulos, com a multiplicação por escalar

$$\begin{array}{rcl} A \times I & \to & I \\ (a,m) & \mapsto & am \end{array}$$

Exemplo 2.4. Se M e N são A-módulos então $M \times N = \{(m,m) : m \in M \text{ e } n \in N\}$ com as operações

$$\begin{array}{rcl} + : \quad (m_1,n_1)+(m_2,n_2) & = & (m_1+m_2, n_1+n_2) \\ \cdot : \quad a(m_1,n_1) & = & (am_1, an_1) \end{array}$$

formam um A-módulo com $0 = (0_M, 0_N)$ chamado de **A-módulo cartesiano de M por N.**

Definição 2.2. Seja A um anel e M um A-módulo. Um subgrupo N de M é um **A-submódulo** de M se a propriedade abaixo é satisfeita.

$$an \in N, \forall\, a \in A \text{ e } n \in N$$

.

Exemplo 2.5. Seja M um A-módulo. $N = \{0\}$ e $N = M$ são A-submódulos cde M.

Exemplo 2.6. Seja $G = M$ um A-módulo gerado por $m_1, \cdots, m_t$ e $I \subset A$ ideal. $IM = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i m_i : a_i \in I \right\}$ é subgrupo de M. De fato, sejam $m, m' \in IM$

$$\begin{array}{rcl} m + m' & = & \sum_{i=1}^{t} a_i m_i + \sum_{i=1}^{t} a_i' m_i \\ & = & \sum_{i=1}^{t} (a_i + a_i') m_i \\ & = & \sum_{i=1}^{t} b_i m_i \text{ com } b_i \in I. \end{array}$$

E, para qualquer $m \in IM$,

$$m^{-1} = \sum_{i=1}^{t} (-a_i) m_i \in IM$$

pois $-a_i \in I$ para todo $1 \leq i \leq t$.

IM é um A-submódulo de M.

De fato, IM é subgrupo de M e sejam $a \in A$ e $m \in IM$ temos que

$$\begin{aligned} am &= a\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} a a_i m_i \end{aligned}$$

como I é ideal de A, $aa_i \in I$, logo $am \in IM$.

2.1.1 Operações com Submódulos

Proposição 2.1. ***(Soma de Submódulos)*** *Sejam M um A-módulo e $M_1, M_2, \cdots, M_t$ A-submódulos de M. O conjunto*

$$\sum_{i=1}^{t} M_i = \left\{ \sum_{i=1}^{t} m_i : m_i \in M_i \right\}$$

é um A-submódulos de M.

Demonstração. Temos pelo exemplo 1.13 que $\sum_{i=1}^{t} M_i$ é subgrupo de M. Sejam $m = m_1 + \cdots + m_t \in \sum_{i=1}^{t} M_i$ e $a \in A$. Daí,

$$\begin{aligned} am &= a(m_1 + \cdots + m_t) \\ &= am_1 + \cdots + am_t \end{aligned}$$

como M_i é A-módulo, então $am_i \in M_i \; \forall\, i = 1, \cdots, t$. Logo, $am \in \sum_{i=1}^{t} M_i$. Portanto, $\sum_{i=1}^{t} M_i$ é A-submódulo de M. □

Proposição 2.2. ***(Interseção de Submódulos)*** *Sejam M um A-módulo e $M_1, M_2, \cdots, M_t$ sendo A-submódulos de M. Então $M_1 \cap \cdots \cap M_t$ é um A-submódulos de M.*

Demonstração. Pelo exemplo 1.13 a interseção de subgrupo é subgrupo. Sejam $m \in M_1 \cap \cdots \cap M_t$ e $a \in A$. Temos que $am \in M_i$ para todo $i = 1, \cdots, t$ pois os M_i's são A-submódulo de M. Logo, $am \in M_1 \cap \cdots \cap M_t$ concluindo que a $M_1 \cap \cdots \cap M_t$ é A-submódulo de M. □

Definição 2.3. Sejam M um A-módulo, N e P quaisquer A-submódulos de M. Definimos $(N : P)$ como sendo o conjunto de todos os $a \in A$ tais que $aP \subseteq N$. Em particular, $(0 : M)$

é o conjunto de todos os $a \in A$ tal que $aM = 0$. Este conjunto é chamado de **anulador** de M e é denotado por $Ann(M)$.

Proposição 2.3. *Sejam M um A-módulo e N e P A-submódulos de M. Então $(N : P)$ é um ideal de A. Em particular $Ann(M)$ é ideal de A*

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $b, b' \in (N : P)$.

Temos que $(ab)P = a(bP)$, como $bP \subseteq N$, então $abp \in N$ para todo $p \in P$ logo, $a(bP) \subseteq N$. Assim, $ab \in (N : P)$. E, seja $p \in P$, $(b-b')p = bp-b'p \in N$ logo, $(b-b')P \subseteq N$ implicando que $b - b' \in (N : P)$. Logo $(N : P)$ é ideal de A.

Em particular, se $b, b' \in Ann(M)$ temos que $(ab)M = a(bM) = a \cdot 0 = 0$. E, $(b - b')m = bm - b'm = b \cdot 0 - b' \cdot 0 = 0$, $\forall\, m \in M$. □

Seja $I \subseteq A$ ideal, podemos considerar M um (A/I)-módulo com o seguinte produto por escalar:

$$\begin{array}{rcl} A/I \times M & \to & M \\ (\overline{x}, m) & \mapsto & \overline{x}m \end{array}$$

Essa função está bem definida. De fato, sejam $\overline{x_1}, \overline{x} \in A/I$ e $m_1, m \in M$ tais que $\overline{x_1} = \overline{x}$ e $m_1 = m$. Logo, $\overline{x_1 - x} = \overline{0}$, assim,

$$\begin{aligned} (\overline{x_1 - x})m_1 &= (\overline{x_1} - \overline{x})m_1 \\ &= \overline{x_1}m_1 - \overline{x}m_1 \\ &= \overline{x_1}m_1 - \overline{x}m \end{aligned}$$

como $\overline{x_1 - x}m_1 = \overline{0}m_1 = 0$, então $\overline{x_1}m_1 = \overline{x}m$.

Definição 2.4. Um A-módulo é **fiel** se $Ann(M) = 0$. Note que se $Ann(M) = I$ então M é fiel como um (A/I)-módulo.

2.2 A-Módulos Quocientes

Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. Como $(M, +)$ é grupo abeliano $(N, +)$ é subgrupo normal, logo faz sentido considerar o grupo quociente $(M/N, +)$, isto é, o conjunto $M/N = \{m + N : m \in M\} = \{\overline{m} : m \in M\}$, das classes laterais de N em M munido com a adição

$$\begin{array}{rccc} + : & (M/N) \times (M/N) & \rightarrow & M/N \\ & (\overline{m_1}, \overline{m_2}) & \mapsto & \overline{m_1 + m_2} \end{array}$$

(M/N, +) com a multiplicação escalar :

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M/N & \rightarrow & M/N \\ & (a, \overline{m}) & \mapsto & a\overline{m} = \overline{am} \end{array}$$

é um A-módulo, chamado A**-módulo quociente**.

Vamos mostrar que as operações acima estão bem definidas, ou seja, independe da escolha do representante da classe. De fato, como $(M/N, +)$ é grupo a operação de soma já está bem definida (ver seção 1.2.1). Por outro lado, sejam $(a, \overline{m}), (a', \overline{m'}) \in A \times M$ tais que $a = a'$ e $\overline{m} = \overline{m'}$. Logo, $m - m' \in N$. Dessa forma

$$\begin{aligned} a(m - m') & \in N \\ am - am' & \in N \end{aligned}$$

logo $\overline{am - am'} \Rightarrow \overline{am} = \overline{am'} = a\overline{m'} = a'\overline{m'}e = \overline{a'm'} \Rightarrow a\overline{m} = a'\overline{m'}$.

2.3 Homomorfismo de A-Módulos

Definição 2.5. Sejam M e M' dois A-módulos, uma aplicação $f : M \rightarrow M'$ é um **homomorfismo de** A**-módulos** se

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$; $\forall\, m_1, m_2 \in M$.

2. $f(am) = a \cdot f(m)$; $\forall\, m \in M$ e $\forall\, a \in A$.

Por simplicidade podemos chamar f de A**-linear** ou **operador linear**. Se f for A-linear bijetivo então f é **isomorfismo** de A-módulos. Neste caso, diremos que M e M' são **isomorfos** e usaremos a notação $M \simeq M'$.

Exemplo 2.7. Sejam A-módulos M e N.

$$\begin{array}{rcl} f: M & \to & N \\ m & \mapsto & 0 \end{array}$$

é homomorfismo de A-módulos.

Exemplo 2.8. Seja M um A-módulo

$$\begin{array}{rcl} g: M & \to & M \\ m & \mapsto & m \end{array}$$

é homomorfismo de A-módulos.

Exemplo 2.9. Sejam M um A-módulo e A anel. Se $A^t = \{(a_1, \cdots, a_t) : a_i \in A\}$, então

$$\begin{array}{rccc} h: & A^t & \to & M \\ & (a_1, \cdots, a_t) & \mapsto & \sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

é um homomorfismo. De fato, sejam $(a_1, \cdots, a_t), (a'_1, \cdots, a'_t) \in A^t$ e $a \in A$.

$$\begin{array}{rrcl} i. & h((a_1, \cdots, a_t) + (a'_1, \cdots, a'_t)) & = & h(a_1 + a'_1, \cdots, a_t + a'_t) \\ & & = & \sum_{i=1}^{t} (a_i + a'_i) m_i \\ & & = & \sum_{i=1}^{t} a_i m_i + a'_i m_i \\ & & = & \sum_{i=1}^{t} a_i m_i + \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i \\ & & = & h(a_1, \cdots, a_t) + h(a'_1, \cdots, a'_t). \\ ii. & h(a(a_1, \cdots, a_t)) & = & h(aa_1, \cdots, aa_t) \\ & & = & \sum_{i=1}^{t} a a_i m_i \\ & & = & a \sum_{i=1}^{t} a_i m_i \\ & & = & a h(a_1, \cdots, a_t) \end{array}$$

Definição 2.6. Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de A-módulos o **núcleo** e a **imagem** de f são, respectivamente, os conjunto $Ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ e $Im(f) = \{f(m) : m \in M\}$.

Exemplo 2.10. Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. A projeção canônica $\pi : M \to M/N$ definida por $\pi(m) = \overline{m}$ é A-linear, sobrejetora com núcleo igual a N.

De fato, π é A-linear pois, sejam $m_1, m_2 \in M$ e $a \in A$.

$$\pi(m_1 + m_2) = (\overline{m_1 + m_2}) = \overline{m_1} + \overline{m_2} = \pi(m_1) + \pi(m_2)$$

e

$$\pi(a \cdot m_1) = \overline{a \cdot m_1} = a \cdot \overline{m_1} = a \cdot \pi(m_1).$$

Além disso, π é sobrejetiva pois, para todo $\overline{m} \in M/N$ existe $m \in M$ tal que $\pi(m) = \overline{m}$.

Agora observe que

$$Ker(\pi) = \{m \in M : \pi(m) = \overline{0}\} = \{m \in M \,|\, \overline{m} = \overline{0}\}$$

e

$$\overline{0} = \overline{m} \Leftrightarrow m \in N.$$

Assim, $m \in Ker(\pi) \Leftrightarrow m \in N$, ou seja, $\mathrm{Ker}(\pi) = N$.

Proposição 2.4. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de A-módulos. Então $Ker(f)$ e $Im(f)$ são A-submódulos de M e N, respectivamente. E, se W é um A-submódulo de N, então $f^{-1}(W) = \{m \in M : f(m) \in W\}$ é A-submódulo de M.*

Demonstração. Segue da Observação 1.9 que $Ker(f)$ e $f^{-1}(W)$ são subgrupos de M e $Im(f)$ é subgrupo de N.

$Ker(f)$: Sejam $a \in A$ e $m \in Ker(f)$.

$$f(am) = af(m) = a \cdot 0 = 0$$

isto é, $am \in Ker(f)$ logo $Ker(f)$ é A-submódulo de M.

$Im(f)$: Sejam $a \in A$ e $n \in Im(f)$, logo existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Daí,

$$an = af(m) = f(am) = f(m')$$

com $m' \in M$. Logo $an \in Im(f)$, concluindo que $Im(f)$ é A-submódulo de N.

$f^{-1}(W)$: Sejam $a \in A$ e $m \in f^{-1}(W)$, logo $f(m) \in W$. Dessa forma, como W é A-módulo $af(m) \in W$ e $af(m) = f(am)$, $f(am) \in W$. Assim, $am \in f^{-1}(W)$ induzindo que $f^{-1}(W)$ é A-submódulo de M. $\square$

Observação 2.1. Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de A-módulos. Uma vez que $Im(f)$ é A-submódulo de N faz sentido considerar $N/Im(f)$, tal A-módulo é chamado **co-núcleo** de f e será denotado por $Coker(f)$.

O conjunto de todos os homomorfismos de A-módulos de M em N é, também, um A-módulo, munido com a soma e produto por escalar, respectivamente

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) \\ a(f(x)) & = & f(ax) \end{array} \quad \forall\, x \in M$$

e $a \in A$. Onde $f, g : M \to N$ são homomorfirmos. Denotaremos este A-módulo por $Hom_A(M, N)$.

Sejam $u : M^{'} \to M$ e $v : N \to N^{'}$ dois homomorfismo de A-módulos, então eles determinam as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \overline{u}: & Hom_A(M,N) & \longrightarrow & Hom_A(M^{'},N) \\ & f & \longmapsto & \overline{u}(f) = f \circ u \\ \overline{v} & Hom_A(M,N) & \longrightarrow & Hom_A(M,N^{'}) \\ & f & \longmapsto & \overline{v}(f) = v \circ f \end{array}$$

que são homomorfismos de A-módulos por ser composição de homomorfismos.

Lema 2.5. *Sejam $f \in Hom_A(M, M')$ e $N \subseteq Ker(f)$. Então existe um único homomorfismo de A-módulos $\overline{f} : M/N \to M^{'}$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$ definido por $\overline{f}(\overline{m}) = f(m)$.*

Demonstração. Seja $f : M \to M^{'}$ A-linear tal que $N \subseteq Ker(f)$. Defina a função

$$\overline{f} : M/N \to M^{'}$$

$$\overline{f}(\overline{m}) = f(m).$$

Mostraremos que $\overline{f}$ está bem definida, é homomorfismo e que $f = \overline{f} \circ \pi$.

Sejam $\overline{m_1}$ e $\overline{m_2} \in M/N$ tais que $\overline{m_1} = \overline{m_2}$. Dessa forma

$$\overline{m_1} - \overline{m_2} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{m_1 - m_2} = \overline{0} \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in N$$

como $N \subseteq Ker(f)$ segue que $m_1 - m_2 \in Ker(f)$. Logo, $f(m_1 - m_2) = 0$, e como f é A-linear

$$0 = f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) \Rightarrow f(m_1) = f(m_2).$$

Isto é, dados $\overline{m_1}$ e $\overline{m_2} \in M/N$ com $\overline{m_1} = \overline{m_2}$ mostramos que $\overline{f}(\overline{m_1}) = \overline{f}(\overline{m_2})$, portanto $\overline{f}$ está bem definida.

Observe agora que dados $\overline{m_1}$, $\overline{m_2} \in (M/N)$ e $a \in A$

- $\overline{f}(\overline{m_1} + \overline{m_2}) = \overline{f}(\overline{m_1 + m_2}) = f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = \overline{f}(\overline{m_1}) + \overline{f}(\overline{m_2})$
- $\overline{f}(a \cdot \overline{m_1}) = \overline{f}(\overline{a \cdot m_1}) = f(a \cdot m_1) = a \cdot f(m_1) = a\overline{f}(\overline{m_1})$.

Assim, $\overline{f}$ é homomorfismo.

Quanto a unicidade, agora suponha que exite $g : M/N \to M'$ tal que $g \circ \pi = f$. Sendo π sobrejetora exite uma inversa a direita. Assim,

$$g \circ \pi = f = \overline{f} \circ \pi \Rightarrow g \circ \pi \circ \pi^{-1} = \overline{f} \circ \pi \circ \pi^{-1} \Rightarrow g = \overline{f}$$

Portanto, $\overline{f}$ é único. □

Teorema 2.6. ***(Teorema do Isomorfismo de A-módulos)*** *Sejam M, M' dois A-módulos e N um A-submódulo de M. Seja $f : M \to M'$ A-linear tal que Ker(f)= N. Então $M/N \simeq Im(f)$. Em particular, se f é sobrejetora $M/N \simeq M'$.*

Demonstração. Considere

$$\begin{array}{rccc} g: & M/N & \to & Im(f) \\ & \overline{m} & \mapsto & f(m). \end{array}$$

Pelo Lema 2.5 g está bem definida e é homomorfismo. Note que g é sobrejetiva, pois é o mesmo homomorfismo $\overline{f}$ do Lema 2.5 com contra-domínio restrito a sua imagem. Dessa forma, para concluirmos o Teorema basta mostrar que g é injetiva.

Sejam $\overline{a}$ e $\overline{b} \in M/N$ tal que $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b})$ segue que

$$\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b}) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) - f(b) = 0 \Rightarrow f(a - b) = 0$$

pois f é homomorfismo. E,

$$f(a - b) = 0 \Rightarrow (a - b) \in Ker(f) = N \Rightarrow (a - b) \in N$$

Logo,

$$\overline{a-b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

como queriamos.

□

Exemplo 2.11. Sejam A um anel e $M_1, ..., M_t$ um conjunto finito de A-módulos. Do Exemplo 2.4 podemos induzir, de forma natural, uma estrutura de A-módulos para o conjunto $M_1 \times ... \times M_t = \{(m_1, ..., m_t) \,|\, m_i \in M_i;\ \forall\, i = 1, ..., t\}$. Seja N_i submódulo de M_i para $i = 1, ..., t$. Então $(M_1 \times ... \times M_t)/(N_1 \times ... \times N_t) \simeq (M_1/N_1) \times ... \times (M_t/N_t)$.

Demonstração. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & M_1 \times \ldots \times M_t & \to & (M_1/N_1) \times \ldots \times (M_t/N_t) \\ & (m_1, \ldots, m_t) & \mapsto & (\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_t) \end{array}.$$

Note que f é homomorfismo sobrejetor e o núcleo de f é $N_1 \times \ldots \times N_t$. De fato, tome $(m_1, \ldots, m_t)$ e $(m_1', \ldots, m_t') \in M_1 \times \ldots \times M_t$ e $a \in A$, então

$$\begin{aligned} f((m_1, \ldots, m_t) + (m_1', \ldots, m_t')) &= f(m_1 + m_1', \ldots, m_t + m_t') \\ &= (\overline{m_1 + m_1'}, \ldots, \overline{m_t + m_t'}) \\ &= (\overline{m_1} + \overline{m_1'}, \ldots, \overline{m_t} + \overline{m_t'}) \\ &= (\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) + (\overline{m_1'}, \ldots, \overline{m_t'}) \\ &= f(m_1, \ldots, m_t) + f(m_1', \ldots, m_t') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(a(m_1, \ldots, m_t)) &= f(am_1, \ldots, am_t) \\ &= (\overline{am_1}, \ldots, \overline{am_t}) \\ &= a(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) \\ &= af(m_1, \ldots, m_t) \end{aligned}$$

Logo, f é homomorfismo.

Seja $(m_1, \ldots, m_t) \in N_1 \times \ldots \times N_t$. Então $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$, assim $N_1 \times \ldots \times N_t \subset Ker(f)$. Por outro lado, se $(m_1, \ldots, m_t) \in Ker(f)$, teremos que $f((m_1, \ldots, m_t)) =$

$(\overline{0}, \ldots, \overline{0})$. Então $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$, logo $m_i \in N_i$ para $1 \leq i \leq t$. Isto é, $Ker(f) \subset N_1 \times \ldots \times N_t$. Dessa forma $Ker(f) = N_1 \times \ldots \times N_t$.

Além disso, f é sobrejetiva, pois seja $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) \in (M_1/N_1) \times \ldots \times (M_t/N_t)$ existe $(m_1, \ldots, m_t) \in M_1 \times \ldots \times M_t$ tal que $f((m_1, \ldots, m_t)) = (\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t})$.

Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo de A-módulos $(M_1 \times ... \times M_t)/(N_1 \times ... \times N_t) \simeq (M_1/N_1) \times ... \times (M_t/N_t)$. □

Proposição 2.7. *Sejam M um A-módulo e $N \subseteq M$ um A-submódulo. Existe uma correspondência bijetiva entre os A-submódulos de M/N e os A-submódulos de M que contém N.*

Demonstração. Seja $\pi : M \longrightarrow M/N$, mostramos que π é homomorfismo sobrejetivo com núcleo N (ver Exemplo 2.10). Dado W um submódulo de M, então $\pi(W)$ é um submódulo de M/N. Por outro lado, seja S submódulo de M/N, defina $W = \pi^{-1}(S)$ (submódulo de M). Note que $N \subset W$. De fato, como S é submódulo de M/N, segue que $\overline{0} \in S$. Sabemos que $\forall\, n \in N$, $\pi(n) = \overline{n} = \overline{0}$. Logo, $\forall\, n \in N$, $n \in \pi^{-1}(S) = W$. □

Proposição 2.8. *Seja M um A-módulo.*

1. *Se $N \subseteq M \subseteq L$ são A-módulos, então $(L/N)/(M/N) \simeq (L/M)$.*

2. *Se M_1 e M_2 são A-submodulos de M, então $(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2)$.*

Demonstração. 1. Defina

$$\begin{array}{rccc} f: & L/N & \rightarrow & L/M \\ & \overline{x}^1 & \mapsto & \overline{x}^2 \end{array}$$

f está bem definida, pois $N \subseteq M$ e é homomorfismo. De fato, sejam $\overline{a}^1, \overline{b}^1 \in L/N$ e $c \in A$

$$\begin{array}{lllll} i. & f(\overline{a}^1 + \overline{b}^1) = & f(\overline{a+b}^1) = & \overline{a+b}^2 = & \overline{a}^2 + \overline{b}^2 = & f(\overline{a}^1) + f(\overline{b}^1) \\ ii. & f(c\overline{a}^1) = & f(\overline{ca}^1) = & \overline{ca}^2 = & c\overline{a}^2 = & cf(\overline{a}^1) \end{array}$$

Além disso, $Ker(f) = M/N$. De fato, seja $\overline{x}^1 \in Ker(f)$, $f(\overline{x}^1) = \overline{0}^2$ teremos que $x \in M$. Como f é homorfismo $f(\overline{0}^1) = \overline{0}^2$, assim $\overline{x}^1 = \overline{0}^1$ logo $x \in N$ implicando que $\overline{x}^1 \in M/N$. Por outro lado, se $\overline{x}^3 \in M/N$, então $x \in M$ logo $\overline{x}^2 = \overline{0}^2$ em L/M. Daí, $f(\overline{x}^1) = \overline{0}^2$, portanto, $\overline{x}^3 \in Ker(f)$.

Note que f é sobrejetiva, pois seja $\overline{x}^2 \in L/M$, por $N \subseteq M$, existe $\overline{x}^1$ em L/N tal que $f(\overline{x}^1) = \overline{x}^2$. Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo de A-módulos $(L/N)/(M/N) \simeq (L/M)$.

2. Pela Proposição 2.1 é fácil ver que $M_1 \subseteq M_1 + M_2$ e $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Seja f definida a seguir

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2 & \to & \frac{M_1+M_2}{M_1} \\ & m_2 & \mapsto & \overline{m_2} \end{array}$$

Dados $m_2, m_2' \in M_2$ e $a \in A$, então

$$\begin{array}{ccccccc} f(m_2 + m_2') & = & \overline{m_2 + m_2'} & = & \overline{m_2} + \overline{m_2'} & = & f(m_2) + f(m_2') \\ f(am_2) & = & \overline{am_2} & = & a\overline{m_2} & = & af(m_2) \end{array}$$

logo f é homorfismo de A-módulos. Note também que dado $m = m_1 + m_2 \in M_1 + M_2$, teremos que $m_2 = m - m_1 \in M_2$ e que

$$\begin{array}{rcl} f(m - m_1) & = & \overline{m - m_1} \\ & = & \overline{m} - \overline{m_1} \end{array}$$

como $\overline{m_1} = \overline{0}$ teremos

$$f(m - m_1) = \overline{m}$$

assim, f é sobrejetiva. Além disso

$$\begin{array}{rcl} Ker(f) & = & \{m_2 \in M_2 : f(m_2) = \overline{0}\} \\ & = & \{m_2 \in M_2 : \overline{m_2} = \overline{0}\} \\ & = & \{m_2 \in M_2 : m_2 \in M_1\} \\ & = & M_1 \cap M_2 \end{array}$$

Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo $(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2)$

$\square$

2.4 A-módulo Finitamente Gerado

Seja M um A-módulo, M é dito **finitamente gerado** se existem finitos $m_1, m_2, \dots, m_t \in M$ tais que

$$M = Am_1 + ... + Am_t = \left\{ \sum_{j=1}^{t} a_j m_j : a_j \in A \right\}.$$

Os elementos $m_1, m_2, \dots, m_t$ são chamados de **geradores** de M. Se M é gerado por um único elemento diremos que M é **cíclico**.

Exemplo 2.12. Seja A um anel. Sobre o grupo abeliano $(A, +)$, defina uma multiplicação escalar por

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

Com essa multiplicação A é A-módulo cíclico, gerado por $\{1\}$, e os ideiais de A são A-submódulos. De maneira geral A^t (Exemplo 2.9) é um A-módulo finitamente gerado.

De fato, o conjunto $\{e_1, e_2, \cdots, e_t\}$, onde $e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ elemento de A^t onde a i-ésima coordenada é 1 e as demais são zero geram A^t, pois dado $(a_1, \cdots, a_t) \in A^t$ teremos

$$(a_1, a_2, \cdots, a_t) = a_1(1, 0, 0, \cdots, 0) + a_2(0, 1, 0, \cdots, 0) + \cdots + a_t(0, \cdots, 0, 1) = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i$$

Proposição 2.9. *Seja M um A-módulo. Então M é finitamente gerado se, e só se, existe N A-submódulo de A^t, com $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que A^t/N é isomorfo a M.*

Demonstração. Seja M um A-módulo finitamente gerado e $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\}$ geradores de M

$$\begin{array}{rccc} \phi : & A^t & \longrightarrow & M \\ & (a_1, a_2, \dots, a_t) & \longmapsto & a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_nm_t = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

Pelo Exemplo 2.12 ϕ é homomorfismo. Temos que ϕ é sobrejetivo, pois para cada $m \in M$ temos que $m = a_1m_1 + \cdots + a_tm_t = \phi(a_1, \cdots, a_t)$. Logo, pelo Teorema 2.6 $A^t/Ker(\phi) \simeq M$. Como $Ker(\phi) = N$ é A-submódulo de A^t concluimos o que queriamos.

Por outro lado, seja $\phi : A^t/N \to M$ um isomorfismo com N A-submódulo N de A^t. Considere a projeção canônica $\pi : A^t \to A^t/N$. Então $f = \phi \circ \pi : A^t \to M$ é sobrejetiva.

Dessa forma, dado $m \in M$ existe $(a_1, \cdots, a_t) \in A^t$ tal que

$$m = f(a_1, \cdots, a_t) = f\left(\sum_{i=1}^{t} a_i e_i\right)$$

como f é homomorfismo

$$m = \sum_{i=1}^{t} f(a_i e_i) = \sum_{i=1}^{t} f(a_i) f(e_i)$$

ou seja, $f(e_1), \cdots, f(e_i)$ são geradores de M, portanto, M é finitamente gerado. $\square$

Seja M um A-módulo. Como nos Espaços Vetorias, dizemos que os elementos $m_1, ..., m_t$ de M são **A-linearmente independentes** sempre que $\sum_{j=1}^{t} a_j m_j = 0$, com $a_j \in A$, tivermos que $a_j = 0, \forall\, j = 1, ..., t$. Neste caso, usaremos a notação A-li. Caso contrario diremos que $m_1, ..., m_t$ são **A-linerarmente dependentes**. Neste caso, usaremos a notação A-ld.

Definição 2.7. Um A-módulo finitamente gerado M é dito **livre** se ele admite um conjunto finito de geradores $m_1, ..., m_t$ que são A-li. Neste caso, diremos que $m_1, ..., m_t$ é uma **base** para M e M$= Am_1 + ... + Am_t$.

Exemplo 2.13. Note que $(\mathbb{Z}_n, +)$ não é livre como $\mathbb{Z}$-módulo. Na verdade é possivel verificar que qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}_n$ é ld. Considere, por exemplo, $\mathbb{Z}_6$ considere o subconjunto $\{\overline{2}, \overline{5}\}$. Se $a\overline{2} + b\overline{5} = \overline{0}$ considere $a = 30$ e $b = 30$. De forma geral, podemos considerar os coeficientes sendo um múltiplo comum entre os elementos do conjunto de geradores e n.

Observação 2.2. Sejam M um A-módulo livre e $m \in M$. Então existem únicos $a_1, ..., a_t \in A$ tais que

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i$$

onde $\{m_1, ..., m_t\}$ é base de M.

De fato, suponhamos que existem $a'_1, ..., a'_t$ tais que $m = \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i$. Dessa forma,

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i = \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i$$

logo

$$\sum_{i=1}^{t} (a_i - a'_i) m_i = 0$$

como M é livre temos que $a_i - a'_i = 0 \Rightarrow a_i = a'_i$, para todo $1 \leq i \leq t$.

Observação 2.3. Note que se M é A-linear livre de base $\{m_1, ..., m_t\}$ é equivalente a $M \simeq A^t$. Da Proposição 2.9 sabemos que M ser finitamente gerado é equivalente a dizer que existe A-submódulo N de A^t tal que $A^t/N \simeq M$. Na demonstração da mesma proposição $N = Ker(h)$

$$\begin{array}{rccc} h: & A^t & \longrightarrow & M \\ & (a_1, ..., a_t) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{t} a_i m_i. \end{array}$$

Note que , sendo M A-módulo livre $Ker(h) = \{(0, 0, \cdots, 0)\}$. De fato, se $(a_1, ..., a_t) \in Ker(h)$

$$\begin{array}{rcl} h(a_1, ..., a_t) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{t} a_i m_i & = & 0 \end{array}$$

como $\{m_1, \cdots, m_t\}$ é A-li. logo, $a_i = 0 \; \forall \; i = 1, 2, \cdots, t$. Portanto, $M \simeq A^t$.

Observação 2.4. Sabemos que em um espaço vetorial, um vetor não nulo forma um conjunto li. No entanto, o mesmo não é válido para A-módulos. Por exemplo, considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Temos que:

$$2 \cdot (0, \overline{1}) = (0, \overline{0}).$$

Dessa forma, o conjunto $\{(0, \overline{1})\}$ é formado por um elemento não nulo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, e não é li.

Definição 2.8. Seja M um A-módulo. Dizemos que M é **livre de torção** quando para todo m $\in$ M não nulo tivermos que o conjunto $\{$m$\}$ é l.i.

Exemplo 2.14. Espaços Vetorias são módulos livres de torção.

Observação 2.5. Nem sempre um submódulo de um módulo livre é livre. Considere como exemplo o anel $\mathbb{Z}_6$ dos inteiros módulo 6, que é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre com base $\{\overline{1}\}$. Note que $N = \{\overline{0}\,, \overline{2}\,, \overline{4}\}$ é um $\mathbb{Z}_6$-submódulo de $\mathbb{Z}_6$ que não é livre. De fato, todo subconjunto unitário de N é linearmente dependente, é fácil ver que $\overline{3} \cdot n = \overline{0}$ para todo $n \in$ N.

Proposição 2.10. *Seja M um A-módulo. Então M é livre de torção se, e somente se, dados $a \in A$ e $m \in M$ tais que $am = 0$, então $a = 0$ ou $m = 0$.*

Demonstração. Sejam $a \in A$, $m \in M$ tais que $am = 0$. Se $m = 0$ não há nada que provar, se $m \neq 0$ como M é livre de torção então o conjunto m é A-l.i. logo $am = 0$ implica que $a = 0$.

Reciprocamnete, vamos supor verdadeira a propriedade se $am = 0$ então $a = 0$ ou $m = 0$ para todo $a \in A$, $m \in M$. Então para todo $m \in M$, com $m \neq 0$ vai-se verificar que se $am = 0$ teremos que $a = 0$ logo o conjunto $\{m\}$ é A-l.i. e portanto M é livre de torção. $\square$

Observação 2.6. Nem sempre um submódulo de um módulo finitamente gerado é finitamente gerado. Por exemplo, considere o anel de polinômio $M = \mathbb{R}[x_1, x_2, ...]$, que é M-módulo finitamente gerado por $\{1\}$, mas $N = (x_1, x_2, ...)$ é M-submodulo de M e não é finitamente gerado, pois não é finito.

Proposição 2.11. *Sejam A um domínio de ideais principais e M um A-módulo finitamente gerado. Então todo A-submodulo de M é finitamente gerado.*

Demonstração. Seja M um A-módulo finitamente gerado, logo existem $m_1, ..., m_t$ tais que $M = Am_1, ..., Am_t$. Seja N um A-submódulo de M, vamos mostrar que N é finitamente gerado por indução sobre t.

Se M for gerado por um elemento considere $f : A \to Am_1 = M$ definida por $f(a) = am_1$.

Note que, f é homomorfismo (ver exemplo 2.9). Além disso, f é sobrejetiva pois, dado $m \in M$ temos que $m = am_1$ para algum $a \in A$, e $f(a) = am_1 = m$.

Seja $I = ker(f)$, pelo Teorema 2.6 temos que $A/I \simeq M$. Logo exite W submódulo de A/I tal que $W \simeq N$, pois se W é submódulo de de A/I, então a imagem de W é isomorfa a um submódulo de M.

Pela Proposição 2.7 $W = J/I$ com J ideal de A com $I \subseteq J$.

Como A é domínio de ideias principais, $J = \langle a \rangle$, logo J/I também é ideal principal. Assim, pela Porposição 1.4, N é gerado por um único elemento.

Suponha que o resultado seja válido para A-módulos gerados por uma quantidade de elementos menores que t.

Defina $M' = Am_2, ..., Am_t$ e $B = \{b \in A : bm_1 \in N + M'\}$, com $N \subseteq M = Am_1 + M'$ submódulo de M.

Note que B é ideal de A, pois se $b \in B$ e $a \in A$ temos que $(ab)m_1 = a(bm_1) = a(n + m') = an + am' \in N + M'$, pois N e M' são A-submódulo, assim

$$(ab)m_1 \in N + M' \Rightarrow ab \in B$$

Como todo ideal de A é principal, $B = \langle b \rangle$. E, como $bm_1 \in N + M'$ existe $n_0 \in N$ tal que $bm_1 - n_0 \in M'$.

Afirmação: $N = An_0 + (N \cap M')$.

Seja $x \in N$, $x = m' + a_0 m_1$ com $a_0 \in A$ e $m' \in M'$. Temos que

$$x = m' + a_0 m_1 \Rightarrow a_0 m_1 = x - m' \in N + M' \Rightarrow a_0 m_1 \in N + M' \Rightarrow a_0 \in B \Rightarrow a_0 = ab$$

Daí, $a_0 m_1 = abm_1 - an_0 + an_0 = a(bm_1 - n_0) + an_0$ e, como $bm_1 - n_0 \in M'$, temos que $a(bm_1 - n_0) + an_0 \in M' + An_0 \Rightarrow a_0 m_1 \in M' + An_0$. Assim, $x = m' + a_0 m_1 \in An_0 + M'$.

Agora escreva $x = a_1 n_0 + m''$ com $a_1 \in A$ e $m'' \in M'$. Segue que, $m'' = x - a_1 n_0 \in N \Rightarrow m'' \in N \Rightarrow m'' \in (N \cap M') \Rightarrow x \in An_0 + (N \cap M')$

Por outro lado, seja $x \in An_0 + (N \cap M') \Rightarrow x = an_0 + k$ com $k \in (N \cap M')$ $\Rightarrow an_0 + k \in N \Rightarrow x \in N$

Como $N = An_0 + (N \cap M')$ e M' é finitamente gerado por hipotese de indução, logo $(N \cap M')$ também é finitamente gerado. Assim, $An_0 + (N \cap M')$ é finitamente gerado, consequentemente, N é finitamente gerado. □

Sejam A um anel, M um A-módulo e I um ideal de A. Como $IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m : a_i \in I \right\}$ é um A-submodulo de M, então podemos considerar o A-módulo quociente M/IM. Podemos também considerar o grupo quociente $(M/IM, +)$ munido da multiplicação escalar:

$$\begin{array}{rcl} (A/I) \times (M/IM) & \longrightarrow & (M/IM) \\ (\overline{a}, \overline{m}) & \mapsto & \overline{am} \end{array}$$

Verifiquemos que esta multiplicação é bem definida e que, com ela, (M/IM) é um (A/I)-módulo. Sejam $\overline{a_1}, \overline{a} \in A/I$ com $\overline{a_1} = \overline{a}$ e $\overline{m_1}, \overline{m} \in M/IM$ tal que $\overline{m_1} = \overline{m}$, então $m_1 - m \in IM$ e $a_1 - a \in I$. Logo, $a(m_1 - m) \in IM$ e $(a_1 - a)m \in IM$, pois IM é A-módulo. Assim,

$$a_1\overline{m_1 - m} = \overline{a_1m_1 - a_1m} = \overline{a_1m_1} - \overline{a_1m} = \overline{0}$$

$$\overline{(a_1 - a)m} = \overline{a_1m - am} = \overline{a_1m} - \overline{am} = \overline{0}$$

portanto, $\overline{a_1m_1} = \overline{a_1m} = \overline{am}$.

Proposição 2.12. *Seja N um subgrupo do grupo $(M/IM, +)$. Então o subgrupo N é um A-submódulo de M/IM se, e somente se, N é um (A/I)-submodulo de M/IM.*

Demonstração. Seja N um A-submódulo de M/IM. Tome $\overline{n} \in N$, e $\overline{a} \in A/I$, então $\overline{a}\,\overline{n} = \overline{an} \in N$.

Reciprocamente, se N é um (A/I)-submódulo. Tome $\overline{n} \in N$, e $a \in A$, então $a\overline{n} = \overline{an} = \overline{a}\,\overline{n} \in N$. $\square$

3 Produto Tensorial e Sequências Exatas

Neste capítulo, construíremos o Produto Tensorial e veremos definição e algumas propriedades das Sequências Exatas, assim como, o Lema da Serpente. Além disso, veremos uma propriedade Exata do Produto Tensorial que é um dos objetivos do nosso trabalho.

3.1 Produto Tensorial

Definição 3.1. Sejam M, N e P três A-módulos. A função $f : M \times N \to P$ é A-bilinear se $\forall\, m, m^{'} \in M$; $n, n^{'} \in N$ e $a \in A$ satisfaz:

1. $f(m + m^{'}, n) = f(m, n) + f(m^{'}, n)$

2. $f(m, n + n^{'}) = f(m, n) + f(m, n^{'})$

3. $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$

Construiremos um A-módulo denotado por T, chamado de **produto tensorial** de M e N, com a propriedade que a aplicação A-bilinear $M \times N \to P$ esteja em correspondência com a aplicação A-linear $T \to P$, para todo A-módulo P.

Teorema 3.1. *Sejam M e N dois A-módulos. Então existe um A-módulo T junto com a aplicação A-bilinear $g : M\times N \to T$ tal que, dados quaisquer A-módulos P e $f : M\times N \to P$ aplicação A-bilinear, existe uma única aplicação A-linear $f' : T \to P$ com $f = f' \circ g$. Além disso, se (T, g) e (T', g') são dois pares que satisfazem essa propriedade, então existe um único isomorfismo $j : T \to T'$ tal que $j \circ g = g'$.*

Demonstração. Seja C o A-módulo livre cujos elementos são combinações lineares de elementos de $M \times N$ com coeficientes em A, isto é, são expressões da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i);\ \text{com } a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N$$

Seja um A-submódulo D de C gerado por todos os elementos de C do tipo:

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y) \tag{3.1}$$

$$(x,y+y)-(x,y)-(x,y') \tag{3.2}$$

$$(ax,y)-a(x,y) \tag{3.3}$$

$$(x,ay)-a(x,y) \tag{3.4}$$

Considere $T = C/D$. Para cada elemento base $(x,y) \in C$, denote sua classe em T por $x \otimes y$. Uma vez que os elementos 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 pertencem a D, tem-se que a classe das mesmas em T satisfazem

$$(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \tag{3.5}$$

$$x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y' \tag{3.6}$$

$$(ax) \otimes y = a(x \otimes y) \tag{3.7}$$

$$a \otimes ay = ax \otimes y \tag{3.8}$$

Dessa forma, definindo

$$\begin{array}{rccc} g: & M \times N & \to & T \\ & (x,y) & \mapsto & x \otimes y \end{array}$$

segue 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 que g é aplicação A-bilinear.

Qualquer função $f : M \times N \to P$ A-bilinear, é estendível por linearidade a um homomorfismo $\overline{f} : C \to P$, com $\overline{f}(x,y) = f(x,y)$. Observe agora que

$$\begin{aligned} \overline{f}((x+x',y)-(x,y)-(x',y)) &= f((x+x',y)-(x,y)-(x',y)) \\ &= f(x+x',y)-f(x,y)-f(x',y) \\ &= f(x,y)+f(x',y)-f(x,y)-f(x',y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

análogamente segue que $\overline{f}$ se anula nos elementos 3.2, 3.3 e 3.4 de D, isto é, $D \subseteq Ker(\overline{f})$. Então, pelo Lema 2.5 existe um único $f' : C/D \to P$ com

$$f = f' \circ g$$

consequentemente (T,g) satisfazem as hipóteses do Teorema.

Unicidade: Suponha que existam T' A-módulos e $g' : M \times N \to T$ aplicação bilinear satisfazendo as hipóteses do Teorema. Tomando $P = T'$ e $f = g$, existe única transformação A-linear $j' : T' \to T$ tal que $g = j' \circ g'$, como sugere o diagrama.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & T' \\ T \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & T' \arrow[dl, "j'"] \\ T & \end{tikzcd}$$

Note que a função $j : T \to T'$ é de forma que $g' = j \circ g$ e a $j' : T' \to T$ satisfaz $g = j' \circ g'$. Daí,

$$g = j' \circ (j \circ g) = (j' \circ j) \circ g$$

logo $j' \circ j = id : T \to T$. Portanto j' é isomorfismo.

$\square$

Observação 3.1. O A-módulo T construído na proposição anterior é chamado de **produto tensorial** de M por N e será denotado por $M \otimes_A N$. Ele é gerado pelos elementos $x \otimes y$ com $x \in M$ e $y \in N$, chamaremos um elemento deste tipo de **tensor elementar**. Se $(x_i)_{i \in I}$ e $(y_j)_{j \in J}$ são famílias de geradores de M e N, respectivamente, então os elementos $x_i \otimes y_j$ geram $M \otimes_A N$. De fato, seja $(x \otimes y) \in M \otimes N$

$$\begin{aligned} (x \otimes y) &= (\sum_{i \in I} a_i x_i \otimes y) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i x_i \otimes y) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i x_i \otimes \sum_{j \in J} a'_j y_j) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i (x_i \otimes a'_j y_j) \end{aligned}$$

Se M e N são finitamente gerados, então $M \otimes_A N$ também é.

Observação 3.2. A notação $x \otimes y$ pode gerar ambiguidade, a menos que especifiquemos o produto tensorial ao qual pertence. Pode acontecer, por exemplo, que nos submódulos de M' e N' de M e N, respectivamente, $x \otimes y$ seja zero em $M \oplus N$ e não seja não nulo em $M' \otimes N'$, com $x \in M'$ e $y \in N'$.

Por exemplo, considere $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $M' = 2\mathbb{Z}$. Note que $2 \otimes y = 1 \otimes 2y = 1 \otimes 0 = 0$ em $M \times N$, mas $2 \otimes y$ é não-nulo em $M' \otimes N$.

Observação 3.3. Não precisaremos usar a construção do produto tensorial do Teorema 3.1. O que, de fato, usaremos são as propriedades definidoras.

Observação 3.4. Indutivamente podemos definir uma aplicação multilinear $f : M_1 \times \ldots \times M_n \to P$ analogamente a Definição 3.1, isto é, linear em cada coordenada. Segue da prova da Proposição 3.1 que teremos um produto multitensor $T = M_1 \times \ldots \times M_n$, gerado por todos produtos $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ com $x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n$.

Existem vários "isomorfismos canônicos", dos quais, alguns declaramos a seguir:

Proposição 3.2. *Sejam M, N e P A-módulos. Então existem únicos isomorfismo*

1. $M \otimes N \simeq N \otimes M$;
2. $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$;
3. $(M \times N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \times (N \otimes P)$;
4. $A \otimes M \simeq M$.

Demonstração. 1. No Teorema 3.1 basta tomar $P = N \otimes M$, se $f : M \times N \to P$ é A-bilinear, então induz um único isomorfismo $\overline{f} : M \otimes N \to N \otimes M$

2. Considere os A-módulos $M \otimes N$ e P, pelo Teorema 3.1 está bem definido o A-módulo $(M \otimes N) \otimes P$. Por outro lado, tomando os A-módulos M, N e P, também pelo Teorema 3.1, está bem definido o A-módulo $M \otimes N \otimes P$. Assim, dados quaisquer A-módulos Q,Q' e as transformações A-bilineares f e f' existem únicas aplicações A-lineares h e h' tais que os diagramas, a seguir, comutam, ou seja, $f = h \circ g$ e $f' = h' \circ g'$.

$$\begin{tikzcd} (M \otimes N) \times P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Q \\ (M \otimes N) \otimes P \arrow[ur, "\exists!\, h"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times (N \otimes P) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Q' \\ M \otimes (N \otimes P) \arrow[ur, "\exists!\, h'"'] & \end{tikzcd}$$

Tome $Q = M \otimes N \otimes P$, $Q' = (M \otimes N) \otimes P$, $f(x \otimes y, z) = x \otimes y \otimes z$ e $f'(x, y, z) = (x \otimes y) \otimes z$. Segue das prorpiedades do produto tensorial que f e f' são A-bilineares. Note ainda que existem únicas aplicações A-lineares $h : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P$ e

$h' : M \otimes N \otimes P \to (M \otimes N) \otimes P$ tais que

$$f(x \otimes y, z) = (h \circ g)(x \otimes y, z) \Rightarrow h((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$$

e

$$f'(x, y, z) = (h' \circ g')(x, y, z) \Rightarrow h'(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} (h \circ h')(x \otimes y \otimes z) &= h(h'(x \otimes y \otimes z)) \\ &= h((x \otimes y) \otimes z) \\ &= x \otimes y \otimes z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (h' \circ h)((x \otimes y) \otimes z) &= h'(h((x \otimes y) \otimes z)) \\ &= h'(x \otimes y \otimes z) \\ &= (x \otimes y) \otimes z \end{aligned}$$

Logo, $(M \otimes N) \otimes P$ é isomorfo a $M \otimes N \otimes P$.

De maneira análoga podemos mostrar que $M \otimes (N \otimes P)$ e $M \otimes N \otimes P$ são isomorfos. Portanto, $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes N \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$.

3. Defina a aplicação A-bilinear

$$\begin{aligned} f : \ (M \oplus N) \times P &\to (M \otimes P) \times (N \otimes P) \\ ((m, n), p) &\mapsto (m \otimes p, n \otimes p) \end{aligned}$$

onde $(m, n) \in M \oplus N$ são unicamente definidos como soma direta.

Pela Teorema 3.1, f induz um isomorfismo único

$$\begin{aligned} \overline{f} : \ (M \times N) \otimes P &\to (M \otimes P) \times (N \otimes P) \\ ((m, n) \otimes p) &\mapsto (m \otimes p, n \otimes p) \end{aligned}$$

4. Considere a aplicação A-bilinear

$$\begin{aligned} f : \ A \times M &\to M \\ (a, m) &\mapsto am \end{aligned}$$

Considerando $A \times M = P$, pelo Teorema 3.1, temos um isomorfismo unicamente determinado

$$\begin{array}{rccc} f: & A \otimes M & \to & M \\ & (a, m) & \mapsto & am \end{array}$$

□

3.2 Restrições e Extensão por Escalares

Definição 3.2. Sejam $f : A \to B$ homomorfismo de anéis e N um B-módulo. Então N tem uma estrutura de A-módulo definida da forma: se $a \in A$ e $x \in N$, então ax é definido como $f(a)x$. Este A-módulo é dito ser obtido de N por **restrição por escalares**. Em particular, f define assim uma estrutura de A-módulo em B.

Proposição 3.3. *Suponha que N seja finitamente gerado como B-módulo e que B seja finitamente gerado como A-módulo. Então N é finitamente gerado como A-módulo.*

Demonstração. Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_t$ geradores de N sobre B e $x_1, x_2, \cdots, x_s$ geradores de B como A-módulo. Então $n \in N$ pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{t} b_i y_i$ e cada b_i é escrito como $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j$. Daí,

$$n = \sum_{i=1}^{t} b_i y_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j y_i$$

olhando N por restrições por escalares

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{s} f(a_{ij}) x_j y_i$$

Portanto, n é finitamente gerado como A-módulo. □

Definição 3.3. Seja M um A-módulo. Como vimos, se existir um homomorfismo $f : A \to B$, então B pode ser considerado como um A-módulo e podemos formar o A-módulo $M_B = B \otimes_A M$. Observe que M_B possui uma estrutura de B-módulo da forma

$$b(b' \otimes x) = (bb') \otimes x \, \forall \, b, b' \in B \text{ e } \forall \, x \in M.$$

Diremos que o B-módulo M_B é obtido por **extensão de escalares**.

Proposição 3.4. *Se M é finitamente gerado como A-módulo, então M_B é finitamente gerado como B-módulo.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_t$ geradores de M como A-módulo. Seja $m \in M_B = B \otimes_A M$, então existem $b \in B$ e $x \in M$ tais que

$$\begin{aligned} m &= b \otimes x \\ &= b \otimes (\sum_{i=1}^{t} a_i x_i) \end{aligned}$$

e pelo que foi visto na demonstração do Teorema 3.1

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{t} a_i (b \otimes x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{t} a_i b (1 \otimes x_i) \end{aligned}$$

isto é, $(1 \otimes x_i)$ gera M_B, portanto, M_B é finitamente gerado como B-módulo.

Aqui estamos cometendo um abuso de notação, a saber, os elementos a_i estão sendo identificados como $f(a_i)$, com $f : A \to B$ homomorfismo de anéis, conforme a Definição 3.2. $\square$

3.3 Sequências Exatas

Definição 3.4. Uma sequência de homomorfismos de A-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é dita **exata em** M_i se $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. A sequência é **exata** se é exata em cada M_i.

Em particular, é de imediata verificação que

1. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata se, e somente se, f é injetiva;

2. $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, g é sobrejetiva;

3. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é injetiva, g é sobrejetiva e g induz um isomorfismo de $Coker(f) = M/f(M')$ em M''.

Uma sequência do tipo 3 é chamada de **sequência exata curta**. Note que qualquer sequência exata longa, como na Definição 3.4, pode ser dividida em sequências exatas curtas, onde $N_i = Imf_i = Ker(f_{i+1})$, do tipo:

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow 0$$

para cada i.

Proposição 3.5.

1. *Seja*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \tag{3.9}$$

uma sequência de homomorfismos de A-módulos. Então a sequência 3.9 é exata se, e somente se, para todo A-módulo N a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N) \tag{3.10}$$

é exata.

2. *Seja*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \tag{3.11}$$

uma sequência de homomorfismos de A-módulos. Então a sequência 3.11 é exata se, e somente se, para todo A-módulo M a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N'') \tag{3.12}$$

é exata.

Demonstração. 1. Suponha que a sequência de homomorfismos de A-módulos 3.9 é exata. Para mostrar que 3.10 é exata basta mostrar que $\overline{v}$ é injetiva e que $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$.

Seja $f \in Ker(\overline{v})$, então $\overline{v}(f) = 0$. Mas, $\overline{v}(f) = f \circ v : M \to N$ logo $f \circ v = 0$. Como v é sobrejetiva, por 3.9 ser exata, $v(M) = M''$ logo $f \equiv 0$, isto é, $Ker(\overline{v}) = \{0\}$ o que implica que $\overline{v}$ é injetiva.

$Im(\overline{v}) \subset Ker(\overline{u})$: Seja $f \in Im(\overline{v})$ existe homomorfismo $g : M'' \to N$ tal que $\overline{v}(g) = f = g \circ v$. Temos que $\overline{u}(f) = f \circ u$ substituindo f temos que $\overline{u}(f) = g \circ v \circ u$. Como $Ker(v) = Im(u)$ temos que $v \circ u = 0$, logo $\overline{u}(f) = 0$ o que implica que $f \in Ker(\overline{u})$.

$Ker(\overline{u}) \subset Im(\overline{v})$: Seja $g \in Ker(\overline{u})$ temos que mostrar que existe um homomorfismo $f : M'' \to N$ tal que $g = \overline{v}(f) = f \circ v$.

Dado $m'' \in M''$ como v é sobrejetiva existe $m \in M$ tal que $v(m) = m''$. Defina $f : M'' \to N$ como $f(m'') = g(m)$. Dessa forma, f está bem definida, pois sejam $m_1, m_2 \in M$ tais que $v(m_1) = v(m_2) = m''$ teremos que $v(m_1 - m_2) = 0$ implicando que $(m_1 - m_2) \in Ker(v) = Im(u)$ logo vai existir $m' \in M'$ tal que $u(m') = m_1 - m_2$. Aplicando g teremos

$$g(u(m')) = g(m_1 - m_2) = 0$$

assim, $g(m_1) = g(m_2)$.

Agora, verifiquemos que f é homomorfismo. Seja $m_1'', m_2'' \in M''$ e $a \in A$, então existem m_1, m_2 tais que $v(m_1) = m_1''$, $v(m_2) = m_2''$ Daí, $m_1'' + m_2'' = v(m_1) + v(m_1) = v(m_1 + m_2)$ e $am_1'' = av(m_1) = v(am_1)$. Dessa forma

$$\begin{array}{ccccccc} f(m_1'' + m_2'') & = & g(m_1 + m_2) & = & g(m_1) + g(m_2) & = & f(m_1'') + f(m_2'') \\ f(am_1'') & = & g(am_1'') & = & ag(m_1'') & = & af(m_1'') \end{array}$$

Por outro lado, suponha que a sequência de A-módulos 3.10 é exata. Para mostrar que a sequência 3.9 é exata temos que mostrar que v é sobrejetiva e que $Im(u) = Ker(v)$.

Usaremos: $f : X \to Y$ é sobre se, e somente se, $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ para aplicações $g_1, g_2 : Y \to Z$ implica $g_1 = g_2$.

Sejam os homomorfismos $g_1, g_2 : M'' \to N$ tais que $g_1 \circ v(m'') = g_2(m'') \circ v \, \forall \, m'' \in M''$. Pelo homomorfismo induzido temos que $g_1 \circ v(m'') = \overline{v}(g_1)$ e $g_2 \circ v(m'') = \overline{v}(g_2)$ logo $\overline{v}(g_1) = \overline{v}(g_2)$ e como $\overline{v}$ é injetiva temos que $g_1(m'') = g_2(m'') \, \forall m'' \in M''$. Assim, v é sobrejetiva.

$Im(u) \subset Ker(v)$: Seja $m \in Im(u)$ existe $m' \in M'$ tal que $u(m') = m$. Como $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$, então $\overline{u} \circ \overline{v}(f) = f \circ v \circ u$ para todo homomorfismo $f : M'' \to N$. Tomando $M'' = N, f$ é identidade e $v \circ u(m') = v(m) = 0$, logo $m \in Ker(v)$.

$Ker(v) \subset Im(u)$: Seja $m \in Ker(v), v(m) = 0$. Considere $N = M/Im(u)$ e $\phi : M \to N$ projeção canônica. Daí, $\overline{u}(\phi) = \phi \circ u(m') = \phi(u(m')) = \overline{0}$, $\forall \, m' \in M'$, isso implica que $\phi \in Ker(\overline{u}) = Im(\overline{v})$, logo existe homomorfismo $f : M'' \to N$ tal que $\overline{v}(f) = \phi$.

Como $\overline{v}(f) = f \circ v$, então $\phi(m) = f(v(m)) = \overline{0}$ concluindo que $Ker(v) \subset Ker(\phi)$, e sabemos que $Ker(\phi) \subset Im(u)$, logo $m \in Im(u)$.

2. Suponha que a sequência de homomorfismos de A-módulos 3.11 é exata. Para mostrar que a sequência 3.12 é exata basta mostrar que $\overline{u}$ é injetiva e que $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$.

Sejam $f, g : M \to N' \in Hom(M, N')$ tais que $\overline{u}(f) = \overline{u}(g)$. Pelo homomorfismo induzido temos que $\overline{u}(f(x)) = (u \circ f)(m)$ e $\overline{u}(g)(m) = (u \circ g)(m)$. Logo, $(u \circ f)(m) = (u \circ g)(m)$ e, como u é injetiva, $f(m) = g(m)$ concluindo que $\overline{u}$ é injetiva.

$Im(\overline{u}) \subset Ker(\overline{v})$: Seja $f \in Im(\overline{u})$ existe $g : M \to N'$ homomorfismo tal que $\overline{u}(g) = u \circ g = f$. Substituindo f em $\overline{v}(f) = v \circ f$ teremos $\overline{v}(f) = v \circ u \circ g = 0$ pois $Ker(v) = Im(u)$ logo $\overline{v}(f) = 0$ concluindo que $f \in Ker(\overline{v})$.

$Ker(\overline{v}) \subset Im(\overline{u})$: Seja $f \in Ker(\overline{v})$ então $\overline{v}(f)(m) = 0\ \forall m \in M$. Pelo homomorfismo induzido temos que $\overline{v}(f)(m) = v(f(m))$, logo $f(m) \in Ker(v) = Im(u)$. Daí existe um $n' \in N'$ tal que $u(n') = f(m)$ para cada $m \in M$.

Defina pois,

$$\begin{array}{rccc} g: & M & \to & N' \\ & m & \mapsto & n' \end{array}$$

g está bem definida. De fato, sejam $m_1, m_2 \in M$ tais que $m_1 = m_2$ e $g(m_1) = n'_1$ e $g(m_2) = n'_2$. Temos que $m_1 - m_2 = 0$, daí

$$\begin{aligned} f(m_1 - m_2) &= f(m_1) - f(m_2) \\ &= u(n'_1) - u(n'_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

então $u(n'_1) = u(n'_2) \Rightarrow n'_1 = n'_2 \Rightarrow g(m_1) = g(m_2)$.

Note que g é homomorfismo, pois sejam $m_1, m_2 \in M$ com $g(m_1) = n'_1$, $g(m_2) = n'_2$ e $g(m_1 + m_2) = n'$. Temos que $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = u(n'_1) + u(n'_2) = u(n'_1 + n'_2) \Rightarrow g(m_1 + m_2) = n'_1 + n'_2$. Logo, $g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2)$. E, $f(am_1) = af(m_1) = au(n'_1) = u(an'_1)$. Assim, $g(am_1) = an'_1$.

Logo, $\overline{u}(g(m)) = u(g(m)) = u(n') = f(m)$ concluindo que $f \in Im(\overline{u})$.

Por outro lado, suponha que a sequência 3.12 é exata. Para mostrar que a a sequência 3.11 é exata temos que mostrar que u é injetiva e que $Im(u) = Ker(v)$.

Usaremos: $f : Y \to X$ é injetiva se, e somente se, $f \circ g_1 = f \circ g_2$, para aplicações $g_1, g_2 : Z \to Y$, implica $g_1 = g_2$.

Suponha que existem homomorfismos $g_1, g_2 : M \to N'$ tais que $u \circ g_1 = u \circ g_2$. Pelo homomorfismo induzido temos que $u \circ g_1 = \overline{u}(g_1)$ e $u \circ g_1 = \overline{u}(g_2)$ logo, por $\overline{u}$ ser injetiva, $g_1 = g_2$ concluindo que *injetiva*.

$Im(u) \subset Ker(v)$: Como $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$ e $\overline{v} \circ \overline{u}(f(m)) = v \circ u \circ f(m)$ para toda $f \in Hom(M, N')$. Tome $f = id : N' \to N'$ logo $v \circ u \circ f = v \circ u = 0$, que implica $Im(u) \subset Ker(v)$.

$Ker(v) \subset Im(u)$: Suponha, por absurdo, que existe $n \in Ker(v)$ tal que $n \notin Im(u)$. Logo, $u(n') \neq n$, $\forall n' \in N'$. Assim,

$$v(u(n')) \neq v(n) = 0 \Rightarrow v(u(n')) \neq 0, \ \forall n' \in N'$$

Logo, $\overline{v} \circ \overline{u} \neq 0$ o que é um absurdo pois $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$. Portanto, $Ker(v) \subset Im(u)$. $\square$

Proposição 3.6 (Lema da Serpente)**.** *Seja*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo de homomorfismos de A-módulos com as setas exatas. Então existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Ker(f') \xrightarrow{g_1} Ker(f) \xrightarrow{h_1} Ker(f'') \xrightarrow{d} \cdot \tag{3.13}$$

$$\cdot \xrightarrow{d} Coker(f') \xrightarrow{g_2} Coker(f) \xrightarrow{h_2} Coker(f'') \longrightarrow 0$$

onde g_1 e h_1 são restrições de u e v, e g_2 e h_2 são induzidos por u' e v', respectivamente.

Demonstração. Suponha que o diagrama acima é comutativo com as setas exatas. Para mostrar que sequência 3.13 existe e é exata vamos mostrar que

$$0 \longrightarrow Ker(f') \xrightarrow{g_1} Ker(f) \xrightarrow{h_1} Ker(f'') \tag{3.14}$$

$$Coker(f') \xrightarrow{g_2} Coker(f) \xrightarrow{h_2} Coker(f'') \longrightarrow 0 \tag{3.15}$$

são sequências exatas e que existe

$$d : Ker(f'') \to Coker(f') \tag{3.16}$$

homomorfismo tal que a sequência 3.13 é exata em d.

Para tal, vamos 1.restringir u e v, mostrar que 2.g_1 é injetiva, 3.$Im(g_1) = Ker(h_1)$, 4.definir g_2 e h_2 5.$Im(g_2) = Ker(h_2)$, 6. h_2 é sobrejetiva, 7.definir d, 8. $Im(h_1) = Ker(d)$ e que 9.$Im(d) = Ker(g_2)$.

1. Fazendo $u|_{Ker(f')} = g_1$, note que $g_1(Ker(f')) \subset Ker(f)$. De fato, seja $m' \in Ker(f')$ temos que $g_1(m') = u(m')$ implica, pela comutatividade do diagrama, que $f(g_1(m')) = f(u(m')) = u'(f'(m')) = 0$ logo, $g_1(m') \in Ker(f)$. Daí, $g_1 : Ker(f') \to Ker(f)$.

Da mesma forma, fazendo $v|_{Ker(f)} = h_1$ tome $m \in Ker(f)$. Temos que $h_1(m) = v(m)$ implica $f''(h_1(m)) = f''(v(m)) = v'(f(m)) = 0$. Logo, $h_1 : Ker(f) \to Ker(f'')$.

2. Temos que u é injetiva logo g_1 é injetiva.

3. $Im(g_1) \subset Ker(h_1)$: Seja $m \in Im(g_1)$ existe $m' \in Ker(f')$ tal que $m = g_1(m') = u(m')$. Como $Im(u) = Ker(v)$, temos que $h_1(m) = v(m) = v'(u(m')) = 0$ que implica que $m \in Ker(h_1)$.

$Ker(h_1) \subset Im(g_1)$: Seja $m \in Ker(h_1)$ então $h_1(m) = 0 = v(m)$, como $Ker(v) = Im(u)$ existe $m' \in M'$ tal que $u(m') = m$. E, $m' \in Ker(f')$. De fato, pela comutatividade do diagrama e por $Ker(h_1) \subset Ker(f)$ temos que $0 = f(m) = f(u(m')) = u'(f'(m))$ que implica que $f'(m') \in Ker(u')$. u' é injetiva, daí $Ker(u') = \{0\}$ logo, $f'(m') = 0$.

4. Defina

$$\begin{array}{rccc} g_2 : & N'/Im(f') & \to & N/Im(f) \\ & \overline{n'} & \mapsto & \overline{u'(n')} \end{array}$$

g_2 está bem definida pois, sejam $\overline{n_1'}$ e $\overline{n_2'} \in Coker(f')$ tal que $\overline{n_1'} = \overline{n_2'} \Rightarrow n_1' - n_2' \in Im(f')$ logo existe $m' \in M'$ tal que $f'(m') = n_1' - n_2'$. Pela comutatividade do diagrama $f(u(m')) = u'(f'(m)) = u'(n_1' - n_2') = u'(n_1') - u'(n_2') \Rightarrow u'(n_1') - u'(n_2') \in Im(f)$ logo $\overline{u'(n_1') - u'(n_2')} = \overline{0}$ em $Coker(f') \Rightarrow \overline{u'(n_1')} = \overline{u'(n_2')}$.

Note que g_2 é homomorfismo. Seja $\overline{n'_1}$ e $\overline{n'_2} \in Coker(f')$ e $a \in A$

$$\begin{array}{lrcccccc} i. & g_2(\overline{n'_1}+\overline{n'_2}) & = & g_2(\overline{n'_1+n'_2}) & = & \overline{u'(n_1+n'_1)} & & \\ & & = & \overline{u'(n_1)}+\overline{u'(n_1)} & = & g_2(\overline{n'_1})+g_2(\overline{n'_2}) & & \\ ii. & g_2(a\overline{n'_1}) & = & g_2(\overline{an'_1}) & = & \overline{u'(an_1)} & & \\ & & = & \overline{au'(n_1)} & = & a\overline{u'(n_1)} & = & ag_2(\overline{n'_1}) \end{array}$$

Defina agora,

$$\begin{array}{rccc} h_2: & Coker(f) & \rightarrow & Coker(f'') \\ & \overline{n} & \mapsto & \overline{v'(n)} \end{array}$$

h_2 está bem definida pois, sejam $\overline{n_1} = \overline{n_1} \in Coker(f)$ temos que $n_1 - n_2 \in Im(f)$. Logo, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n_1 - n_2$. Pela comutatividade do diagrama $f''(v(m)) = v'(f(m)) = v'(n_1 - n_2) = v'(n_1) - v(n_2)$ que implica que $v'(n_1) - v(n_2) \in Im(f'')$, ou seja, $\overline{v'(n_1) - v(n_2)} = \overline{0}$ em $Coker(f'')$ logo $\overline{v'(n_1)} = \overline{v(n_2)}$.

A função h_2 é homomorfismo. De fato, sejam $\overline{n_1}$ e $\overline{n_1} \in Coker(f)$ e $a \in A$

$$\begin{array}{lrcccccc} i. & h_2(\overline{n_1}+\overline{n_2}) & = & \overline{v'(n_1+n_2)} & = & \overline{v'(n_1)}+\overline{v'(n_2)} & = & h_2(\overline{n_1})+h_2(\overline{n_2}) \\ ii. & h_2(a\overline{n_1}) & = & h_2(\overline{an_1}) & = & \overline{v'(an_1)} & = & \overline{av'(n_1)} \\ & & = & a\overline{v'(n_1)} & = & ah_2(\overline{n_1}) & & \end{array}$$

5. $Im(g_2) \subset Ker(h_2)$: Seja $\overline{n} \in Im(g_2)$, existe $\overline{n'} \in Coker(f')$ tal que $g_2(\overline{n'}) = \overline{n} = \overline{u'(n')}$, como $Im(u') = Ker(v')$, temos que $h_2(\overline{u'(n')}) = \overline{v'(u'(n'))} = \overline{0}$ em $Coker(f'')$, logo $\overline{n} \in Ker(h_2)$.

$Ker(h_2) \subset Im(g_2)$: Seja $\overline{n} \in Ker(h_2)$, $h_2(\overline{n}) = \overline{v'(n)} = \overline{0}$ em $Coker(f'')$, logo $v'(n) \in Im(f'')$ que implica que exsite $m'' \in M''$ tal que $f''(m'') = v'(n)$. Sabemos que v é sobrejetiva, logo para cada $m'' \in M''$ existe $m \in M$ tal que $v(m) = m''$. Daí, $v'(f(m)) = f''(v(m)) = f''(m'') = v'(n)$ implica $v'(f(m)) = v'(n)$, logo $v'(n - f(m)) = 0$. Isto é, $n - f(m) \in Ker(v') = Im(u')$ logo existe $n' \in N'$ tal que $u'(n') = n - f(m)$. Assim, $g_2(\overline{n'}) = \overline{u'(n')} = \overline{n - f(m)} = \overline{n} - \overline{f(m)} = \overline{n}$ logo, $\overline{n} \in Im(g_2)$.

6. Seja $\overline{n''} \in Coker(f'')$. Como v' é sobrejetiva para cada $n'' \in N''$ existe $n \in N$ tal que $v'(n) = n''$ logo $\overline{n''} = \overline{v'(n)} = h_2(\overline{n})$, concluindo que h_2 é sobrejetiva.

7. Defina

$$\begin{array}{rccc} d: & Ker(f'') & \rightarrow & Coker(f') \\ & m'' & \mapsto & \overline{n'} \end{array}$$

de forma que, seja $m'' \in Ker(f'') \subset M''$ existe $m \in M$ tal que $m'' = v(m)$, por v ser sobrejetiva. Pela comutatividade do diagrama temos que $v'(f(m)) = f''(v(m)) = 0$ logo $f(m) \in Ker(v') = Im(u')$. Como u' é injetivo, existe único $n' \in N'$ tal que $f(m) = u'(n')$.

Sejam $m_1'' \in Ker(f'')$ logo existe $m_1 \in M$ tal que $v(m_1) = m_1''$ com $v'(f(m_1)) = f''(v(m_1)) = 0 \Rightarrow f(m_1) = u'(n_1')$ para único $n_1' \in N'$. Assim, $u'(n_1' - n_2') = f(m_1) - f(m_2) = f(m_1 - m_2)$. Daí, seja $v(m_2) = m_1''$ segue que $v(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in Ker(v) = Im(u)$ e sendo u injetiva existe único $m' \in M'$ tal que $u(m') = m_1 - m_2$. Daí, $u'(n_1' - n_2') = u'(n_1') - u'(n_2') = f(m_1) - f(m_2) = f(m_1 - m_2) = f(u(m')) = u'(f'(m')) \Rightarrow u'(n_1' - n_2') = u'(f'(m')) \Rightarrow u'(n_1' - n_2' - f'(m')) = 0$ logo $n_1' - n_2' - f'(m') \in Ker(u')$, e u' é injetiva, logo $n_1' - n_2' - f'(m') = 0 \Rightarrow n_1' - n_2' = f'(m') \Rightarrow n_1' - n_2' \in Im(f')$. Dessa forma, $\overline{n_1' - n_2'} = \overline{0}$ em $Coker(f')$, concluindo que $\overline{n_1'} = \overline{n_1'}$.

Mostraremos que d é homomorfismo: sejam $m_1'', m_2'' \in Ker(f'')$ e $a \in A$ tais que $d(m_1'') = \overline{n_1'}$, $d(m_2'') = \overline{n_1'}$ e $d(am_1'') = \overline{n'}$.Logo, existem $m_1, m_2, m_3 \in M$ tais que $v(m_1) = m_1'', v(m_2) = m_2'', v(m_3) = am_1''$ com $f(m_1) = u'(n_1')$, $f(m_2) = u'(n_2')$ e $f(m_3) = u'(n')$ para únicos $n_1', n_2', n' \in N'$.

i. Note que $f''(m_1'' + m_2'') = f''(v(m_1 + m_2)) = v'(f(m_1 + m_2)) \Rightarrow f(m_1 + m_2) \in Ker(v') = Im(u') \Rightarrow$ existe n_3' tal que $f(m_1 + m_2) = u'(n_3')$. Logo, $d(m_1' + m_2') = u'(n_3')$. Mas, $u'(n_3') = f(m_1+m_2)) = f(m_1)+f(m_2) = u'(n_1')+u'(n_2') = u(n_1'+n_2') \Rightarrow n_3' = n_1'+n_2'$, pois u é injetiva. Assim, $\overline{n_3'} = \overline{n_1' + n_2'} \Rightarrow d(m_1' + m_2') = d(m_1') + d(m_2')$.

ii. Note que, $v(am_1) = av(m_1) = am_1'' = v(m_3) \Rightarrow v(am_1 - m_3) = 0 \Rightarrow am_1 - m_3 \in Ker(v) = Im(u)$ logo existe $m' \in M'$ tal que $u(m') = am_1 - m_3$. Daí, $u'(an_1' - n') = au'(n_1') - u'(n') = af(m_1) - f(m_3) = f(am_1 - m_3) = f(u(m'))$ e pela comutatividade do diagrama $f(u(m')) = u'(f'(m'))$ teremos que $u'(an_1' - n') = u'(f'(m'))$. Como u' é injetiva, segue que $an_1' - n' = f'(m')$, isto é, $an_1' - n' \in Im(f')$. Logo $\overline{an_1' - n'} = \overline{0} \Rightarrow \overline{an_1'} = \overline{n'}$, concluindo que $ad(m_1'') = d(am_1'')$.

8. $Im(h_1) \subset Ker(d)$: Seja $m'' \in Im(h_1)$ exite $m \in Ker(f)$ tal que $h_1(m) = v(m) = m''$. Como $f(m) = 0 = u'(n')$, segue que $n' = 0$ pois u' é injetiva. Assim, $d(m'') = \overline{0}$ logo $m'' \in Ker(d)$.

$Ker(d) \subset Im(h_1)$: Seja $m'' \in ker(d)$, $d(m'') = \overline{n'} = \overline{0}$ com $v(m) = m''$ e $u'(n') =$

$f(m)$ para algum $m \in M$. Como $\overline{n'} = \overline{0}$ então $n' \in Im(f')$, logo existe $m' \in M'$ tal que $f'(m') = n'$. Daí, $f(m) = u'(n') = u'(f'(m')) = f(u(m')) \Rightarrow f(m - u(m')) = 0 \Rightarrow m - u(m') \in Ker(f)$. Assim, $h_1(m - u(m')) = v(m - u(m)) = v(m) - v(u(m')) = v(m) = m''$ logo $m'' \in Im(h_1)$.

9. $Im(d) \subset Ker(g_2)$: Seja $\overline{n'} \in Im(d)$ existe $m'' \in Ker(f'')$ tal que $d(m'') = \overline{n'}$ com $v(m) = m''$ e $f(m) = u'(n')$ para algum $m \in M$. Como $u'(n') \in Im(f)$ logo, $g_2(n') = \overline{u'(n')} = \overline{0}$ concluindo que $n' \in Ker(g_2)$.

$Ker(g_2) \subset Im(d)$: Seja $\overline{n'} \in Ker(g_2)$ logo $g_2(\overline{n'}) = \overline{u'(n')} = \overline{0}$ logo $u'(n') \in Im(f)$, dessa forma existe $m \in M$ tal que $f(m) = u'(n')$. Note que, $f''(v(m)) = v'(f(m)) = v'(u'(m')) = 0$, pois $Im(u') = Ker(v')$, logo $v(m) = m'' \in Ker(f'')$. Daí, $d(m'') = \overline{n'}$ concluindo que $n' \in Im(d)$. $\square$

3.3.1 Propriedade Exata do Produto Tensorial

Seja $f : M \times N \to P$ uma função A-bilinear. Para cada $m \in M$ fixado defina a aplicação $f_m : N \to P$ dada por $f_m(n) = f(m,n)$, que será A-linear pois f é A-linear em N. Dessa forma, qualquer aplicação A-bilinear de $M \times N$ em P, origina uma aplicação A-linear de M em $Hom(N, P)$.

Reciprocamente, qualquer $\phi : M \to Hom_A(N, P)$ apliacação A-linear define, a saber, $(m, n) \mapsto \phi(m)n$. Portanto, o conjunto $S = \{f : M \times N \to P : f \text{ é } A\text{-bilinear}\}$ está em correspondência com $Hom(M, Hom(N, P))$. Por outro lado, pelo Teorema 3.1, S está em correspondência com $Hom(M \otimes N, P)$.

Portanto, temos um isomorfismo canônico

$$Hom(M \otimes N, P) \simeq Hom(M, Hom(N, P))$$

Proposição 3.7. *Sejam*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

uma sequência exata de homomorfismos de A-módulos e N um A-módulo qualquer. Então a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow 0 \tag{3.18}$$

é exata.

Demonstração. Suponha que a sequência 3.17 é exata. Seja P um A-módulo qualquer, pela Proposição 3.51

$$0 \to Hom(M', P) \to Hom(M, P) \to Hom(M'', P)$$

é exata, que implica

$$0 \to Hom(N, Hom(M', P)) \to Hom(N, Hom(M, P)) \to Hom(N, Hom(M'', P))$$

é exata, pela Proposição 3.52.

Mas, $Hom(N, Hom(M', P)) \simeq Hom(M' \otimes N, P)$, $Hom(N, Hom(M, P)) \simeq Hom(M \otimes N, P)$ e $Hom(N, Hom(M'', P)) \simeq Hom(M'' \otimes N, P)$.

Daí, a sequência

$$0 \to Hom(M' \otimes N, P) \to Hom(M \otimes N, P) \to Hom(M'' \otimes N, P)$$

é exata. Consequentemente a sequência 3.3.1

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

é exata pela Proposição 3.5 parte 1.

□

Referências

1 ATIYAH, M. F. MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company. 1969.

2 GARCIA, Arnaldo. LEQUAIN, Yves. *Elementos de álgebra.* 4ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2006.

3 GONÇALVES, Adilson. *Introdução à Álgebra.* Projeto Euclides. IMPA.

4 HUNGERFORD, T. W. *Abstract algebra: an introduction.* 2nd Ed. Saunders College Publ.

5 LAM, T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings.* Springer - Verlang. 1991.

6 MARTINS, Maria Eugênia. *Álegra Comutativa: Notas de Aula.* USP. São Paulo. 2014.

7 SOUZA, Lucas Dodl e. *Sequências Exatas e Aplicações: o Lema da Cobra.* 2017. Trabalho de Conclusão de Cuso (Licenciado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianopólis. 2017.

8 VELOSO, P. M. Colombo, J. *Introdução à Álgebra Não Comutativa via Exemplos.* 3º Colóquio da Região Nordeste. 2014.